Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen

Von Roland Schmidt in Kiel

Herrn Professor Dr. Friedrich Bachmann zum 60. Geburtstag

Sei G eine endliche Gruppe, k eine natürliche Zahl. Wir nennen G eine $N(k)$-Gruppe, wenn jede k-maximale Untergruppe von G normal in G ist. Die $N(1)$-Gruppen sind offenbar die nilpotenten Gruppen. Huppert [2] untersuchte die Klassen der $N(2)$- und $N(3)$-Gruppen und zeigte, daß jede $N(2)$-Gruppe überauflösbar ist und daß G' nilpotent und der Rang von G höchstens 2 ist, falls G eine $N(3)$-Gruppe ist. Janko [5] bestimmte alle $N(4)$-Gruppen mit nicht nilpotenter Kommutatorgruppe.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Huppert-Jankoschen Ergebnisse zu verallgemeinern. Wir nennen G eine $M(k)$-Gruppe, wenn jede k-maximale Untergruppe von G modular (Definition s. unten oder in [6]) in G ist. Da jeder Normalteiler modular ist, sind offenbar die Klassen $N(k)$ in $M(k)$ enthalten. Wir können dennoch für $k = 2$ und 3 die Huppertschen Ergebnisse für $M(k)$ verschärfen und außerdem alle $M(4)$-Gruppen bestimmen, die nicht überauflösbar sind. Wir erhalten folgende Ergebnisse:

Jede $M(1)$-Gruppe ist überauflösbar; eine überauflösbare Gruppe ist genau dann eine $M(1)$-Gruppe, wenn sie in jedem Nicht-Frattini-Hauptfaktor eine Automorphismengruppe von Primzahlordnung induziert (oder ihn zentralisiert).

Jede $M(2)$-Gruppe ist auch eine $M(1)$-Gruppe (und damit überauflösbar), ein Ergebnis, das im $N(k)$-Fall kein Gegenstück hat.

Ist G eine $M(3)$-Gruppe, so ist entweder G überauflösbar oder $|G| = p^2q$, p und q Primzahlen, oder G das semidirekte Produkt der Quaternionengruppe mit ihrem Automorphismus der Ordnung 3. In jedem Fall ist also G' nilpotent und der Rang von G höchstens 2.

Ist G eine nicht auflösbare $M(4)$-Gruppe, so ist G eine $N(4)$-Gruppe; nach Janko sind also alle solchen Gruppen bekannt. Ist G eine auflösbare $M(4)$-Gruppe, so ist entweder G überauflösbar oder $|G|$ Produkt von höchstens 4 Primzahlen oder G von einem angegebenen Typ (s. Satz 4). Der Rang von G ist höchstens 3.

Definitionen und Vorbemerkungen

Alle betrachteten Gruppen seien endlich; für Bezeichnungen s. [6]. Sei G eine Gruppe, k eine natürliche Zahl.

Die Untergruppe U von G ist *k-maximal* in G, wenn U maximal in einer $(k-1)$-maximalen Untergruppe V von G ist. (G sei dabei eine 0-maximale Untergruppe von G.)

Die Untergruppe M von G ist *modular in* G (kurz: $M \mathfrak{m} G$), falls gilt:

$$(U \cup M) \cap V = U \cup (M \cap V) \quad \text{für alle} \quad U, V \subseteqq G \quad \text{mit} \quad U \subseteqq V$$

und

$$(U \cup M) \cap V = (U \cap V) \cup M \quad \text{für alle} \quad U, V \subseteqq G \quad \text{mit} \quad M \subseteqq V.$$

G ist eine *$N(k)$-Gruppe* (*$M(k)$-Gruppe*), falls jede k-maximale Untergruppe normal (modular) in G ist.

Der Hauptfaktor H/K von G heißt ein *Frattini-Hauptfaktor* (*Nicht-Frattini-Hauptfaktor*), falls $H/K \subseteqq \Phi(G/K)$ ($H/K \nsubseteq \Phi(G/K)$) ist.

Die folgenden Eigenschaften der modularen Untergruppen einer Gruppe G werden benutzt.

I. *Ist $M \mathfrak{m} G$ und $U \subseteqq G$, so ist $M \cap U \mathfrak{m} U$* (s. [10], Eigenschaft III, S. 74).

II. *Sind M und N modular in G, so auch $M \cup N$* (s. [10], Eigenschaft V, S. 75).

III. *Sei M eine maximale Untergruppe von G. Genau dann ist $M \mathfrak{m} G$, wenn entweder $M \lhd G$ oder $|G : M_G| = pq$ ist, p und q Primzahlen* (s. [6], Lemma 1).

IV. *Ist $M \mathfrak{m} G$, M eine p-Gruppe, aber keine p-Sylowgruppe von G, so ist M quasinormal in G (d.h. mit allen Untergruppen von G vertauschbar)* (s. [7], Cor. 1 zu Thm. 3).

V. *Ist G perfekt und $M \mathfrak{m} G$, so ist $M \lhd G$* (s. [6], Kor. zu Satz 5).

1. $M(1)$-Gruppen

Die $M(1)$-Gruppen charakterisiert der folgende

Satz 1. *Genau dann ist G eine $M(1)$-Gruppe, wenn G überauflösbar ist und in jedem Nicht-Frattini-Hauptfaktor eine Automorphismengruppe von höchstens Primzahlordnung induziert, d.h. $|G : C_G(H/K)|$ eine Primzahl oder 1 ist, falls H/K ein Nicht-Frattini-Hauptfaktor von G ist.*

Beweis. Sei zunächst G eine $M(1)$-Gruppe, d.h. alle maximalen Untergruppen von G modular in G. Nach Eigenschaft (III) hat dann jede maximale Untergruppe Primzahlindex in G; G ist also überauflösbar (s. [2], Satz 9). Sei H/K ein Nicht-Frattini-Hauptfaktor von G. Da mit G auch G/K eine $M(1)$-Gruppe ist, können wir $K = 1$ annehmen. Da $H \nsubseteq \Phi(G)$ ist, existiert eine maximale Untergruppe M von G mit $H \nsubseteq M$. Es folgt $G = HM$, $H \cap M = 1$. Insbesondere ist $H \cap M_G = 1$, also $M_G \subseteqq C_G(H)$. Nach (III) ist somit $|G : C_G(H)|$ ein Teiler von pq, wobei $p = |G : M| = |H|$ und q eine Primzahl ist; da $|G : C_G(H)|$ außerdem $p - 1$ teilen muß, ist also schließlich $|G : C_G(H)|$ ein Teiler von q, was zu zeigen war.

Sei umgekehrt G überauflösbar und $|G : C_G(H/K)|$ eine Primzahl oder 1 für jeden Nicht-Frattini-Hauptfaktor H/K von G. Sei M eine maximale Untergruppe von G. Ist $M \lhd G$, so ist nichts zu zeigen. Sei also M nicht normal in G. Wir betrachten G/M_G. Sei N/M_G ein minimaler Normalteiler von G/M_G, $|N : M_G| = p$, p eine Primzahl. Dann ist $N \nsubseteq M$, also N/M_G ein Nicht-Frattini-Hauptfaktor von G. Nach Voraussetzung ist also $|G : C_G(N/M_G)|$ ein Teiler einer Primzahl q. Nun ist $C_G(N/M_G) = N$ (s. [3], Satz 3.2, S. 159), also $|G : N|$ ein Teiler von q. Damit ist $|G : M_G|$ ein Teiler von pq, und somit nach (III) M modular in G. G ist also eine $M(1)$-Gruppe, was zu zeigen war.

2. $M(2)$-Gruppen

Für die weiteren Untersuchungen erweist sich das folgende triviale Lemma als nützlich.

Lemma. *Sei G eine $M(k)$-Gruppe, k eine natürliche Zahl. Ist U eine $(k - 1)$-maximale Untergruppe von G, die nicht modular in G ist, dann ist U zyklisch von Primzahlpotenzordnung.*

Beweis. Hätte U zwei verschiedene maximale Untergruppen U_1 und U_2, so wären die k-maximal in G, also modular in G, da G eine $M(k)$-Gruppe ist. Nach Eigenschaft (II) wäre dann aber auch $U = U_1 \cup U_2$ modular in G. U hat also nur eine maximale Untergruppe und ist damit zyklisch von Primzahlpotenzordnung.

Wir kommen nun zu

Satz 2. *Jede $M(2)$-Gruppe ist auch eine $M(1)$-Gruppe.*

Beweis. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zu Satz 2. Ist U eine maximale Untergruppe von G und V eine maximale Untergruppe von U, so folgt $V \mathfrak{m} G$, also nach (I) $V \mathfrak{m} U$. Jede maximale Untergruppe von G ist also eine $M(1)$-Gruppe und damit nach Satz 1 überauflösbar. Nach einem Satz von Huppert (s. [2], Satz 22) folgt also

(1) $\qquad$ G ist auflösbar.

Da G keine $M(1)$-Gruppe ist, existiert eine maximale Untergruppe U von G, die nicht modular in G ist. Nach dem Lemma ist U zyklisch von Primzahlpotenzordnung; sei etwa $|U| = q^n$, q Primzahl, $n \geqq 1$. Da U nicht normal in G ist, ist G keine q-Gruppe, also U eine q-Sylowgruppe von G. Sei V die maximale Untergruppe von U. Da G eine $M(2)$-Gruppe ist, ist $V \mathfrak{m} G$; wegen Eigenschaft (IV) ist V quasinormal in G. Folglich wird V von jeder q'-Untergruppe von G normalisiert (s. [4], S. 169); da auch $V \lhd U$ ist, ist also schließlich $V \lhd G$. Da mit G auch G/V ein Gegenbeispiel zu Satz 2 ist, folgt $V = 1$, wegen der Minimalität von G. Es ist also

$$|U| = q. \tag{2}$$

Sei N ein minimaler Normalteiler von G. Da G auflösbar ist, gilt

$$G = NU, \quad N \cap U = 1. \tag{3}$$

Sei M eine maximale Untergruppe von N. Wegen (2) und (3) ist M eine zweitmaximale Untergruppe von G, also $M \mathfrak{m} G$. Es folgt

$$M = (U \cap N) \cup M = (U \cup M) \cap N,$$

also $U \cup M \neq G$. Da U eine maximale Untergruppe von G ist, ist also $M \subseteqq U$, d.h. wegen (3) $M = 1$. Da M eine maximale Untergruppe von N war, folgt $|N| = p$, p Primzahl, und nach (2) und (3) schließlich

$$|G| = pq. \tag{4}$$

Nach (III) ist dann aber U modular in G. — Mit diesem Widerspruch ist Satz 2 bewiesen.

Korollar. *Jede $M(2)$-Gruppe ist überauflösbar.*

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 2 gilt nicht, wie das Beispiel der nichtabelschen Gruppe der Ordnung p^3 vom Exponenten p zeigt (p Primzahl, $p > 2$).

3. $M(3)$-Gruppen

Satz 3. *Sei G eine $M(3)$-Gruppe. Dann hat G eine der folgenden Eigenschaften:*

(a) *G ist überauflösbar,*

(b) *$|G| = p^2 q$, p und q Primzahlen, oder*

(c) *G ist das semidirekte Produkt der Quaternionengruppe der Ordnung* 8 *mit ihrem Automorphismus der Ordnung* 3.

Umgekehrt sind die Gruppen in (b) *und* (c) *sogar $N(3)$-Gruppen.*

Beweis. Sei G eine nicht überauflösbare $M(3)$-Gruppe. Wir haben zu zeigen, daß G vom Typ (b) oder (c) ist.

Jede maximale Untergruppe von G ist eine $M(2)$-Gruppe, also nach Satz 2 überauflösbar. Da G nicht überauflösbar ist, gilt nach einem Satz von DOERK (s. [1], Satz 1):

(1) G hat eine normale p-Sylowgruppe P für einen Primteiler p von $|G|$. Die maximalen Untergruppen von G, die keinen Primzahlindex in G haben, sind von der Form $U = \Phi(P)\,Q$ mit einem p-Komplement Q von G. Daher ist $|P : \Phi(P)| \geqq p^2$.

Angenommen, P wäre keine maximale Untergruppe von G.

Sei dann T eine zweitmaximale Untergruppe von G mit $P \subsetneqq T$. T ist überauflösbar; es existiert also eine maximale Untergruppe P_1 von P mit $P_1 \lhd T$. Sei $S = P_1 Q_1$, wobei Q_1 ein p-Komplement von T ist, sei Q ein Q_1 enthaltendes p-Komplement von G und sei $U = \Phi(P)\,Q$. Dann ist offenbar S eine maximale Untergruppe von T, also $S \,\mathfrak{m}\, G$. Nach (1) ist U eine maximale Untergruppe von G, und es ist $U \cap S = U \cap T = \Phi(P)\,Q_1 \subset S$, also $U \cup S = G$. Wegen der Modularität von S erhalten wir also

$$T = (U \cup S) \cap T = (U \cap T) \cup S = S,$$

was der Wahl von S widerspricht. — Es folgt also:

(2) P ist eine maximale Untergruppe von G; sei $|G : P| = q$.

Sei R eine beliebige maximale Untergruppe von P. Wäre R modular in G, dann ergäbe die modulare Identität wie eben (mit R, P an Stelle von S, T) den Widerspruch $R = P$; R ist also nicht modular in G. Nach dem Lemma ist R zyklisch. Damit haben wir:

(3) Jede maximale Untergruppe von P ist zyklisch.

Da P nicht zyklisch ist, ist also entweder $|P| = p^2$ oder P die Quaternionengruppe der Ordnung 8 (s. [10], Thm. 17, S. 149). Im ersten Fall ist $|G| = p^2 q$, was zu zeigen ist. Im zweiten Fall ist $q = 3$, da Q einen nichttrivialen Automorphismus in P induzieren muß und da die Automorphismengruppe der Quaternionengruppe die Ordnung 24 hat (s. [10], S. 148); G ist also vom Typ (c). Damit ist die erste Aussage von Satz 3 bewiesen.

Daß umgekehrt die Gruppen in (b) und (c) $N(3)$-Gruppen sind, ist klar, da 1 bzw. das Zentrum der Quaternionengruppe und 1 die einzigen drittmaximalen Untergruppen dieser Gruppen sind.

Als einfache Folgerung aus Satz 3 erhalten wir, daß die $M(3)$-Gruppen auch die von HUPPERT für $N(3)$-Gruppen bewiesenen Eigenschaften haben.

Korollar. *Ist G eine $M(3)$-Gruppe, so ist G' nilpotent und der Rang von G höchstens 2. Ist $|G|$ durch 3 verschiedene Primzahlen teilbar, so ist G überauflösbar.*

4. $M(4)$-Gruppen

Der folgende Satz charakterisiert alle nicht überauflösbaren $M(4)$-Gruppen.

Satz 4. *Sei G eine $M(4)$-Gruppe.*

(a) *Ist G einfach (nichtabelsch), so ist $G \cong PSL(2, p)$ mit $p = 5$ oder p eine Primzahl, so daß $p - 1$ und $p + 1$ Produkte von höchstens 3 Primzahlen sind und $p \equiv \pm 3$ oder $\pm 13 \pmod{40}$ ist.*

(b) *Ist G nicht auflösbar und nicht einfach, so ist $G \cong SL(2,5)$.*

(c) *Ist G auflösbar, so hat G eine der folgenden Eigenschaften.*

(1) *G ist überauflösbar.*

(2) *$|G|$ ist Produkt von höchstens 4 Primzahlen.*

(3) *G ist das semidirekte Produkt der Quaternionengruppe Q der Ordnung 8 mit einer Gruppe A der Ordnung $3p$, p Primzahl, $p \geqq 3$, die in Q den Automorphismus der Ordnung 3 von Q induziert.*

(4) *$G = U \times J$, wobei $|J| = 2$ und U eine Gruppe vom Typ (c) des Satzes 3 ist.*

(5) *G ist die Darstellungsgruppe (im Sinne von Schur [9]) der symmetrischen Gruppe S_4, die nur eine Involution besitzt (G hat die Ordnung 48 und wird erzeugt durch Elemente a, b_i mit $a^2 = [b_i, a] = 1$ und $b_i^2 = (b_1 b_2)^3 = (b_2 b_3)^3 = [b_1, b_3] = a$ $(i = 1, 2, 3)$).*

Insbesondere ist der Rang von G höchstens 3.

Umgekehrt sind alle Gruppen in (a), (b) *und* (c), (2)—(5) *sogar $N(4)$-Gruppen.*

Beweis. (a), (b). Sei G eine nicht auflösbare $M(4)$-Gruppe. Jede maximale Untergruppe von G ist eine $M(3)$-Gruppe, also nach Satz 3 auflösbar. Da G nicht auflösbar ist, ist also G perfekt. Nach Eigenschaft (V) ist jede modulare Untergruppe von G normal in G, d.h. G eine $N(4)$-Gruppe. (a) und (b) folgen somit aus den erwähnten Sätzen von Janko [5].

(c). Sei nun G auflösbar, aber nicht überauflösbar und Satz 4 für Gruppen kleinerer Ordnung richtig. Wir beweisen zunächst:

($*$) *Sei U eine maximale Untergruppe von G mit $|G : U| = p^n$, p eine Primzahl, $n > 1$. Sei $K \lhd G$, $K \subseteq U$ und sei H/K ein minimaler Normalteiler von G/K mit $H \nsubseteq U$.*

Dann ist $|U : K|$ ein Produkt von höchstens 2 Primzahlen. Ist $H \supset M \supset K$, so ist M nicht modular in G. Ist $|U : K|$ eine Primzahl, so ist $n = 2$ oder $n = 3$; ist $|U : K|$ keine Primzahl, so ist $n = 2$.

Angenommen $|U:K|$ ist Produkt von mindestens 3 Primzahlen. Nach der Voraussetzung in (*) ist jedenfalls

(i) $$G = HU, \quad H \cap U = K.$$

Wegen der Annahme über $|U:K|$ existiert eine drittmaximale Untergruppe S/K von U/K. Es ist

(ii) $$S \mathfrak{m} G.$$

Wegen (i) ist HS drittmaximal in G. Damit ist HS eine $M(1)$-Gruppe, also überauflösbar. Es existiert daher eine Untergruppe H_1 von H mit $H_1/K \lhd HS/K$ und $|H:H_1| = p$. Offenbar ist

(iii) $$|HS : H_1S| = p.$$

Damit ist H_1S maximal in HS, also

(iv) $$H_1S \mathfrak{m} G.$$

Wegen $|H:K| = p^n$, $n > 1$, ist $H_1 \supset K$ und damit $U \cup H_1S = G$. Unter Benutzung von (i), (ii) und (iv) erhalten wir schließlich

$$HS = (U \cup H_1S) \cap HS = (U \cap HS) \cup H_1S = S \cup H_1S = H_1S,$$

was offenbar (iii) widerspricht. — Es ist also $|U:K|$ das Produkt von höchstens 2 Primzahlen.

Ist $H \supset M \supset K$, so ist wegen (i) $U \cup M = G$. Wäre also M modular in G, so hätten wir

$$H = (U \cup M) \cap H = (U \cap H) \cup M = M,$$

was nicht der Fall ist. — Es ist also M nicht modular in G.

Nach Voraussetzung ist $n > 1$. Wäre $|U:K|$ eine Primzahl und $n > 3$ oder $|U:K|$ das Produkt von 2 Primzahlen und $n > 2$, so existierte jeweils wegen (i) eine viertmaximale (also modulare) Untergruppe M von G mit $H \supset M \supset K$. Das geht nicht. — Damit ist (*) vollständig bewiesen.

Wir unterscheiden nun drei Fälle. Jede maximale Untergruppe von G ist eine $M(3)$-Gruppe. Nach Satz 3 sind also entweder alle maximalen Untergruppen von G überauflösbar oder es existiert eine nicht überauflösbare maximale Untergruppe vom Typ (b) oder (c) des Satzes 3 von G.

Fall 1. Alle maximalen Untergruppen von G sind überauflösbar.

Da G nicht überauflösbar ist, ist nach Doerk (s. [1], Satz 1) eine p-Sylowgruppe P von G normal in G, $P/\Phi(P)$ ein minimaler Normalteiler von $G/\Phi(P)$ und $U = \Phi(P)Q$ mit einem p-Komplement Q von G, falls U eine maximale Untergruppe von G ist, die keinen Primzahlindex hat.

Nach (*) (mit $H = P$ und $K = \Phi(P)$) ist $|U : \Phi(P)| = q$ oder qr, q und r Primzahlen.

Sei zunächst $|U : \Phi(P)| = qr$, $q \leqq r$. Nach (*) ist dann $|G : U| = |P : \Phi(P)| = p^2$. Ist P_1 eine maximale Untergruppe von P, so gilt $P \supset P_1 \supset \Phi(P)$; wegen (*) ist P_1 nicht modular in G, nach dem Lemma ist P_1 zyklisch. Jede maximale Untergruppe von P ist also zyklisch; es folgt $|P| = p^2$, oder P ist die Quaternionengruppe der Ordnung 8. Im ersten Fall ist $|G| = p^2qr$, was zu zeigen ist; im zweiten Fall ist $|Q : C_Q(P)| = 3$, da G nicht überauflösbar ist und die Automorphismengruppe von P die Ordnung 24 hat. Es ist also $|Q| = 3r$ und damit G vom Typ (3).

Sei nun $|U : \Phi(P)| = q$. Nach (*) kann dann $|P : \Phi(P)| = p^2$ oder p^3 sein. Ferner ist $|G : P| = q$, also P eine maximale Untergruppe von G. Existierte eine drittmaximale Untergruppe S von P mit $S \nsubseteq \Phi(P)$, so wäre S, also auch $S \cup \Phi(P)$ modular in G, ferner $\Phi(P) \subset S \cup \Phi(P) \subset P$ (s. [10], S. 52), was (*) widerspräche. — Jede drittmaximale Untergruppe S von P ist also in $\Phi(P)$ enthalten.

Ist nun $|P : \Phi(P)| = p^3$, so ist also $\Phi(P)$ die einzige drittmaximale Untergruppe von P. Ferner ist P weder zyklisch noch eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Nach Zassenhaus ([10], Thm. 16 und 17, S. 149) ist also $\Phi(P) = 1$. Es folgt $|G| = p^3q$, was zu zeigen war.

Sei also $|P : \Phi(P)| = p^2$. Wir nehmen einmal an, es wäre $|\Phi(P)| \geqq p^2$. Da $\Phi(P)$ alle drittmaximalen Untergruppen von P enthält, würde es dann jede Untergruppe der Ordnung p von P enthalten; insbesondere hätte P nicht den Exponenten p. Nach Doerk ([1], Satz 1,f) folgte $p = 2$. $G/\Phi(P)$ wäre somit isomorph zur alternierenden Gruppe A_4. Ferner wäre nach Doerk ([1], Satz 1, d) $\Phi(P)$ im Zentrum von P enthalten, also $\Phi(P) \subseteqq Z(G)$, da wegen der Überauflösbarkeit von U und wegen $p = 2$ auch Q in $C_G(\Phi(P))$ enthalten ist. G hat offenbar keinen Normalteiler vom Index 2; es wäre also $|G : G'| = 3$, d.h. $\Phi(P) \subseteqq G' \cap \cap Z(G)$. Da der Schursche Multiplikator der A_4 die Ordnung 2 hat (s. [9], S. 170), folgte nach einem Satz von Schur (s. etwa [8], S. 47) $|\Phi(P)| \leqq 2$. Das widerspräche der Annahme $|\Phi(P)| \geqq p^2$. — Es ist also $|\Phi(P)| \leqq p$, d.h. $|G|$ ein Teiler von p^3q. Damit ist G vom Typ (2) und Fall 1 erledigt.

Fall 2. G besitzt eine (nicht überauflösbare) maximale Untergruppe U vom Typ (b) des Satzes 3, d.h. $U = QR$ mit $Q \lhd U$, Q elementarabelsch der Ordnung q^2, $|R| = r$ (q und r Primzahlen), und R operiert irreduzibel auf Q.

Wir wollen zeigen, daß $|G : U|$ eine Primzahl ist, nehmen also an, es wäre $|G : U| = p^n$, p Primzahl, $n > 1$.

Wir können dann $(*)$ auf $U_G = K$ und irgendeinen minimalen Normalteiler H/U_G von G/U_G anwenden und erhalten, daß $|U : U_G| = q$ oder r oder qr ist. Da U keinen Normalteiler vom Index q oder qr besitzt, ist $|U : U_G| = r$, d.h. $U_G = Q$. Wieder wegen $(*)$ ist $n = 2$ oder $n = 3$. Wäre $n = 2$, so wäre Q drittmaximal in G, also jede Untergruppe der Ordnung q von U modular in G; diese Untergruppen sind aber offenbar nicht einmal modular in U. — Es ist also $n = 3$, d.h. $|G| = p^3q^2r$. Wäre $p = q$, so wäre jede Untergruppe der Ordnung p^2 von H modular in G. Existierte außer Q eine weitere Untergruppe S der Ordnung p^2 von H, so wäre also $Q \subset QS \subset H$ und $QS \mathfrak{m} G$. Das widerspräche $(*)$. Es wäre also Q die einzige Untergruppe der Ordnung p^2 von H; nach ZASSENHAUS ([10]; Thm. 16, S. 149) wäre H zyklisch, was nicht der Fall ist. — Es ist also $p \neq q$; sei P eine p-Sylowgruppe von H. P ist maximal oder zweitmaximal in H. Ist also P_1 eine zweitmaximale (falls P maximal in H ist) bzw. eine maximale (falls P zweitmaximal in H ist) Untergruppe von P, so ist $P_1 \mathfrak{m} G$. Damit ist $Q \subset P_1Q \subset H$ und $P_1Q \mathfrak{m} G$, was erneut $(*)$ widerspricht.

Der Widerspruch zeigt, daß $|G : U| = p$, also $|G| = pq^2r$ ist, was zu zeigen war. Damit ist Fall 2 erledigt. Es bleibt

Fall 3. G besitzt eine maximale Untergruppe U vom Typ (c) des Satzes 3, d.h. $U = QR$, wobei Q die Quaternionengruppe der Ordnung 8, $|R| = 3$ ist und R die Gruppe Q nicht zentralisiert.

Wir wollen wieder zeigen, daß $|G : U|$ eine Primzahl ist, nehmen also an, es wäre $|G : U| = p^n$, p Primzahl, $n > 1$.

Sei wieder H/U_G ein minimaler Normalteiler von G/U_G. Nach $(*)$ ist $|U : U_G| = 2$ oder 3 oder 6. Da U keinen Normalteiler vom Index 2 oder 6 enthält, ist $|U : U_G| = 3$, d.h. $U_G = Q$. Wie im Fall 2 ist $|H : U_G| = p^3$, da die maximalen Untergruppen von Q nicht modular in U sind, also Q nicht drittmaximal in G sein kann. Es folgt $|G : Z(Q)| = p^3 2^2 3$ und nach Induktionsannahme, daß $G/Z(Q)$ überauflösbar ist. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $|G : U| = p^n$, $n > 1$. — Es folgt

(v) $$|G : U| = p, \quad p \text{ eine Primzahl.}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $Q \lhd G$ ist. Angenommen, Q wäre nicht normal in G. Da G auflösbar ist, gibt es einen Normalteiler N von Primzahlindex in G. Wäre $N = U$, so wäre Q als charakteristische Untergruppe von U normal in G; das ist unmöglich. — Damit ist $N \neq U$ und folglich $|G : N| \neq 2$, da U keinen Normalteiler vom Index 2 besitzt. Wäre $|G : N| \neq 3$, so folgte $|G : N| = p > 3$, d.h. $N = U$, was nicht der Fall ist. — Es ist also $|G : N| = 3$, d.h. $|N| = 2^3p$. Nach Satz 3 ist N überauflösbar oder vom Typ (c) des Satzes 3. Im letzteren Fall wäre offenbar $Q \lhd N$, also $Q \lhd G$. — Es ist also N überauflösbar. Da $p \neq 2$ ist (sonst wäre ja $U \lhd G$), ist die p-Sylowgruppe P von N normal in N, also $P \lhd G$. $G/C_G(P)$ ist zyklisch von $p-1$ teilender Ordnung. Da G keinen Normalteiler vom Index 2 besitzt, ist also $|G:C_G(P)|$ ein Teiler von 3, d.h. $Q \subseteqq C_G(P)$. Es folgt $Q \lhd N$, also $Q \lhd G$, im Widerspruch zur Annahme. — Damit ist gezeigt:

(vi) $$Q \lhd G.$$

Ist $p > 2$, so ist offenbar G vom Typ (3) mit einem 2-Komplement A von G.

Sei also $p = 2$ (d.h. $|G| = 2^4 3$) und sei S eine 2-Sylowgruppe von G. Enthält S eine von $Z(Q)$ verschiedene Untergruppe J der Ordnung 2, dann ist $J \mathfrak{m} G$, also nach (IV) J quasinormal in G. Jede 3-Untergruppe von G normalisiert daher J. Da U von seinen 3-Sylowgruppen erzeugt wird, ist also $U \subseteqq N_G(J)$. Da J nicht in U enthalten ist, ist folglich $J \lhd G$. Da $|G:U| = 2$ ist, ist auch $U \lhd G$, also schließlich $G = U \times J$, d.h. vom Typ (4).

Sei also schließlich $Z(Q)$ die einzige Untergruppe der Ordnung 2 von S. Dann ist S eine verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 16 (s. [10], Thm. 15, S. 148). Da die Automorphismengruppe von S eine 2-Gruppe ist (s. [10], S. 148), aber S von R nicht zentralisiert wird, ist S nicht normal in G. Wir betrachten $C_G(Q)$. Offenbar ist $C_G(Q) \lhd G$ und $R \nsubseteq C_G(Q)$, also $C_G(Q)$ eine 2-Untergruppe von G. Da S nicht normal in G ist, ist also $C_G(Q) \subseteqq Q$, d.h. $C_G(Q) = Z(Q)$. Da die Automorphismengruppe von Q isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 und $|G:Z(Q)| = 24$ ist, ist $G/Z(Q) \cong S_4$. Offenbar ist $Z(Q) = Q' \subseteqq G'$ und $Z(Q) \subseteqq Z(G)$. Nach einem Satz von SCHUR (s. [9], S. 166) ist G eine Darstellungsgruppe der S_4. Da $Z(Q)$ die einzige Untergruppe der Ordnung 2 von G ist, ist somit G schließlich vom Typ (5).

Damit ist auch Fall 3 erledigt und die erste Behauptung des Satzes 4 bewiesen.

Daß alle Gruppen in (a) und (b) $N(4)$-Gruppen sind, folgt durch Inspektion der Untergruppenliste der $PSL(2, p)$ (s. etwa [3], S. 213). Daß die Gruppen vom Typ (c), (2) $N(4)$-Gruppen sind, ist trivial. Ist G vom Typ (c), (3), so hat G drei viertmaximale Untergruppen, nämlich $Z(Q)$, $C_A(Q)$ und 1; alle drei sind normal in G. Ist G vom Typ (c), (4), so sind die Untergruppen der Ordnung 2 und 1 die einzigen viertmaximalen Untergruppen, also G eine $N(4)$-Gruppe. Ist schließlich G vom Typ (c), (5), so hat G nur zwei viertmaximale Untergruppen, nämlich die der Ordnung 2 und 1; auch diese sind normal in G. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Die zweiten Aussagen in Satz 3 und 4 sowie die Sätze 1 und 2 liefern das folgende interessante

Korollar. *Ist G eine $M(k)$-Gruppe und $k \leqq 4$, so ist G entweder überauflösbar oder eine $N(k)$-Gruppe.*

Für $k = 5$ gilt das Korollar nicht mehr, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei G das direkte Produkt einer Gruppe U des Typs (c) des Satzes 3 und einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung pq, p und q Primzahlen, $p > q > 3$. Da U nicht überauflösbar ist, gilt dasselbe auch von G. Die einzigen fünftmaximalen Untergruppen von G sind die Untergruppen der Ordnung 1, 2, q und p. Die der Ordnung 1, 2 und p sind normal in G; die Untergruppen der Ordnung q sind modular (s. etwa [7], Thm. 3), aber natürlich nicht normal in G.

Literatur

[1] K. Doerk, Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen, Math. Zeitschr. **91** (1966) 198—205.

[2] B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Zeitschr. **60** (1954) 409—434.

[3] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[4] N. Ito und J. Szép, Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen, Acta Sci. Math. Szeged **23** (1962) 168—170.

[5] Z. Janko, Finite groups with invariant fourth maximal subgroups, Math. Zeitschr. **82** (1963) 82—89.

[6] R. Schmidt, Modulare Untergruppen endlicher Gruppen, Illinois J. Math. **13** (1969) 358—377.

[7] R. Schmidt, Modular subgroups of finite groups II, erscheint in Illinois J. Math.

[8] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine u. angew. Math. **127** (1904) 20—50.

[9] I. Schur, Über die Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. für die reine u. angew. Math. **139** (1911) 155—250.

[10] H. Zassenhaus, The theory of groups, 2. Auflage, Göttingen 1958.

Eingegangen am 17. 10. 1968