

Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz

VON HANS-WILHELM KNOBLOCH in Würzburg

Einleitung

Den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, ausgesprochen für ein ganzzahliges Polynom $f(x_1, \dots, x_k, t)$ in den k Variablen x_i und dem einen Parameter t , hat DÖRGE vor längerer Zeit dahingehend verschärft¹⁾, daß er für die Anzahl $R(N)$ derjenigen ganzen Zahlen τ mit $|\tau| \leq N$, die $f(x_1, \dots, x_k, t)$ in ein reduzibles Polynom $f(x_1, \dots, x_k, \tau)$ überführen, eine Abschätzung

$$R(N) \leq CN^{1-\alpha}$$

mit konstantem $\alpha > 0$, C erbringen konnte.

Im vierten Kapitel der ersten der zitierten Arbeiten führt dann DÖRGE eine Dichtedefinition für Mengen ganzzahliger s -Tupel auch für $s > 1$ ein, welche so beschaffen ist, daß sich sein Resultat in einem gewissen Sinne auch auf höhere Parameterzahlen übertragen läßt und dabei immer die ursprüngliche Hilbertsche Aussage über die unendlich vielen Möglichkeiten einer Spezialisierung, die die Irreduzibilität des Polynoms nicht zerstören, enthält.

Wir wollen im folgenden einen anderen naheliegenden Dichtebegriff für Mengen ganzzahliger s -Tupel einführen (§ 2), welcher sich im Falle $s = 1$ mit dem Dörgeschen deckt, und zeigen, daß auch in diesem Sinne die Menge der ganzzahligen Spezialisierungen (τ_1, \dots, τ_s) „dünn“ ist, welche ein irreduzibles ganzzahliges Polynom $f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s)$ in ein reduzibles $f(x_1, \dots, x_k, \tau_1, \dots, \tau_s)$ überführen. Wir beweisen nämlich den folgenden

Satz: Es sei $f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s)$ ein ganzzahliges irreduzibles Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s$ und es bezeichne $R(N)$ die Anzahl aller s -Tupel $\mathbf{T} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ ganzer Zahlen mit $|\tau_i| \leq N$ ($i = 1, \dots, s$), derart, daß $f(x_1, \dots, x_k, \tau_1, \dots, \tau_s)$ reduzibel wird, so gilt

$$R(N) \leq CN^{s-\alpha}$$

mit geeigneten Konstanten $\alpha > 0$, C .

Beachtet man, daß die Anzahl $A(N)$ aller \mathbf{T} mit $|\tau_i| \leq N$ gleich $(2N + 1)^s$ ist, so erhält man also für den Bruchteil $\frac{R(N)}{A(N)}$ — den man offenbar als ein Maß für die Häufigkeit derjenigen Spezialisierungen an-

¹⁾ K. DÖRGE, Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Annalen 95 (1926), 84—97. — Über die Seltenheit der reduziblen Polynome und der Normalgleichungen, Math. Annalen 95 (1926) 247—256. Im folgenden zitiert mit D I, D II.

sehen kann, die Reduzibilität zur Folge haben — die Abschätzung

$$\frac{R(N)}{A(N)} = O(N^{-\alpha}),$$

d. h. er geht gegen 0 mit $N \rightarrow \infty$, und zwar mindestens so stark wie eine gewisse negative Potenz von N .

Spezialfälle unseres Satzes sind bereits in der Literatur mit anderen Methoden und teils besseren, teils schlechteren Resultaten behandelt worden. Erwähnt seien vor allem die Untersuchungen von v. D. WAERDEN²⁾ über die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt und von SPECHT³⁾ über die Seltenheit der reduziblen Polynome. Auf die ersteren wollen wir noch kurz eingehen, da unser Satz es erlaubt, die vorliegenden Ergebnisse zu verschärfen.

In der Gesamtheit aller ganzzahligen Polynome der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ festen Grades n mit $|a_i| \leq N$ besitzen genau diejenigen einen Affekt, für die die Galoissche Resolvente $G(z, u_1, \dots, u_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$ — welche ja in den a_i als Unbestimmten irreduzibel ist — reduzibel wird. Der Bruchteil derjenigen unter den betrachteten Polynomen mit Affekt ist also gleich dem von uns betrachteten Quotienten $\frac{R(N)}{A(N)}$, gebildet für die Galoissche Resolvente G und daher von der Größenordnung $O(N^{-\alpha})$. v. D. WAERDEN hatte ihn mit zahlentheoretischen Methoden lediglich in der Form $O(N^{-\frac{k}{\ln \ln N}})$ abschätzen können.

Für den Beweis unseres Satzes kommt es bei uns wie bei DÖRGE darauf an, eine Ungleichung

$$|\tau^{(v+N+1)} - \tau^{(v)}| \geq C |\tau^{(v)}|^\alpha$$

für gewisse Spezialisierungen $\tau^{(v)}$ eines einzigen Parameters zu gewinnen. Im übrigen werden neue Wege eingeschlagen, die die Benutzung der Reihenentwicklungen nach negativen gebrochenen Potenzen des Parameters entbehrlich machen, ein Hilfsmittel, welches ja für $s > 1$ nicht mehr zur Verfügung steht.

Zur Bezeichnungsweise sei noch bemerkt, daß bei Abschätzungen — soweit keine Verwechslungen zu befürchten sind — konstante Größen stets durch denselben Buchstaben C gekennzeichnet werden.

§ 1. Dünne Mengen

Gegenstand unserer Betrachtungen sind Mengen \mathfrak{M} s -reihiger Tupel $\mathbf{T} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ ganzer Zahlen τ_i . Es werde $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) = \text{Max } |\tau_i|$ gesetzt und

²⁾ B. L. v. D. WAERDEN, Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt, Math. Annalen 109 (1934) 13—16. — Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt, Monatsh. Math. Phys. 43 (1936), 133—147.

³⁾ W. SPECHT, Zur Zahlentheorie der Polynome, S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss., München 1951, 139—146.

mit $R(N)$, genauer $R_{\mathfrak{M}}(N)$ die Anzahl aller $\mathbf{T} \in \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N}(\mathbf{T}) \leq N$ verstanden. Wir wollen nun eine Menge \mathfrak{M} „dünn“ nennen, wenn eine Abschätzung

$$R(N) = O(N^{s-\alpha}) \text{ mit } \alpha \text{ fest und } > 0$$

besteht⁴). Im folgenden werden gewisse Eigenschaften dünner Mengen benutzt die wir daher jetzt zusammenstellen.

(1. 1) *Die Vereinigung endlich vieler dünner Mengen ist dünn.*

Unter der Projektion $\mathfrak{M}^{(r)}$ von \mathfrak{M} verstehen wir diejenige Untermenge aller ganzzahligen r -Tupel ($r \leq s$), die aus den r ersten Komponenten der Elemente von \mathfrak{M} besteht. Dann gilt:

(1. 2) *Ist $\mathfrak{M}^{(r)}$ dünn, so auch \mathfrak{M} .*

Denn ist $R(N)$ die Anzahlfunktion von \mathfrak{M} , $R^{(r)}(N)$ diejenige von $\mathfrak{M}^{(r)}$, so folgt aus $R^{(r)}(N) = O(N^{r-\alpha})$ und $R(N) = O(R^{(r)}(N) \cdot N^{s-r})$ auch für $R(N)$ eine Abschätzung der gewünschten Art.

(1. 3) *Ist $\Phi(t_1, \dots, t_s)$ ein nicht-verschwindendes rationalzahliges Polynom in t_1, \dots, t_s , so ist die Menge aller (τ_1, \dots, τ_s) mit $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_s) = 0$ dünn.*

Sei nämlich

$$\Phi(t_1, \dots, t_s) = A_0(t_1, \dots, t_{s-1})t_s^m + \dots + A_m(t_1, \dots, t_{s-1})$$

wo die A_i Polynome in t_1, \dots, t_{s-1} sind und nicht sämtlich verschwinden. Nehmen wir nun an, daß unsere Behauptung bereits für Variablenzahlen $\leq s-1$ bewiesen sei, so bildet also die Gesamtheit aller $(s-1)$ -Tupel, die sämtliche Koeffizienten zum Verschwinden bringen, eine dünne $(s-1)$ -dimensionale Menge $\mathfrak{M}_{(s-1)}^*$ und daher — wegen (1. 2) — die Gesamtheit der s -Tupel \mathbf{T} mit $\mathbf{T}^{(s-1)} \in \mathfrak{M}_{(s-1)}^*$ ebenfalls eine dünne Menge \mathfrak{M}^* . Es sei \mathfrak{M} die Gesamtheit der \mathbf{T} mit $\Phi(\mathbf{T}) = 0$, $\mathbf{T} \notin \mathfrak{M}^*$. Dann gibt es zu jedem $\tau_1, \dots, \tau_{s-1} \in \mathfrak{M}^{(s-1)}$ höchstens m ganze Zahlen τ_s derart, daß $(\tau_1, \dots, \tau_{s-1}, \tau_s) \in \mathfrak{M}$. Also gilt $R_{\mathfrak{M}}(N) \leq m(2N+1)^{s-1}$, d. h. \mathfrak{M} ist ebenfalls dünn und dies ergibt — wegen (1. 1) — die Behauptung.

(1. 4) *Es sei $\Phi(t_1, \dots, t_s)$ ein nicht-konstantes Polynom in t_1, \dots, t_s mit rationalen Koeffizienten, ferner λ eine beliebige reelle Zahl. Die Menge aller (τ_1, \dots, τ_s) mit*

$$|\Phi(\tau_1, \dots, \tau_s)| \leq \lambda$$

ist dann dünn.

⁴) Zum Begriff der dünnen Menge vgl. auch E. INABA: Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Jap. Journal of Math. XIX, 1 (1944), 1–25. — Vom dortigen Standpunkt aus hätte man von einem schärferen, aber umständlicher zu formulierenden Dünnbegriff ausgehen sollen, auf den wir im § 4 stoßen werden.

$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_s)$ ist nämlich für ganze τ_i immer von der Form $\frac{\Lambda}{N}$, wo N der Hauptnenner der Koeffizienten von Φ und Λ eine ganze Zahl ist. Durch die Bedingung $|\Phi(\mathbf{T})| \leq \lambda$ wird daher der Wertevorrat von Φ für ganze \mathbf{T} auf eine endliche Anzahl beschränkt und daraus folgt in Verbindung mit (1. 1), (1. 3) die Behauptung.

§ 2. Vorbereitende Betrachtungen

Wir wollen zunächst den Kreis der zu untersuchenden Polynome auf solche beschränken, welche bezüglich einer Variablen normiert⁵⁾ sind. Dies wird gerechtfertigt auf Grund der folgenden beiden Feststellungen.

- a) Die Menge \mathbf{T} aller Spezialisierungen, für welche ein irreduzibles $f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s)$ in zwei Faktoren zerfällt, welche keine Variable gemeinsam haben, ist dünn.
- b) Zu jeder Variablen x_i gibt es ein bezüglich x_i normiertes irreduzibles ganzzahliges Polynom $f^{(i)}$ mit der Eigenschaft, daß $f^{(i)}$ für spezielle \mathbf{T} dann und nur dann reduzibel wird, wenn f in zwei Faktoren zerlegbar ist, die die Variable x_i gemeinsam haben. Auszuschließen ist hierbei eine dünne Menge von Tupeln \mathbf{T} .

Was (a) anbetrifft, so verweisen wir auf D I, § 3. Es ist ein Zerfallen in Faktoren ohne gemeinsame Variable dann und nur dann möglich, wenn ein nicht-verschwindendes Polynom in t_1, \dots, t_s durch \mathbf{T} annulliert wird.

Zu (b) bemerken wir, daß eine Zerlegung von f in der verlangten Weise gleichbedeutend ist mit der Reduzibilität von f als Polynom in x_i über dem von den restlichen Variablen erzeugten Funktionenkörper.

Sei (o. E. $i = 1$)

$$f = x_1^n a_n + x_1^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0,$$

$$a_i \in \mathbf{P}[x_2, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s], \quad a_n \neq 0.$$

Setzen wir $x_1^* = a_n x_1$, so wird $a_n^{-1} f$ ein Polynom f^* in $x_1^*, x_2, \dots, x_k, t_1, \dots, t_s$, welches bezüglich x_1^* normiert ist. Für spezielle \mathbf{T} zerfällt f dann und nur dann, wenn f^* zerfällt, sofern a_n nicht verschwindet.

Wir setzen von nun an stets voraus, daß f bezüglich x_1 normiert ist. Es sei μ eine natürliche Zahl mit $1 \leq \mu < n$. Wir gehen aus von einem formalen Ansatz:

$$(2. 1) \quad f(x, t) = (x_1^\mu + B_1 x_1^{\mu-1} + \dots + B_\mu)(x_1^{n-\mu} + D_1 x_1^{n-\mu-1} + \dots + D_{n-\mu}).$$

Hierin seien die B_i, D_j Polynome in x_2, \dots, x_k mit unbestimmten Koeffizienten A : $B, D = \sum_{\nu_2} \dots \sum_{\nu_k} A_{\nu_2 \dots \nu_k} x_2^{\nu_2} \dots x_k^{\nu_k}$. Die ν_i sind durch die in f

⁵⁾ Ein Polynom soll bezüglich einer Variablen x_i normiert heißen, wenn es als Polynom in x_i über dem von den restlichen Variablen erzeugten Funktionenkörper normiert ist (im üblichen Sinne).

vorkommenden Grade der x_i beschränkt. Durch Ausmultiplizieren findet man für die A ein System algebraischer Gleichungen mit Koeffizienten aus $\mathbf{P}[t_1, \dots, t_s]$ (\mathbf{P} = rationaler Zahlkörper, \mathbf{l} = Ring der ganzen Zahlen). Wir haben zu zeigen, daß die Menge aller \mathbf{T} , für die dieses System Lösungen in \mathbf{P} (und damit in \mathbf{l}) besitzt, dünn ist.

Zunächst aber soll das Gleichungssystem über $\mathbf{K} = \mathbf{P}(t_1, \dots, t_s)$ als Grundkörper betrachtet werden. Nach Voraussetzung besitzt es keine Lösungen in \mathbf{K} . Wir denken uns die A in irgendeiner Reihenfolge nummeriert und eliminieren sie in bekannter Weise. Je nachdem ob die letzten Resultanten

$$(2.2) \quad \vartheta_j(t_1, \dots, t_s)$$

verschwinden oder nicht, ist das System überhaupt lösbar oder unlösbar. Im ersteren Falle liegen wegen der Endlichkeit der Lösungsmannigfaltigkeit sämtliche A_v in einem endlichen Erweiterungskörper von \mathbf{K} , d. h. genügen gewissen Gleichungen

$$\Psi_A(y, t_1, \dots, t_s) = 0$$

in bezug auf \mathbf{K} , von denen wir o. E. annehmen dürfen, daß sie doppelwurzelfrei und ihre Koeffizienten Polynome in den t sind. Durch eine geeignete Abänderung

$$A \rightarrow A \lambda_A,$$

wo $\lambda_A \in \mathbf{P}[t_1, \dots, t_s]$ und $\neq 0$, geht man zu neuen Größen über, die wir der Einfachheit halber wieder mit A bezeichnen wollen, und die die Eigenschaft haben, daß die zugeordneten Polynome $\Psi_A(y, t_1, \dots, t_s)$ bezüglich y normiert sind. Es sei $\Lambda(t_1, \dots, t_s)$ ein geeignetes gemeinsames Vielfaches der λ_A . An Stelle des Ansatzes (2.1) tritt nun ein Ansatz der Form

$$(2.3) \quad \Lambda(t_1, \dots, t_s) f(z, x, t) = (z^\mu B_0 + z^{\mu-1} B_1 + \dots + B_\mu) \\ (z^{n-\mu} D_0 + \dots + D_{n-\mu})$$

wo die B, D jetzt Polynome in x, t und den A_v sind. (2.3) leistet die gleichen Dienste wie (2.1), denn für spezielle \mathbf{T} wird (2.3) dann und nur dann lösbar, wenn (2.1) lösbar wird — ausgenommen die Nullstellen von Λ , welche aber eine dünne Menge \mathfrak{M}_0 bilden.

Das Gleichungssystem über \mathbf{K} , welches aus (2.3) entspringt, geht über in ein solches über \mathbf{P} , falls man die Variablen ganzzahlig spezialisiert. Auch letzteres kann man dem allgemeinen Eliminationsverfahren unterwerfen und sukzessive Resultanten bilden. Wir behaupten: Abgesehen von einer dünnen Menge \mathfrak{M}_1 erhält man die speziellen Resultantensysteme durch Spezialisierung der für unbestimmte t gebildeten Resultanten. Um dies einzusehen, braucht man bloß den Eliminationsprozeß etwas eingehender zu verfolgen. Bekanntlich geht man zunächst von den

zu eliminierenden Größen A_μ vermöge einer linearen Transformation

$$(A_\mu) = \Delta(A'_\mu)$$

zu neuen Größen A'_μ über. Δ ist hierbei eine reguläre Dreiecksmatrix, deren Elemente $u_{ik} \in K$ o.E. als Polynome angenommen werden können, und die so beschaffen sind, daß gewisse nicht-identisch verschwindende Polynome $\Xi(u_{ik})$ mit Koeffizienten aus K bei der Einsetzung $u_{ik} \rightarrow u_{ik}$ nicht verschwinden. Der Eliminationsprozeß für die A' besteht dann aus einer Folge formaler, d. h. vom Grundkörper unabhängiger Rechenschritte, die lediglich die Rechenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation benutzen. Daraus folgt unmittelbar unsere Behauptung, wenn wir unter \mathfrak{M}_1 die Menge aller T verstehen, für die $u_{ii}(T) = 0$, $\Xi(u_{ik}(T)) = 0$.

Wir vermerken an dieser Stelle, daß im Falle des Nichtverschwindens der letzten Resultanten (2. 2) unser Satz bereits bewiesen ist. Denn für $T \in \mathfrak{M}_0$, \mathfrak{M}_1 ist der spezialisierte Ansatz (2. 1) lösbar dann und nur dann, wenn

$$\vartheta_j(T) = 0.$$

T gehört dann aber zu einer dünnen Menge.

Wir wollen daher von nun an stets voraussetzen, daß der Ansatz (2. 1) in einem algebraischen Erweiterungskörper von K lösbar wird. Es sei \bar{K} eine über K endliche normale Erweiterung, welche sämtliche Lösungen enthält. Sei ferner η ein primitives Element von \bar{K}/K und

$$(2. 4) \quad \Gamma(w, t_1, \dots, t_s) = w^m + w^{m-1}\alpha_1(t) + \dots + \alpha_m(t)$$

eine über K normierte irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus $P[t_1, \dots, t_s]$, welche η zur Wurzel hat. Man hat dann für die sämtlichen — etwa H — Lösungen des Gleichungssystemes Darstellungen der Form

$$(2. 5) \quad A_v^{(i)} = \sum_0^{m-1} \lambda_{i,v}^{(x)} \eta^x, \quad \lambda_{i,v} \in K, \quad i = 1, \dots, H.$$

Wir wollen nun zeigen:

Hilfssatz 1: *Für alle T , welche nicht in \mathfrak{M}_1 und einer weiteren dünnen Menge \mathfrak{M}_2 enthalten sind, lassen sich alle Lösungen des spezialisierten Gleichungssystemes (2. 3) darstellen in der Form*

$$A_v^{(i)} = \sum_0^{m-1} \lambda_{i,v}^{(x)}(T) \eta_0^x$$

wo η_0 eine feste, aber beliebige Wurzel der spezialisierten Gleichung (2. 4) $\Gamma(w, T) = 0$ ist.

Beweis: Wir denken uns die A_v in der umgekehrten Reihenfolge der Elimination numeriert, so daß also A_1 als letztes eliminiert wird, und

nehmen an, daß unsere Behauptung schon für alle A_ϱ mit $\varrho \leq \mu - 1$ bewiesen sei. D. h. ist

$$(2.6) \quad A_\varrho^{(i)} = \sum_{\kappa} \lambda_{i,\varrho}^{(\kappa)} \eta^\kappa, \quad \varrho \leq \mu - 1$$

die Lösungsmannigfaltigkeit desjenigen algebraischen Gleichungssystems für die A_ϱ mit $\varrho \leq \mu - 1$, welches aus dem ursprünglichen durch geeignet oft wiederholte Resultantenbildung entsteht, so erhält man die Lösungen $A_\varrho^{(i)}$ des entsprechenden spezialisierten Gleichungssystems durch Spezialisierung der Variablen t in den λ und von η (zu η_0).

A_μ bestimmt sich nun als gemeinsame Nullstelle eines Systemes von Polynomen

$$(2.7) \quad \Phi_j(z, A_1, \dots, A_{\mu-1}) = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}[A_1, \dots, A_{\mu-1}]$. Für ein bestimmtes Lösungssystem der Form (2.6) geht (2.7) über in ein System von Polynomen in z mit Koeffizienten aus $\bar{\mathbb{K}}$:

$$(2.8) \quad \Phi_j(z, A_1^{(i)}, \dots, A_{\mu-1}^{(i)}) = \Phi_j^{(i)}(z) = \sum_{\nu} z^\nu \alpha_{i,j}^{(\nu)}, \quad \alpha_{i,j}^{(\nu)} \in \bar{\mathbb{K}}.$$

Gemäß Konstruktion der $A_\varrho^{(i)}$ besitzen diese Polynome einen größten gemeinsamen Teiler $\bar{\Phi} \neq 1$ (o. E. normiert), welcher in $\bar{\mathbb{K}}$ vollständig zerfällt. Es bestehen also die Beziehungen (wir unterdrücken den Index i):

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Phi_j(z) &= \Phi_j^*(z) \bar{\Phi}(z), \\ \bar{\Phi}(z) &= \prod_{\varrho} (z - \beta_\varrho), \\ \sum_j \Phi_j^*(z) \check{\Phi}_j(z) &= 1. \end{aligned}$$

Hierbei sind β_ϱ geeignete Elemente aus $\bar{\mathbb{K}}$ und $\check{\Phi}_j(z)$ geeignete Polynome aus $\bar{\mathbb{K}}[z]$. Wir übersetzen die Beziehungen (2.9) in solche zwischen Elementen des Grundkörpers \mathbb{K} . Zu diesem Zwecke denken wir uns die in (2.9) vorkommenden Elemente aus $\bar{\mathbb{K}}$ als Polynome in η mit Koeffizienten aus \mathbb{K} geschrieben, dann η durch eine Unbestimmte w ersetzt (wir schreiben danach $\Phi(z, w)$ oder genauer $\Phi(z, w; t_1, \dots, t_s)$ statt $\Phi(z)$ usw.), wodurch sich die Gleichheiten in Kongruenzen mod $\Gamma(w; t_1, \dots, t_s)$ verwandeln:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Phi_j(z, w) &= \Phi_j^*(z, w) \bar{\Phi}(z, w) + \Gamma(w) R_1(z, w), \\ \bar{\Phi}(z, w) &= \prod_{\varrho} (z - \beta_\varrho(w)) + \Gamma(w) R_2(z, w), \\ \sum_j \Phi_j^*(z, w) \check{\Phi}_j(z, w) &= 1 + \Gamma(w) R_3(z, w). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\Phi, \Phi^*, \bar{\Phi}, \check{\Phi}, R, \Gamma$ Polynome in z und w mit Koeffizienten aus \mathbb{K} . Die ganzzahligen Nullstellen sämtlicher Koeffizientennenner denken wir uns in \mathfrak{M}_2 aufgenommen, wobei ja \mathfrak{M}_2 nach wie vor eine dünne Menge bleibt. Ist dann $\mathfrak{T} \notin \mathfrak{M}_2$ und trägt man in $\Phi_j(z, w; t_1, \dots, t_s)$ für die t den Wert \mathfrak{T} und für w den Wert η_0 ein, so haben die spezialisierten

Polynome $\Phi_j(z, \eta_0; \mathbf{T})$ zufolge (2. 10) die Eigenschaft, daß ihr größter gemeinsamer Teiler $\bar{\Phi}(z, \eta_0; \mathbf{T})$ wird und in \mathbb{K} in der Form

$$\prod_e (z - \beta_e(\mathbf{T}))$$

zerfällt.

Wir nehmen nun auch noch $\mathbf{T} \notin \mathfrak{M}_1$ an. Um von den bereits gewonnenen $\mathbf{A}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{A}_{\mu-1}^{(i)}$ zu einem $\mathbf{A}_\mu^{(i)}$ aufzusteigen, hat man auf Grund der zuvor festgestellten Beziehung zwischen den Resultanten für Unbestimmte und für Spezialisierungen in den Polynomen (2. 7) $\Phi_j(z; A_1, \dots, A_{\mu-1})$ die A_j durch $\mathbf{A}_j^{(i)}$ und die t durch \mathbf{T} zu ersetzen und dann $\mathbf{A}_\mu^{(i)}$ als gemeinsame Wurzel der so entstandenen Polynome von z allein zu bestimmen. Gemäß Induktionsvoraussetzung ist der Prozeß des Ersetzens aber gleichbedeutend damit, daß man zunächst die A_μ durch die algebraischen Funktionen $A_\mu^{(i)}$ ersetzt und anschließend t zu \mathbf{T} und η zu η_0 spezialisiert. Dabei aber ergeben sich gerade die Polynome $\Phi_j(z, \eta_0; \mathbf{T})$ und daher ist jedes $\mathbf{A}_\mu^{(i)}$ notwendig von der Form $\beta_e(\eta_0)$, womit der Hilfssatz auch für μ bewiesen ist.

Aus dem Hilfssatz ziehen wir nun sofort eine Folgerung. Wir behaupten nämlich: Für jedes $\mathbf{T} \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ genügt eine Lösung $\mathbf{A}_\nu^{(i)}$ des spezialisierten Gleichungssystemes den spezialisierten Gleichungen $\Psi_{A_\nu}(y; \mathbf{T}) = 0$:

$$(2. 11) \quad \Psi_A(\mathbf{A}^{(i)}; \mathbf{T}) = 0.$$

Denn nach Voraussetzung gilt für jedes $A_\mu^{(i)}$

$$\Psi_A(A^{(i)}; t_1, \dots, t_s) = 0,$$

oder, indem man wieder η durch eine Unbestimmte w ersetzt,

$$\Psi_A(A^{(i)}(w), t_1, \dots, t_s) = \Gamma(w; t_1, \dots, t_s) R(w; t_1, \dots, t_s).$$

Spezialisiert man hierin t zu \mathbf{T} und w zu η_0 , so geht die letzte Beziehung in (2. 11) über.

Es sollen nun noch zwei weitere dünne Mengen $\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4$ von unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden. Die Polynome $\Psi_A(y; t)$, aufgefaßt als Polynome aus $\mathbb{K}[y]$, haben nach Voraussetzung Diskriminanten $\Delta_A(t_1, \dots, t_s) \neq 0$ aus $\mathbb{P}[t_1, \dots, t_s]$. \mathfrak{M}_3 soll nun aus allen \mathbf{T} bestehen, deren Projektion $\mathbf{T}^{(s-1)}$ mindestens ein Δ_A identisch in t_s annulliert.

Um \mathfrak{M}_4 definieren zu können, müssen wir zunächst eine Bemerkung nachholen, die eigentlich an den Beginn unserer Ausführungen gehörte. Wir wollen nämlich annehmen, daß unser Satz bereits bewiesen ist für Polynome, in denen höchstens $s - 1$ Unbestimmte spezialisiert werden (für $s = 0$ ist er trivialerweise richtig). Daraus folgt dann, daß die Gesamtheit \mathfrak{M}^* aller $s - 1$ Tupel $\tau_1, \dots, \tau_{s-1}$, die bei der Einsetzung $t_i \rightarrow \tau_i$ ($i = 1, \dots, s - 1$) in f Reduzibilität in den restlichen Variablen x_1, \dots, x_k ,

t_s zur Folge haben, eine $(s - 1)$ -dimensionale dünne Menge bildet. Also ist \mathfrak{M}_4 als die Menge aller \mathbf{T} mit $\mathbf{T}^{(s-1)} \in \mathfrak{M}^*$ ebenfalls dünn.

Mit \mathfrak{R} wollen wir nun die Gesamtheit aller $\mathbf{T} = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ bezeichnen, die f reduzibel machen und keiner der eben definierten Mengen \mathfrak{M}_i ($i = 0, \dots, 4$) angehören, und mit $\mathfrak{R}^{(s-1)}$ die $(s - 1)$ -dimensionale Projektion von \mathfrak{R} . Unser Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß \mathfrak{R} dünn ist. — Wir stellen noch einmal die Eigenschaften von \mathfrak{R} zusammen:

Es ist $\mathbf{T} \in \mathfrak{R}$ dann und nur dann, wenn

- (2. 12) (a) der Ansatz (2. 3) mit ganzen Zahlen \mathbf{A}_μ lösbar wird,
 (b) $\Psi_A(\mathbf{A}, \mathbf{T}) = 0$ ist,
 (c) $\Delta_A(t_s, \mathbf{T}^{(s-1)}) \neq 0$ für alle A ,
 (d) $f(x_1, \dots, x_k, \mathbf{T}^{(s-1)}, t_s)$ irreduzibel ist.

Es sei jetzt $\mathbf{T}^{(s-1)} = (\tau_1, \dots, \tau_{s-1})$ ein festes $(s - 1)$ -Tupel aus $\mathfrak{R}^{(s-1)}$. Die Diskriminanten $\Delta_A(t_s, \mathbf{T}^{(s-1)})$ haben dann gewisse Nullstellen, deren Anzahl unterhalb einer von $\mathbf{T}^{(s-1)}$ unabhängigen Schranke liegt. Wir denken uns die Realteile dieser Nullstellen, sofern sie positiv sind, der Größe nach geordnet: X_1, X_2, \dots, X_k , setzen noch $X_0 = 0, X_{k+1} = \infty$ und betrachten die Intervalle $[X_i, X_{i+1}]$. Ihre Anzahl ist, wie schon bemerkt, $\leq \beta$ wo β von $\mathbf{T}^{(s-1)}$ unabhängig ist.

Eine ganze Zahl τ , die die Eigenschaft hat, daß das s -Tupel $(\tau_1, \dots, \tau_{s-1}, \tau)$ enthalten ist in \mathfrak{R} , wollen wir im folgenden kurz einen Ergänzungswert zu $\mathbf{T}^{(s-1)} = (\tau_1, \dots, \tau_{s-1})$ nennen.

Hilfssatz 2. Die Anzahl der Ergänzungswerte τ mit

$$X_i \leq \tau \leq X_i + U < X_{i+1}$$

ist

$$\leq C_1 |\tau_1|^{\varrho_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\varrho_{s-1}} U^{\varrho_s} + C_2,$$

wo die $\varrho_i \geq 0$ sowie C_1, C_2 nicht von $U, \mathbf{T}^{(s-1)}, X_i$ abhängen und

$$\sum_1^s \varrho_i < 1$$

ist.

Der Beweis des Hilfssatzes wird in den nächsten beiden Paragraphen erbracht werden. Aus dem Hilfssatz folgt nun sehr schnell, daß \mathfrak{R} dünn ist. Denn ist zunächst $N \geq 1$ eine natürliche Zahl und $X_j \leq N < X_{j+1}$, so findet man für die Anzahl der Ergänzungswerte zwischen 0 und N die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\leq C_1 |\tau_1|^{\varrho_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\varrho_{s-1}} \left\{ \sum_{i < j} (X_{i+1} - X_i)^{\varrho_s} + (N - X_j)^{\varrho_s} \right\} + \beta C_2 \\ &\leq \beta C_1 |\tau_1|^{\varrho_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\varrho_{s-1}} N^{\varrho_s} + \beta C_2. \end{aligned}$$

Verlangt man nun noch $|\tau_i| \leq N$ für $i = 1, \dots, s - 1$, so vereinfacht sich obige Schranke zu

$$\beta(C_1 N^{\sum \varrho_i} + C_2).$$

Für die Anzahl $R^{(+)}(N)$ derjenigen $\mathbf{T} \in \mathfrak{H}$ mit $|\tau_i| \leq N$, ($i = 1, \dots, s$), $\tau_s \geq 0$ folgt daraus

$$R^{(+)}(N) \leq \beta C N^{s-1+\sum e_i}.$$

Eine entsprechende Abschätzung findet man für $R^{(-)}(N)$ und damit auch für $R(N) = R^{(+)}(N) + R^{(-)}(N)$, womit die Behauptung bewiesen ist (mit $\alpha = 1 - \sum_1^s \varrho_i$).

§ 3. Einige Abschätzungen

Es sei τ_1, \dots, τ_s ein beliebiges System komplexer Zahlen. Für die Wurzeln der Gleichungen

$$\Psi_A(y, \tau_1, \dots, \tau_s)$$

besteht dann eine Abschätzung der Form

$$(3.1) \quad \leq C_1(|\tau_1|^{\gamma_1} \cdots |\tau_s|^{\gamma_s} + C_2)$$

mit konstanten, d. h. von τ_1, \dots, τ_s unabhängigen natürlichen Zahlen γ_i (die sich im übrigen leicht aus den t -Graden der Polynome $\Psi_A(y, t_1, \dots, t_s)$ bestimmen lassen) und konstanten C_i . Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß die Ψ Polynome in y, t_1, \dots, t_s und bezüglich y normiert sind.

Nun denke man sich nur die t_1, \dots, t_{s-1} spezialisiert, und zwar zu einem ganzzahligen $(s-1)$ -Tupel $\mathbf{T}^{(s-1)} \in \mathfrak{H}^{(s-1)}$. Jedes Ψ geht dann über in ein Polynom von y und t_s und zerfällt in ein Produkt von Linearfaktoren $y - \varphi(t_s)$, wo die $\varphi(t_s)$ im Streifen $X_i < \operatorname{Re}(t_s) < X_{i+1}$ reguläre Funktionen von t_s sind. Es sei nun τ^* eine reelle Zahl und $X_i + 1 \leq \tau^* \leq \frac{X_i + X_{i+1}}{2}$. Wir wollen den Ausdruck $\frac{\varphi^{(m)}(\tau^*)}{m!}$ seinem Betrage nach abschätzen. ($\varphi^{(m)}$ bedeutet die m -te Ableitung von φ). Aus der Cauchyschen Integralformel

$$\varphi^{(m)}(\tau^*) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - \tau^*)^{m+1}} d\zeta$$

folgt

$$\left| \frac{\varphi^{(m)}(\tau^*)}{m!} \right| \leq \frac{1}{(\tau^* - X_i)^m} \operatorname{Max}_{\zeta \in \mathfrak{K}} |\varphi(\zeta)|,$$

wenn als Integrationsweg \mathfrak{K} der Kreis $|\zeta - \tau^*| = |\tau^* - X_i|$ gewählt wird. Gemäß (3.1) ist nun

$$\begin{aligned} \operatorname{Max} |\varphi(\zeta)| &\leq C_1 |\tau_1|^{\gamma_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\gamma_{s-1}} \operatorname{Max} |\zeta|^{\gamma_s} + C_2 \\ &\leq C_1 |\tau_1|^{\gamma_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\gamma_{s-1}} |2\tau^* - X_i|^{\gamma_s} + C_2 \\ &\leq C_3 |\tau_1|^{\gamma_1} \cdots |\tau_{s-1}|^{\gamma_{s-1}} \left| \tau^* - \frac{X_i}{2} \right|^{\gamma_s} + C_2. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\left| \tau^* - \frac{X_i}{2} \right| = (\tau^* - X_i)^{\gamma_s} \left(1 + \frac{X_i}{2(\tau^* - X_i)} \right)^{\gamma_s}.$$

X_i ist Nullstelle eines Polynoms, welches aus einer der Diskriminanten

$$\Delta_A = t_s^p a_p(t_1, \dots, t_{s-1}) + t_s^{p-1} a_{p-1}(t_1, \dots, t_{s-1}) + \dots a_0(\dots).$$

mit $a_p \neq 0$, $a_p \in I[t_1, \dots, t_{s-1}]$ durch Spezialisierung $t_i \rightarrow \tau_i$ ($i = 1, \dots, s-1$) hervorgeht.

Wir können nun o.E. annehmen, daß aus $\mathfrak{R}^{(s-1)}$ die Gesamtheit aller $\tau_1, \dots, \tau_{s-1}$ ausgeschlossen ist, für welche

$$|a_p(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})| < 1$$

wird, denn diese bilden nach (1. 4) eine dünne Menge. Dann läßt sich auch für X_i eine Abschätzung erbringen

$$(3. 2) \quad |X_i| \leq C |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}.$$

Zusammengenommen hat man

$$\begin{aligned} \text{Max } |\varphi(\xi)| &\leq C_1 |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} |\tau^* - X_i|^{\nu_s} \left(1 + \frac{X_i}{2}\right)^{\nu_s} + C_2 \\ &\leq C_4 |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} |\tau^* - X_i|^{\lambda_s} + C_2 \\ &\leq C |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} |\tau^* - X_i|^{\lambda_s}, \end{aligned}$$

wobei die λ_i natürliche Zahlen sind und (um die letzte Vereinfachung zu rechtfertigen) $|\tau_i| \geq 1$. Letzteres bedeutet keine Einschränkung, da die Menge aller $\mathfrak{T}^{(s-1)}$ mit einer verschwindenden Komponente dünn ist. Zusammengenommen hat man also

$$(3. 3) \quad \left| \frac{\varphi^{(m)}(\tau^*)}{m!} \right| \leq C |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} |\tau^* - X_i|^{\lambda_s - m}.$$

Liegt dagegen τ^* in $\left[\frac{X_i + X_{i+1}}{2}, X_{i+1}\right]$, so gilt eine Abschätzung

$$\left| \frac{\varphi^{(m)}(\tau^*)}{m!} \right| \leq C |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} X_{i+1}^{\nu_s} (X_{i+1} - \tau^*)^{-m}$$

und zusammen mit (3. 2) also

$$(3. 4) \quad \left| \frac{\varphi^{(m)}(\tau^*)}{m!} \right| \leq C |\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}} (X_{i+1} - \tau^*)^{-m}.$$

§ 4. Beweis des Hilfssatzes 2

Wir wählen eine natürliche Zahl $m > 2$ derart, daß

$$(4. 1) \quad \frac{2}{m(m-1)} \left\{ \sum_1^s \lambda_i - (m-1) \right\} < 0$$

wird. Die λ_i sind dabei die in der Formel (3. 3) auftretenden Exponenten.

Aus den beiden Seiten des Ansatzes (2. 3) werden bei der Spezialisierung $t_i \rightarrow \tau_i$ ($i = 1, \dots, s-1$) Polynome in x_1, \dots, x_k, t_s und den A_ν . Es sei κ das Maximum der auftretenden t_s -Grade. Da $\mathfrak{T}^{(s-1)}$ ein Element von $\mathfrak{R}^{(s-1)}$ ist, läßt sich (nach der Einsetzung von $\mathfrak{T}^{(s-1)}$) unser Ansatz auf

keine Weise durch Elemente aus $\mathbf{P}[t_s]$ lösen (vgl. (2. 12)). Wir wählen weiter eine natürliche Zahl M derart, daß

$$(4. 2) \quad \begin{aligned} M &\geq m \\ M &> 2(m - 2) + 2\kappa \end{aligned}$$

wird.

Wir numerieren nun die Wurzeln $\varphi(t_s)$ in der Form $\varphi_A^{(v)}$, $v = 1, \dots, h_A$, wodurch ausgedrückt werden soll, daß es sich um eine der h_A Wurzeln der Gleichung $\Psi_A(y, \mathbf{T}^{(s-1)}, t_s) = 0$ handelt, und bilden alle möglichen Systeme

$$(4. 3) \quad \mathfrak{S} = \{\varphi_{A_0}^{(i_0)}, \varphi_{A_1}^{(i_1)}, \dots, \varphi_{A_N}^{(i_N)}\},$$

stellen also jeweils eine der Wurzeln des ersten Polynomes mit einer des zweiten usw. zusammen. Die Anzahl dieser Systeme sei I .

Ist nun τ ein beliebiger Ergänzungswert aus dem Intervall $\langle X_i, X_{i+1} \rangle$, und denkt man sich τ in die Funktionen φ eingetragen, so wird mindestens eines der \mathfrak{S} in ein N -Tupel ganzer Zahlen übergehen, die den Ansatz (2. 3) für $t_s = \tau$ erfüllen. Greift man daher irgendwie $IM + 1$ Ergänzungswerte aus dem Intervall $\langle X_i, X_{i+1} \rangle$ heraus, so gibt es immer ein \mathfrak{S} , o. E. $\{\varphi_{A_0}^{(1)}, \dots, \varphi_{A_N}^{(1)}\}$, dem diese Eigenschaft für mindestens M unter den betrachteten Ergänzungswerten zukommt. Wir denken uns diese M ganzen Zahlen der Größe nach durch einen oberen Index numeriert und bilden für jedes A die Matrix

$$(4. 5) \quad \begin{pmatrix} 1 & \tau^{(1)} & (\tau^{(1)})^2 & \dots & (\tau^{(1)})^{m-2} & \varphi_A^{(1)}(\tau^{(1)}) \\ 1 & \tau^{(2)} & (\tau^{(2)})^2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tau^{(M)} & (\tau^{(M)})^2 & \dots & (\tau^{(M)})^{m-2} & \varphi_A^{(1)}(\tau^{(M)}) \end{pmatrix}.$$

Sie hat M Zeilen und $m \leq M$ Spalten. Wir behaupten: Nicht jede unter den Matrizen (4. 5) kann einen Rang $< m$ haben. Sonst wäre nämlich stets die letzte Spalte von den $m - 1$ ersten abhängig, d. h. es gäbe zu jedem A ein rationalzahliges Polynom $P_A(t_s)$ vom Grade $\leq m - 2$ derart, daß

$$(4. 6) \quad \varphi_A^{(1)}(\tau^{(\mu)}) = P_A(\tau^{(\mu)}) \quad \text{für } \mu = 1 \dots M.$$

Daraus würde aber folgen, daß entgegen der vorhin getroffenen Feststellung der Ansatz (2. 3) bei festem $\mathbf{T}^{(s-1)}$ in $\mathbf{P}[t_s]$ lösbar würde, nämlich mit $A = P_A(t_s)$. Denn trägt man an Stelle der A die Polynome P_A ein, so entsteht aus der rechten Seite ein Polynom in x_i, t_s , welches bezüglich t_s höchstens den Grad $2(m - 2) + 2\kappa$ hat, während die linke Seite in t_s nach wie vor einen Grad $\leq \kappa$ hat. Es stimmen aber linke und rechte Seite für M spezielle Werte überein, zufolge (4. 6) und der Auswahl der $\tau^{(\mu)}$, und es ist — (4. 2) — $M > 2(m - 2) + 2\kappa$ und daher auch größer als κ .

Aus allem folgt, daß es ein φ geben muß und m unter den τ , sie seien mit $\tau^{(\beta_\nu)}$, ($\nu = 1, \dots, m$) bezeichnet, derart daß

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \tau^{(\beta_1)} & (\tau^{(\beta_1)})^2 & \dots & (\tau^{(\beta_1)})^{m-2} & \varphi(\tau^{(\beta_1)}) \\ 1 & \tau^{(\beta_2)} & (\tau^{(\beta_2)})^2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tau^{(\beta_m)} & (\tau^{(\beta_m)})^2 & \dots & (\tau^{(\beta_m)})^{m-2} & \varphi(\tau^{(\beta_m)}) \end{vmatrix}$$

$\neq 0$ wird. Da alle auftretenden Größen ganze Zahlen sind, ist dann $|\Delta| \geq 1$ und es kann φ durch seinen Realteil φ_r ersetzt werden. φ_r ist eine im Intervall $\langle X_i, X_{i+1} \rangle$ analytische reelle Funktion und somit wird nach dem Mittelwertsatz von H. A. SCHWARZ

$$\frac{\Delta}{V} = \frac{\varphi_r^{(m-1)}(\tau^*)}{(m-1)!},$$

wo V die Vandermondesche Determinante der $\tau^{(\beta_1)}, \dots, \tau^{(\beta_m)}$ ist und τ^* ein Wert zwischen $\tau^{(\beta_1)}$ und $\tau^{(\beta_m)}$. Es folgt weiter

$$(4.7) \quad (\tau^{(\beta_m)} - \tau^{(\beta_1)})^{\frac{m(m-1)}{2}} \geq \left| \frac{(m-1)!}{\varphi_r^{(m-1)}(\tau^*)} \right| |\Delta| \geq \left| \frac{(m-1)!}{\varphi^{(m-1)}(\tau^*)} \right|.$$

Wir denken uns nun sämtliche Ergänzungswerte des Intervalles $\left[X_i + 1, \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \right]$ der Größe nach numeriert. Zwischen $\tau^{(\nu)}$ und seinem JM -ten Nachfolger $\tau^{(\nu+JM)}$ gibt es dann immer zwei Ergänzungswerte, für die die Ungleichung (4.7) besteht. Es gilt daher erst recht

$$(\tau^{(\nu+JM)} - \tau^{(\nu)})^{\frac{m(m-1)}{2}} \geq \left| \frac{(m-1)!}{\varphi^{(m-1)}(\tau^*)} \right|$$

mit geeignetem τ^* zwischen $\tau^{(\nu+JM)}$ und $\tau^{(\nu)}$. Zusammen mit (3.3) folgt daraus

$$(\tau^{(\nu+JM)} - \tau^{(\nu)})^{\frac{m(m-1)}{2}} \geq C \frac{(\tau^* - X_i)^{m-1-\lambda_s}}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}} \geq C \frac{(\tau^{(\nu)} - X_i)^{m-1-\lambda_s}}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\bar{\tau}^{(\mu)} = \tau^{(\mu)} - X_i,$$

so läßt sich die letzte Beziehung auch in die Form bringen

$$(4.8) \quad \bar{\tau}^{(\nu+JM)} - \bar{\tau}^{(\nu)} \geq C \left(\frac{(\bar{\tau}^{(\nu)})^{m-1-\lambda_s}}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}} \right)^{\frac{2}{m(m-1)}} \geq \mathfrak{C}(\Gamma^{(s-1)}) (\bar{\tau}^{(\nu)})^{\beta \mathfrak{e}},$$

⁶⁾ Die Abschätzung (4.8) läßt sich zum Ausgangspunkt eines neuen Dünnbegriffes machen. Eine Menge s -gliedriger \mathbf{I} -Tupel heiße dünn, wenn sich jede $(s-1)$ -dimensionale Projection darstellen läßt als Vereinigung $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, wobei \mathfrak{M}_1 dünn ist (als $(s-1)$ -dimensionale Menge) und für jedes $\mathbf{T}^{(s-1)} \in \mathfrak{M}_2$ und die zugehörigen Ergänzungswerte nach Einteilung der Zahlengraden in Intervalle

mit

$$\mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)}) = C \left(\frac{1}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}} \right)^{\frac{2}{m(m-1)}}$$

und

$$\beta = (m - 1 - \lambda_s) \frac{2}{m(m-1)}.$$

Zufolge unserer Verabredung $\tau_i \neq 0$ ist

$$\mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)}) \geq C.$$

Wir schließen nun weiter wie bei DÖRGE⁷⁾.

Aus (4. 8) folgt zunächst für natürliches ϱ

$$\bar{\tau}^{(\nu+eJM)} - \bar{\tau}^{(\nu)} \geq \varrho \mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)}) (\bar{\tau}^{(\nu)})^\beta$$

und daraus für die Anzahl $\xi(B)$ der Ergänzungswerte im Intervall $[X_i + B; X_i + 2B]$

$$\xi(B) \leq \frac{JM}{\mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)})} B^{1-\beta} + JM \leq \frac{C}{\mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)})} B^{1-\beta},$$

sofern $B \geq 1$, $B \leq \frac{X_{i+1} - X_i}{2}$.

Für die Anzahl $r(U)$ der Ergänzungswerte im Intervall $[X_i, X_i + U]$ mit $U \leq \frac{X_{i+1} - X_i}{2}$ findet man also schließlich

$$r(U) \leq \sum_0^\infty \xi\left(\frac{U}{2^\nu}\right) + 1 \leq \frac{C}{\mathfrak{G}(\mathbf{T}^{(s-1)})} \left(\sum_0^\infty \frac{1}{2^{(1-\beta)\nu}} \right) U^{1-\beta} + 1$$

$$(4. 9) \quad r(U) \leq C (|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}})^{\frac{2}{m(m-1)}} U^{1-(m-1-\lambda_s)\frac{2}{m(m-1)}} + 1$$

und dies ist die Behauptung des Hilfssatzes — jedenfalls für die linke Intervallhälfte — denn es wurde ja m so gewählt, daß

$$\frac{2}{m(m-1)} \left\{ \sum_1^s \lambda_i - (m-1) \right\} + 1 < 1$$

wird.

Wir betrachten nun noch die Ergänzungswerte im Intervall

$$\left[\frac{X_{i+1} + X_i}{2}, X_{i+1} \right]$$

(4. 8) für die linke und sein Analogon (s. u.) für die rechte Intervallhälfte gilt. Die Anzahl dieser Intervalle soll unabhängig von $\mathbf{T}^{(s-1)}$ beschränkt sein. An Stelle der Exponenten $\lambda_1 \frac{2}{m(m-1)}$ usw. fordere man Exponenten der Form $\lambda_\nu^{(m)}$ ($\nu = 1, \dots, s$), die noch von einem Parameter m abhängen und den Bedingungen genügen $0 \leq \lambda_\nu^{(m)} = o(m^{-1})$, ($\nu = 1, \dots, s-1$), $1 > \lambda_s^{(m)} \geq C m^{-1}$ ($C > 0$). (4. 8) soll gelten für fast alle natürlichen Parameterzahlen m . — Dieser Dünnbegriff genügt den Axiomen (1)–(4), ist homogen (vgl. INABA, loc. cit.) und schärfer als der in § 2 eingeführte.

⁷⁾ Vgl. D II, S. 249.

(sofern $X_{i+1} \neq \infty$) und denken sie uns absteigend numeriert. Führt man

$$\bar{\tau}^{(v)} = X_{i+1} - \tau^{(v)}$$

ein, so ergibt sich auf die gleiche Weise wie eben

$$(\bar{\tau}^{(v+JM)} - \bar{\tau}^{(v)})^{\frac{m(m-1)}{2}} \geq \left| \frac{(m-1)!}{\varphi^{(m-1)}(\tau^*)} \right| \geq C \frac{(X_{i+1} - \tau^*)^{m-1}}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}} \geq C \frac{(\bar{\tau}^{(v)})^{m-1}}{|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}}},$$

und daraus folgt zunächst für die Anzahl $r'(V)$ der Ergänzungswerte zwischen $X_{i+1} - V$ und X_{i+1} ($0 \leq V \leq \frac{X_{i+1} - X_i}{2}$)

$$(4.10) \quad r'(V) \leq C (|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}})^{\frac{2}{m(m-1)}} V^{1 - \frac{2}{m}}.$$

Sei jetzt $\frac{X_{i+1} - X_i}{2} \leq U < X_{i+1} - X_i$, und $r(U)$ die Anzahl der Ergänzungswerte zwischen X_i und $X_i + U$. Dann ist

$$(4.11) \quad r(U) \leq r\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right) + r'\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right).$$

Wir können nun o. E. $\frac{X_{i+1} - X_i}{2} \geq 1$ annehmen, denn andernfalls gäbe es in $[X_i, X_{i+1}]$ höchstens zwei Ergänzungswerte und der Hilfssatz wäre sicher richtig. Dann folgt aber durch Vergrößerung der Abschätzung (4.10)

$$r'\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right) \leq C (|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}})^{\frac{2}{m(m-1)}} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right)^{1 - \frac{2(m-1-\lambda_s)}{m(m-1)}}.$$

Eine Abschätzung derselben Art gilt aber zufolge (4.9) auch für $r\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right)$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} r(U) &\leq C (|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}})^{\frac{2}{m(m-1)}} \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2}\right)^{1 - \frac{2(m-1-\lambda_s)}{m(m-1)}} \\ &\leq C (|\tau_1|^{\lambda_1} \dots |\tau_{s-1}|^{\lambda_{s-1}})^{\frac{2}{m(m-1)}} U^{1 - \frac{2(m-1-\lambda_s)}{m(m-1)}} \end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung des zweiten Hilfssatzes für die rechte Intervallhälfte.