Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume

Von Erich Ellers und Helmut Karzel in Hamburg

Unter einem *Gruppenraum* versteht man eine Gruppe G, der mit Hilfe einer Teilmenge $D \subset G$ die Struktur $D(G)$ eines projektiven Raumes der Dimension > 1 wie folgt aufgeprägt ist[1]):

R 1. Jedes Element $a \in G$ stellt sowohl einen Punkt als auch eine Hyperebene dar (während wir den a zugeordneten Punkt auch mit a bezeichnen, symbolisiere $\langle a \rangle$ die zugeordnete Hyperebene).

R 2. Zwei verschiedenen Elementen aus G entsprechen verschiedene Punkte und verschiedene Hyperebenen.

R 3. Inzident heißt ein Punkt a und eine Hyperebene $\langle b \rangle$ genau dann, wenn $ba \in D$ gilt.

Diese Definition des Gruppenraumes ist dieselbe wie in [4]. Dort befinden sich auch Angaben über die Entstehung dieses Begriffes bei Blaschke und Grünwald und seine Fortentwicklung bei Podehl, Reidemeister und Baer.

Eine vollständige Lösung des Problems, alle Gruppenräume anzugeben, steht noch aus. Dagegen lassen sich alle Gruppenräume aufzählen, die dem Axiom

A. *Für jedes* $x \in D$ gilt $x^2 = 1$

genügen, wie hier gezeigt werden soll.

Zur Entstehung dieses Problems ist zu sagen: Die in [4] behandelten elliptischen Gruppenräume $D(G)$ waren durch das Axiom A und die weiteren Axiome

B. *D enthält mindestens zwei Elemente a, b mit* $(ab)^2 \neq 1$

C. *D ist invariant, d.h. mit $x \in D$ gilt auch $axa^{-1} \in D$ für alle $a \in G$*

gekennzeichnet. Dort wurde gezeigt, daß durch die Forderungen A, B, C genau die Bewegungsgruppen der ebenen elliptischen Geometrien erfaßt

---

1) Natürlich läßt sich nicht in jeder Gruppe eine Teilmenge D so auszeichnen, daß $D(G)$ ein projektiver Raum wird. Für den Fall einer endlichen Gruppe z.B. wäre eine notwendige Bedingung, daß die Ordnung der Gruppe als Anzahl der Punkte eines projektiven Raumes auftreten kann, d.h. daß sie sich in der Form $\sum_{i=0}^{k} n^i$, wobei n eine Primzahlpotenz p^r ist, darstellen läßt.

werden, und zwar nicht nur die bereits von R. Baer [1] gekennzeichneten elliptischen Geometrien mit Koordinatenkörpern der Charakteristik $\neq 2$, sondern auch solche mit Koordinatenkörpern der Charakteristik 2. Diese letztgenannten elliptischen Geometrien sind erst in [4] eingeführt worden.

Im Anschluß an dieses Resultat erhob sich die Frage, ob die Axiome B und C entbehrlich seien. Daß auf das Axiom B nicht verzichtet werden kann, ergab sich in [2], wo alle Gruppenräume angegeben wurden, die A und der Negation von B genügen. C ist in diesem Falle von selbst erfüllt, da A und die Negation von B die Kommutativität der Gruppe G erzwingen.

Die Vermutung, daß man ohne das Axiom C ebenfalls neue Gruppenräume erfassen würde, erwies sich als falsch, denn es ergab sich, wie in § 4 gezeigt wird, daß C bereits eine Folge von A ist. Somit erhalten wir:

Hauptsatz. *Ist $D(G)$ ein Gruppenraum, der dem Axiom* A *genügt, so ist $D(G)$ entweder ein elliptischer Gruppenraum oder eine involutorische Geometrie. Es gilt also:*

Alle Gruppenräume $D(G)$ mit der Eigenschaft A *zerfallen in drei disjunkte Klassen:*

1. *Elliptische Gruppenräume der Charakteristik $\neq 2$ (gekennzeichnet durch* B *und $1 \notin D$). Hier gilt: $\dim(D(G)) = 3$, $G \cong O_3^+(K, F)$, wobei K ein kommutativer Körper der Charakteristik $\neq 2$ ist und F eine ternäre nullteilige quadratische Form.*

2. *Elliptische Gruppenräume der Charakteristik 2 (gekennzeichnet durch* B *und $1 \in D$). Hier gilt:* $\dim(D(G)) = 3$, *$G \cong O_3(K, Q)$, wobei K ein kommutativer Körper der Charakteristik 2 ist und Q eine ternäre nullteilige und nichtquasilineare quadratische Form über K.*

3. *Involutorische Geometrien (gekennzeichnet durch die Negation von* B*). Hier gilt: Die Dimension von $D(G)$ ist eine natürliche Zahl der Gestalt $2^n - 1$ mit $n > 1$, $G \cong \mathfrak{C}^*/K^{*2}$), wobei $\mathfrak{C}$ eine Cliffordalgebra ist, die gleichzeitig ein kommutativer Körper der Charakteristik 2 ist und einen Grad 2^n mit $n > 1$ über dem Grundkörper K hat.*

Für den Beweis des Hauptsatzes (§ 4) benötigen wir eine Reihe von Hilfsmitteln, die in den §§ 1, 2, 3 zusammengestellt werden. Zunächst wird in § 1 der bereits in [2] erklärte Begriff der projektiven Inzidenzgruppe etwas verallgemeinert (in [2] wurde auch die Verträglichkeit hinsichtlich der Rechtstranslationen verlangt) und gezeigt, daß jede projektive desarguessche Inzidenzgruppe durch einen normalen Fast-

---

[2]) Mit K^* usw. bezeichnen wir wie üblich die multiplikative Gruppe von K.

körper beschreibbar ist (Satz 1). Da auch umgekehrt jedem normalen Fastkörper $\mathfrak{A}$ über K mit Rang $(\mathfrak{A}) > 2$ eine projektive Inzidenzgruppe entspricht (Satz 2), ist das Problem, sämtliche Inzidenzgruppen anzugeben, auf das algebraische zurückgeführt, alle Fastkörper mit dieser Eigenschaft zu bestimmen. Die Fastkörper, die den in [2] behandelten Inzidenzgruppen entsprechen, zeichnen sich durch ein abgeschwächtes Distributivgesetz aus (Satz 3).

Jeder Gruppenraum läßt sich auch als Inzidenzgruppe auffassen (§ 2, Satz 4) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Linkstranslationen die Hyperebenen einfach transitiv permutieren. Da der zugehörige Fastkörper dann eine entsprechende Transitivitätseigenschaft besitzt, erkennt man, daß das eingangs formulierte Problem, alle Gruppenräume anzugeben, gleichwertig mit der algebraischen Aufgabe ist, alle diese normalen Fastkörper zu bestimmen.

Während in den beiden ersten Paragraphen keine Forderungen an die Gruppenräume gestellt werden, ziehen wir in § 3 eine Reihe von Folgerungen aus den Axiomen A und B. Der Beweis des Hauptsatzes (§ 4) erfolgt indirekt, d.h. wir führen die Annahme, D sei nicht invariant, zu einem Widerspruch.

In § 5 schließlich werden die in § 1 gewonnenen Resultate zu einer direkten Herleitung der Quaternionendarstellung elliptischer Gruppenräume benutzt.

§ 1. Beziehungen zwischen projektiven Inzidenzgruppen und Fastkörpern

Eine Menge G heißt *projektive Inzidenzgruppe*[3]), wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. *G ist eine Gruppe.*
2. *Die Elemente von G sind die Punkte eines projektiven Raumes, dessen Dimension größer als 1 ist.*
3. *(Verträglichkeit) Für jedes $a \in G$ ist die Abbildung*

$$a^*: \quad x \to a x, \quad x \in G, \tag{1}$$

eine Projektivität.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Vektorraum über einem Schiefkörper K und ist für die Elemente von $\mathfrak{A}$ außerdem eine Multiplikation erklärt, die alle Schiefkörperaxiome mit Ausnahme des rechten Distributivgesetzes erfüllt, so

[3]) Die Definition der projektiven Inzidenzgruppe ist hier schwächer gefaßt als in [2]. In [2] wird außerdem noch verlangt, daß für jedes $a \in G$ auch die Abbildung $\bar{a}: x \to xa,\ x \in G$, eine Projektivität ist.

heißt $\mathfrak{A}$ *Fastkörper*[4]). Ist überdies K^*[5]) Normalteiler von $\mathfrak{A}^*$, so nennen wir $\mathfrak{A}$ einen *normalen Fastkörper.*

Beispiele für Inzidenzgruppen bilden z.B. die von SINGER [5], M. HALL [3] u.a. untersuchten zyklischen Geometrien. Eine ebene projektive Inzidenzgruppe braucht nicht desarguessch zu sein, da es bereits nicht-desarguessche zyklische Ebenen gibt, wie M. HALL [3] gezeigt hat. Für desarguessche Inzidenzgruppen gilt der folgende

Satz 1. *Ist G eine desarguessche projektive Inzidenzgruppe, so läßt sich in dem zugehörigen Vektorraum $\mathfrak{A}$ mit Hilfe der Gruppenoperation von G in natürlicher Weise eine Multiplikation einführen, so daß $\mathfrak{A}$ ein normaler Fastkörper ist.*

Beweis. Zunächst wollen wir das *Produkt* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zweier Elemente aus $\mathfrak{A}$ erklären. Ist $a \in G$, so sei $L_a \subset \mathfrak{A}$ der dem Element a zugeordnete eindimensionale Teilraum von $\mathfrak{A}$. Wir zeichnen einen festen Vektor $\mathfrak{e} \in L_1$, $\mathfrak{e} \neq 0$, $1 \in G$, aus. Jedem Vektor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^*$ ordnen wir die eindeutig bestimmte semilineare Abbildung $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{A}$ zu, die die Projektivität a^* induziert, wobei a durch $\mathfrak{a} \in L_a$ festgelegt ist, und für die $\mathfrak{a}^*\mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ gilt.

Dann definieren wir

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{b} \quad \text{und} \tag{2}$$

$$0\mathfrak{a} = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Hieraus lassen sich sogleich einige leichte Folgerungen ziehen, nämlich

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*\mathfrak{e}. \tag{4}$$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^* = \mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \quad \text{und} \tag{5}$$

$$(\lambda\mathfrak{a})^* = \lambda\mathfrak{a}^* \quad \text{für} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \lambda \in K. \tag{6}$$

Die eben eingeführte Verknüpfung ist wegen (4) und (5) assoziativ:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}^*(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*\mathfrak{e} = \mathfrak{a}^*(\mathfrak{b}^*\mathfrak{c}^*)\mathfrak{e} = (\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*)\mathfrak{c}^*\mathfrak{e} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$$
$$\text{für} \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{A}.$$

Weil $\mathfrak{e}^*\mathfrak{e} = \mathfrak{e}$ ist und $\mathfrak{e}^*$ die Identität in G induziert, ist $\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{e}$ das Einselement von $\mathfrak{A}$.

---

[4]) Die in $\mathfrak{A}$ erklärte Multiplikation soll selbstverständlich die Eigenschaft haben, daß $\lambda\mathfrak{e} \circ \mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a}$ gilt, wenn $\lambda \in K$, $\mathfrak{e}$ das Einselement von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ ist und $\circ$ die Multiplikation in $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Daher können wir die Multiplikation in $\mathfrak{A}$ und die Multiplikation mit einem Skalar mit demselben Operationssymbol bezeichnen und K mit $K\mathfrak{e}$ identifizieren. Der hier gebrauchte Begriff des Fastkörpers ist etwas spezieller als der bei ZASSENHAUS [6], [7].

[5]) Siehe Fußnote 2 auf Seite 56.

Jedes Element besitzt ein Inverses:

Die semilineare Abbildung $\mathfrak{a}^{*-1}$ induziert die Projektivität $a^{*-1} = a^{-1*}$, und es ist $\mathfrak{a}^{*-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{e}$. Also ist das durch $\mathfrak{a}^{*-1}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}^{-1}$ definierte Element das Inverse von $\mathfrak{a}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{A}^*$ hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe ist.

Das linksseitige Distributivgesetz

$$(7) \qquad \mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{a}^*$ eine semilineare Abbildung ist. Es folgt nämlich $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}^*(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}^*\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^*\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$. Ferner ist K^* Normalteiler von $\mathfrak{A}^*$, d.h. es ist $\mathfrak{a}K^*\mathfrak{a}^{-1} = K^*$, weil für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^*$ und $\lambda \in K^*$ die folgende Gleichung erfüllt ist (σ bezeichnet dabei den zur semilinearen Abbildung $\mathfrak{a}^*$ gehörigen Automorphismus von K):

$$(8) \qquad \mathfrak{a}\lambda\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^*\lambda\mathfrak{a}^{-1} = \lambda^\sigma\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}^{-1} = \lambda^\sigma\mathfrak{a}^*\mathfrak{a}^{*-1}\mathfrak{e} = \lambda^\sigma\mathfrak{e}.$$

Wir identifizieren von nun an immer $K\mathfrak{e}$ mit K.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{A}$ ein normaler Fastkörper mit Rang $\mathfrak{A} > 2$ über einem Körper K, so ist $\mathfrak{A}^*/K^*$ eine Inzidenzgruppe.*

Dieser Satz folgt aus

(9) *Ist $\mathfrak{A}$ ein normaler Fastkörper über einem Körper K, so ist für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^*$ die Abbildung $\sigma\colon \lambda \to \mu = \mathfrak{a}\lambda\mathfrak{a}^{-1}$ ein Automorphismus von K.*

Beweis: σ ist offenbar ein Automorphismus der multiplikativen Gruppe K^*. Da $\mathfrak{a}(\lambda_1 + \lambda_2)\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}(\lambda_1\mathfrak{a}^{-1} + \lambda_2\mathfrak{a}^{-1}) = \mathfrak{a}\lambda_1\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a}\lambda_2\mathfrak{a}^{-1}$ gilt, ist σ auch ein Automorphismus für die additive Verknüpfung.

Nun ist $\mathfrak{A}^*/K^*$ sowohl Gruppe wie projektiver Raum, und die Abbildung $K^*\mathfrak{x} \to K^*\mathfrak{a}K^*\mathfrak{x} = K^*\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ ist eine Projektivität, weil sie von der nach (9) semilinearen Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ induziert wird.

Aus der Konstruktion des zu G gehörigen normalen Fastkörpers $\mathfrak{A}$ ergibt sich noch:

Ist G eine Inzidenzgruppe und $\mathfrak{A}$ der zugehörige Fastkörper, so sind die Gruppen $\mathfrak{A}^*/K^*$ und G isomorph.

Identifizieren wir die Elemente von $\mathfrak{A}^*/K^*$ mit denen von G, so erkennt man:

(10) *Ist U eine Untergruppe (Normalteiler) von G und $\varphi\colon \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*/K^*$ die kanonische Abbildung, so ist $\varphi^{-1}(U)$ eine Untergruppe (Normalteiler) von $\mathfrak{A}^*$.*

(11) *Bilden überdies die Elemente der Untergruppe U einen projektiven Teilraum von G, so ist $\varphi^{-1}(U) \cup \{0\}$ ein Teilfastkörper von $\mathfrak{A}$.*

Der folgende Satz gibt Auskunft, welche Fastkörper in Frage kommen, wenn auch noch die Rechtsmultiplikationen in G Projektivitäten sind.

Satz 3. *Ist G eine Inzidenzgruppe und $\mathfrak{A}$ der zugehörige normale Fastkörper, so ist die Abbildung $\bar{a}$: $x \to xa$, $x, a \in G$, dann und nur dann eine Projektivität, wenn in $\mathfrak{A}$ das folgende distributive Gesetz gilt:*

$$(12) \qquad (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{c}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{A}; \quad \lambda, \mu \in K^*.$$

Beweis: Wie immer sei $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ ein Koordinatenvektor von $a \in G$ und $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ ein Koordinatenvektor von $b \in G$. Dann ist $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^*\mathfrak{a}$ ein Koordinatenvektor von ba. Ist nun $\bar{\mathfrak{a}}$ diejenige semilineare Abbildung, die $\bar{a}$ induziert und für die $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ gilt, so ist auch $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ ein Koordinatenvektor von ba. Es folgt also, daß $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist mit $\lambda \in K^*$. Beachtet man dies, so ergibt sich

$$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = \varrho\bar{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \varrho\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} + \varrho\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{c} = \varrho\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \varrho\mu\mathfrak{c}\mathfrak{a}$$
$$\text{mit} \quad \varrho, \mu \in K^*, \text{ also } \varrho\lambda, \varrho\mu \in K^*.$$

Setzt man jetzt umgekehrt (12) voraus, so folgt:

Die von $\bar{\mathfrak{a}}$: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}^*$ induzierte Abbildung $K^*\mathfrak{x} \to K^*\mathfrak{x}K^*\mathfrak{a} = K^*\mathfrak{x}\mathfrak{a}$ ist eine Projektivität. Alle Punkte $\beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c}$ mit $\beta, \gamma \in K$, $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ der Verbindungsgeraden von $K^*\mathfrak{b}$ und $K^*\mathfrak{c}$ gehen nämlich bei $\bar{\mathfrak{a}}$ in die Punkte $\bar{\mathfrak{a}}(\beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c}) = (\beta\mathfrak{b} + \gamma\mathfrak{c})\,\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ über. Diese liegen auf der Verbindungsgeraden der Punkte $K^*\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $K^*\mathfrak{c}\mathfrak{a}$. Da die Umkehrabbildung $\overline{\mathfrak{a}^{-1}}: \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}^{-1}$ dieselben Eigenschaften hat, ergibt sich die Behauptung, daß $\bar{a}$ eine Projektivität ist.

§ 2. Inzidenzgruppen und Gruppenräume

Nun sei $D(G)$ ein projektiver Gruppenraum, wie er in der Einleitung definiert wurde. Dieser hat stets endliche Dimension, da es eine eineindeutige Abbildung zwischen den Punkten und den Hyperebenen der Geometrie gibt, nämlich $a \leftrightarrow \langle a \rangle$ für alle $a \in G$.

Nach [4] Seite 170 ist für einen Gruppenraum $D(G)$ für jedes $a \in G$ die Abbildung a^*: $x \to ax$ mit $x \in G$ eine Projektivität. Die Gruppe dieser Projektivitäten ist isomorph zu G. Wir bezeichnen sie mit G^*. Jetzt gilt

Satz 4. *Für jeden Gruppenraum $D(G)$ ist G hinsichtlich der durch $D(G)$ gegebenen geometrischen Struktur eine projektive Inzidenzgruppe, bei der die Gruppe G^* einfach transitiv auf den Hyperebenen ist. Umgekehrt läßt sich in jeder Inzidenzgruppe G mit dieser Eigenschaft eine Teilmenge D so auswählen, daß $D(G)$ ein Gruppenraum ist, dessen geometrische Struktur mit der von G übereinstimmt.*

Beweis: $D(G)$ ist ein projektiver Raum, dessen Punkte die Elemente von G und dessen Hyperebenen die Mengen aD sind mit $a \in G$. Die Gruppe G^* ist selbstverständlich transitiv auf den Hyperebenen, weil für jedes $b \in G$ die Abbildung b^* die Hyperebene aD in die Hyperebene baD überführt. Ist andererseits eine projektive Inzidenzgruppe G vorgegeben und D die Gesamtheit der Punkte einer beliebigen Hyperebene, so bilden, da a^* eine Projektivität ist, auch die Punkte der Menge aD eine Hyperebene, die wir mit $\langle a^{-1}\rangle$ bezeichnen. Setzen wir voraus, daß G^* einfach transitiv ist, so entsprechen sich die Hyperebenen und die Gruppenelemente von G gemäß der Beziehung $aD \leftrightarrow \langle a^{-1}\rangle$ eineindeutig und es gilt $x \in aD$, $x \in G$, genau dann, wenn $a^{-1}x \in D$ ist. Somit ist $D(G)$ ein Gruppenraum.

In [2] wurde gezeigt, daß jeder endlichdimensionalen projektiven Inzidenzgruppe G, bei der für jedes $a \in G$ auch noch die Abbildung $\bar{a}$: $x \to xa$, $x \in G$, eine Projektivität ist, ein Gruppenraum $D(G)$ entspricht mit der Eigenschaft

(13) *Zu jedem* $a \in G$ *gibt es ein* $a' \in G$ *mit* $a'Da = D$.

Erfüllt umgekehrt ein Gruppenraum $D(G)$ die Bedingung (13), so sind in der zugehörigen Inzidenzgruppe die Abbildungen $\bar{a}$ Projektivitäten.

Die Bedingung (13) ist insbesondere in Gruppenräumen mit invariantem D erfüllt.

Zusammen mit Satz 3 ergibt sich nun

Satz 5. *Jedem desarguesschen Gruppenraum mit der Eigenschaft* (13) *entspricht eindeutig ein normaler Fastkörper, für den* (12) *gilt. Umgekehrt läßt sich jedem normalen Fastkörper mit endlichem Rang, für den* (12) *zutrifft, eindeutig ein Gruppenraum zuordnen, der* (13) *befriedigt.*

§ 3. Elliptische Gruppenräume

Jetzt beweisen wir eine Reihe von Aussagen für elliptische Gruppenräume, d.h. wir setzen die in der Einleitung formulierten Axiome A und B voraus.

Satz 6. *Die Dimension von* $D(G)$ *ist* 3.

Beweis: Daß die Dimension von $D(G) \leq 3$ ist, ergibt sich wie im Beweis von Satz 5 aus [4]. Um zu zeigen, daß $D(G)$ nicht die Dimension 2 hat, wählen wir auf Grund von B zwei Elemente $a, b \in D$ mit $(ab)^2 \neq 1$. Die Translation b^* ist (wegen $b \in D$ und A) involutorisch und vertauscht daher die zwei verschiedenen Verbindungsgeraden $1 \cup a$ und $b \cup (ba)$. Die Geraden sind verschieden, weil a, b, ab (wegen $ab \notin D$) drei nichtkollineare Punkte sind. Da eine von der Identität verschiedene Translation keine Fixpunkte besitzt, haben die zwei Geraden keinen Schnittpunkt (dieser wäre sonst Fixpunkt) und liegen daher windschief, d.h. $\dim(D(G)) \geq 3$.

Satz 7. *Sind $\alpha, \beta \in G$ mit $\alpha^2 = 1$ und sind $1, \alpha, \beta$ nicht kollinear, so bilden die Punkte $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ ein echtes Tetraeder.*

Beweis: Gäbe es eine Ebene $\langle x \rangle$, die mit diesen vier Punkten inzidierte, so folgte $x \in D$, $x\alpha = a \in D$, $x\beta = b \in D$ und $x\alpha\beta = c \in D$. Hieraus ersieht man, daß $\alpha = xa = ax$ ist, weil nach Voraussetzung $\alpha^2 = 1$ ist, ferner $c = x\alpha\beta = a\beta$, also $\beta = ac$ und $ab = x\alpha\, x\beta = \alpha\beta$, weil $x\alpha = \alpha x$ ist. Diese Darstellungen der Elemente $\alpha, \beta, \alpha\beta$ lehren, daß die Punkte $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ mit der Ebene $\langle a \rangle$ inzidieren. Es gibt aber nur eine Ebene, die mit den Punkten $1, \alpha, \beta$ inzidiert, so daß $a = x$ sein muß und somit $\alpha = 1$ im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $1, \alpha, \beta$ nicht kollinear sind.

Satz 8. *D ist invariant, wenn es in $D(G)$ eine Ebene $\langle \alpha \rangle$ gibt, deren Punkte involutorische Elemente ($\neq 1$) sind.*

Beweis: Es seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Mit β bezeichnen wir den Schnittpunkt der Ebene $\langle \alpha \rangle$ mit der Verbindungsgeraden von 1 und xy, d.h. für β gilt $\beta^2 = 1$ aber $\beta \neq 1$. Da die Punkte $1, xy$ mit $\langle x \rangle$ inzidieren, liegt auch β auf $\langle x \rangle$, d.h. es gilt $x\beta = x' \in D$, also $\beta = xx' = x'x$. Offenbar inzidieren die Punkte 1 und β mit der Ebene $\langle x' \rangle$, also auch der Punkt xy, d.h. es ist $x'xy = yxx' = y\beta \in D$. Hieraus erkennt man, daß die Punkte 1 und β und damit auch xy mit der Ebene $\langle y \rangle$ inzidieren. Deshalb gilt $yxy \in D$, also $yDy \subset D$ und, da D ein Erzeugendensystem ist, $\alpha D \alpha^{-1} \subset D$ für alle $\alpha \in G$.

Satz 9. *Das Element α liegt dann und nur dann im Zentrum Z von G, wenn für alle Punkte ξ von $\langle \alpha \rangle$ gilt $\xi^2 = 1$.*

Jedes Zentrumselement $\neq 1$ von G ist involutorisch.

Beweis: Es sei α ein Zentrumselement. Wir benutzen die Darstellung[6]) $\alpha = ab$ mit $a, b \in D$. Dann gilt $\alpha^2 = \alpha\, ab = a\alpha b = aabb = 1$. Die Ebene $\langle \alpha \rangle$ besteht aus allen Punkten der Menge αD. Für jeden Punkt $\xi = \alpha x$ dieser Ebene mit $x \in D$ ist also $\xi^2 = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 = 1$. Umgekehrt sei $\langle \alpha \rangle$ eine Ebene, so daß für jeden Punkt $\xi = \alpha^{-1} x$, $x \in D$, von $\langle \alpha \rangle$ gilt $\xi^2 = 1$. Nach Satz 7 aus [4] können wir $x = ab$ mit $a, b \in D$ setzen. Aus $\xi^2 = (\alpha^{-1} x)^2 = 1$ erhalten wir $\alpha = x\alpha^{-1}x = ab\alpha^{-1}ba = a\alpha a = \alpha^{-1}$, d.h. es gilt $\alpha = x\alpha x$ oder $x\alpha = \alpha x$ für alle $x \in D$ und somit $\alpha \in Z$.

---

[6]) Vgl. Satz 7 aus [4].

Satz 10. *Sind* $a_i \in D$ $(i = 1, 2, 3)$ *drei Punkte einer Geraden, so gilt* $(a_1 a_2 a_3)^2 = 1$.

Beweis: Die Ebene $\langle\alpha\rangle$ enthalte die drei kollinearen Punkte a_i und den Punkt $a_1 a_2 a_3$, d.h. es gelte $\alpha a_i = a_i \alpha^{-1} \in D$ und $\alpha a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1 \alpha^{-1} \in D$, also $\alpha a_1 a_2 a_3 = a_3 a_2 a_1 \alpha^{-1} = a_3 a_2 \alpha a_1 = a_3 \alpha^{-1} a_2 a_1 = \alpha a_3 a_2 a_1$, womit $(a_1 a_2 a_3)^2 = 1$ gezeigt ist.

Satz 11. *Gibt es zu dem Element* $a \in D$ *ein* $b \in D$ *mit* $b \neq a$ *und* $bab \in D$, *so gilt die Aussage* $xax \in D$ *für alle Punkte* x *der Verbindungsgeraden von* a *und* b.

Beweis: Nach Voraussetzung liegen die Punkte a und b auf der Ebene $\langle ba\rangle$ und somit alle Punkte x der Verbindungsgeraden von a und b. Daher ergibt sich $bax = xab \in D$, d.h. die Ebene $\langle xa\rangle$ inzidiert mit dem Punkt b. Da auch a auf der Ebene $\langle xa\rangle$ liegt, inzidiert x mit $\langle xa\rangle$, d.h. es gilt $xax \in D$.

Definition. Eine Gerade der Grundebene D heißt *normal*, wenn mit je drei Punkten a, b, c auch der Punkt abc auf der Geraden liegt.

Satz 12. *Sind* a, b *zwei verschiedene Elemente aus* D *mit* $aba \in D$ *und* $bab \in D$, *so ist die Verbindungsgerade von* a *und* b *normal.*

Beweis: Jede der Ebenen $\langle ab\rangle$ und $\langle ba\rangle$ inzidiert nach Voraussetzung mit den Punkten a und b, was $abx = x' \in D$, $x' \neq x$, für jeden Punkt x der Verbindungsgeraden von a und b zur Folge hat, also ist $ab = x'x$ und $ba = xx'$. Da der Punkt x' offenbar auf den Ebenen $\langle 1\rangle$ und $\langle ba\rangle = \langle xx'\rangle$ liegt, ist er kollinear mit den Punkten a und b. Infolgedessen erhält man $abx' = x'xx' \in D$. Nach dem vorangehenden Satz gilt also $yxy \in D$ für alle Punkte y der Verbindungsgeraden von a und b. Nun seien x, y, z drei beliebige Punkte der Verbindungsgeraden von a und b. Dann gilt $yxy \in D$ und $xyx \in D$, d.h. die Ebenen $\langle yx\rangle$ und $\langle xy\rangle$ enthalten die Verbindungsgerade, also ist $xyz = zyx \in D$. Der Punkt xyz inzidiert mit den Ebenen $\langle 1\rangle$ und $\langle yx\rangle$, er liegt daher auf der Verbindungsgeraden von a und b.

Satz 13. *Auf jeder Geraden* g *der Grundebene* D *gibt es mindestens einen Punkt* t, *so daß* $xtx \in D$ *gilt für alle Punkte* x *der Geraden* g.

Beweis: Es sei $\langle\alpha\rangle$ eine von $\langle 1\rangle$ verschiedene Ebene, die die Gerade g enthält, ferner y ein Punkt auf $\langle 1\rangle$, $\langle\alpha\rangle$ und $\langle\alpha^{-1}\rangle$. Dann gilt $\alpha y = t' \in D$ und $\alpha^{-1} y = t \in D$. Da $\alpha t = y \in D$ ist, liegt der Punkt t $(\neq y)$ auf der Geraden g und es gilt $yty = \alpha y = t' \in D$. Mit Hilfe von Satz 11 erkennt man jetzt die Gültigkeit von Satz 13.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Den Beweis des Hauptsatzes führen wir indirekt. Demnach setzen wir voraus, daß D nicht invariant ist. Aus dieser Voraussetzung leiten wir eine Reihe von Folgerungen her, die schließlich zu einem Widerspruch führen.

Einen Punkt $t \in D$ wollen wir *konjugierbar* nennen, wenn es ein $a \in D$ gibt mit $ata \in D$ aber $tat \notin D$.

Zunächst erkennt man aus Satz 12 und 13, daß D genau dann nicht invariant ist, wenn konjugierbare Punkte existieren. Ferner folgt aus Satz 8, daß $1 \in D$ ist. Hieraus ergibt sich sofort:

(14) *Sind $a, b, ab \in D$, so liegen die Punkte $1, a, b, ab$ auf einer Geraden.*

(15) *Liegen die Punkte $1, a, b \in D$ auf einer Geraden g, so ist $ab \in g \subset D$.*

Satz 14. *Ist $z \in D$ mit allen Punkten einer weder durch 1 noch durch z gehenden Geraden v der Grundebene D vertauschbar, so liegt z im Zentrum von G.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $zxz = x$ für alle $x \in D$ gilt. Jede durch z gehende Gerade g der Grundebene D ist nach Satz 12 normal,

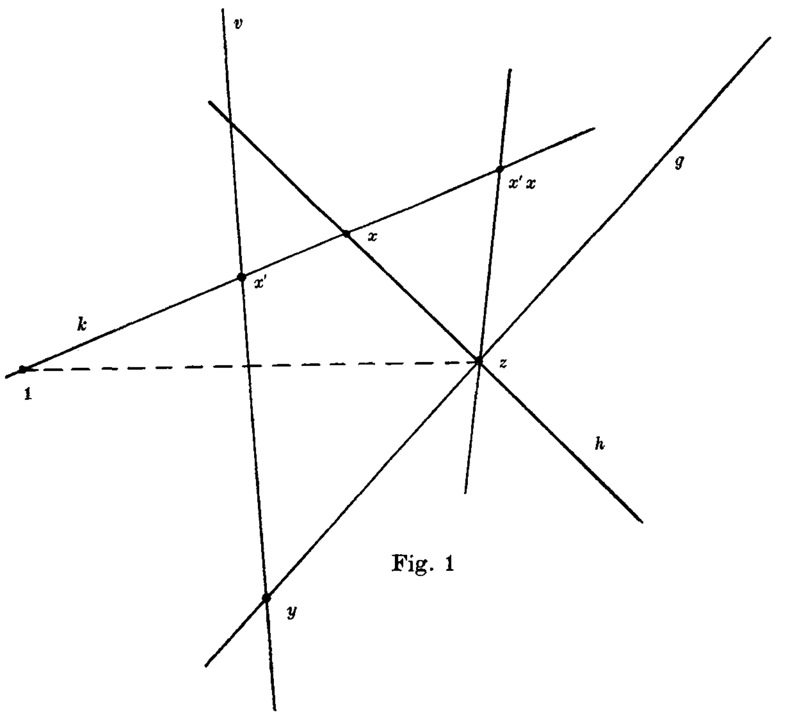

Fig. 1

denn für den Schnittpunkt y von g mit v gilt $yz = zy$, also $yzy = z \in D$ und $zyz = y \in D$ (Fig. 1). Aus (15) erkennt man, daß $zxz = x$ gilt, wenn x ein Punkt der Verbindungsgeraden von 1 und z ist. Nun sei x ein beliebiger Punkt aus D, der nicht auf der Verbindungsgeraden von 1 und z liegt. Da die Verbindungsgerade h von z und x normal ist, enthält sie den Punkt zxz. Den Schnittpunkt von v mit der Verbindungsgeraden k von 1 und x bezeichnen wir mit x'. Nach (15) ist $x'x$ ein Punkt von k, seine Verbindungsgerade mit z ist normal, also ist $zx'xz \in D$. Da x' auf v liegt, ist $zx'xz = x'zxz$, d.h. $x'zxz \in D$. Also inzidiert der Punkt zxz mit der Ebene $\langle x' \rangle$ und somit mit der Geraden k, die ja Schnittgerade der Ebenen $\langle 1 \rangle$ und $\langle x' \rangle$ ist. Da wir bereits festgestellt haben, daß zxz auch auf der Geraden h liegt, stimmen die beiden Punkte x und zxz überein, d.h. es gilt $zxz = x$.

Satz 15. *Zu jedem konjugierbaren Punkt t gibt es auf der Verbindungsgeraden von* 1 *und t einen Zentrumspunkt $z \neq 1, t$.*

Beweis: Es sei t ein konjugierbarer Punkt und $a \in D$ so gewählt, daß $ata \in D$ und $tat \notin D$. Mit g bezeichnen wir die Verbindungsgerade von a und t. Die Linkstranslation $(ta)^*$ führt g in eine Gerade g' über, die nach Satz 10 aus lauter involutorischen Punkten besteht, den Punkt t enthält und nicht in der Grundebene D liegt, da z.B. der Punkt $tat \in g'$ nicht in D liegt. Da g' mit der Grundebene nur den Punkt t gemein hat und $t \neq 1$ ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Ebene $\langle z \rangle$, die mit g' und 1 inzidiert. Daher ist $z \cdot 1 = z \in D$ und $z \neq t$; für $z = t$ wäre nämlich $t \cdot tat = at \in D$, also $at = ta$, d.h. $tat = a \in D$ entgegen unserer Annahme. Wendet man die Linkstranslationen $(ta)^*$ und z^* hintereinander auf die Gerade g an, so erhält man:

$$\begin{array}{ccccc} g & \xrightarrow{(ta)^*} & g' & \xrightarrow{z^*} & g'' \\ x & \longrightarrow & tax & \longrightarrow & ztax. \end{array}$$

Nach Wahl von z liegt die Gerade g'' in der Grundebene. Da $z \in D$ und $z \neq t$ gilt, kann z nicht auf g' liegen, d.h. es gilt $tax \neq z$ oder gleichbedeutend hiermit $ztax \neq 1$ für alle $x \in g$. Also liegt 1 nicht auf g''. Der Punkt z und die Gerade g'' erfüllen also die Voraussetzungen von Satz 14, da aus $(tax)^2 = 1$ und $(ztax)^2 = 1$ die Gleichung $ztax \cdot z = z \cdot ztax$ folgt. Also ist z ein Zentrumselement. Weil $\langle z \rangle$ mit $t \in g'$ inzidiert, d.h. $zt \in D$ gilt, liegen nach (14) die Punkte $1, t, z$ auf einer Geraden.

Satz 16. *Alle Zentrumselemente (mit Einschluß der* 1*) und alle konjugierbaren Punkte liegen auf einer Geraden i der Grundebene D.*

Beweis: ζ sei ein Zentrumselement. Da ζ nach Satz 9 involutiorisch ist, besteht die Ebene $\langle \zeta \rangle$ aus der Menge der involutorischen Punkte ζD und muß daher nach Satz 8 und der Annahme, daß D nicht invariant ist, mit 1 inzidieren, d.h. es gilt $\zeta \in D$. Sind nun z_1 und z_2 zwei Zentrumspunkte (also Punkte der Grundebene), so gilt auch $z_1 z_2 \in D$, d.h. $1, z_1, z_2, z_1 z_2$ sind wegen (14) kollinear. Nach Satz 15 liegen auch alle konjugierbaren Punkte mit den Zentrumspunkten auf einer Geraden.

Satz 17. *Die Punkte der Geraden i, auf der die Zentrumselemente und die konjugierbaren Punkte liegen, bilden einen Normalteiler von G.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $axa \in i$ gilt für alle $x \in i$ und $a \in D$. Ist $a \neq x$, so ist die Verbindungsgerade g von a und x entweder normal, d.h. es gilt $axa \in D$, oder x ist nach Satz 16 der konjugierbare Punkt von g, d.h. es ist ebenfalls $axa \in D$. Ist die Gerade g normal, so wählen wir einen Zentrumspunkt $z \neq 1$ aus. (Nach Satz 15 folgt aus der Existenz von konjugierbaren Punkten die von Zentrumspunkten $\neq 1$.) Dann ist (nach Satz 16 und (15)) zx ein Punkt der Geraden i. Daher gilt $z \cdot axa = azxa \in D$, d.h. $\langle z \rangle$ inzidiert mit axa. Die Ebenen $\langle 1 \rangle$ und $\langle z \rangle$ haben aber als Schnittgebilde die Gerade i. Daher gilt $axa \in i$.

Ist g nicht normal, d.h. x ein konjugierbarer Punkt, so zeigen wir, daß auch $axa = x'$ ein konjugierbarer Punkt, also nach Satz 16 Element von i ist. Zunächst gilt $ax'a = x \in D$ und $a \neq x'$. Wäre $x'ax' \in D$, so wäre die Verbindungsgerade k von a und x' nach Satz 12 normal, d.h. $ax'a = x$ wäre ein Punkt von k und daher auch $xax \in D$, also x nicht konjugierbar.

Satz 18. *Ein Punkt x der Geraden i liegt genau dann im Zentrum Z, wenn es ein $a \in D$, $a \notin i$, gibt mit $ax = xa$.*

Beweis: Die Verbindungsgerade g von a und x ist normal (Satz 12) und enthält nicht den Punkt 1. Für alle $y \in g$ folgt also $yxy \in g$ und $yxy \in i$ (Satz 17), also $yxy = x$. Auf i gibt es nach Satz 15 jedenfalls einen Zentrumspunkt $z \neq 1$. Nun liegt aber auch zx auf i und es gilt $y(xz) = (yx)z = (xy)z = (xz)y$. Für $x \neq z$ bedeutet dies nach Satz 14, daß $xz \in Z$ ist. Folglich ist $x \in Z$.

Satz 19. *Es gibt mindestens drei verschiedene Punkte im Zentrum Z von G.*

Beweis: Ist t ein konjugierbarer Punkt, $a \in D$ mit $a \notin i$, so liegen nach Satz 17 und (15) die Punkte t, ata, $t \cdot ata$ auf der Geraden i und es gilt daher:

$$a(tata) = (ata)\,ta = t(ata)\,a = (tata)\,a.$$

Nach Satz 18 liegt also $tata$ im Zentrum. Nun sei b ein weiteres Element aus D mit $b \notin i$, für das $tata = tbtb$, d.h. $t = abtba$ gelten möge. $\langle s \rangle$ sei eine Ebene, die mit ba und i inzidiert. Dann gilt $s \in D$ (weil $1 \in i$), $sba = r \in D$ und $st = ts \in D$ (weil $t \in i$). Hieraus ergibt sich

$t = abtba = rstsr = rtr$, d.h. $rt = tr$. Da $t \notin Z$, folgt hieraus nach Satz 18 $r \in i$. Also inzidiert $\langle s \rangle$ mit r, d.h. es gilt $sr = ba \in D$. Nach (14) liegen mit r auch die Punkte s und $sr = ba$ auf i. Da aber $a, b \notin i$ gilt, ist $ab = 1$, d.h. $a = b$. Sind also a, b zwei verschiedene Elemente aus D mit $a, b \notin i$, so sind die Zentrumselemente $tata$ und $tbtb$ verschieden und $\neq 1$.

Jetzt wollen wir von der in den Paragraphen 1 und 2 eingeführten Darstellung von Gruppenräumen durch normale Fastkörper Gebrauch machen. Hierbei wird uns der folgende Satz über normale Fastkörper von Nutzen sein.

Satz 20. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein normaler Fastkörper über einem Schiefkörper K und $\mathfrak{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{A}$. Hat K die Charakteristik 2 und gibt es einen echten Teilfastkörper $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{N}^*$ Normalteiler von $\mathfrak{A}^*$ ist, so ist $\mathfrak{Z}$ ein Körper.*

Beweis: Zu zeigen ist, daß mit $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{Z}$ auch $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \in \mathfrak{Z}$ ist. Da $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{A}$ ist, gibt es ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{N}$. Das Element

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)(1 + \mathfrak{x}) + (1 + \mathfrak{x})(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)$$

$$= \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)\mathfrak{x} + (1 + \mathfrak{x})\mathfrak{z}_1 + (1 + \mathfrak{x})\mathfrak{z}_2 = (\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)\mathfrak{x} + \mathfrak{x}(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)$$

liegt sowohl in $\mathfrak{N}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{N}$ als auch in $\mathfrak{N}(1 + \mathfrak{x}) = (1 + \mathfrak{x})\mathfrak{N}$, also ist entweder $\mathfrak{y}\mathfrak{N} = \mathfrak{x}\mathfrak{N} = (1 + \mathfrak{x})\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{y} = 0$. Der erste Fall kann nicht eintreten, da sonst $\mathfrak{x}^{-1}(1 + \mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^{-1} + 1 \in \mathfrak{N}$ und somit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ wäre. Aus $\mathfrak{y} = 0$ folgt aber $(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{N}$.

Das Element $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ ist aber auch mit allen Elementen $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}^*$ vertauschbar. Dies folgt aus der Tatsache, daß sich $\mathfrak{x}$ in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \notin \mathfrak{N}$ darstellen läßt.

Von jetzt an sei stets vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A}$ der normale Fastkörper eines Gruppenraumes $D(G)$ ist, der dadurch gekennzeichnet ist, daß A und B erfüllt sind und D nicht invariant ist.

Aus den Aussagen (10), (11), Satz 17 und aus $\varphi(\mathfrak{Z}^*) \subset Z \subset i$ (wobei $\mathfrak{Z}$ bzw. Z das Zentrum von $\mathfrak{A}$ bzw. G ist) ergibt sich

(16) $\varphi^{-1}(i) \cup \{0\} = \mathfrak{N}$ *ist ein invarianter normaler Teilfastkörper von $\mathfrak{A}$ mit der Dimension 2 über dem Grundkörper K und $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{Z}$.*

Weiterhin erkennt man im Anschluß an (10) und (11):

(17) *Aus $x \in D$ und $\mathfrak{x} \in \varphi^{-1}(x)$ folgt $\mathfrak{x}^2 \in K^*$.*

Da insbesondere $i \subset D$ ist, entnimmt man hieraus

(18) *Aus $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{x}^2 \in K$.*

(19) *Für das Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}$ gilt $\mathfrak{Z} \not\subset K$. Stellen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z} + 1$ Zentrumselemente $\neq 1$ von G dar, so sind $\mathfrak{z}, \mathfrak{z} + 1 \in \mathfrak{Z}$.*

Beweis: Es seien $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$ und $z_1, z_2 \neq 1$ (Satz 19) und $\mathfrak{z}$ so gewählt, daß $\varphi(\mathfrak{z}) = z_1$ und $\varphi(\mathfrak{z} + 1) = z_2$ ist. Nach (16) gibt es ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{x} \notin \mathfrak{N}$. Setzen wir $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, so gilt:

$$\begin{aligned}(1 + \mathfrak{z})(1 + \mathfrak{x}) &= 1 + \mathfrak{z} + [1 + \mathfrak{z}, \mathfrak{x}](\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\mathfrak{z}) \\ &= [1 + \mathfrak{z}, 1 + \mathfrak{x}]\{1 + \mathfrak{x} + [1 + \mathfrak{x}, \mathfrak{z}](\mathfrak{z} + [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}]\mathfrak{x}\mathfrak{z})\}.\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{z}$ und $1 + \mathfrak{z}$ Zentrumselemente von G repräsentieren, liegen alle hier vorkommenden Kommutatoren in K. Die Elemente $1, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\mathfrak{z}$ sind nach Satz 7 linear unabhängig, da jedes Zentrumselement $\neq 1$ von G involutorisch ist (Satz 16). Koeffizientenvergleich ergibt

$$[1 + \mathfrak{z}, 1 + \mathfrak{x}] = [1 + \mathfrak{x}, \mathfrak{z}] = [1 + \mathfrak{z}, \mathfrak{x}] = [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}] = 1.$$

Also ist $\mathfrak{z}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}$. Daß auch für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ $\mathfrak{z}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{z}$ gilt, ergibt sich wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 20. Natürlich ist auch $\mathfrak{z} + 1 \in \mathfrak{Z}$.

Nun sei $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z} \notin K$, dann liegt $1 + \mathfrak{z} \in \mathfrak{N}$. Beachten wir noch (18), so erkennen wir $(1 + \mathfrak{z})^2 = 1 + \mathfrak{z} + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}^2 \in K$, also $2\mathfrak{z} \in K$ und damit

(20) *Die Charakteristik von K ist 2.*

(21) *Ist $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z} \notin K$, so ist $\mathfrak{z}^2$ kein Quadrat in K.*

Beweis: Wäre $\mathfrak{z}^2 = \lambda^2$ mit $\lambda \in K$, d.h. $\mathfrak{z}^2$ ein Quadrat in K, so wäre der Punkt $1 + \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}$ ein Fixpunkt bei der Abbildung $\mathfrak{z}^*$, denn

$$\mathfrak{z}^*\left(1 + \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}\right) = \mathfrak{z} + \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}^2 = \lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\mathfrak{z}^2 + \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}\right) = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}\mathfrak{z}\right).$$

Satz 21. *$\mathfrak{N}$ ist ein kommutativer Körper.*

Beweis: Nach (16) ist $\mathfrak{N}$ ein Fastkörper. Da K kommutativ[7]) ist, genügt es zu zeigen, daß $(1 + \lambda\mathfrak{z})(1 + \mu\mathfrak{z}) = (1 + \mu\mathfrak{z})(1 + \lambda\mathfrak{z})$ für $\lambda, \mu \in K$ und ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{z} \notin K$ gilt. Da $ab = ba$ für je zwei Punkte a und b von i gilt, ist

(22) $(1 + \lambda\mathfrak{z})(1 + \mu\mathfrak{z}) = \varrho(1 + \mu\mathfrak{z})(1 + \lambda\mathfrak{z})$ *mit* $\varrho \in K$.

Nun berechnen wir

$$(1 + \lambda\mathfrak{z})(1 + \mu\mathfrak{z}) = 1 + \lambda\mathfrak{z} + (1 + \lambda\mathfrak{z})\mu\mathfrak{z} = 1 + \lambda\mathfrak{z} + \mu^\lambda\mathfrak{z} + \mu^\lambda\lambda\mathfrak{z}^2,$$

---

[7]) K ist kommutativ, da es wegen $1 \in D$ nach (5) aus [4] in $D(G)$ ein Nullsystem gibt.

wobei μ^λ das Bild von μ bei dem zu $1 + \lambda\mathfrak{z}$ gehörigen Automorphismus λ^* bezeichnet. Formt man entsprechend die rechte Seite von (22) um, so erhält man durch Koeffizientenvergleich:

$$(\lambda + \mu^\lambda)(1 + \mu\lambda^\mu\mathfrak{z}^2) = (\mu + \lambda^\mu)(1 + \mu^\lambda\lambda\mathfrak{z}^2), \text{ d.h.}$$

$$\lambda + \mu^\lambda + \mu + \lambda^\mu = \mathfrak{z}^2(\mu\lambda\lambda^\mu + \mu\mu^\lambda\lambda^\mu + \lambda\mu\mu^\lambda + \lambda\mu^\lambda\lambda^\mu). \tag{23}$$

Setzt man nun für λ und μ Quadrate ein, so ergibt sich wegen (21):

$$\lambda + \lambda^\mu = \mu + \mu^\lambda \qquad \text{und}$$

$$\mu\mu^\lambda(\lambda + \lambda^\mu) = \lambda\lambda^\mu(\mu + \mu^\lambda).$$

Wäre nun $\lambda + \lambda^\mu \neq 0$, so folgte $\mu\mu^\lambda = \lambda\lambda^\mu$ und, wenn man hieraus λ^μ eliminiert: $\mu\mu^\lambda = \lambda(\lambda + \mu + \mu^\lambda)$, also $(\mu + \lambda)\mu^\lambda = \lambda(\mu + \lambda)$.
Somit wäre $\mu^\lambda = \lambda$ für alle Quadrate $\mu \neq \lambda$, was nicht sein kann, weil λ^* ein Automorphismus ist. Wir erhalten also

$$\lambda^\mu = \lambda \text{ für alle Quadrate } \lambda \text{ und } \mu \text{ aus } K.$$

Ist σ ein Nichtquadrat aus K und μ weiterhin ein Quadrat aus K, so gilt $(\sigma^2)^\mu = \sigma^2$, also $(\sigma^\mu)^2 = \sigma^2$ und, da K die Charakteristik 2 hat, $\sigma^\mu = \sigma$. Folglich ist μ^* der identische Automorphismus, wenn μ ein Quadrat in K ist.

Setzen wir jetzt in (23) für μ ein Quadrat aus K und für λ ein beliebiges Element aus K ein, so vereinfacht sich (23) zu

$$\mu^\lambda + \mu = \mathfrak{z}^2\lambda^2(\mu + \mu^\lambda).$$

Wegen (21) folgt hieraus $\mu^\lambda = \mu$ für alle $\lambda \in K$. Von der Einschränkung daß μ ein Quadrat sein muß, machen wir uns wie eben frei. Da alle auftretenden Automorphismen gleich dem identischen sind, gilt also $(1 + \lambda\mathfrak{z})(1 + \mu\mathfrak{z}) = 1 + \lambda\mathfrak{z} + \mu\mathfrak{z} + \mu\lambda\mathfrak{z}^2 = (1 + \mu\mathfrak{z})(1 + \lambda\mathfrak{z})$, womit Satz 21 bewiesen ist.

(24) *Ist* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{a}^2 \in K$, *so gilt* $\alpha^2 = 1$ *für den zu* $\mathfrak{a}^*$ *gehörigen Automorphismus* α,

denn es ist $\mathfrak{a}^2\lambda = \lambda^{\alpha^2}\mathfrak{a}^2$ für jedes $\lambda \in K$, also $\lambda = \lambda^{\alpha^2}$, weil $\mathfrak{a}^2 \in K$ ist.

(25) *Ist* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}^2, \lambda \in K$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, *so gilt* $(1 + \lambda\mathfrak{z})\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{z}\mathfrak{a}$.

Beweis: Da $1 + \lambda\mathfrak{z} \in \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$ Normalteiler von $\mathfrak{A}^*$ ist, gilt

$$(1 + \lambda\mathfrak{z})\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\varrho + \mu\mathfrak{z}) \text{ mit } \varrho, \mu \in K. \tag{26}$$

Zweimalige Anwendung dieser Gleichung ergibt

$$(1 + \lambda\mathfrak{z})^2\mathfrak{a} = (1 + \lambda\mathfrak{z})\mathfrak{a}(\varrho + \mu\mathfrak{z}) = \mathfrak{a}(\varrho + \mu\mathfrak{z})^2.$$

Wegen (18) ist $(\varrho + \mu\mathfrak{z})^2 \in K$, also ist $(1 + \lambda\mathfrak{z})^2\, \mathfrak{a} = \{(\varrho + \mu\mathfrak{z})^2\}^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}$, wenn wir für $\tau \in K$ mit $\tau^{\mathfrak{a}}$ das Bild von τ bei dem zu $\mathfrak{a}^*$ gehörigen Automorphismus bezeichnen. Für $\mathfrak{a} \neq 0$ ist also $(1 + \lambda\mathfrak{z})^2 = \{(\varrho + \mu\mathfrak{z})^2\}^{\mathfrak{a}}$ und, wenn man Satz 21 beachtet, $1 + \lambda^2\mathfrak{z}^2 = (\varrho^2 + \mu^2\mathfrak{z}^2)^{\mathfrak{a}}$. Setzen wir jetzt $\mathfrak{z} \notin K$ voraus und beachten $\mathfrak{a}\mathfrak{z}^2 = (\mathfrak{z}^2)^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{z}^2\mathfrak{a}$ sowie (20) und (21), so ergibt sich $(\varrho^2)^{\mathfrak{a}} = 1$, also $\varrho^{\mathfrak{a}} = 1$, also $\varrho = 1$, und ferner $\lambda = \mu^{\mathfrak{a}}$, also $\lambda^{\mathfrak{a}} = \mu$ wegen (24). Setzen wir dies in (26) ein, so erhalten wir mit Hilfe von (24)

$$(27) \qquad (1 + \lambda\mathfrak{z})\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(1 + \lambda^{\mathfrak{a}}\mathfrak{z}) = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{z}\mathfrak{a}.$$

(28) *Ist* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}^2 \in K$, $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{N}$ und $\lambda^{\mathfrak{a}} = \lambda$, *so ist* $\lambda \in \mathfrak{Z} \cap K$.

Beweis: Unter den jetzigen Voraussetzungen gilt $(1 + \lambda\mathfrak{z})\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(1 + \lambda\mathfrak{z})$ nach (27), wenn $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$. Ist $\mathfrak{z} \notin K$, so stellt $1 + \lambda\mathfrak{z}$ nach Satz 18 ein Zentrumselement der Gruppe G dar. Nach (19) ist also $1 + \lambda\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ und nach Satz 20 auch $\lambda \in \mathfrak{Z}$.

(29) *Es ist* $K \subset \mathfrak{Z}$.

Zum Beweis wählen wir ein $\mathfrak{a}_1 \in \varphi^{-1}(D)$ (vgl. (17)) mit $\mathfrak{a}_1 \notin \mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{a}_1^2 \in K$. Für die Elemente $\mathfrak{a}_2 = 1 + \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ gilt dann (wegen (15)) ebenfalls $\mathfrak{a}_2^2, \mathfrak{a}_3^2 \in K$, $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \notin \mathfrak{N}$. Nach (24) und (28) liegen für jedes $\lambda \in K$ die Elemente $\lambda + \lambda^{\mathfrak{a}_i} = \xi_i(\lambda)$ und $\lambda \cdot \lambda^{\mathfrak{a}_i} = \zeta_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3)$ in $\mathfrak{Z} \cap K$, d.h. jedes $\lambda \in K$ ist Nullstelle der quadratischen Polynome $p_i(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\xi_i(\lambda) + \zeta_i(\lambda) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, deren Koeffizienten in $\mathfrak{Z} \cap K$ enthalten sind. Für jedes $\lambda \in K$ mit $\lambda \notin \mathfrak{Z}$ sind diese drei Polynome irreduzibel über $\mathfrak{Z} \cap K$, d.h. es gilt $\xi_1(\lambda) = \xi_2(\lambda) = \xi_3(\lambda)$ und $\zeta_1(\lambda) = \zeta_2(\lambda) = \zeta_3(\lambda) = \lambda \cdot \lambda^{\mathfrak{a}_i}$, d.h. $\lambda^{\mathfrak{a}_1} = \lambda^{\mathfrak{a}_2} = \lambda^{\mathfrak{a}_3}$. Da $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ ist, folgt hieraus wegen (24) $\lambda^{\mathfrak{a}_3} = (\lambda^{\mathfrak{a}_1})^{\mathfrak{a}_2} = (\lambda^{\mathfrak{a}_2})^{\mathfrak{a}_2} = \lambda$, also nach (28) $\lambda \in \mathfrak{Z} \cap K$ und damit $K \subset \mathfrak{Z}$.

Aus Satz 20 und den Aussagen (16), (19) und (29) erkennt man jetzt unmittelbar, daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$ ist. Die Gerade $i \subset D \subset G$ besteht also nur aus Zentrumselementen von G. Diese Aussage steht aber im Widerspruch zu der Aussage, daß es konjugierbare Punkte gibt. Damit ist schließlich gezeigt, daß D invariant ist.

§ 5. Darstellung elliptischer Gruppenräume durch Quaternionen

Bekanntlich lassen sich die Bewegungsgruppen der ebenen elliptischen Geometrien und damit auch die elliptischen Gruppenräume der Charakteristik $\neq 2$ durch Quaternionen darstellen. Mit Hilfe der hier gewonnenen Fastkörperdarstellung von Inzidenzgruppen soll jetzt eine direkte Herleitung dieses Resultats erbracht werden. Gleichzeitig wollen wir zeigen, daß auch die Bewegungsgruppen der in [4] eingeführten elliptischen Geometrien der Charakteristik 2 und ihre Gruppenräume eine Darstellung durch verallgemeinerte Quaternionen besitzen.

Nachdem wir in dem Hauptsatz gezeigt haben, daß aus den Eigenschaften A und B auch C folgt, wissen wir, daß in jedem elliptischen Gruppenraum auch das schwache rechtsseitige Distributivgesetz (12) gilt, d.h. daß auch die Rechtstranslationen Projektivitäten sind.

Zunächst setzen wir nur voraus, daß $\mathfrak{A}$ ein normaler Fastkörper über einem Schiefkörper K ist und $\mathfrak{A}$ dem schwachen Distributivgesetz (12) genügt. Wie im Beweis von Satz 3 bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{x}}$ diejenige semilineare Abbildung, die die Projektivität $\bar{x}\colon y \to yx$ induziert und für die $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ ist, wenn $\mathfrak{x}$ ein Koordinatenvektor von x ist. Das Element $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}} \in K$, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{A}$, sei durch die Gleichung $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ definiert. Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir das schwache Distributivgesetz (12) in der Form

$$(30) \qquad (\mathfrak{x} + \mathfrak{y})\,\mathfrak{z} = (\lambda^{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}})^{-1}\lambda^{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}\mathfrak{z} + (\lambda^{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}})^{-1}\lambda^{\mathfrak{z}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

schreiben.

(31) *Für alle* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{A}$ *ist* $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}(\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{y}} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}$.

Beweis: Die beiden Abbildungen $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}^*$ und $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}^*\bar{\mathfrak{x}}$ sind identisch, denn es ist $\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}^*\mathfrak{e} = \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ und $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}^*\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{e} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ und beide Abbildungen induzieren dieselbe Projektivität in der zugehörigen Inzidenzgruppe. Daher ist

$$\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y}^*\mathfrak{z} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}^*\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{z} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}^*\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}\mathfrak{x} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}(\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{y}}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

d.h. $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{y}}(\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{z}})^{\mathfrak{y}}$.

(32) *Ist* $\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$ *für alle* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *eines Erzeugendensystems* $\mathfrak{E}$ *von* $\mathfrak{A}^*$, *so ist* $\mathfrak{A}$ *ein Schiefkörper.*

Beweis: Zuerst folgt aus (31) für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, daß $\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{x}} = 1$ ist. Aus der Tatsache, daß sich in (30) $\mathfrak{z}$ als Produkt von Elementen aus $\mathfrak{E}$ schreiben läßt, folgt $(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})\,\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\mathfrak{z} + \mathfrak{y}\mathfrak{z}$, d.h. $\mathfrak{A}$ ist ein Schiefkörper.

(33) *Gibt es zu* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}^*$ *ein* $\mathfrak{y} \in \mathfrak{A}^*$, *mit* $\lambda^{\mathfrak{x}}_{\mu\mathfrak{y}} = 1$ *für alle* $\mu \in K$, *so ist der zu* $\bar{\mathfrak{x}}$ *gehörige Automorphismus der identische.*

Beweis: Es ist $\mu\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}\mu\mathfrak{y} = \mu^{\bar{\mathfrak{x}}}\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = \mu^{\bar{\mathfrak{x}}}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$, d.h. $\mu = \mu^{\bar{\mathfrak{x}}}$.

Jetzt setzen wir voraus, daß $\mathfrak{A}$ der zu einem elliptischen Gruppenraum $D(G)$ gehörige normale Fastkörper ist.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Koordinatenvektor des Punktes $x \in G$, so bezeichne $\langle\mathfrak{x}\rangle$ die Menge der Koordinatenvektoren von Punkten der Ebene $\langle x\rangle$. Da D ein Erzeugendensystem von G ist (vgl. [4]), ist $\langle\mathfrak{e}\rangle$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$. Um zu zeigen, daß unter den jetzigen Voraussetzungen $\mathfrak{A}$ ein Schiefkörper ist, brauchen wir wegen (32) nur den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 22. *Es gilt* $\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$ *für alle* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$.

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

(34) *Ist $a \in D$ und $a \neq 1$, so induziert die Abbildung $a^*\bar{a}$ auf der Ebene $\langle 1 \rangle$ bzw. $\langle a \rangle$ eine projektive Spiegelung an der Geraden $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$ und dem Punkt a bzw. der Geraden $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$ und dem Punkt 1. Der Automorphismus von $a^*\bar{a}$ ist ein innerer.*

Beweis: Offenbar sind wegen der Invarianz von D die Ebenen $\langle 1 \rangle$ und $\langle a \rangle$ Fixebenen der Abbildung $a^*\bar{a}$. Die Schnittgerade $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$ bleibt punktweise fest, denn aus $x \in \langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$, d.h. $x, ax = xa \in D$, folgt $a^*\bar{a}x = axa = x$. Hieraus ergibt sich, daß die Projektivität $a^*\bar{a}$ linear ist, also der Automorphismus von $a^*\bar{a}$ der identische. Da außerdem 1 und a Fixpunkte sind und $(a^*\bar{a})^2 = 1$ ist, bleibt noch zu zeigen, daß $a^*\bar{a}$ auf keiner der beiden Ebenen $\langle 1 \rangle$ und $\langle a \rangle$ die Identität induziert. Gibt es in D ein b mit $(ab)^2 \neq 1$, so ist weder der Punkt b der Ebene $\langle 1 \rangle$ noch der Punkt ab der Ebene $\langle a \rangle$ Fixpunkt bei $a^*\bar{a}$. Um zu zeigen, daß es zu jedem $a \in D$ ein $b \in D$ gibt mit $(ab)^2 \neq 1$, wählen wir auf Grund von B zwei Elemente $x, y \in D$ mit $(xy)^2 \neq 1$. Dann induziert die Projektivität $x^*\bar{x}$ in der Grundebene eine Spiegelung an der Geraden $\langle x \rangle \cap \langle 1 \rangle$ und dem Punkt x.

Für jeden Punkt $z \in D$ mit $z \neq x$, $z \notin \langle x \rangle \cap \langle 1 \rangle$ gilt daher $x^*\bar{x}z = xzx \neq z$, d.h. $(xz)^2 \neq 1$. Ist z ferner so gewählt, daß es nicht auf der Verbindungsgeraden von x und y liegt, so schneiden sich die Ebenen $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ und $\langle z \rangle$ für $1 \notin D$ in genau einem Punkt $v \notin D$, denn aus $v \in D$ und $xv, yv, zv \in D$ folgte wegen der Invarianz von D auch $vx, vy, vz \in D$, d.h. x, y, z lägen auf der Geraden $\langle v \rangle \cap \langle 1 \rangle$ entgegen der Wahl von x, y und z. Für $1 \in D$ haben die Ebenen $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \langle 1 \rangle$ nur den Punkt 1 gemeinsam.

Wäre nun $(ax)^2 = (ay)^2 = (az)^2 = 1$, so wäre a Fixpunkt der Projektivitäten $x^*\bar{x}$, $y^*\bar{y}$, $z^*\bar{z}$ (diese induzieren in der Grundebene nicht die Identität, da $(xy)^2 \neq 1$ und $(xz)^2 \neq 1$ ist) und müßte somit, weil $a \neq x, y, z$ vorausgesetzt werden darf, auf den Geraden $\langle x \rangle \cap \langle 1 \rangle$, $\langle y \rangle \cap \langle 1 \rangle$, $\langle z \rangle \cap \langle 1 \rangle$ liegen, die sich aber für $1 \notin D$ nicht in einem Punkt schneiden, während sie für $1 \in D$ nur den Punkt $1 \neq a$ gemeinsam haben. Also gilt mindestens eine der Aussagen $(ax)^2 \neq 1$, $(ay)^2 \neq 1$, $(az)^2 \neq 1$, was noch zu zeigen war.

Wir müssen nun die beiden Fälle $1 \notin D$ und $1 \in D$ getrennt behandeln. Als erstes setzen wir $1 \notin D$ voraus.

(35) *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ *gilt* $\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = -[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]^{-1} = -[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Beweis: Unter den Voraussetzungen von (35) ist der Kommutator $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \in K$ und da $\mathfrak{e}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{a} \rangle$ ist, ist auch $\mathfrak{e} + \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{a} \rangle$. Jetzt wenden wir $\mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}}$ auf $\mathfrak{e} + \mathfrak{b}$ an:

$\mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}}(\mathfrak{e} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{e} + \mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a} \lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{b} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 + (\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a} [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \mathfrak{a} \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2 + (\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}$. Wegen (34) gilt also $(\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]^{\mathfrak{a}} = -1$, woraus die Behauptung folgt.

Aus (35) erhalten wir noch

(36) *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ *gilt* $\bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{b} = -\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

(37) $\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = 1$ *für jedes* $\mathfrak{a} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$.

Beweis: $\mathfrak{b}$ sei ein beliebiger Koordinatenvektor aus $\langle \mathfrak{e} \rangle \cap \langle \mathfrak{a} \rangle$. Dann gilt $\mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^* \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b} = (\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^2 \mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}$.

Auf Grund von (34) folgt $\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = 1$.

Nun sei $\mathfrak{a} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$, $\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle \cap \langle \mathfrak{a} \rangle$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (d.h. es gilt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$) und $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$. Wir berechnen $\mathfrak{d}^2$, wobei wir (35), (36) und (37) berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}^2 &= \mathfrak{d}\mathfrak{a} + \mathfrak{d}\mathfrak{b} + \mathfrak{d}\mathfrak{c} = (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1} \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{d} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1} \bar{\mathfrak{b}} \mathfrak{d} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}})^{-1} \bar{\mathfrak{c}} \mathfrak{d} \\ &= (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1} (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}) + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1} (-\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ &\qquad + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}})^{-1} (-\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{d}^2$ in K liegt und wegen der Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\begin{aligned} (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1} \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} - (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}})^{-1} &= 0, \\ -(\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}})^{-1} (\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{a}} &= 0, \\ -(\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1} \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

(38) $\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = 1$ *für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$.

Weiter folgt aus dem obigen Gleichungssystem

(39) $\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} = \lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} = \lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}$ *für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ *und* $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

(40) *Für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ *ist* $\lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}} \lambda_{\mathfrak{x}\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = \lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

Beweis: Die Abbildungen $\bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{a}}$ und $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ sind gleich, denn es ist $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, \mathfrak{e} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{e} = \bar{\mathfrak{b}} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nach (38) und beide Abbildungen induzieren dieselbe Projektivität. Daher ist $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, \mathfrak{x} = \lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \mathfrak{x} \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}} \bar{\mathfrak{a}} \mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{x} \mathfrak{a} = \lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}} \lambda_{\mathfrak{x}\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \mathfrak{x} \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, also $\lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \lambda_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}} \lambda_{\mathfrak{x}\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, weil der zu $\bar{\mathfrak{b}}$ gehörige Automorphismus wegen (33) und (38) der identische ist.

Setzen wir in (40) $\mathfrak{x} = \mathfrak{d}$ und benutzen (39), so folgt

(41) $$\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}} = 1 \textit{ für } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle \textit{ und } \mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Setzt man in (31) $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}$ und benutzt (38) sowie (41), so erhält man

(42) $$\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{d}} = 1 \textit{ für } \mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} \textit{ und } \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle.$$

(43) *Der zu $\mathfrak{a} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ gehörige Automorphismus ist der identische.*

Wählt man nämlich ein $\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$, so sieht man zunächst mit Hilfe von (33) und (38), daß der zu $\bar{\mathfrak{a}}$ gehörige Automorphismus der identische ist. Zusammen mit (36) erkennt man dann $\bar{\mathfrak{a}}(\beta\mathfrak{b}) = \beta\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = -\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{a}}(\beta\mathfrak{b}) = -\mathfrak{a}\beta\mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a}\beta = \beta\mathfrak{a}$.

(44) *Der Körper K ist kommutativ.*

Denn sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ nach (36) und (38); ferner gilt $\alpha\mathfrak{a}\,\beta\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ für beliebige $\alpha, \beta \in K^*$ und daher $\alpha\mathfrak{a}\,\beta\mathfrak{b} = -\beta\mathfrak{b}\,\alpha\mathfrak{a}$, also wegen (43) $\alpha\beta\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\beta\alpha\,\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, d.h. $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Schließlich erhalten wir $\lambda^{\alpha\mathfrak{a}}_{\beta\mathfrak{b}} = \lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$ für beliebige $\alpha, \beta \in K$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$. Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, daß $\overline{\alpha\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}\bar{\alpha}$ ist, denn es ist $\overline{\alpha\mathfrak{a}}\mathfrak{e} = \alpha\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}\bar{\alpha}\mathfrak{e} = \bar{\mathfrak{a}}\alpha\mathfrak{e} = \alpha\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{e} = \alpha\mathfrak{a}$. Dann ist $\overline{\alpha\mathfrak{a}}\beta\mathfrak{b} = \lambda^{\alpha\mathfrak{a}}_{\beta\mathfrak{b}}\beta\mathfrak{b}\alpha\mathfrak{a} = \lambda^{\alpha\mathfrak{a}}_{\beta\mathfrak{b}}\beta\alpha\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $\overline{\alpha\mathfrak{a}}\beta\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{a}}\bar{\alpha}\beta\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{a}}\alpha\beta\mathfrak{b} = \alpha\beta\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \alpha\beta\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, also $\lambda^{\alpha\mathfrak{a}}_{\beta\mathfrak{b}} = \lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$.

Durch Umnormieren der Koordinatenvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in (42) können wir von jedem Punkt d der Ebene $\langle 1 \rangle$, der auf keiner der Ebenen $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle ab \rangle$ liegt, einen Koordinatenvektor in der Gestalt $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ erhalten. Hiermit ergibt sich $\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{d}} = 1$ für alle $\mathfrak{d} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ und $\mathfrak{d} \notin \langle \mathfrak{a} \rangle, \langle \mathfrak{b} \rangle, \langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle$. Indem man schließlich noch den Punkt a auf der Geraden $\langle b \rangle \cap \langle 1 \rangle$ abändert, folgt $\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{d}} = 1$ für alle $\mathfrak{d} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ mit $\mathfrak{d} \notin \langle \mathfrak{b} \rangle$. Zusammen mit (37) und (38) ergibt sich also für $1 \notin D$ der Satz 22.

Nun sei $1 \in D$. Nach (34) induziert $a^*\bar{a}$ für jedes $a \in D$, $a \neq 1$, in der Ebene $\langle 1 \rangle$ eine Spiegelung an der Geraden $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$ und dem Punkt a. Wegen $1 \in D$ liegt aber a auf $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$; deshalb ist die Charakteristik des Koordinatenkörpers 2. Da die Punkte 1 und a auf der Fixgeraden $\langle 1 \rangle \cap \langle a \rangle$ von $a^*\bar{a}$ liegen und da $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}^2\mathfrak{e}$ gilt, folgt $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2\mathfrak{a}$. Andererseits ist $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^2 = (\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^2\mathfrak{a}$. Also ist

(45) $$\lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}} = 1 \textit{ für } \mathfrak{a} \in \langle \mathfrak{e} \rangle.$$

Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$, so daß $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig sind. Nach (34) muß sich $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ in der Form $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}$ mit $\alpha, \beta \in K$ darstellen lassen. Da $(\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}})^2$ im Gruppenraum $D(G)$ die Identität induziert, können wir mit Hilfe von (45) und der Tatsache, daß K die Charakteristik 2 hat, β berechnen:

$$(\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}})^2\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{a} + \beta(\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}), \text{ d.h. } \beta = \mathfrak{a}^2.$$

Daher ist $\mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \alpha\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}$, also

(46) $$\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \varepsilon\mathfrak{e} + \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

wobei $\varepsilon = \alpha^{\mathfrak{a}}$ gesetzt ist.

Jetzt zeigen wir

(47) $\lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = 1$ *für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle\mathfrak{e}\rangle$; $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *linear unabhängig.*

Beweis: Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{d} = \mathfrak{e} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Dann ist unter Beachtung von (46)

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}^2 &= \mathfrak{d} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{d} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1}\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{d} \\ &= \mathfrak{e} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2 + \varepsilon\mathfrak{e} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ &\quad + (\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}})^{-1}(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 + \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{d}^2 \in K$ ist und da $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \notin \langle\mathfrak{e}\rangle$[8]) linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} = 1, \quad \lambda_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = 1.$$

Aus (46) und (47) ergibt sich noch

(48) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \varepsilon\mathfrak{e}.$$

Aus (33) und (47) ergibt sich hier

(49) *Der zu* $\bar{\mathfrak{x}}$ *mit* $\mathfrak{x} \in \langle\mathfrak{e}\rangle$ *und* $\mathfrak{x} \notin K\mathfrak{e}$ *gehörige Automorphismus ist der identische.*

Ferner gilt:

(50) *Der zu* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{a} \in \langle\mathfrak{e}\rangle$ *und* $\mathfrak{a} \notin K\mathfrak{e}$ *gehörige Automorphismus ist der identische.*

Nach (49) und (46) gilt für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle\mathfrak{e}\rangle$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}$ linear unabhängig:

$$\bar{\mathfrak{a}}\beta\mathfrak{b} = \beta\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \beta(\varepsilon(\mathfrak{b})\mathfrak{e} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \beta\varepsilon(\mathfrak{b})\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

und $\bar{\mathfrak{a}}(\beta\mathfrak{b}) = \varepsilon(\beta\mathfrak{b})\mathfrak{e} + \mathfrak{a}\beta\mathfrak{b}$, also $\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\beta\mathfrak{b}$, also $\beta\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\beta$.

(51) *Der Körper K ist kommutativ*[9]).

Nach (48) und (50) gilt für die obigen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$: $(\alpha\mathfrak{a})(\beta\mathfrak{b}) + (\beta\mathfrak{b})(\alpha\mathfrak{a}) = \alpha\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \beta\alpha\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \alpha\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \beta\alpha(\varepsilon\mathfrak{e} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \alpha\beta\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \beta\alpha\varepsilon\mathfrak{e} + \beta\alpha\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in K\mathfrak{e}$. Hieraus folgt $(\alpha\beta + \beta\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$, also $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ und somit $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(52) *Der zu* $\mathfrak{x} \in \langle\mathfrak{e}\rangle$ *gehörige Automorphismus ist der identische.*

---

[8]) Man beachte (14). [9]) Vgl. auch Fußnote 7 auf Seite 68.

Für den Beweis von Satz 22 brauchen wir wegen (47) nur noch den Fall $\mathfrak{b} = \mu \mathfrak{e} + \nu \mathfrak{a}$ zu betrachten. Da $\mathfrak{b}^2 \in K$, folgt wegen (52) aus $\mathfrak{b}^2 = (\mu \mathfrak{e} + \nu \mathfrak{a})^2 = \mu^2 \mathfrak{e} + \mu \nu \mathfrak{a} + \nu (\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{-1} (\mu \mathfrak{a} + \nu \mathfrak{a}^2)$, daß $\lambda_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$ ist.

Da $\langle \mathfrak{e} \rangle$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$ ist und alle Automorphismen, die zu Elementen $\mathfrak{x} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ gehören, die Identität sind, gilt

Satz 23. *K liegt im Zentrum von $\mathfrak{A}$.*

Zusammenfassend können wir also feststellen:

Satz 24. *Jeder elliptische Gruppenraum $D(G)$ läßt sich durch eine Clifford-Algebra darstellen. Genauer: Zu jedem elliptischen Gruppenraum $D(G)$ gibt es genau eine Clifford-Algebra $\mathfrak{A}$ der Dimension 4 über dem kommutativen Grundkörper K, so daß $G \cong \mathfrak{A}^*/K^*$ gilt. Die Clifford-Algebra $\mathfrak{A}$ ist hierbei ein Schiefkörper. Im Falle der Charakteristik $\neq 2$ ist die Clifford-Algebra $\mathfrak{A}$ ein Quaternionenschiefkörper. Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine nichtkommutative Divisions-Cliffordalgebra der Dimension 4 über einem kommutativen Körper K, so gibt es in $\mathfrak{A}^*/K^*$ eine Teilmenge D, so daß $D(\mathfrak{A}^*/K^*)$ ein elliptischer Gruppenraum ist.*

Beweis: Im Falle der Charakteristik $\neq 2$ wählen wir wie beim Beweis von Satz 22 zwei Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$. Offenbar bilden die Elemente $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ eine Basis des Fastkörpers $\mathfrak{A}$. Die Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ erfüllen die Relationen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = -\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = -\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{b}^2, \mathfrak{c}^2 \in K$, wie aus dem Beweis von Satz 22 hervorgeht (vgl. (35) und (38)). Aus den Sätzen 22 und 23 erkennt man jetzt, daß $\mathfrak{A}$ ein Quaternionenschiefkörper über K ist.

Für den Fall der Charakteristik 2 wählen wir zwei Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \langle \mathfrak{e} \rangle$, so daß $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig sind. Auch in diesem Fall bilden die Elemente $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ eine Basis von $\mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{A}$ hat die Dimension 4. Hier gelten die Relationen $\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \varepsilon \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{b}^2 \in K$. Es sei V_2 der von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{A}$ und $Q(\mathfrak{x})$ die durch $Q(\mathfrak{x}) = (x_1 \mathfrak{a} + x_2 \mathfrak{b})^2 = x_1^2 \mathfrak{a}^2 + x_2^2 \mathfrak{b}^2 + x_1 x_2 \varepsilon$ gegebene quadratische Form. Nun erkennt man sofort, daß $\mathfrak{A}$ isomorph zu der durch V_2 und Q definierten Clifford-Algebra $\mathfrak{C} = \mathfrak{T}/\mathfrak{J}$ ist, wobei $\mathfrak{T}$ die Tensoralgebra von V_2 und $\mathfrak{J}$ das durch $\mathfrak{x} \otimes \mathfrak{x} - Q(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x} \in V_2$ erzeugte Ideal in $\mathfrak{T}$ ist.

Um die Umkehrung einzusehen, bemerken wir zunächst, daß $\mathfrak{A}^*/K^*$ eine Inzidenzgruppe ist, in der außer den Links- auch die Rechtstranslationen Projektivitäten sind. Nach Satz 1 aus [2] brauchen wir jetzt nur noch zu zeigen, daß es in $\mathfrak{A}^*/K^*$ eine Ebene gibt, deren Punkte alle die Ordnung 1 oder 2 haben. Sind $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ die homogenen Bestandteile der Clifford-Algebra $\mathfrak{C}$, so setzen wir

$$D = \begin{cases} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2)^*/K^* & \text{für} \quad 2 \neq 0, \\ (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)^*/K^* & \text{für} \quad 2 = 0. \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] Baer, R., The group of motions of a two dimensional elliptic geometry. Compositio math. 9, 241—288 (1951).

[2] Ellers, E. und Karzel, H., Involutorische Geometrien. Abh. Math. Sem. Hamburg 25, 93—104 (1961).

[3] Hall, M., Cyclic projective planes. Duke Math. J. 14, 1079—1090 (1947).

[4] Karzel, H., Verallgemeinerte elliptische Geometrien und ihre Gruppenräume. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24, 167—188 (1960).

[5] Singer, J., A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 377—385 (1938).

[6] Zassenhaus, H., Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 17—40 (1936).

[7] Zassenhaus, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11, 187—220 (1936).

Eingegangen am 2. 5. 1961