

Über das Problem der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen

Von GERHARD RINGEL, Berlin

Herrn Geheimrat Prof. Dr. LOTHAR HEFFTER zum 99. Geburtstag
gewidmet

Mit ν_p^* sei die sogenannte Maximalzahl der Nachbargebiete auf der geschlossenen orientierbaren Fläche \mathfrak{F}_p^* vom Geschlechte p bezeichnet. \mathfrak{F}_p^* läßt sich also in ν_p^* paarweise benachbarte Flächenstücke (nicht notwendig Elementarflächenstücke) zerlegen, während $\nu_p^* + 1$ Nachbargebiete auf \mathfrak{F}_p^* nicht existieren. Hierbei heißen zwei Flächenstücke benachbart, wenn sie mindestens eine Kante gemeinsam haben. HEAWOOD [1]¹⁾ zeigte 1890 die Ungleichung²⁾

$$(1) \quad \nu_p^* \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$$

und vermutete, daß in (1) stets nur das Gleichheitszeichen allein richtig ist. Diese Vermutung

$$(2) \quad \nu_p^* = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$$

wurde 1891 von HEFFTER [2] für gewisse Fälle³⁾ bewiesen, so für $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 20, 63, 221, 336, 1530, 2351, \dots$, vom Verfasser ([3], [4] bzw. [5]) in den weiteren Fällen $p = 8, p = 9$ und für alle p mit

$$12s^2 + 3s + 1 \leq p \leq 12s^2 + 5s \quad (s = 1, 2, \dots).$$

In der vorliegenden Arbeit werden neue Methoden — sie beruhen zum Teil auf Ansätzen von HEFFTER — entwickelt, die den Beweis von (2) für die folgenden weiteren Geschlechtszahlen p liefern ($s = 1, 2, \dots$).

$$12s^2 - s \leq p \leq 12s^2 + s - 1,$$

$$12s^2 + 7s + 1 \leq p \leq 12s^2 + 9s + 1,$$

$$12s^2 + 13s + 4 \leq p \leq 12s^2 + 15s + 4.$$

¹⁾ Die eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

²⁾ Alle in dieser Arbeit vorkommenden Quadratwurzeln sind immer positiv zu wählen. $[x]$ bedeutet die größte ganze Zahl $\leq x$.

³⁾ Näheres auf Seite 112.

Danach ist die Heawoodsche Vermutung (2) sozusagen zu 33 $\frac{1}{3}$ % bewiesen. Es ist nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{3}$, wenn mit $A(n)$ die Anzahl der Geschlechtszahlen $p \leq n$ bezeichnet wird, für die in dieser Arbeit bzw. in [4] die Gleichung (2) bewiesen ist.

Das Problem der Nachbargebiete läßt sich auch in der folgenden Form ausdrücken. *Auf welcher orientierbaren Fläche mit möglichst niedrigem Geschlecht lassen sich m paarweise benachbarte Gebiete zeichnen? Wir bezeichnen dieses minimale Geschlecht mit p_m . Wegen $m \leq v_p^*$ und (1) folgt $2m \leq 7 + \sqrt{1 + 48p_m}$, d. h.*

$$(1^*) \quad \frac{(m-3)(m-4)}{12} \leq p_m.$$

Wir behaupten, die Aussage (2) ist äquivalent mit der Aussage

$$(2^*) \quad p_m = \left[\frac{(m-3)(m-4)}{12} + \frac{5}{6} \right] \quad \text{für jedes } m \geq 4.$$

Beweis. Für $p = 0$, $m = 4$ sind (2) und (2*) beide richtig. Es sei (2) für alle p erfüllt und $m \geq 5$ beliebig gegeben. Wir schreiben (2) speziell für $p = p_m - 1$. Weil p_m minimal ist, folgt $v_p^* < m$ und

$$2m > 7 + \sqrt{1 + 48(p_m - 1)}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{(m-3)(m-4)}{12} + 1 > p_m.$$

In Verbindung mit (1*) ergibt sich also

$$(3) \quad p_m = \frac{(m-3)(m-4) + 2d_m}{12},$$

wobei die Zahl $2d_m$ so zu bestimmen ist, daß $0 \leq 2d_m < 12$ und der Bruch auf der rechten Seite von (3) ganzzahlig ist. Nach einfacher Rechnung ergeben sich für d_m die Werte

$$(4) \quad \begin{array}{ll} d_m = 0 & \text{für } m \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}, \\ d_m = 2 & \text{für } m \equiv 8, 11 \pmod{12}, \\ d_m = 3 & \text{für } m \equiv 1, 6, 9, 10 \pmod{12}, \\ d_m = 5 & \text{für } m \equiv 2, 5 \pmod{12}. \end{array}$$

Aus (2) folgt also (2*).

Nun sei umgekehrt (2*) vorausgesetzt und p vorgegeben. Wir wählen m so, daß $p_{m-1} \leq p < p_m$ also auch $v_p^* = m - 1$ gilt. Aus (2*) folgt der Reihe nach

$$p < \left[\frac{(m-3)(m-4) + 10}{12} \right], \quad p < \frac{(m-3)(m-4)}{12}$$

und

$$v_p^* + 1 = m > \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2}.$$

In Verbindung mit (1) ergibt sich (2).

Eine weitere mit (2) äquivalente Aussage ist die folgende: *Wenn $m \geq 4$ eine gegebene ganze Zahl ist, so lassen sich m Elementarflächenstücke derart zu einem orientierbaren Polyeder \mathfrak{P}_m zusammenfügen, daß jedes Elementarflächenstück zu jedem anderen benachbart ist und daß nur lauter dreikantige Eckpunkte und insgesamt $\alpha_1 = \frac{m(m-1)}{2} + d_m$ Kanten auftreten.*

Zum Beweis sei die Existenz eines derartigen Polyeders \mathfrak{P}_m vorausgesetzt. Für die Anzahl α_0 der Eckpunkte gilt $3\alpha_0 = 2\alpha_1$, weil jede Kante mit zwei Eckpunkten und jeder Eckpunkt mit drei Kanten inzidiert. Es sei p das Geschlecht der durch \mathfrak{P}_m definierten orientierbaren geschlossenen Fläche. Aus der Eulerschen Polyederformel $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 2p$ mit $\alpha_2 = m$ folgt $12p = (m-3)(m-4) + 2d_m$, also auch

$$p = \left[\frac{(m-3)(m-4)}{12} + \frac{5}{6} \right].$$

Das Polyeder \mathfrak{P}_m auf \mathfrak{F}_p^* besteht aus m paarweise benachbarten Flächenstücken, also ist $p_m \leq p$. Wegen (1*) ergibt sich $p = p_m$ also (2*) und somit auch (2).

Wenn wir umgekehrt (2) also auch (2*) voraussetzen, so gibt es auf der orientierbaren Fläche, dessen Geschlecht gleich der rechten Seite von (3) ist, m paarweise benachbarte Gebiete. Diese Zerlegung kann leicht so abgeändert⁴⁾ werden, daß alle Eckpunkte dreikantig und die m Gebiete Elementarflächenstücke sind. Aus der Eulerschen Formel ergibt sich dann, daß die Anzahl der Kanten gleich $\frac{m(m-1)}{2} + d_m$ ist, daß also ein orientierbares Polyeder \mathfrak{P}_m von der gewünschten Art existiert.

Es kommt also nur darauf an, die obige Aussage über die Existenz eines \mathfrak{P}_m für jedes $m \geq 4$ zu beweisen. Für $m \leq 12$ tat dies HEFFTER [2]. Für alle $m \equiv 5 \pmod{12}$ lieferte der Verfasser in früheren Arbeiten ([3] oder [4]) einen Beweis. Für die drei weiteren Restklassen 3, 7 und 10 (mod 12) wird im folgenden die Existenz eines Polyeders \mathfrak{P}_m durch explizite Konstruktion bewiesen. Damit ist die Heawoodsche Vermutung (2) in den auf Seite 105 angekündigten Fällen bestätigt.

§ 1. Orientierbare Schemata von der Form S_{12s+7}

Falls $m \equiv 0, 3, 4$ oder $7 \pmod{12}$ ist, kann man nach Seite 106 ($d_m = 0$) erwarten, daß ein orientierbares Polyeder \mathfrak{P}_m existiert, das aus m paarweise benachbarten $(m-1)$ -Ecken besteht und nur dreikantige Eckpunkte enthält. So gibt es z. B. eine Zerlegung \mathfrak{P}_3 der Kugel in drei Zweiecke, das aus vier Dreiecken bestehende Tetraeder als Zerlegung \mathfrak{P}_4 der Kugel und eine Zerlegung \mathfrak{P}_7 des Torus in 7 paarweise benachbarte Sechsecke.

⁴⁾ Ausführlicher ist dies im Lehrbuch [4] des Verfassers gezeigt.

In folgender Weise läßt sich jedes Polyeder \mathfrak{P}_m durch ein Nummernschema beschreiben. Die m „ $(m - 1)$ -Ecke“ werden mit den Nummern $1, 2, \dots, m$ bezeichnet, außerdem sei jedes $(m - 1)$ -Eck so orientiert (d.h. der Rand mit einer Durchlaufungsrichtung versehen), daß \mathfrak{P}_m kohärent orientiert ist (d.h. jede Kante von \mathfrak{P}_m , die ja zu zwei „ $(m - 1)$ -Ecken“ gehört, wird einmal in der einen, einmal in der umgekehrten Richtung durchlaufen). Nun wird für das $(m - 1)$ -Eck i ($i = 1, 2, \dots, m$) die der Orientierung von i entsprechende zyklische Reihenfolge der anderen „Länder“, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, in einem Schema notiert. Bei passender Numerierung erhält man z.B. das zu \mathfrak{P}_7 gehörige Schema:

	1.	7	3	4	2	6	5
	2.	1	4	5	3	7	6
	3.	2	5	6	4	1	7
(S ₇)	4.	3	6	7	5	2	1
	5.	4	7	1	6	3	2
	6.	5	1	2	7	4	3
	7.	6	2	3	1	5	4

Wenn man die 19 Länder eines gewissen Polyeders \mathfrak{P}_{19} passend numeriert, erhält man etwa das folgende Schema:

	1.	18	5	8	10	2	15	4	16	14	19	9	6	7	3	13	17	12	11
	2.	19	6	9	11	3	16	5	17	15	1	10	7	8	4	14	18	13	12
	3.	1	7	10	12	4	17	6	18	16	2	11	8	9	5	15	19	14	13
	4.	2	8	11	13	5	18	7	19	17	3	12	9	10	6	16	1	15	14
	5.	3	9	12	14	6	19	8	1	18	4	13	10	11	7	17	2	16	15
	6.	4	10	13	15	7	1	9	2	19	5	14	11	12	8	18	3	17	16
	7.	5	11	14	16	8	2	10	3	1	6	15	12	13	9	19	4	18	17
	8.	6	12	15	17	9	3	11	4	2	7	16	13	14	10	1	5	19	18
	9.	7	13	16	18	10	4	12	5	3	8	17	14	15	11	2	6	1	19
(S ₁₉)	10.	8	14	17	19	11	5	13	6	4	9	18	15	16	12	3	7	2	1
	11.	9	15	18	1	12	6	14	7	5	10	19	16	17	13	4	8	3	2
	12.	10	16	19	2	13	7	15	8	6	11	1	17	18	14	5	9	4	3
	13.	11	17	1	3	14	8	16	9	7	12	2	18	19	15	6	10	5	4
	14.	12	18	2	4	15	9	17	10	8	13	3	19	1	16	7	11	6	5
	15.	13	19	3	5	16	10	18	11	9	14	4	1	2	17	8	12	7	6
	16.	14	1	4	5	17	11	19	12	10	15	5	2	3	18	9	13	8	7
	17.	15	2	5	7	18	12	1	13	11	16	6	3	4	19	10	14	9	8
	18.	16	3	6	8	19	13	2	14	12	17	7	4	5	1	11	15	10	9
	19.	17	4	7	9	1	14	3	15	13	18	8	5	6	2	12	16	11	10

Man kann beobachten, daß in diesen beiden Schemata die folgende Regel gilt.

Regel R*. Wenn in der i -ten Zeile $i \dots a k b \dots$ steht, so steht in der k -ten Zeile $k \dots b i a \dots$

Ein auf die beschriebene Art aus einem orientierten Polyeder \mathfrak{P}_m erhaltenes Schema (S_m) hat stets die Eigenschaft der Regel R^* . Dies ist leicht daraus ersichtlich, daß alle Eckpunkte dreieckig sind. Umgekehrt wird durch jedes gegebene aus den Nummern $1, 2, \dots, m$ gebildete Schema (S_m) , das der Regel R^* genügt, und das in der i -ten Zeile alle Nummern $\neq i$ je einmal enthält, ein zugehöriges orientierbares Polyeder \mathfrak{P}_m definiert. Ein solches Schema nennen wir ein orientiertes Schema (S_m) .

Es kommt nun darauf an, für möglichst viele Zahlen m ein orientiertes Schema (S_m) und damit ein \mathfrak{P}_m zu konstruieren. Die Regel R^* ist aber als Konstruktionsprinzip wenig geeignet, wohl deshalb, weil für größere Zahlen m sicherlich viele nicht isomorphe Schemata (S_m) existieren. Es kann also gar kein eindeutiges Konstruktionsverfahren geben. Man wird deshalb an Stelle der Frage nach irgendeinem Schema (S_m) besser die Frage nach einem möglichst „schönen“ Schema (S_m) stellen. Je nachdem wie das Wort „schön“ definiert wird, kann man die Auswahl der zugelassenen Schemata mehr oder weniger einschränken und so mehr Aussicht haben, ein Exemplar wirklich zu finden.

Zweckmäßigerweise wollen wir mit den Nummern $1, 2, \dots, m$ eines Schemas (S_m) wie mit den Restklassen $\text{mod } m$ rechnen. Die beiden Schemata (S_7) und (S_{19}) haben dann die zusätzliche Eigenschaft, daß jede Zeile aus der vorhergehenden durch Addition mit eins gewonnen wird. Ein solches orientiertes Schema (S_m) bzw. das dargestellte Polyeder \mathfrak{P}_m wollen wir *zyklisch* nennen; dann enthält also die Automorphismengruppe von \mathfrak{P}_m die durch die Permutation $(1, 2 \dots m)$ erzeugte zyklische Gruppe als Untergruppe. Wir werden zeigen, daß für jede natürliche Zahl $m \equiv 7 \pmod{12}$ ein zyklisches orientiertes Schema (S_m) existiert⁵⁾. Wir schicken einige Bemerkungen voraus, die zwar für den Beweis selbst nicht erforderlich sind, die ihn aber durchsichtiger erscheinen lassen. Außerdem wird man einige Gedanken erkennen, die den Verfasser zum Beweisansatz geführt haben.

Es sei $m = 12s + 7$ und ein zyklisches orientiertes Schema (S_m) bzw. das dargestellte Polyeder \mathfrak{P}_m vorgegeben. Wir numerieren (färben) nun auch jede Kante von \mathfrak{P}_m , und zwar mit der Differenz der beiden angrenzenden Ländernummern. Die Nummern der Länder ersetzen wir hierbei nötigenfalls durch passende Zahlen $(\text{mod } m)$, so daß als Differenz nur die Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$ in Frage kommen. Jede Kante ist so mit einer der „Farben“ $1, 2, \dots, 6s + 3$ gefärbt. Jedem Eckpunkt P_0 von \mathfrak{P}_m ordnen wir sodann das „orientierte“ Farbentripel (d_1, d_2, d_3) zu,

⁵⁾ HEFFTER [2] zeigte, daß für $m \not\equiv 7 \pmod{12}$ kein zyklisches orientiertes Schema (S_m) existiert.

wenn d_1, d_2, d_3 die Farben der drei mit P_0 inzidierenden Kanten sind und zwar in der zyklischen Reihenfolge, die der zu Anfang festgelegten

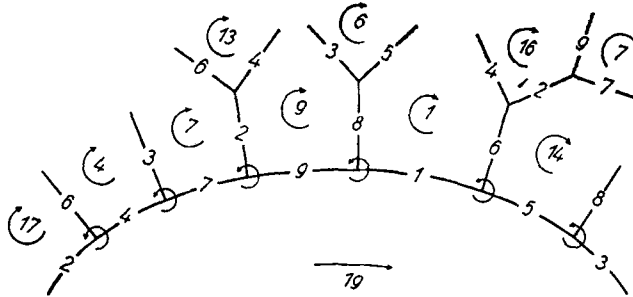


Abb. 1

kohärenten Orientierung der Länder entgegengesetzt ist [Abb. 1 im Falle (S_{19})]. Wir schreiben dann $F(P_0) = (d_1, d_2, d_3)$. Diese Tripel sollen orientiert sein, d.h. es wird

$$(d_1, d_2, d_3) = (d_2, d_3, d_1) = (d_3, d_1, d_2) \neq (d_1, d_3, d_2) \text{ usw.}$$

festgesetzt.

Wenn a_1, a_2, a_3 die Nummern der drei mit P_0 inzidierenden Länder in passender Reihenfolge sind, so gilt

$$d_1 = \pm (a_2 - a_3), \quad d_2 = \pm (a_3 - a_1), \quad d_3 = \pm (a_1 - a_2).$$

Daraus folgt, daß entweder $d_1 + d_2 + d_3 = m$ ist, oder eines dieser d_i ist Summe der anderen beiden.

Weil \mathfrak{P}_m zyklisch ist, treffen auch die drei Länder $a_1 + j, a_2 + j, a_3 + j$ in einem Eckpunkt P_j zusammen ($j = 1, 2, \dots, m$). Wir sagen dann, P_0 und P_j gehören zur gleichen Klasse. Die m Eckpunkte $P_1, P_2, \dots, P_m = P_0$ sind paarweise verschieden, weil die beteiligten Ländertripel jeweils verschieden sind. So ist eine Einteilung der $\alpha_0 = \frac{m(m-1)}{3}$ Eckpunkte in $\frac{m-1}{3} = 4s + 2$ Klassen zu je m Eckpunkten gegeben. Zwei Eckpunkten der gleichen Klasse ist natürlich dasselbe Farbentripel zugeordnet: $F(P_j) = (d_1, d_2, d_3)$ für $j = 1, 2, \dots, m$.

Wir wählen jetzt aus jeder Klasse einen Eckpunkt aus und betrachten alle Farbentripel dieser $4s + 2$ Eckpunkte. Wir erhalten so ein ganz bestimmtes System (T) von $4s + 2$ Tripeln. In unserem Beispiel (S_{19}) besteht (T) aus den sechs Tripeln

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 5 \ 6, & 2 \ 7 \ 9, & 2 \ 4 \ 6, \quad 1 \ 8 \ 9, \\ 3 \ 4 \ 7, & & 5 \ 3 \ 8. \end{array}$$

Wir wollen ein Tripel d_1, d_2, d_3 ein *erlaubtes* Tripel nennen, wenn entweder $d_1 + d_2 + d_3 = m$ ist, oder ein d_j ist Summe der beiden anderen.

Satz 1. *Wenn ein zyklisches orientiertes Schema (S_m) mit $m = 12s + 7$ existiert, so ist die folgende Aufgabe A lösbar.*

Aufgabe A. *Es ist ein System von erlaubten Tripeln derart zu bilden, daß jede der Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$ genau zweimal vorkommt⁶⁾.*

Zum Beweis von Satz 1 haben wir nur zu zeigen, daß unser Tripelsystem (T) eine Lösung von Aufgabe A ist.

Ein festes Land h von \mathfrak{P}_m hat genau drei Eckpunkte, die zu einer vorgegebenen Klasse, etwa zur Klasse P_0, \dots, P_{m-1} gehören; nämlich die drei Punkte P_j mit $j \equiv h - a_i \pmod{m}$ für $i = 1, 2, 3$. Es sei d eine der Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$. Weil h zu beiden Ländern $h \pm d$ benachbart ist, gibt es zwei Kanten k_1, k_2 von h , die mit der Farbe d gefärbt sind.

Wenn es vier Eckpunkte gibt, die mit k_1 oder k_2 inzidieren, so gibt es mindestens zwei Tripel von (T), die die Zahl d enthalten.

Wenn hingegen k_1, k_2 einen gemeinsamen Eckpunkt haben, so enthält dessen Farbentripel die Zahl d zweimal.

Auf alle Fälle kommt d im Tripelsystem (T) mindestens zweimal vor. Daher besteht (T) aus mindestens $(6s + 3) \frac{2}{3} = 4s + 2$ Tripeln. Aus Anzahlgründen tritt also d genau zweimal in (T) auf. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

Man kann sich noch überlegen, welche zusätzliche Bedingung eine Lösung von Aufgabe A erfüllen muß, damit auch ein zugehöriges Schema (S_m) existiert. Auf diese Frage wollen wir hier nicht mehr eingehen. Das Hauptproblem, die Konstruktion irgendeiner Lösung, wäre damit sowieso noch nicht gelöst.

Es liegt der Gedanke nahe, zunächst nur für die Aufgabe A eine Lösung zu suchen ohne Rücksicht auf ein zugehöriges Schema (S_m) . HEFFTER [2] gab die folgende Lösung, die im Spezialfall $m = 31$ so lautet:

1	2	3,	11	10	1
3	4	7,	13	8	5
5	6	11,	15	6	9
7	8	15,	14	4	13
9	10	12,	12	2	14.

Es ist leicht, diese Lösung von Aufgabe A auf den allgemeinen Fall $m = 12s + 7$ zu übertragen. Wenn man die Tripel als orientierte Tripel

⁶⁾ Wenn man verlangt, daß jede Nummer nur einmal vorkommen soll, so ist diese Aufgabe für alle $m \equiv 1$ oder $3 \pmod{6}$ gelöst worden von PELTESOHN, ROSE, Eine Lösung der beiden Heffterschen Differenzenprobleme, *Compositio Mathematica*, Groningen, Vol. 6, p. 251—257 (1939). Für alle anderen m ist die Aufgabe unlösbar.

betrachtet und in einem einzigen der obigen Tripel die Orientierung umkehrt, so ist im Fall $m = 31$ tatsächlich auch ein zugehöriges orientiertes Schema (S_m) bestimmt, im allgemeinen Fall $m = 12s + 7$ aber nur dann, wenn $q = 4s + 3$ eine Primzahl ist und die Zahl 2 eine primitive Kongruenzwurzel mod q ist. Wenn $q = 4s + 3$ eine Primzahl ist und $2^{\frac{q-1}{2}}$ ist die kleinste Potenz von 2, die $\equiv 1 \pmod{q}$ ist, so gelingt es auch, mit Hilfe des Heffterschen Tripelsystems ein Schema (S_{12s+7}) zu konstruieren, wenn man zuvor in zwei Tripeln die Orientierung ändert. Da nicht bekannt ist, ob unendlich viele Primzahlen q mit der obigen Eigenschaft existieren, ist es bis heute ungewiß, ob HEFFTER unendlich viele Exemplare (S_{12s+7}) konstruiert hat. Die auf Seite 105 angegebenen Geschlechtszahlen entsprechen den niedrigsten von HEFFTER auf die genannte Art gelösten Fälle.

Der Verfasser, der diesen Heffterchen Ansatz zunächst nicht näher kannte, versuchte es mit der folgenden Lösung zu Aufgabe A ($m = 31$):

$$\begin{array}{cccc} 1 & 8 & 9, & 2 & 12 & 14, & 2 & 7 & 9, & 1 & 13 & 14, \\ 3 & 7 & 10, & 4 & 11 & 15, & 4 & 6 & 10, & 3 & 12 & 15, \\ 5 & 6 & 11, & & & & & & & 5 & 8 & 13. \end{array}$$

Dieses Tripelsystem ist auch leicht auf den allgemeinen Fall $m = 12s + 7$ übertragbar. Weiter unten ist dies explizite hingeschrieben. Es bestimmt glücklicherweise stets ein zugehöriges Schema (S_{12s+7}) , wenn man für ungerades s das letzte Tripel in seiner Orientierung umkehrt. Der Beweis wird jetzt unabhängig vom bisherigen streng formal durchgeführt.

Satz 2. *Für $s = 1, 2, \dots$ existiert ein zyklisches orientiertes Schema (S_{12s+7}) .*

Beweis. Wir setzen zunächst s als gerade Zahl voraus und betrachten folgendes System (T) von Tripeln. (Damit man den späteren Text verfolgen kann, müssen wir hier so viel hinschreiben.)

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 3s+2 & 3s+3, & 2 & 5s+2 & 5s+4, & 2 & 3s+1 & 3s+3, & 1 & 5s+3 & 5s+4, \\ 3 & 3s+1 & 3s+4, & 4 & 5s+1 & 5s+5, & 4 & 3s & 3s+4, & 3 & 5s+2 & 5s+5, \\ 5 & 3s & 3s+5, & 6 & 5s & 5s+6, & 6 & 3s-1 & 3s+5, & 5 & 5s+1 & 5s+6, \\ 7 & 3s-1 & 3s+6, & 8 & 5s-1 & 5s+7, & 8 & 3s-2 & 3s+6, & 7 & 5s & 5s+7, \\ 9 & 3s-2 & 3s+7, & 10 & 5s-2 & 5s+8, & 10 & 3s-3 & 3s+7, & 9 & 5s-1 & 5s+8, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2s-7 & 2s+6 & 4s-1, & 2s-6 & 4s+6 & 6s & , & 2s-6 & 2s+5 & 4s-1, & 2s-7 & 4s+7 & 6s & , \\ 2s-5 & 2s+5 & 4s & , & 2s-4 & 4s+5 & 6s+1, & 2s-4 & 2s+4 & 4s & , & 2s-5 & 4s+6 & 6s+1, \\ 2s-3 & 2s+4 & 4s+1, & 2s-2 & 4s+4 & 6s+2, & 2s-2 & 2s+3 & 4s+1, & 2s-3 & 4s+5 & 6s+2, \\ 2s-1 & 2s+3 & 4s+2, & 2s & 4s+3 & 6s+3, & 2s & 2s+2 & 4s+2, & 2s-1 & 4s+4 & 6s+3, \\ 2s+1 & 2s+2 & 4s+3, & & & & & & & 2s+1 & 3s+2 & 5s+3. \end{array}$$

Wir überzeugen uns leicht, daß in diesen $4s + 2$ Tripeln jede der Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$ genau zweimal vorkommt und daß in jedem Tripel die letzte Zahl gleich der Summe der beiden ersten ist. Diese Tripel werden nun als orientierte Tripel aufgefaßt. Jedes enthält drei orientierte Paare. So gehören etwa zum Tripel $(2, 5s + 2, 5s + 4)$ die orientierten Paare $(2, 5s + 2)$, $(5s + 2, 5s + 4)$, $(5s + 4, 2)$. Wir stellen diesem System (T) die folgende zyklische Reihenfolge (Z) der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(6s + 3)$ gegenüber. Die nun folgenden Zeilen sind hintereinander als ein *einziger Zyklus* zu lesen. Die waagrechten Striche dienen nur der Übersicht; sie teilen die entstehenden Spalten in einzelne arithmetische Reihen.

-2	$3s+1$	$3s+4$	4	$-(5s+1)$	$-(5s+6)$		
-6	$3s-1$	$3s+6$	8	$-(5s-1)$	$-(5s+8)$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$-(2s-6)$	$2s+5$	$4s$	$2s-4$	$-(4s+5)$	$-(6s+2)$		
$-(2s-2)$	$2s+3$	$4s+2$	$2s$	$-(4s+3)$	$-(2s+1)$	$3s+2$	$3s+3$
2	$-(5s+2)$	$-(5s+5)$	-4	$3s$	$3s+5$		
6	$-5s$	$-(5s+7)$	-8	$3s-2$	$3s+7$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
(Z) ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$2s-2$	$-(4s+4)$	$-(6s+3)$	$-2s$	$2s+2$	$4s+3$		
$6s+3$	$2s-1$	$-(2s+3)$	$-(4s+1)$	$-(2s-3)$	$4s+5$		
$6s+1$	$2s-5$	$-(2s+5)$	$-(4s-1)$	$-(2s-7)$	$4s+7$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$5s+5$	3	$-(3s+1)$	$-(3s+3)$	-1	$5s+3$	$2s+1$	$-(2s+2)$
$-(4s+2)$	$-(2s-1)$	$4s+4$	$6s+2$	$2s-3$	$-(2s+4)$		
$-4s$	$-(2s-5)$	$4s+6$	$6s$	$2s-7$	$-(2s+6)$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$-(3s+4)$	-3	$5s+2$	$5s+4$	1	$-(3s+2)$	$-(5s+3)$	$-(5s+4)$

Mit (Z*) wollen wir denjenigen Zyklus bezeichnen, der aus (Z) hervorgeht, wenn man von allen Nummern den Absolutbetrag nimmt. Die folgenden Aussagen lassen sich leicht verifizieren.

1) *Ein orientiertes Paar aus einem Tripel von (T) kommt in keinem anderen Tripel von (T) vor.*

2) In (Z) steht jede der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(6s + 3)$ genau einmal, also in (Z^*) jede der Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$ genau zweimal.

3) Wenn (d_1, d_2) ein orientiertes Paar aus einem Tripel von (T) ist, so steht in (Z^*) dieses Paar d_1, d_2 in der gleichen Reihenfolge nebeneinander.

4) Stehen umgekehrt die Zahlen d_1, d_2 in (Z^*) nebeneinander, so gibt es in (T) ein Tripel, das das orientierte Paar (d_1, d_2) enthält.

5) Drei in (Z^*) aufeinander folgende Zahlen bilden niemals ein Tripel von (T) .

6) Wenn d_1, d_2 positiv sind und in (Z) steht $\dots, d_1, -d_2, \dots$ oder $\dots, -d_1, d_2, \dots$, so gibt es in (T) das Tripel $(d_1, d_2, d_1 + d_2)$.

7) Wenn d_1, d_2 positiv sind und in (Z) steht \dots, d_1, d_2, \dots oder $\dots, -d_1, -d_2, \dots$, so ist das Tripel $(d_1, d_2, d_1 + d_2)$ nicht in (T) enthalten.

Die folgende achte Aussage, auf die es besonders ankommt, muß nun ausführlich bewiesen werden.

8) Wenn im Zyklus (Z) auf die Zahl a die Zahl k folgt, so folgt in (Z) auf $-k$ die Zahl $a - k$.

Zum Beweis sei vorausgesetzt, daß in (Z) \dots, a, k, \dots steht. Wir unterscheiden sechs Fälle.

α) Es sei $a > k > 0$. Nach 4) und 7) folgt, daß in (T) das Tripel $(k, a - k, a)$ vorkommt. Wegen 3) steht in (Z^*) $\dots, k, a - k, \dots$ und wegen 5) sogar $\dots, a, k, \dots, k, a - k, \dots$. Wegen 2) steht somit in (Z) $\dots, a, k, \dots, -k, \pm(a - k), \dots$. Weil das Tripel $(k, a - k, a)$ in (T) ist, folgt aus 7), daß in (Z) steht $\dots, a, k, \dots, -k, a - k, \dots$, w.z.b.w.

β) Es sei $k > a > 0$. Nach 4) und 7) ist in (T) das Tripel $(k - a, a, k)$. Wegen 3) steht $\dots, k, k - a, \dots$ in (Z^*) und wegen 5) sogar $\dots, a, k, \dots, k, k - a, \dots$. Nach 2) steht in (Z) $\dots, a, k, \dots, -k, \pm(k - a), \dots$. Hier darf wegen 6) nur das Minuszeichen stehen bleiben, also steht tatsächlich $\dots, -k, a - k, \dots$ in (Z) .

γ) Es sei $a < 0 < k$. Wegen 6) kommt in (T) das Tripel $(|a|, k, |a| + k)$ vor. Nach 3) steht in (Z^*) $\dots, k, |a| + k, \dots$, nach 5) sogar $\dots, |a|, k, \dots, k, |a| + k, \dots$. Nach 2) steht in (Z) $\dots, a, k, \dots, -k, \pm(|a| + k), \dots$. Hier bleibt nur das Minuszeichen stehen, sonst folgte aus 6), daß in (T) das Tripel $(k, |a| + k, |a| + 2k)$ wäre im Widerspruch zu 1). In (Z) steht also $\dots, -k, a - k, \dots$.

δ) Es sei $k < 0 < a$. Wegen 6) gibt es in (T) das Tripel $(a, |k|, a + |k|)$. Nach 3) und 5) steht in (Z^*) $\dots, a, |k|, \dots, |k|, a + |k|, \dots$. Nach 2) steht in (Z) $\dots, a, k, \dots, |k|, \pm(a + |k|), \dots$. Hier bleibt nur das Plus-

zeichen stehen, sonst wäre nach 6) in (T) das Tripel $(|k|, a + |k|, a + 2|k|)$; das widerspräche der Aussage 1). In (Z) steht somit $\dots, -k, a - k, \dots$

ϵ) Es sei $a < k < 0$. Wegen 7) gibt es in (T) das Tripel $(|a|, |k|, |a| + |k|)$ nicht, aber wegen 4) das Tripel $(|k|, |a| - |k|, |a|)$. Nach 3) und 5) steht in $(Z^*) \dots, |a|, |k|, \dots, |k|, |a| - |k|, \dots$ Wegen 1) steht in (Z) $\dots, a, k, \dots, |k|, \pm(|a| - |k|), \dots$ Da das Tripel $(|k|, |a| - |k|, |a|)$ in (T) ist, steht wegen 7) in (Z) sogar nur $\dots, a, k, \dots, |k|, -(|a| - |k|), \dots$, w.z. b.w.

ζ) Es sei $k < a < 0$. Wegen 7) und 4) gibt es in (T) das Tripel $(|k|, |k| - |a|, |a|)$. Nach 3) und 5) steht in $(Z^*) \dots, |a|, |k|, \dots, |k|, |k| - |a|, \dots$ Wegen 1) steht in (Z) $\dots, a, k, \dots, |k|, \pm(|k| - |a|), \dots$ Hier kommt das Minuszeichen nicht in Frage, da sonst nach 6) das Tripel $(|k|, |k| - |a|, 2|k| - |a|)$ in (T) wäre, das ja verschieden von $(|k|, |k| - |a|, |a|)$ ist; das wäre ein Widerspruch zu 1). Also steht in (Z) tatsächlich $\dots, -k, a - k, \dots$

Nun können wir ein orientiertes Schema (S_{12s+7}) leicht angeben. Die $12s + 7$ beteiligten Nummern seien die Restklassen mod $12s + 7$. Wir wählen als $(12s + 7)$ -te Zeile den obigen Zyklus (Z); er enthält tatsächlich jede Restklasse $\equiv 0 \pmod{12s + 7}$ je einmal. Die i -te Zeile ist hierdurch auch gegeben, nämlich durch Addition aller Restklassen mit i . Es ist nur noch zu beweisen, daß die Regel R^* erfüllt ist. Zunächst läßt sich zeigen:

9) Wenn in der i -ten Zeile $i \dots a k \dots$ steht, so steht in der k -ten Zeile $k \dots i a \dots$

Beweis. Aus $i \dots a k \dots$, folgt zunächst
 $12s + 7 \dots a - i k - i \dots$, wegen 8) auch
 $12s + 7 \dots i - k a - k \dots$, daher auch
 $k \dots i a \dots$, w.z. b.w.

Jetzt läßt sich sofort auch die Regel R^* beweisen: Wenn in unserem Schema

$$i \dots a k b \dots$$

steht, so folgt nach dreimaliger Anwendung von 9) der Reihe nach:

$$\begin{aligned} k \dots i a \dots \\ b \dots i k \dots \\ k \dots b i \dots \end{aligned}$$

Da in der k -ten Zeile die Nummer i nur einmal auftritt, steht in ihr

$$k \dots b i a \dots$$

Hiermit ist gezeigt, daß für jedes gerade s ein zyklisches orientiertes Schema (S_{12s+7}) existiert.

Wenn man beispielsweise ein orientiertes Schema (S_{31}) konstruieren will, so hat man nach diesem Verfahren die 31-te Zeile wie folgt zu wählen.

31. 29 7 10 4 20 26 8 9 2 19 16 27 6 11 15 3 24 22 30 13 5 25 21 28 12 14 1 23 18 17

Wenn s eine ungerade Zahl ist, läßt sich der obige Beweis für die Existenz eines zyklischen orientierten Schemas (S_{12s+7}) wörtlich übertragen, wenn man im letzten Tripel von (T) die Orientierung umkehrt, also das Tripel $(3s + 2, 2s + 1, 5s + 3)$ einsetzt und entsprechend den Zyklus (Z) in folgender Weise wählt.

$$\begin{array}{cccccc}
 & -2 & 3s+1 & 3s+4 & 4 & -(5s+1) & -(5s+6) \\
 & -6 & 3s-1 & 3s+6 & 8 & -(5s-1) & -(5s+8) \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & -(2s-4) & 2s+4 & 4s+1 & 2s-2 & -(4s+4) & -(6s+3) \\
 & -2s & 2s+2 & 4s+3 & 6s+3 & 2s-1 & -(2s+3) \\
 \hline
 & -(4s+1) & -(2s-3) & 4s+5 & 6s+1 & 2s-5 & -(2s+5) \\
 & -(4s-1) & -(2s-7) & 4s+7 & 6s-1 & 2s-9 & -(2s+7) \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 (Z) & -(3s+4) & -3 & 5s+2 & 5s+4 & 1 & -(3s+2) \\
 & 2s+1 & -(2s+2) & -(4s+2) & -(2s-1) & 4s+4 & 6s+2 \\
 & 2s-3 & -(2s+4) & -4s & -(2s-5) & 4s+6 & 6s \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 7 & -(3s-1) & -(3s+5) & -5 & 5s+1 & 5s+5 \\
 & 3 & -(3s+1) & -(3s+3) & -1 & 5s+3 & 3s+2 \\
 \hline
 & 3s+3 & 2 & -(5s+2) & -(5s+5) & -4 & 3s \\
 & 3s+5 & 6 & -5s & -(5s+7) & -8 & 3s-2 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \hline
 & 4s & 2s-4 & -(4s+5) & -(6s+2) & -(2s-2) & 2s+3 \\
 & 4s+2 & 2s & -(4s+3) & -(2s+1) & -(5s+3) & -(5s+4)
 \end{array}$$

Diese obigen Zeilen sind also hintereinander als ein einziger Zyklus zu lesen. Die waagrechten Striche dienen wieder nur zur Verdeutlichung der in den Spalten erscheinenden arithmetischen Reihen. Man kann auch hier die Eigenschaften 1) bis 7) verifizieren. Die Aussagen 8) und 9) sowie die Regel R* ergeben sich dann genau wie vorhin. Nun ist Satz 2 bewiesen.

Wir wollen für den Fall $s = 5$ das Tripelsystem (T) und den zugehörigen Zyklus (Z) als Beispiel für die Konstruktion von (S_{67}) angeben:

(T)	<table style="margin: auto;"> <tr><td>1</td><td>17</td><td>18</td><td>2</td><td>27</td><td>29</td><td>2</td><td>16</td><td>18</td><td>1</td><td>28</td><td>29</td></tr> <tr><td>3</td><td>16</td><td>19</td><td>4</td><td>26</td><td>30</td><td>4</td><td>15</td><td>19</td><td>3</td><td>27</td><td>30</td></tr> <tr><td>5</td><td>15</td><td>20</td><td>6</td><td>25</td><td>31</td><td>6</td><td>14</td><td>20</td><td>5</td><td>26</td><td>31</td></tr> <tr><td>7</td><td>14</td><td>21</td><td>8</td><td>24</td><td>32</td><td>8</td><td>13</td><td>21</td><td>7</td><td>25</td><td>32</td></tr> <tr><td>9</td><td>13</td><td>22</td><td>10</td><td>23</td><td>33</td><td>10</td><td>12</td><td>22</td><td>9</td><td>24</td><td>33</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>23</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>17</td><td>11</td><td>28</td></tr> </table>	1	17	18	2	27	29	2	16	18	1	28	29	3	16	19	4	26	30	4	15	19	3	27	30	5	15	20	6	25	31	6	14	20	5	26	31	7	14	21	8	24	32	8	13	21	7	25	32	9	13	22	10	23	33	10	12	22	9	24	33	11	12	23							17	11	28
1	17	18	2	27	29	2	16	18	1	28	29																																																														
3	16	19	4	26	30	4	15	19	3	27	30																																																														
5	15	20	6	25	31	6	14	20	5	26	31																																																														
7	14	21	8	24	32	8	13	21	7	25	32																																																														
9	13	22	10	23	33	10	12	22	9	24	33																																																														
11	12	23							17	11	28																																																														
(Z)	<table style="margin: auto;"> <tr><td>—2</td><td>16</td><td>19</td><td>4</td><td>—26</td><td>—31</td></tr> <tr><td>—6</td><td>14</td><td>21</td><td>8</td><td>—24</td><td>—33</td></tr> <tr><td>—10</td><td>12</td><td>23</td><td>32</td><td>9</td><td>—13</td></tr> <tr><td>—21</td><td>—7</td><td>25</td><td>31</td><td>5</td><td>—15</td></tr> <tr><td>—19</td><td>—3</td><td>27</td><td>29</td><td>1</td><td>—17</td></tr> <tr><td>11</td><td>—12</td><td>—22</td><td>—9</td><td>24</td><td>32</td></tr> <tr><td>7</td><td>—14</td><td>—20</td><td>—5</td><td>26</td><td>30</td></tr> <tr><td>3</td><td>—16</td><td>—18</td><td>—1</td><td>28</td><td>17</td></tr> <tr><td>18</td><td>2</td><td>—27</td><td>—30</td><td>—4</td><td>15</td></tr> <tr><td>20</td><td>6</td><td>—25</td><td>—32</td><td>—8</td><td>13</td></tr> <tr><td>22</td><td>10</td><td>—23</td><td>—11</td><td>—28</td><td>—29</td></tr> </table>	—2	16	19	4	—26	—31	—6	14	21	8	—24	—33	—10	12	23	32	9	—13	—21	—7	25	31	5	—15	—19	—3	27	29	1	—17	11	—12	—22	—9	24	32	7	—14	—20	—5	26	30	3	—16	—18	—1	28	17	18	2	—27	—30	—4	15	20	6	—25	—32	—8	13	22	10	—23	—11	—28	—29						
—2	16	19	4	—26	—31																																																																				
—6	14	21	8	—24	—33																																																																				
—10	12	23	32	9	—13																																																																				
—21	—7	25	31	5	—15																																																																				
—19	—3	27	29	1	—17																																																																				
11	—12	—22	—9	24	32																																																																				
7	—14	—20	—5	26	30																																																																				
3	—16	—18	—1	28	17																																																																				
18	2	—27	—30	—4	15																																																																				
20	6	—25	—32	—8	13																																																																				
22	10	—23	—11	—28	—29																																																																				

§ 2. Der Fall $m \equiv 10 \pmod{12}$

Wir betrachten zunächst das folgende aus den Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, x , y , z gebildete Schema

1.	7	x	2	6	y	3	4	z	5
2.	1	x	3	7	y	4	5	z	6
3.	2	x	4	1	y	5	6	z	7
4.	3	x	5	2	y	6	7	z	1
5.	4	x	6	3	y	7	1	z	2
6.	5	x	7	4	y	1	2	z	3
7.	6	x	1	5	y	2	3	z	4
x .	7	6	5	4	3	2	1		
y .	7	5	3	1	6	4	2		
z .	3	6	2	5	1	4	7		

Man kann sich überzeugen, daß Regel R^* ausnahmslos erfüllt ist. Somit stellt dieses Schema ein orientierbares Polyeder $\mathfrak{P}_{10}^{(-3)}$ dar, in dem die drei Siebenecke x , y , z nicht zueinander benachbart sind. Sonst aber sind die zehn Länder paarweise benachbart.

Es wird unsere Aufgabe sein, für jede Zahl $m \equiv 10 \pmod{12}$ ein derartiges orientierbares Polyeder $\mathfrak{P}_m^{(-3)}$ bzw. das zugehörige Schema $(S_m^{(-3)})$

zu konstruieren. $\mathfrak{P}_m^{(-3)}$ wird also aus den $m - 3$ „ $(m - 1)$ -Ecken“, die mit $1, 2, 3, \dots, m - 3$ bezeichnet werden, und den drei $(m - 4)$ -Ecken x, y, z bestehen. Nur die drei Länder x, y, z sollen untereinander nicht benachbart sein.

So ein orientiertes Schema $(S_{\lfloor \frac{3}{2}s+10}^{\lfloor \frac{3}{2}s+10})$ läßt sich leicht nach folgendem Rezept aus dem in § 1 konstruierten zyklischen orientierten Schema (S_{12s+7}) gewinnen. Wir betrachten das aus den Zahlen $1, 2, \dots, 6s + 3$ gebildete Tripelsystem (T) von Seite 112. Es enthält für gerades s das orientierte Tripel $(2s + 1, 3s + 2, 5s + 3)$ oder für ungerades s das orientierte Tripel $(3s + 2, 2s + 1, 5s + 3)$. Wir setzen darum

$$\begin{aligned} a &= 2s + 1, & b &= 3s + 2, & c &= 5s + 3, & \text{falls } s \text{ gerade und} \\ a &= 3s + 2, & b &= 2s + 1, & c &= 5s + 3, & \text{falls } s \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

Zunächst kann man feststellen, daß jede der drei Zahlen a, b, c mit $12s + 7$ teilerfremd ist. Im zugehörigen Zyklus (Z) von Seite 113 bzw. 116 stehen die sechs Zahlen $\pm a, \pm b, \pm c$ in der folgenden Reihenfolge

$$\dots -a \ b \ \dots \ c \ a \ \dots \ -b \ -c \ \dots,$$

gleichgültig, ob s gerade oder ungerade ist. Der Zyklus (Z) setzt sich also aus den drei Teilfolgen $-c \ \dots \ -a$; $b \ \dots \ c$ und $a \ \dots \ -b$ zusammen. Unter Verwendung der neuen Nummern x, y, z setzen wir diese drei Teilfolgen in folgender Weise zu einem neuen Zyklus (Z_1)

$$\dots -a \ x \ a \ \dots \ -b \ y \ b \ \dots \ c \ z \ -c \ \dots$$

zusammen. Nun schreiben wir das gesuchte Schema in der folgenden Form (es wird wieder mod $12s + 7$ gerechnet, also $0 \equiv 12s + 7, (12s + 6)b \equiv -b$ usw.)

0. ...	$-a \ x$	$a \ \dots$	$-b \ y$	$b \ \dots$	$c \ z$	$-c \ \dots$
1. ...	$1-a \ x$	$1+a \ \dots$	$1-b \ y$	$1+b \ \dots$	$1+c \ z$	$1-c \ \dots$
2. ...	$2-a \ x$	$2+a \ \dots$	$2-b \ y$	$2+b \ \dots$	$2+c \ z$	$2-c \ \dots$
$(S_{\lfloor \frac{3}{2}s+10}^{\lfloor \frac{3}{2}s+10})$: ...	: : : ...	: : : ...	: : : ...	: : : ...	: : : ...
$12s+6.$	$-a-1 \ x$	$a-1 \ \dots$	$-b-1 \ y$	$b-1 \ \dots$	$c-1 \ z$	$-c-1 \ \dots$
$x.$	$0 -a$	$\dots \ 5a$	$4a$	$3a$	$2a$	a
$y.$	$0 -b$	$\dots \ 5b$	$4b$	$3b$	$2b$	b
$z.$	$c \ 2c$	$3c \ \dots$	$\dots \ -2c$	$-c$	0	

Als 0-te Zeile ist also der obige Zyklus (Z_1) gewählt. Die i -te Zeile entsteht durch Addition aller Restklassen mit i , wobei nur die Nummern x, y, z ungeändert bleiben. Die x -te, y -te und z -te Zeile ergeben sich dann zwangsläufig durch Anwendung der Regel R*. Es läßt sich mühelos nach-

weisen, daß die Regel R^* im ganzen Schema gültig ist. So steht z.B. in der i -ten und $(i + a)$ -ten Zeile

$$\begin{array}{cccccccc} i. & \dots & \dots & \dots & x & i+a & h & \dots \\ i+a. & \dots & \dots & h' & i & x & \dots & \dots \end{array}$$

Weil im früheren Schema (S_{12s+7}) die Regel R^* gilt, ist $h = h'$, also ist auch hier die Regel R^* erfüllt. In der i -ten Zeile steht

$$i. \dots i-a \quad x \quad i+a \dots$$

Weil a teilerfremd zu $12s + 7$ ist, ist die Kongruenz $ja \equiv i \pmod{12s + 7}$ eindeutig lösbar; in der x -ten Zeile steht somit

$$\begin{array}{cccccccc} x. & \dots & (j+1)a & ja & (j-1)a & \dots, & \text{d.h.} \\ x. & \dots & i+a & i & i-a & \dots, & \text{w.z.b.w.} \end{array}$$

Ebenso bestätigt sich in allen anderen Fällen die Regel R^* . Als Beispiel geben wir das nach diesem Rezept gebildete orientierte Schema ($S_{22}^{(-3)}$) an:

19.	17	4	7	9	1	14	x	5	6	2	12	16	y	3	15	13	18	8	z	11	10
1.	18	5	8	10	2	15	x	6	7	3	13	17	y	4	16	15	19	9	z	12	11
2.	19	6	9	11	3	16	x	7	8	4	14	18	y	5	17	15	1	10	z	13	12
3.	1	7	10	12	4	17	x	8	9	5	15	19	y	6	18	16	2	11	z	14	13
4.	2	8	11	13	5	18	x	9	10	6	16	1	y	7	19	17	3	12	z	15	14
5.	3	9	12	14	6	19	x	10	11	7	17	2	y	8	1	18	4	13	z	16	15
6.	4	10	13	15	7	1	x	11	12	8	18	3	y	9	2	19	5	14	z	17	16
7.	5	11	14	16	8	2	x	12	13	9	19	4	y	10	3	1	6	15	z	18	17
8.	6	12	15	17	9	3	x	13	14	10	1	5	y	11	4	2	7	16	z	19	18
9.	7	13	16	18	10	4	x	14	15	11	2	6	y	12	5	3	8	17	z	1	19
10.	8	14	17	19	11	5	x	15	16	12	3	7	y	13	6	4	9	18	z	2	1
11.	9	15	18	1	12	6	x	16	17	13	4	8	y	14	7	5	10	19	z	3	2
12.	10	16	19	2	13	7	x	17	18	14	5	9	y	15	8	6	11	1	z	4	3
13.	11	17	1	3	14	8	x	18	19	15	6	10	y	16	9	7	12	2	z	5	4
14.	12	18	2	4	15	9	x	19	1	16	7	11	y	17	10	8	13	3	z	6	5
15.	13	19	3	5	16	10	x	1	2	17	8	12	y	18	11	9	14	4	z	7	6
16.	14	1	4	6	17	11	x	2	3	18	9	13	y	19	12	10	15	5	z	8	7
17.	15	2	5	7	18	12	x	3	4	19	10	14	y	1	13	11	16	6	z	9	8
18.	16	3	6	8	19	13	x	4	5	1	11	15	y	2	14	12	17	7	z	10	9
$x.$	19	14	9	4	18	13	8	3	17	12	7	2	16	11	6	1	15	10	5		
$y.$	19	16	13	10	7	4	1	17	14	11	8	5	2	18	15	12	9	6	3		
$z.$	8	16	5	13	2	10	18	7	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	19		

Mit diesem allgemeinen Verfahren haben wir für jedes $m \equiv 10 \pmod{12}$ ein bestimmtes orientierbares Polyeder $\mathfrak{P}_m^{(-3)}$ gefunden. Dies ist freilich

noch nicht das ursprünglich gesuchte Polyeder \mathfrak{P}_m , bei dem alle m Länder paarweise benachbart sein sollen. Ein solches können wir jetzt leicht konstruieren. Wir betrachten einen Torus, der durch Identifizieren gegenüberliegender Kanten aus einem Rechteck entsteht und der nach Abb. 2 oben in 5 Elementarflächenstücke 1, c, x, y, z zerlegt sei. Sodann schneiden wir das Land c heraus. Ebenso schneiden wir aus $\mathfrak{P}_m^{(-3)}$

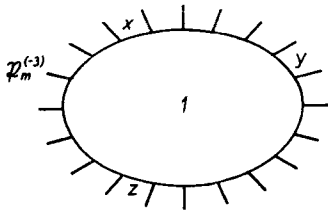
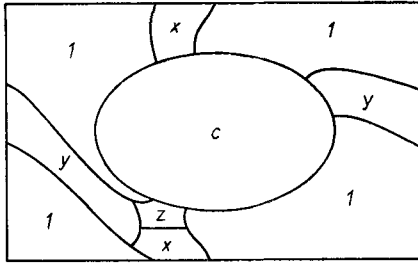


Abb. 2

das Land 1. So haben wir zwei Flächen mit je einem Loch. Die beiden Lochränder identifizieren wir derart, daß die sechs Eckpunkte von c mit den entsprechenden Eckpunkten von x, y, z von $\mathfrak{P}_m^{(-3)}$ zur Deckung kommen. Auf der neu entstehendengeschlossenen Fläche haben wir eine Zerlegung vor uns mit $\frac{m(m-1)}{2} + 3$ Kanten, weil das neue Land 1 zu den drei Ländern x, y, z je zweimal und sonst jedes Land zu jedem anderen genau längs einer Kante benachbart ist. Dies ist also ein gesuchtes orientierbares Polyeder \mathfrak{P}_m .

§ 3. Orientierte Schemata der Form (S_{12s+3})

Wir zeigen nun, daß für jedes $m \equiv 3 \pmod{12}$ ein orientiertes Schema (S_m) existiert. Diesmal wird es kein zyklisches Schema sein, d.h. die Automorphismengruppe wird nicht die Permutation $\lambda = (1, 2, \dots, m)$ enthalten. Jedoch bei Anwendung der Permutation λ^3 wird das zu konstruierende Schema in sich übergehen. Bevor wir das allgemeine Schema beschreiben, betrachten wir das Beispiel (S_{15}) :

1.	4	11	8	13	3	9	2	12	15	10	14	5	7	6
4.	7	14	11	1	6	12	5	15	3	13	2	8	10	9
7.	10	2	14	4	9	15	8	3	6	1	5	11	13	12
10.	13	5	2	7	12	3	11	6	9	4	8	14	1	15
13.	1	8	5	10	15	6	14	9	12	7	11	2	4	3
2.	14	7	10	5	3	12	1	9	6	8	4	13	11	15
5.	2	10	13	8	6	15	4	12	9	11	7	1	14	3
8.	5	13	1	11	9	3	7	15	12	14	10	4	2	6
11.	8	1	4	14	12	6	10	3	15	2	13	7	5	9
14.	11	4	7	2	15	9	13	6	3	5	1	10	8	12

3.	14	6	7	8	9	1	13	4	15	11	10	12	2	5
6.	2	9	10	11	12	4	1	7	3	14	13	15	5	8
9.	5	12	13	14	15	7	4	10	6	2	1	3	8	11
12.	8	15	1	2	3	10	7	13	9	5	4	6	11	14
15.	11	3	4	5	6	13	10	1	12	8	7	9	14	2

Man kann sich überzeugen, daß die Regel R* ausnahmslos erfüllt ist. Wenn man mit den Nummern mod 15 rechnet, so gilt: Aus jeder Zeile des Schemas erhält man durch Addition aller Nummern mit drei wieder eine Zeile des Schemas. Wenn man dies von vornherein festsetzt, so ist das ganze Schema bereits durch die erste, zweite und dritte Zeile bestimmt. So verfahren wir nun im allgemeinen Fall $m = 12s + 3$. Mit den Nummern rechnen wir wieder wie mit den Restklammern mod $12s + 3$.

Die erste Zeile des zu konstruierenden Schemas (S_{12s+3}) soll lauten:

1.	4	$6s+5$	$6s+2$	$12s+1$	$3s$	$3s+6$	
	10	$6s+8$	$6s-1$	$12s-5$	$3s-3$	$3s+9$	
	16	$6s+11$	$6s-4$	$12s-11$	$3s-6$	$3s+12$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	$6s-2$	$9s+2$	$3s+5$	$6s+7$	3	$6s+3$	2
	$6s+6$	$12s+3$	$6s-5$	$3s-1$	$9s+8$	$6s+10$	
	$6s+9$	$12s$	$6s-11$	$3s-4$	$9s+11$	$6s+16$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	$9s-3$	$9s+12$	13	8	$12s-1$	$12s-8$	
	$9s$	$9s+9$	7	5	$12s+2$	$12s-2$	
	$9s+3$	$9s+6$	$6s+4$	$9s+5$	$3s+2$	$6s+1$	$3s+3$

Die obigen Zeilen sind hintereinander als ein einziger Zyklus zu lesen, also nach der Nummer $3s + 3$ folgt die Nummer 4. Dasselbe gilt für die folgende zweite und dritte Zeile. Die zweite wird wie folgt festgesetzt.

2.	$12s+2$	$6s+1$	$6s+4$	5	$9s+9$	$9s+3$	
	$12s-4$	$6s-2$	$6s+7$	11	$9s+12$	$9s$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	$6s+14$	$3s+7$	$9s-2$	$6s-7$	$12s+3$	$6s+9$	
	$6s+8$	$3s+4$	$9s+1$	$6s-1$	3	$6s+6$	1
	$6s+3$	6	$6s+11$	$9s+7$	$3s-2$	$6s-4$	
	$6s$	9	$6s+17$	$9s+10$	$3s-5$	$6s-10$	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	$3s+12$	$3s-3$	$12s-7$	$12s-2$	7	14	
	$3s+9$	$3s$	$12s-1$	$12s+1$	4	8	
	$3s+6$	$3s+3$	$6s+2$	$3s+1$	$9s+4$	$6s+5$	$9s+6$

Bei der dritten Zeile müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Wenn s eine ungerade Zahl ist, so soll sie lauten

$$\begin{array}{rcccccc}
 3. & 9s+5 & 6 & 3s+4 & 3s-2 & 12s-3 & 9s-1 \\
 & 9s+11 & 18 & 3s+10 & 3s-8 & 12s-15 & 9s-7 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 12s-4 & 6s-12 & 6s-5 & 7 & 6s+15 & 6s+8 \\
 & 12s+2 & 6s & 6s+1 & 6s+2 & 6s+3 & 1 \\
 \hline
 & 6s+7 & 6s+12 & 5 & 6s-4 & 6s-9 & 12s-2 \\
 & 6s+13 & 6s+24 & 11 & 6s-10 & 6s-21 & 12s-8 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 9s-2 & 12s-6 & 3s-4 & 3s+5 & 9 & 9s+7 & 9s+4 \\
 \hline
 & 3s+1 & 12s+3 & 9s+2 & 9s+8 & 12 & 3s+7 \\
 & 3s-5 & 12s-9 & 9s-4 & 9s+14 & 24 & 3s+13 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 10 & 6s+21 & 6s+11 & 12s-1 & 6s-6 & 6s-2 \\
 & 4 & 6s+9 & 6s+5 & 6s+4 & 6s+6 & 2 \\
 \hline
 & 6s-1 & 6s-3 & 12s+1 & 6s+10 & 6s+18 & 8 \\
 & 6s-7 & 6s-15 & 12s-5 & 6s+16 & 6s+30 & 14 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 3s+8 & 15 & 9s+10 & 9s+1 & 12s & 3s-1 & 3s+2
 \end{array}$$

Falls s eine gerade Zahl ist, so lautet die dritte Zeile:

$$\begin{array}{rcccccc}
 3. & 9s+5 & 6 & 3s+4 & 3s-2 & 12s-3 & 9s-1 \\
 & 9s+11 & 18 & 3s+10 & 3s-8 & 12s-15 & 9s-7 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 12s-1 & 6s-6 & 6s-2 & 4 & 6s+9 & 6s+5 \\
 \hline
 & 6s+4 & 6s+6 & 2 & 6s-1 & 6s-3 & 12s+1 \\
 & 6s+10 & 6s+18 & 8 & 6s-7 & 6s-15 & 12s-5 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 9s-2 & 12s-6 & 3s-4 & 3s+5 & 9 & 9s+7 & 9s+4 \\
 \hline
 & 3s+1 & 12s+3 & 9s+2 & 9s+8 & 12 & 3s+7 \\
 & 3s-5 & 12s-9 & 9s-4 & 9s+14 & 24 & 3s+13 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

7	$6s+15$	$6s+8$	$12s+2$	$6s$	$6s+1$	
$6s+2$	$6s+3$	1	$6s+7$	$6s+12$	5	
$6s-4$	$6s-9$	$12s-2$	$6s+13$	$6s+24$	11	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$3s+8$	15	$9s+10$	$9s+1$	$12s$	$3s-1$	$3s+2$

Wir können uns zunächst überzeugen, daß in der i -ten Zeile ($i = 1, 2, 3$) tatsächlich jede Nummer $\neq i$ genau einmal vorkommt. Aus den drei obigen explizite hingeschriebenen Zeilen erhält man durch Addition der Vielfachen von 3 alle weiteren Zeilen des Schemas. Wir haben nur noch zu zeigen, daß dann die Regel R^* allgemein gilt. Zu diesem Zwecke fassen wir die 1-te, 4-te, 7-te, ..., $(12s + 1)$ -te Zeile zu der Zeilengruppe A zusammen. Die 2-te, 5-te, ..., $(12s + 2)$ -te Zeile bilden die Gruppe B und die $4s + 1$ restlichen Zeilen seien die Gruppe C. Wenn für zwei bestimmte Zeilen des Schemas die Regel R^* gilt, so wollen wir sagen, die beiden Zeilen sind zueinander *kohärent*.

Zu AB) Wir wollen zunächst zeigen, daß *jede* Zeile von A zu *jeder* Zeile von B kohärent ist. Es genügt hierzu nachzuweisen, daß *eine* Zeile von A — etwa die erste — zu *jeder* Zeile von B kohärent ist. Also vergleichen wir die erste Zeile mit allen Zeilen von B. In der ersten steht

- 1. ... $6s+3$ 2 $6s+6$... , in der zweiten tatsächlich
- 2. ... $6s+6$ 1 $6s+3$... ; außerdem steht

- 1. ... $4+6i$ $6s+5+3i$ $6s+2-3i$ $12s+1-6i$...
 $(i = 0, 1, 2, \dots, s - 1)$ und
- 1. ... $6s-5-6j$ $3s-1-3j$ $9s+8+3j$ $6s+10+6j$...
 $(j = 0, 1, \dots, s - 2)$.

In der zweiten Zeile steht

- 2. ... $12s+2-6i$ $6s+1-3i$ $6s+4+3i$ $5+6i$...
 $(i = 0, 1, \dots, s - 1)$,

also in der $(6s + 5 + 3i)$ -ten bzw. $(6s + 2 - 3i)$ -ten Zeile:

$$\begin{array}{ccccccc} 6s+5+3i & \dots & 6s+2-3i & & 1 & & 4+6i & \dots & \dots \\ 6s+2-3i & \dots & & & 12s+1-6i & & 1 & & 6s+5+3i & \dots \end{array}$$

Addiert man $3s - 3 - 3j$ bzw. $9s + 6 + 3j$ zu allen Nummern der zweiten Zeile

- 2. ... $6s+11+6j$ $9s+7+3j$ $3s-2-3j$ $6s-4-6j$...
 $(j = 0, 1, \dots, s - 2)$,

so ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} 3s-1-3j & \dots & 9s+8+3j & & 1 & & 6s-5-6j & \dots & \dots \\ 9s+8+3j & \dots & \dots & & 6s+10+6j & & 1 & & 3s-1-3j \dots \end{array}$$

Man findet Regel R* bestätigt. Es fehlen nur noch zwei Sonderfälle:

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & \dots & 6s+4 & 9s+5 & 3s+2 & 6s+1 & \dots \\ 2. & \dots & 6s+2 & 3s+1 & 9s+4 & 6s+5 & \dots \\ & 9s+5 & \dots & 3s+2 & 1 & 6s+4 & \dots \\ & 3s+2 & \dots & & 6s+1 & 1 & 9s+5 \dots \end{array}$$

Zu AC) Nun zeigen wir, daß die erste Zeile und somit jede Zeile von A zu jeder Zeile von C kohärent ist.

a) In der ersten Zeile steht

$$1. \dots 12s+1-6i \quad 3s-3i \quad 3s+6+3i \dots \text{ für } i = 0, 1, \dots, s-1$$

Gemäß Regel R* müßte im Schema

$$\begin{array}{ccccccc} 3s-3i & \dots & 3s+6+3i & & 1 & & 12s+1-6i \dots, \text{ d.h.} \\ 3. & \dots & 9+6i & & 9s+7+3i & & 9s+4-3i \dots \end{array}$$

stehen. Dies kann man aber zunächst für $i = 0, 2, \dots, s-1$, dann für $i = 1, 3, \dots, s-2$ nach Seite 122 bzw. 123 tatsächlich bestätigen.

b) Für $j = 0, 1, \dots, s-2$ steht

$$1. \dots 3s-3j \quad 3s+6+3j \quad 10+6j \dots$$

Es wäre also zu zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccccc} 3s+6+3j & \dots & 10+6j & & 1 & & 3s-3j \dots, \text{ d.h.} \\ 3. & \dots & 9s+10+3j & & 9s+1-3j & & 12s-6j \dots \end{array}$$

im Schema steht. Dies bestätigt sich für $j = 0, 2, \dots, s-3$ und an anderer Stelle auch für $j = s-2, \dots, 3, 1$.

c) Außerdem steht in der ersten Zeile

$$\begin{array}{ccccccc} 1. & \dots & 6s+6+3j & 12s+3-3j & 6s-5-6j & \dots \\ & & & & & & \text{für } j = 0, 1, \dots, s-2. \end{array}$$

Man bestätigt leicht, daß im Schema

$$\begin{array}{ccccccc} 12s+3-3j & \dots & 6s-5-6j & & 1 & & 6s+6+3j \dots, \text{ d.h.} \\ 3. & \dots & 6s-2-3j & & 4+3j & & 6s+9+6j \dots \end{array}$$

steht; nämlich einmal für $j = 0, 2, \dots, s-3$ und an anderer Stelle auch für ungerades j .

d) Für $i = 1, 2, \dots, s-1$ steht

$$1. \dots 6s+4+6i \quad 6s+6+3i \quad 12s+3-3i \dots$$

Hierzu findet man

$$6s+6+3i. \dots 12s+3-3i \quad 1 \quad 6s+4+6i \dots,$$

denn in der Tat steht für gerades und ungerades i in der dritten Zeile

$$3. \dots 6s-6i \quad 6s+1-3i \quad 1+3i \dots$$

e) Die folgenden vier Einzelfälle sind noch zu berücksichtigen:

$$1. \dots 3 \quad 6s+3 \quad 2 \quad 6s+6 \quad 12s+3 \dots 9s+3 \quad 9s+6 \quad 6s+4 \dots \\ \dots 6s+1 \quad 3s+3 \quad 4 \dots$$

Man findet hierzu

$$3. \dots 6s \quad 6s+1 \quad 6s+2 \dots 9s+7 \quad 9s+4 \quad 3s+1 \quad 12s+3 \dots \\ \dots 6s+5 \quad 6s+4 \quad 6s+6 \dots$$

und somit auch

$$6s+6. \dots 12s+3 \quad 1 \quad 2 \quad \dots; \quad 6s+3. \dots 2 \quad 1 \quad 3 \quad \dots \\ 3s+3. \dots 9s+7 \quad 9s+4 \quad 3s+1 \dots; \quad 9s+4. \dots 6s+4 \quad 1 \quad 9s+3 \dots$$

Nun haben wir alle Zeilen von C mit der ersten Zeile verglichen; jedesmal ist Regel R* erfüllt.

Zu BC) Jetzt vergleichen wir die zweite Zeile mit allen Zeilen von C.

$$2. \dots 5+6i \quad 9s+9+3i \quad 9s+3-3i \quad \dots \quad \dots \\ \text{für } i = 0, 1, \dots, s-1 \text{ und} \\ 2. \dots \dots 9s+9+3j \quad 9s+3-3j \quad 12s-4-6j \dots \\ \text{für } j = 0, 1, \dots, s-2.$$

Man hat also zu zeigen, daß

$$9s+9+3i. \dots 9s+3-3i \quad 2 \quad 5+6i \dots \\ 3. \dots 12s-6i \quad 3s-1-3i \quad 3s+2+3i \dots \text{ und} \\ 9s+3-3j. \dots 12s-4-6j \quad 2 \quad 9s+9+3j \dots \\ 3. \dots 3s-4-3j \quad 3s+5+3j \quad 9+6j \dots$$

im Schema steht. Dies bestätigt sich tatsächlich für gerades i bzw. j und an anderer Stelle auch für ungerades i bzw. j .

Außerdem steht in der zweiten Zeile

$$2. \dots \dots 6s+3-3j \quad 6+3j \quad 6s+11+6j \dots \\ \text{für } j = 0, 1, \dots, s-2 \text{ und} \\ 2. \dots 6s+2-6i \quad 6s+3+3i \quad 6+3i \quad \dots \quad \dots \\ \text{für } i = 1, 2, \dots, s-1.$$

Somit müßte

$$\begin{array}{ccccccc}
 6 + 3j & \dots & 6s + 11 + 6j & & 2 & & 6s + 3 - 3j \dots \\
 & & 3 \dots & 6s + 8 + 3j & 12s + 2 - 3j & & 6s - 6j \dots \text{ und} \\
 6s + 3 - 3i & \dots & 6 + 3i & & 2 & & 6s + 2 - 6i \dots \\
 & & 3 \dots & 6s + 9 + 6i & 6s + 5 + 3i & & 2 - 3i \dots
 \end{array}$$

im Schema stehen. Auch dies kann man unmittelbar bestätigen.

Die vier hierbei noch nicht erfaßten Einzelfälle sind:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 2. & \dots & 3 & 6s + 6 & 1 & 6s + 3 & 6 & \dots & 3s + 6 & 3s + 3 & 6s + 2 & \dots & 6s + 5 & 9s + 6 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 12s + 2 \dots
 \end{array}$$

Weil in der dritten Zeile

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 3. & \dots & 6s + 1 & 6s + 2 & 6s + 3 & \dots & 6s + 9 & 6s + 5 & 6s + 4 & \dots & 3s + 1 & 3s + 2 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 9s + 5 & 6 \dots
 \end{array}$$

steht, folgt

$$\begin{array}{cccccccc}
 6s + 6. & \dots & 1 & 2 & 3 & \dots; & 9s + 6. & \dots & 12s + 2 & 2 & 6s + 5 & \dots \\
 6s + 3. & \dots & 6 & 2 & 1 & \dots; & 3s + 3. & \dots & 6s + 2 & 2 & 3s + 6 & \dots
 \end{array}$$

Somit ist gezeigt, daß alle Zeilen von B zu allen Zeilen von C kohärent sind.

Zu A) Nun läßt sich mühelos zeigen, daß auch die Zeilen von A untereinander die Regel R^* erfüllen. Wenn j eine beliebige Nummer $\equiv 1 \pmod{3}$ ist, so haben wir nur zu beweisen, daß die 1-te zur j -ten Zeile kohärent ist. In der ersten Zeile steht

$$1. \dots g \ j \ h \dots$$

Die erste Zeile ist so eingerichtet, daß g und h stets beide $\not\equiv 1 \pmod{3}$ sind. Daher ist schon bewiesen, daß die erste Zeile zur g -ten und auch zur h -ten kohärent ist; es steht also im Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 g. & \dots & j & 1 & . & \dots \\
 h. & \dots & . & 1 & j & \dots
 \end{array}$$

Außerdem ist schon gezeigt, daß die j -te Zeile zur g -ten und h -ten kohärent ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 j. & \dots & . & 1 & g & \dots \\
 j. & \dots & h & 1 & . & \dots
 \end{array}$$

Weil aber die Nummer 1 in der j -ten Zeile nur einmal vorkommt, steht in ihr

$$j. \dots h \ 1 \ g \dots$$

Zu B bzw. C) Genauso zeigt man, daß alle Zeilen B untereinander und auch alle Zeilen C untereinander kohärent sind. Man hat sich hierzu nur zu überzeugen, daß in der zweiten bzw. dritten Zeile niemals zwei Nummern nebeneinander stehen, die beide $\equiv 2$ bzw. $0 \pmod{3}$ sind.

Literaturverzeichnis

- [1] P. J. HEAWOOD, Map-colour theorem I, II. Quart. J. Math. **24**, 332—338 (1890), **29**, 270—285 (1898).
- [2] L. HEFFTER, Über das Problem der Nachbargebiete. Math. Ann. **38**, 477—508 (1891).
- [3] G. RINGEL, Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlecht $p > 0$. J. reine angew. Math. **193**, 11—38 (1954).
- [4] G. RINGEL, Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen. Math. Ann. **127**, 181—214 (1954).
- [5] G. RINGEL, Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Lehrbuch, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1959.

Eingegangen am 1. 10. 60