Über die Teilräume affin zusammenhängender Räume

Von Hans Reichardt in Berlin

I.

Ein affiner Zusammenhang, der in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M gegeben ist, induziert in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit T noch keinen affinen Zusammenhang. Es wird sich aber im Folgenden zeigen, daß es genügt, in jedem Punkt P der Teilmannigfaltigkeit T dem n-dimensionalen lokalen Vektorraum $\mathfrak{V}$ von M irgendeine direkte Zerlegung vorzuschreiben, um eine Reihe von Sätzen zu erhalten, die als Verallgemeinerungen des Gaußschen Theorema egregium, der Formeln von Codazzi-Mainardi und der Formeln von Bianchi erscheinen.

Zur Behandlung solcher Probleme pflegt man zwei Methoden von Cartan zu benutzen, nämlich den Kalkül der alternierenden Differentialformen (deren Koordinaten auch Tensoren sein können) und die Methode des repère mobile, des beweglichen n-Beins. Während der große Vorteil des genannten Kalküls in der Unabhängigkeit von der Wahl der Parameterdarstellungen der Mannigfaltigkeit und ihres Teilraumes besteht, hat die Methode des repère mobile wohl den Vorteil einer direkten Anwendbarkeit des Kalküls der Differentialformen, aber auch den Nachteil, daß das repère trop mobile ist, da es mit den Punkten der Teilmannigfaltigkeit i. a. nicht invariant verbunden ist. Es wird daher befriedigender sein, den invarianten Gehalt dieser Methode von vornherein an die Spitze zu stellen, und zwar wird sich zeigen, daß dieser Gehalt in unserem Falle ganz einfach auf dem Prinzip beruht, alle auftretenden Differentiationen von Tensorfeldern über den lokalen Vektorraum $\mathfrak{V}$ von M, die nur auf T definiert sind, gemäß der gegebenen direkten Zerlegung von $\mathfrak{V}$ aufzuspalten. Die oben genannten Verallgemeinerungen der klassischen Sätze werden sich dann ganz von selbst ergeben.

II.

Es sei P ein Punkt der Teilmannigfaltigkeit T des gegebenen affin zusammenhängenden Raumes M. Die Gebilde, die von Cartan als Differentialformen mit tensoriellen Koordinaten aufgefaßt werden, möchte ich hier lieber als Tensoren betrachten, deren Koordinaten alternierende Differentialformen sind; und zwar handelt es sich um Tensoren aus beliebigen tensoriellen Produkträumen von $\mathfrak{V}$ und seinem dualen Raum $\mathfrak{V}^*$, wobei $\mathfrak{V}$ der lokale Vektorraum von M (nicht von T!) im Punkte P ist, während die Koordinaten alternierende Differentialformen über T sind. Für solche Tensoren ist nun eine Multiplikation $\textcircled{\scriptsize\wedge}$ definiert, die durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, wie man durch Übergang zu Basisdarstellungen ohne weiteres verifizieren kann:

1. Für gewöhnliche Tensoren A_1, A_2, d.h. für solche, deren Koordinaten Ortsfunktionen auf T sind, ist
$$\mathsf{A}_1 \textcircled{\scriptsize\wedge} \mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_1 \otimes \mathsf{A}_2 .$$

2. Für alternierende Differentialformen ω_1 und ω_2 ist
$$\omega_1 \textcircled{\scriptsize\wedge} \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 .$$

3. Ist A ein gewöhnlicher Tensor, ω eine alternierende Differentialform, so ist
$$\mathsf{A} \textcircled{\scriptsize\wedge} \omega = \omega \textcircled{\scriptsize\wedge} \mathsf{A} .$$

Im Folgenden wird für $\mathsf{A} \textcircled{\scriptsize\wedge} \omega$ meist kurz $\mathsf{A}\omega$ geschrieben.

Weiter ist für solche Tensoren Ω eine alternierende Differentiation $d \wedge \Omega$ definiert, die sich durch folgende Eigenschaften charakterisieren läßt, wie man wieder durch Übergang zu einer Basisdarstellung ohne weiteres verifizieren kann:

1. Für einen gewöhnlichen Tensor A ist $d \wedge \mathsf{A} = d\,\mathsf{A}$.

2. Für eine alternierende Differentialform ω ist $d \wedge \omega$ das übliche alternierende Differential.

3. Für beliebige Tensoren Ω_1 und Ω_2 gilt die Produktregel
$$d \wedge (\Omega_1 \textcircled{\scriptsize\wedge} \Omega_2) = (d \wedge \Omega_1) \textcircled{\scriptsize\wedge} \Omega_2 + (-1)^{p_1}\, \Omega_1 \textcircled{\scriptsize\wedge} d \wedge \Omega_2 ,$$
wobei p_1 die Stufenzahl der alternierenden Differentialformen ist, die als Koordinaten von Ω_1 auftreten (es wird hier immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die Koordinaten eines Tensors lauter gleichstufige alternierende Differentialformen sind).

Mit diesen beiden Operationen lassen sich Windungs- und Krümmungstensor von M folgendermaßen definieren: Der Windungstensor ist gegeben durch
$$\mathfrak{t} = d \wedge dP$$

(er braucht hier nicht als 0 vorausgesetzt zu werden). Ist weiter $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Vektor und ω eine alternierende Differentialform, so ist

$$\begin{aligned} d \wedge d \wedge (\mathfrak{a} \textcircled{\wedge} \omega) &= d \wedge \big((d \wedge \mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega + (-1)^p \mathfrak{a} \textcircled{\wedge} d \wedge \omega\big) \\ &= (d \wedge d \wedge \mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega + (-1)^{p+1} (d \wedge \mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega \\ &\quad + (-1)^p (d \wedge \mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega + \mathfrak{a} \textcircled{\wedge} d \wedge d \wedge \omega \end{aligned}$$

(p Stufe der Koordinaten von $\mathfrak{a}$),

also gilt

$$d \wedge d \wedge (\mathfrak{a} \textcircled{\wedge} \omega) = (d \wedge d \wedge \mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega .$$

Da die Operation $\mathsf{K}\mathfrak{a} = d \wedge d \wedge \mathfrak{a}$ außerdem offenbar additiv ist, hat sie daher den Charakter einer linearen Abbildung, deren Koordinaten zweistufige alternierende Differentialformen sind, wenn wir unter einer linearen Abbildung $\varLambda$ von $\mathfrak{V}$ eine solche verstehen wollen, die erstens additiv und zweitens in folgendem alternierenden Sinne homogen ist:

$$\varLambda(\mathfrak{a} \textcircled{\wedge} \omega) = (\varLambda\mathfrak{a}) \textcircled{\wedge} \omega .$$

Die Abbildung K, der Krümmungstensor, ist also ein Endomorphismus von $\mathfrak{V}$, dessen Koordinaten zweistufig sind.

Das Bild $\varLambda\mathfrak{a}$ kann man als Verjüngung Y von $\varLambda \textcircled{\wedge} \mathfrak{a}$ bezüglich des 2. und 3. Faktors darstellen, wobei $\varLambda$ als Element von $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^*$ aufgefaßt wird und demnach $\varLambda \textcircled{\wedge} \mathfrak{a}$ Element von $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V}$ ist:

$$\varLambda\mathfrak{a} = \overset{23}{\mathsf{Y}}\varLambda \textcircled{\wedge} \mathfrak{a} .$$

Daraufhin überzeugt man sich leicht, daß das Produkt zweier solcher Abbildungen $\varLambda_1$ und $\varLambda_2$, das wie üblich durch Nacheinanderausführung der Abbildungen definiert wird, dargestellt werden kann als

$$\varLambda_2\varLambda_1 = \overset{23}{\mathsf{Y}}\varLambda_2 \textcircled{\wedge} \varLambda_1 ,$$

d.h. durch Verjüngung des Elementes $\varLambda_2 \textcircled{\wedge} \varLambda_1$ von $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^* \otimes \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^*$ bezüglich des 2. und 3. Faktors[1]).

Die Verjüngung ist mit der alternierenden Differentiation vertauschbar, wie man leicht nachprüft, indem man den allgemeinen Fall in der üblichen Weise auf den Spezialfall zurückführt:

$$d \wedge \mathsf{Y}\mathfrak{u} \textcircled{\wedge} \mathfrak{a} = \mathsf{Y} d \wedge (\mathfrak{u} \textcircled{\wedge} \mathfrak{a}),$$

---

[1]) Für diese Art von Tensorrechnung vgl. etwa meine „Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung", Berlin 1957.

wobei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}$ Elemente von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ sind, und die Gültigkeit dieser Formel dadurch nachweist, daß man $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}$ durch Koordinaten darstellt. Speziell folgen dann die Regeln

$$d \wedge (\Lambda \mathfrak{a}) = (d \wedge \Lambda)\, \mathfrak{a} = (-1)^p \Lambda (d \wedge \mathfrak{a}),$$
$$d \wedge (\Lambda \Lambda_1) = (d \wedge \Lambda)\Lambda_1 + (-1)^p \Lambda (d \wedge \Lambda_1),$$

wobei p die Stufenzahl der Koordinaten von Λ ist.

III.

Es sei jetzt in den Punkten P der Teilmannigfaltigkeit T eine direkte Aufspaltung des lokalen Vektorraumes $\mathfrak{B}$ von M gegeben:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}_k,$$

und es seien $\mathsf{E}_1, \ldots, \mathsf{E}_k$ die Endomorphismen von $\mathfrak{B}$, mit denen für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{a} = \mathsf{E}_1 \mathfrak{a} + \cdots + \mathsf{E}_k \mathfrak{a} \text{ mit } \mathsf{E}_\varkappa \mathfrak{a} \in \mathfrak{B}_\varkappa .$$

Die $\mathsf{E}_\varkappa$ sind also die Projektionen von $\mathfrak{B}$ in die Summanden $\mathfrak{B}_\varkappa$. Das interne alternierende Differential in $\mathfrak{B}_\varkappa$ wird nun folgendermaßen definiert: Für $\mathfrak{a}_\varkappa \in \mathfrak{B}_\varkappa$ sei

$$D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa = \mathsf{E}_\varkappa d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa .$$

Die Additivität dieser Bildung ist klar; Differential wird sie genannt, weil die folgende Produktregel gilt:

$$D \wedge (\mathfrak{a}_\varkappa \wedge \omega) = (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega + (-1)^p\, \mathfrak{a}_\varkappa \wedge d \wedge \omega,$$

wobei p die Stufe der Koordinaten von $\mathfrak{a}_\varkappa$ ist, und intern heißt sie, weil dieses Differential eines Vektors von $\mathfrak{B}_\varkappa$ wieder in $\mathfrak{B}_\varkappa$ liegt, was i. a. für $d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa$ nicht der Fall ist. Die Produktregel läßt sich folgendermaßen beweisen:

$$\begin{aligned} D \wedge (\mathfrak{a}_\varkappa \wedge \omega) &= \mathsf{E}_\varkappa d \wedge (\mathfrak{a}_\varkappa \wedge \omega) \\ &= \mathsf{E}_\varkappa ((d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega + (-1)^p\, \mathfrak{a}_\varkappa \wedge d \wedge \omega) \\ &= (\mathsf{E}_\varkappa d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega + (-1)^p\, \mathsf{E}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa \wedge d \wedge \omega \\ &= (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega + (-1)^p \mathfrak{a}_\varkappa \wedge d \wedge \omega . \end{aligned}$$

Die anderen Komponenten von $d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa$ dagegen sind lineare Bilder von $\mathfrak{a}_\varkappa$ im obigen erweiterten Sinne; für $\lambda \neq \varkappa$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_\lambda d \wedge (\mathfrak{a}_\varkappa \wedge \omega) &= \mathsf{E}_\lambda \big((d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega + (-1)^p \mathfrak{a}_\varkappa \wedge d \wedge \omega\big) \\ &= (\mathsf{E}_\lambda d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega . \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\mathsf{E}_\lambda d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa = \Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa,$$

so ist $\Omega_{\lambda\varkappa}$, da ja außerdem die Additivität dieses Operators klar ist und

$$\Omega_{\lambda\varkappa}(\mathfrak{a}_\varkappa \wedge \omega) = (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) \wedge \omega$$

gilt, eine lineare Abbildung von $\mathfrak{V}_\varkappa$ in $\mathfrak{V}_\lambda$.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, diese Abbildung durch die zusätzliche Festsetzung

$$\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{a}_\mu \in \mathfrak{V}_\mu \quad \text{und} \quad \mu \neq \varkappa$$

zu einem Endomorphismus von $\mathfrak{V}$, genauer gesagt, zu einer linearen Abbildung von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{V}_\lambda$, zu erweitern. Die Stufe der Koordinaten von $\Omega_{\lambda\varkappa}$ ist 1.

Zu jedem Summanden $\mathfrak{V}_\varkappa$ gehört jetzt in folgender Weise ein Windungstensor $\mathfrak{t}_\varkappa$ und ein Krümmungstensor $\mathsf{K}_\varkappa$:

$$\mathfrak{t}_\varkappa = D \wedge \mathsf{E}_\varkappa\, dP.$$

Wie oben zeigt man leicht, daß $D \wedge D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa$ linear von $\mathfrak{a}_\varkappa$ abhängt. Dieser Endomorphismus von $\mathfrak{V}_\varkappa$ wird als $\mathsf{K}_\varkappa$ definiert, nachdem er noch in der trivialen Weise zu einem Endomorphismus von $\mathfrak{V}$, genauer gesagt, auf eine lineare Abbildung von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{V}_\varkappa$, erweitert ist. Der Krümmungstensor $\mathsf{K}_\varkappa$ ist also charakterisiert durch

$$\mathsf{K}_\varkappa\mathfrak{a}_\varkappa = D \wedge D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa,$$
$$\mathsf{K}_\varkappa\mathfrak{a}_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa.$$

Die Windung $\mathfrak{t}$ von M zerfällt nun entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{V}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= d \wedge dP \\ &= d \wedge \sum_\varkappa d_\varkappa P \quad \text{mit} \quad d_\varkappa P = \mathsf{E}_\varkappa\, dP, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \sum d \wedge d_\varkappa P \\ &= \sum_\varkappa \Big(D \wedge d_\varkappa P + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Omega_{\lambda\varkappa} d_\varkappa P\Big), \end{aligned}$$

und daher gilt, da man ja für $\Omega_{\lambda\varkappa} d_\varkappa P$ auch $\Omega_{\lambda\varkappa}\, dP$ schreiben kann,

$$\mathfrak{t} = \sum_\varkappa \mathfrak{t}_\varkappa + \sum_{\varkappa \neq \lambda}\sum \Omega_{\lambda\varkappa}\, dP.$$

Im klassischen Fall (T eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum M, $\mathfrak{V}_1$ der tangentiale, $\mathfrak{V}_2$ der normale Vektorraum) ergeben sich $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_\varkappa$ zu 0, und die ganze Formel reduziert sich auf die Symmetrieeigenschaft eines gewissen Tensors aus $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_1$, die die Grundlage für die Theorie der Hauptkrümmungen abgibt.

Eine entsprechende Zerlegung wird nun für $\mathsf{K}\mathfrak{a}_\varkappa$ vorgenommen:

$$\begin{aligned}\mathsf{K}\mathfrak{a}_\varkappa &= d \wedge d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa \\ &= d \wedge (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) \\ &= d \wedge D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} d \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) \\ &= D \wedge D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Omega_{\lambda\varkappa}(D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \\ &\quad + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Big(D \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) + \sum_{\mu \neq \lambda} \Omega_{\mu\lambda}\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa\Big).\end{aligned}$$

Nun ist auf Grund der obigen Regeln und Festsetzungen

$$\begin{aligned}D \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) &= \mathsf{E}_\lambda d \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) \\ &= \mathsf{E}_\lambda\big((d \wedge \Omega_{\lambda\varkappa})\,\mathfrak{a}_\varkappa - \Omega_{\lambda\varkappa}(d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa)\big).\end{aligned}$$

Projiziert man $d \wedge \Omega_{\lambda\varkappa}$ mittels des Kronecker-Produktes $\mathsf{E}_\lambda \otimes \mathsf{E}_\varkappa^T$ in den Raum $\mathfrak{B}_\lambda \otimes \mathfrak{B}_\varkappa^*$, so erhält man das interne alternierende Differential von $\Omega_{\lambda\varkappa}$:

$$(\mathsf{E}_\lambda \otimes \mathsf{E}_\varkappa^T)\, d \wedge \Omega_{\lambda\varkappa} = D \wedge \Omega_{\lambda\varkappa},$$

und es folgt nun weiter

$$D \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa) = (D \wedge \Omega_{\lambda\varkappa})\,\mathfrak{a}_\varkappa - \Omega_{\lambda\varkappa}(D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa)$$

und damit schließlich

$$\mathsf{K}\mathfrak{a}_\varkappa = \mathsf{K}_\varkappa\mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} (D \wedge \Omega_{\lambda\varkappa})\,\mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa}\ \sum_{\mu \neq \lambda} \Omega_{\mu\lambda}\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa.$$

Diese Gleichungen addiere man nun alle zueinander unter Spezialisierung von $\mathfrak{a}_\varkappa$ auf $\mathsf{E}_\varkappa\mathfrak{a}$. Aus der so entstehenden Gleichung folgt dann schließlich die gesuchte Aufspaltung des Krümmungstensors von M:

$$\mathsf{K} = \sum_\varkappa \mathsf{K}_\varkappa + \sum_{\varkappa \neq \lambda}\sum D \wedge \Omega_{\varkappa\lambda} + \sum_{\varkappa \neq \lambda \neq \mu}\sum\sum \Omega_{\varkappa\lambda}\Omega_{\lambda\mu}.$$

Diese Gleichung enthält nun gleichzeitig die Verallgemeinerung des Theorema egregium und der Formeln von CODAZZI-MAINARDI, und zwar erhält man eine Serie von Formeln, die dem Theorema egregium entsprechen, wenn man die zu $\mathfrak{B}_\varkappa \otimes \mathfrak{B}_\varkappa^*$ gehörende Komponente von K nimmt:

$$(\mathsf{E}_\varkappa \otimes \mathsf{E}_\varkappa^T)\ \mathsf{K} = \mathsf{K}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Omega_{\varkappa\lambda}\Omega_{\lambda\varkappa}.$$

Im klassischen Fall ist $\mathsf{K} = 0$, K_1 reduziert sich im wesentlichen auf das Gaußsche Krümmungsmaß, weiter ist $\mathsf{K}_2 = 0$, und $\Omega_{12}\Omega_{21}$ liefert die Abbildung der Flächenelemente der Fläche auf die des sphärischen Bildes.

Nimmt man die übrigen, zu $\mathfrak{B}_\varkappa \otimes \mathfrak{B}_\lambda^*$ gehörenden Komponenten von K, so bekommt man eine weitere Serie von Formeln, die die von Codazzi-Mainardi verallgemeinern:

$$(\mathsf{E}_\varkappa \otimes \mathsf{E}_\lambda^*)\ \mathsf{K} = D \wedge \Omega_{\varkappa\lambda} + \sum_{\mu \neq \varkappa, \lambda} \Omega_{\varkappa\mu}\Omega_{\mu\lambda} \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda .$$

Im klassischen Fall reduzieren sich diese Formeln im wesentlichen auf $D \wedge \Omega_{12} = 0$.

Weitere Serien von Gleichungen, die kein Analogon in der klassischen Theorie haben, aber als Verallgemeinerungen einer bekannten Symmetrieeigenschaft des Krümmungstensors und der Gleichungen von Bianchi anzusehen sind, erhält man durch interne Differentiation des Windungs- und Krümmungstensors. Es ist nämlich auf Grund ähnlicher Betrachtungen, wie sie oben auf $D \wedge (\Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa)$ angewendet wurden,

$$\begin{aligned} D \wedge \mathfrak{t}_\varkappa &= D \wedge D \wedge \mathsf{E}_\varkappa\, dP \\ &= \mathsf{K}_\varkappa \mathsf{E}_\varkappa\, dP \\ &= \mathsf{K}_\varkappa\, dP, \end{aligned}$$

also

$$D \wedge \mathfrak{t}_\varkappa = \mathsf{K}_\varkappa\, dP,$$

sowie

$$D \wedge (\mathsf{K}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa) = (D \wedge \mathsf{K}_\varkappa)\, \mathfrak{a}_\varkappa + \mathsf{K}_\varkappa (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} D \wedge (\mathsf{K}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa) &= D \wedge (D \wedge D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \\ &= D \wedge D \wedge (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa) \\ &= \mathsf{K}_\varkappa (D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider Ergebnisse liefert $(D \wedge \mathsf{K}_\varkappa)\, \mathfrak{a}_\varkappa = 0$ für jedes $\mathfrak{a}_\varkappa$, und daraus folgt schließlich

$$D \wedge \mathsf{K}_\varkappa = 0 .$$

Es sei übrigens noch darauf hingewiesen, daß sich die Abbildungen $\Omega_{\lambda\varkappa}$ als Komponenten der $d\mathsf{E}_\varkappa$ auffassen lassen. Aus $\mathsf{E}_\varkappa \mathfrak{a}_\varkappa = \mathfrak{a}_\varkappa$ und $\mathsf{E}_\varkappa \mathfrak{a}_\lambda = 0$ folgt nämlich durch alternierende Differentiation

$$\begin{aligned} (d\mathsf{E}_\varkappa)\, \mathfrak{a}_\varkappa + \mathsf{E}_\varkappa d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa &= d \wedge \mathfrak{a}_\varkappa \\ &= D \wedge \mathfrak{a}_\varkappa + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa , \\ (d\mathsf{E}_\varkappa)\, \mathfrak{a}_\lambda + \mathsf{E}_\varkappa d \wedge \mathfrak{a}_\lambda &= 0, \end{aligned}$$

also

$$(d\,\mathsf{E}_\varkappa)\,\mathfrak{a}_\varkappa = \sum_\lambda \Omega_{\lambda\varkappa}\mathfrak{a}_\varkappa,$$

$$(d\,\mathsf{E}_\varkappa)\,\mathfrak{a}_\lambda = -\Omega_{\varkappa\lambda}\mathfrak{a}_\lambda.$$

Da diese Gleichungen für beliebige $\mathfrak{a}_\varkappa$, $\mathfrak{a}_\lambda$ gelten, folgt daraus

$$d\,\mathsf{E}_\varkappa = \sum_{\lambda \neq \varkappa} (\Omega_{\lambda\varkappa} - \Omega_{\varkappa\lambda}).$$

Durch Übergang zu den einzelnen Komponenten ergibt sich schließlich etwas mehr als behauptet, nämlich

$$\begin{aligned} D\,\mathsf{E}_\varkappa &= 0, \\ (\mathsf{E}_\lambda \otimes \mathsf{E}_\varkappa^T)\,d\,\mathsf{E}_\varkappa &= \Omega_{\lambda\varkappa}, \\ (\mathsf{E}_\varkappa \otimes \mathsf{E}_\lambda^T)\,d\,\mathsf{E}_\lambda &= -\Omega_{\varkappa\lambda}, \\ (\mathsf{E}_\lambda \otimes \mathsf{E}_\mu^T)\,d\,\mathsf{E}_\varkappa &= 0 \qquad \text{für} \quad \lambda \neq \varkappa,\ \mu \neq \varkappa. \end{aligned} \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

IV.

Als Beispiel betrachten wir die Flächentheorie des 3-dimensionalen äquiaffinen Raumes. Hier handelt es sich zunächst darum, in jedem Flächenpunkt eine ausgezeichnete nicht tangentiale Richtung, die Affinnormalenrichtung, zu finden. Es gelingt das auf Grund der Betrachtungen der aus der Gaußschen Flächentheorie bekannten zweiten Fundamentalform, die noch mit einem äquiaffine Invarianz erzeugenden Faktor versehen wird. Anwendung des in I.—II. dargestellten Apparates auf den tangentialen Vektorraum $\mathfrak{V}_1$ und den Raum $\mathfrak{V}_2$ der Affinnormalen liefert dann die Grundformeln dieser Flächentheorie[2]).

Zur Festlegung einer ausgezeichneten Richtung braucht man aber nicht eine ganze quadratische Form, vielmehr genügt eine willkürlich vorgeschriebene Metrik für die tangentialen Flächenelemente, oder, was in der äquiaffinen Geometrie auf das gleiche herauskommt, die Festlegung eines tangentialen Kovektors $\mathfrak{u}$ in jedem Flächenpunkt P. Dann läßt sich nämlich folgendes äquiaffines Analogon zum sphärischen Bild konstruieren: Man zeichne einen Punkt O im Raum aus und betrachte die Einhüllende der durch $\langle \mathfrak{u}, O\tilde{P}\rangle = 1$ definierten Ebenen. Die Enveloppengleichung lautet $\langle d\mathfrak{u}, O\tilde{P}\rangle = 0$. Sind u, v Parameter auf der Fläche, so ist die Enveloppenbedingung äquivalent mit den Gleichungen

$$\left\langle \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u}, O\tilde{P}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v}, O\tilde{P}\right\rangle = 0,$$

---

[2]) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Berlin 1923.

also ist $O\tilde{P}$ parallel zur dualen Ergänzung des Bikovektors $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} d\mathfrak{u} \circledwedge d\mathfrak{u} &= \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v} dv\right) \circledwedge \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v} dv\right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u} \circledwedge \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v} \circledwedge \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u}\right) du \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial u} \wedge \frac{d\mathfrak{u}}{\partial v}\right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Also ist

$$O\tilde{P} = \frac{\mathrm{Erg}\, d\mathfrak{u} \circledwedge d\mathfrak{u}}{\omega},$$

wobei ω eine zweistufige alternierende Differentialform ist. Die Richtung von $O\tilde{P}$ ist somit eineindeutig durch $\mathfrak{u}(P)$ festgelegt, und darüber hinaus ist noch durch $\langle \mathfrak{u}, O\tilde{P} \rangle = 1$ der Vektor $O\tilde{P}$ bestimmt:

$$O\tilde{P} = \frac{\mathrm{Erg}\, d\mathfrak{u} \circledwedge d\mathfrak{u}}{\langle \mathfrak{u}, \mathrm{Erg}\, d\mathfrak{u} \circledwedge d\mathfrak{u} \rangle}.$$

Da die Tangentialebene im Punkt $\tilde{P}$ des Bildes der der Originalfläche im Punkte P parallel ist, hängt diese Definition von $\tilde{P}$ unmittelbar mit der relativen Differentialgeometrie von Norden zusammen[3]).

Die Theorie der Teilräume des n-dimensionalen euklidischen oder allgemeiner Riemannschen Raumes, in der die Aufspaltung von $\mathfrak{B}$ auf der Konstruktion der Schmiegräume beruht, habe ich an anderer Stelle dargestellt[4]).

---

[3]) Vgl. etwa die „Affine Differentialgeometrie" von P. A. und A. P. Schirokow, Moskau 1959, die demnächst in deutscher Übersetzung erscheint.

[4]) W. Blaschke und H. Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie, 2. Auflage, Berlin 1960 bzw. Forschen und Wirken, Festschrift zur 150-Jahrfeier der Humboldt-Universität zu Berlin, Band II, Berlin 1960.

Eingegangen am 1. 7. 1961