CELEBRAZIONE DEL SECONDO CENTENARIO DELLA NASCITA
DI LUIGI GALVANI

Bologna 18-21 Ottobre 1937-XV

*Atti della XXIX Riunione della Società Italiana di Fisica
e del Congresso di Fisica*

Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten.

Prof. W. PAULI und Dr. M. FIERZ (Zürich).

Zusammmenfassung. - *Bekanntlich liefert die übliche Strahlungstheorie für den Wirkungsquerschnitt* dq *eines geladenen Teilchens beim Durchgang durch ein Kraftfeld bei Ablenkung zu einem gegebenen Winkelbereich einen unendlich grossen Wert* (« *Ultrarotkatastrophe* »). *Schreibt man nämlich vor, dass der Energieverlust des Teilchens zwischen* E *und* E + dE *liegen soll, so wird für kleine* E *nach dieser Theorie* dq = const. dE/E, *was bei Integration an der stelle* E = 0 *logarithmisch divergiert. In der vorliegenden Arbeit wird genauer untersucht, was die Quantenelektrodynamik für diesen Wirkungsquerschnitt ergibt, wenn dem geladenen Körper eine endliche Ausdehnung zugeschrieben wird. Es zeigt sich, dass dann zwar die Unendlichkeit stets beseitigt wird und dass die in der gewöhnlichen Theorie als strahlungslos betrachteten Ablenkungen hier als solche mit endlichem, wenn auch sehr kleinem Energieverlust erscheinen. Andrerseits hängt aber nach der genauen Theorie der nähere Verlauf von* dq *für sehr kleine Energieverluste* E *so wesentlich von der Ausdehnung des geladenen Körpers ab, dass eine unmittelbare Anwendung des Resultates auf wirkliche Elektronen nicht möglich ist. Es ist daher zu schliessen, dass das in Rede stehende Problem wesentlich mit den noch ungelösten fundamentalen Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik zusammenhängt.*

§ 1. EINLEITUNG.

Neben den bekannten Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik, welche die unendliche Selbstenergie eines geladenen Teilchens betreffen, gibt es bekanntlich auch ein divergentes Resultat dieser Theorie, welches die Emission von Lichtquanten sehr kleiner Frequenz betrifft. Die Wahrscheinlichkeit, ein geladenes Teilchen beim Durchgang durch ein Kraftfeld in einer bestimmten Richtung abgelenkt zu finden, wobei es zugleich einen im Intervall $(E, E+dE)$

liegenden Energieverlust erleidet, ergibt sich nämlich nach dieser Theorie als für kleine E proportional zu dE/E. Integration dieser Wahrscheinlichkeit über ein endliches Intervall (E, E') gibt daher bei $E = O$ eine logarithmische Unendlichkeit. In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, ob dieses Ergebnis nur durch unzulässige mathematische Näherungen bedingt ist, oder ob es sich um eine tiefere physikalische Schwierigkeit handelt. Um diese Frage zu entscheiden, haben wir die Quantenelektrodynamik für starre, räumliche ausgedehnte geladene Körper angewendet. Wie bekannt, führt diese ja stets für eine nicht verschwindende Ausdehnung a des Körpers, — die mit einer (bis auf einen numerischen Faktor der Grössenordnung 1) durch $\omega_1 = 2\pi \frac{c}{a}$ gegebenen « Abschneidefrequenz » äquivalent ist — zu endlichen Resultaten. Ueber den Wert von e^2/hc, worin e die Ladung des Körpers bedeutet, brauchen wir keine Annahme einzuführen. Um aber das Problem durch das Auftreten der elektromagnetischen Masse $\mu \backsim \frac{e^2}{ac^2} \backsim \frac{e^2\omega_1}{c^3}$ nicht zu komplizieren und zugleich die Definition der Masse des Körpers eindeutig zu machen, führen wir zunächst die ausdrückliche Voraussetzung ein, dass μ klein sein soll gegenüber der mechanischen Masse m des Körpers oder

$$\text{(I)} \qquad \frac{e^2\omega_1}{mc^3} << 1 .$$

Da wir überhaupt eine endliche Dimension des geladenen Körpers einführen müssen und, wie wir sehen werden, das Endresultat von dieser abhängt, schien es uns (schon wegen der Lorentzkontraktion) konsequent, von vornherein die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Körpers als klein gegen die Lichtgeschwindigkeit vorauszusetzen

$$\text{(II)} \qquad \frac{v_0}{c} << 1$$

und stets mit der unrelativistischen Wellenmechanik zu rechnen. Ferner ist es zweckmässig, auch die Voraussetzung

$$\text{(III)} \qquad \frac{h\omega_1}{mc^2} << 1$$

einzuführen, die für kleine $\frac{e^2}{hc}$ schärfer als (I) ist. Diese hat zur Folge, dass für alle Eigenschwingungen des Strahlungshohlraumes, die sich mit dem Körper in Wechselwirkung befinden, die Comptonverschiebung relativ klein ist und daher die Retardierung, d. h. der

Impuls der Strahlung (für beliebige Werte von $e^2/\hbar c$) gegenüber der Aenderung des Teilchenimpulses vernachlässigt werden kann. Dadurch ist es möglich, die Strahlung als Dipolstrahlung zu behandeln, d. h. im Hamiltonoperator das Vektorpotential des Strahlungsfeldes am Ort des Teilchens durch dasjenige an einem festen Ort zu ersetzen.

Eine strenge Lösung des hierdurch definierten reduzierten Problems im Falle der Abwesenheit äusserer Felder sowie eine angenäherte Lösung im Fall schwacher äusserer Felder, ist bereits von Bloch und Nordsieck (1) gegeben worden, denen es auf diese Weise gelungen ist, einen wesentlichen Fortschritt zu erzielen. Der § 2 der vorliegenden Arbeit enthält gegenüber den Arbeiten dieser Verfasser inhaltlich nichts Neues und wurde hier nun des Zusammenhanges halber ausführlich dargestellt, um die Annahme der endlichen Dimension des geladenen Körpers sowie die durch die Voraussetzung (II) ermöglichten Vereinfachungen gegenüber den etwas allgemeineren Annahmen der genannten Verfasser (2) deutlich hervortreten zu lassen.

Das wesentliche Ergebnis ist, dass in der hier betrachteten, durch die Voraussetzungen (I) bis (III) charakterisierten Näherung das Strahlungsfeld auch bei Vorhandensein des geladenen Teilchens sich durch « freie » Lichtquanten charakterisieren lässt, deren Anzahl bei Abwesenheit von äusseren Kräften zeitlich konstant bleibt. Durchläuft nun der Körper ein äusseres Kraftfeld, so treten vollkommen strahlungslose Ablenkungen des Teilchens niemals auf, vielmehr werden stets unendlich viele freie Lichtquanten emittiert. Von diesen haben allerdings fast alle sehr kleine Frequenzen, da die gesamte emittierte Strahlungsenergie endlich ist.

Leider ist es uns nicht gelungen, das in § 2 definierte allgemeine mathematische Problem für beliebige Kraftfelder zu lösen; insbesondere wäre eine genauere Untersuchung des Grenzüberganges zur klassischen Mechanik und Elektrodynamik noch erwünscht. In der vorliegenden Arbeit begnügen wir uns jedoch mit einer Diskussion des speziellen Falles schwacher Kraftfelder, bei denen man sich auf die erste Näherung der Störungstheorie (Born-sche Näherung) beschränken kann. Im Gegensatz zu Bloch und Nordsieck halten wir es aber für wesentlich, bei der Diskussion der theoretischen Resultate

(1) F. Bloch u. A. Nordsieck, « Phys. Rev. », 52, 54, 1937. Im folgenden zitiert als « A ».
A. Nordsieck, « Phys. Rev. », 52, 59, 1937. Im folgenden zitiert als « B ».

(2) Vgl. « Anm. » (1), S. 8.

den Energiesatz *exakt* zu berücksichtigen. Eine eingehende Diskussion der Resultate der Quantenelektrodynamik für den Wirkungsquerschnitt dq des Teilchens bei Ablenkung in einem gegebenen Winkelbereich $d\Omega$ und einem vorgegebenen Energieverlust des Teilchens sowie auch für das emittierte Spektrum wird im § 3 und § 4 der vorliegenden Arbeit gegeben.

Hier möge nur ein spezielles Resultat für den Fall

$$\frac{e^2}{hc} \cdot \frac{v_0^2}{c^2} << 1 \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} v_0^2 << h\omega_1$$

angegeben werden, das für die eingangs aufgeworfene prinzipielle Frage von Wichtigkeit ist. Ist $\vec{v_0}$ und $\vec{v_0}'$ Anfangs-und Endgeschwindigkeit des Teilchens und wird zur Abkürzung gesetzt

$$C = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{hc} \frac{(\vec{v_0} - \vec{v_0}')^2}{c^2}$$

so ergibt sich der genannte Wirkungsquerschnitt zu

$$dq = \text{const} \cdot \frac{dE}{E} \cdot \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C$$

wobei der konstante Faktor bei gegebenem Ablenkungwinkel derselbe ist wie in der bisherigen Strahlungstheorie. Dies hat zur Folge, dass dieser Ausdruck nunmehr bei $E = O$ integrierbar wird; und zwar folgt für die Gesamtwahrscheinlichkeit, das Teilchen mit einem Energieverlust im endlichen Intervall (O, E) in gegebener Richtung abgelenkt zu finden ein Betrag, der sehr nahe übereinstimmt mit dem Resultat der alten Theorie für strahlungslose Uebergänge, sobald E zwar klein ist gegen die Anfangsenergie $E_0 = \frac{m}{2} v_0^2$ des Teilchens, aber gross gegen die kritische Energie

$$\varepsilon = h\omega_1 \cdot exp\left(-\frac{1}{C}\right).$$

Ist aber der Energieverlust des Teilchens von derselben Grössenordnung wie die (nach Voraussetzung kleine) Grösse ε, so hängt der Wirkungsquerschnitt wesentlich von ω_1, d. h. von der Grösse des geladenen Körpers ab, obwohl ja die Lichtwellenlängen sehr gross gegen die Körperdimensionen sind. Beim jetzigen Stand der Quantentheorie lässt sich nicht sicher entscheiden, inwieweit dieses Resultat der Quantenelektrodynamik für ausgedehnte Körper der Wirklichkeit entspricht, da dieses Resultat den Rahmen gewöhnlicher Korrespondenzbetrachtungen überschreitet. Jedenfalls dürfte eine Verbesserung der gewöhnlichen (korrespondenzmässigen) Strahlungstheorie für Punktladungen bezw. wirkliche Elektronen auch bei dem hier betrachteten Problem nicht ohne Eingehen auf die fundamentalen Selbstenergieschwierigkeiten der Quantenelektrodynamik möglich sein.

§ 2. Das reduzierte Strahlungsproblem.

Die Hamiltonfunktion der unrelativistischen Theorie lautet zunächst

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + V(x) + \frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}_{tr}^{\,2} + \vec{H}^2)dv.$$

Hierin ist E_{tr} der divergenzfreie Teil der elektrischen Feldstärke, $V(x)$ das Potential des äusseren Kraftfeldes und e und m Ladung und mechanischen Masse des geladenen Körpers. Hat dieser eine endliche Ausdehnung, so ist hierin für $\vec{A}$ der Mittelwert des Potentials über die als starr gedachte Ladungsverteilung des Körpers zu nehmen:

$$\vec{A} = \int \vec{A}(\vec{x} + \vec{\xi})\, D(\vec{\xi})\, d^3\xi \tag{2}$$

mit der Normierung

$$\int D(\xi) d^3\xi = 1. \tag{3}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir sphärische Symmetrie des Körpers an, was zur Folge hat, dass D nur vom Betrag $\rho = |\vec{\xi}|$ des Vektors $\vec{\xi}$ abhängt. Zerlegt man in einem endlichen Hohlraum mit dem Volumen V und zyklischen Randbedingungen $\vec{A}$ nach Eigenschwingungen, so kann man setzen

$$\frac{e}{mc}\vec{A} = \sum_s h\omega_s \vec{a}_s [P_s \cos(\vec{k}, \vec{x}) + Q_s \sin(\vec{k}, \vec{x})] \quad (^1) \tag{4 a}$$

$$\frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}_{tr}^{\,2} + \vec{H}^2)dV = \frac{1}{2}\sum_s (P_s^2 + Q_s^2)h\omega_s \tag{4 b}$$

Hierin ist

$$\vec{a}_s = \frac{2e}{m}\cdot\frac{1}{h\omega_s}\left(\frac{\pi h}{\omega_s \cdot V}\right)^{1/2} \vec{\varepsilon}_s g(\vec{k}_s) \quad (^2) \tag{5}$$

$\vec{\varepsilon}_s$ ist ein auf $\vec{k}_s$ senkrecht stehender Einheitsvektor der Polarisation, während die P_s und Q_s Operatoren sind, die die Vertausch-

(1) Wir bezeichnen mit h stets die durch 2π dividierte Planck'sche Konstante und mit ω die Kreisfrequenz.

(2) Die hier mit $\vec{a}_s$ bezeichnete Grösse unterscheidet sich von derjenigen in der Arbeit von Bloch u. Nordsieck, l. c. um den Faktor $1/mh\omega_s$.

ungsrelationen

$$[P_s, Q_{s'}] = -i\delta_{ss'}; \quad [P_s, P_{s'}] = [Q_s, Q_{s'}] = 0$$

erfüllen und auch mit $\vec{x}$ und $\vec{p}$ vertauschbar sind.
Der Faktor $g(\vec{k}_s)$ in (5) ist der durch die endliche Gestalt des Körpers bedingte « Abschneidefaktor », der mit der früher eingeführten Funktion $D(\xi)$ gemäss

$$g(\vec{k}_s) = \int D(\xi) e^{i\vec{k}_s \vec{\xi}} d^3\xi; \quad D(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g(\vec{k}_s) e^{-i\vec{k}_s \vec{\xi}} d^3 k_s$$

zusamenhängt. Gemäss unserer Voraussetzung der sphärischen Symmetrie des Körpers hängt er nur ab vom Betrag $|k_s| = \frac{\omega_s}{c}$. Die Normierungsbedingung (3) ergibt unmittelbar

$$g(0) = 1 \tag{3 a}$$

während

$$\int_0^\infty G(\omega) d\omega \equiv \int_0^\infty |g(\omega)|^2 d\omega = \omega_1 \tag{7}$$

kurz als « Abschneidefrequenz » bezeichnet werden soll. Es ist c/ω_1 proportional der Dimension des Körpers, sodass einem punktförmigen Körper $\omega_1 = \infty$ entspricht. Spezielle für die Rechnungen bequeme Funktionen $g(\omega)$ sind

$$g(\omega) = 1 \quad \text{für} \quad 0 < \omega < \omega_1; \qquad g(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \omega > \omega_1$$

und

$$|g(\omega)|^2 \equiv G(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\omega_1}}.$$

Entsprechend unseren Voraussetzungen (I) und (III) können wir nun erstens den Term proportional zu A^2 im Hamiltonoperator vernachlässigen und zweitens den Mittelpunkt x des Körpers im Argument des Vektorpotentials ersetzen durch den festen Mittelpunkt des Kraftfeldes $V(x)$, mit dem wir zugleich den Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen lassen. Das heisst, wir setzen in (4) $(\vec{k}\,\vec{x}) = 0$ und erhalten für den so vereinfachten Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} - \sum_s h\omega_s (\vec{a}_s\, \vec{p}) P_s + V(x) + \sum_s \frac{1}{2}(P_s^2 + Q_s^2) h\omega_s. \tag{9}$$

Es bedeutet dies, dass wir die Strahlung als elektrische Dipolstrahlung behandeln und die höheren Pole vernachlässigen.

Nunmehr können wir im kräftefreien Fall $V(x) = 0$ das Problem durch eine einfache kanonische Transformation lösen nämlich

$$(10)\quad \begin{cases} \vec{x} = \vec{x}' - h\sum_s \vec{a}_s Q_s & \vec{p} = \vec{p}' \\ Q_s = Q_s' & P_s = P_s' + (\vec{a}_s\,\vec{p}). \end{cases}$$

Dann wird aus (9)

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\sum_s (\vec{a}_s\,\vec{p})^2 h\omega_s + V(\vec{x}' - h\sum_s \vec{a}_s Q_s) + \sum_s \frac{1}{2}(P_s'^2 + Q_s^2)h\omega_s.$$

Es ist leicht zu sehen, das der zweite Term dem Vorhandensein der elektromagnetischen Masse entspricht. In der Tat gibt die Ausführung der Summation über s gemäss (5) und mit Berücksichtigung der bekannten Tatsache, dass die Anzahl der polarisierten Eigenschwingungen zwischen ω_s und $\omega_s + d\omega_s$ den Wert hat

$$(11)\quad Z_s = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\omega_s^2 d\omega_s$$

$$\sum_s (\vec{a}_s\,\vec{p})^2 h\omega_s = \vec{p}^2 \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{e^2}{m^2c^3}\int_0^\infty d\omega G(\omega) = p^2\frac{4}{3\pi}\frac{e^2\omega_1}{m^2c^3}.$$

Mit Einführung der elektromagnetischen Masse [1]

$$(12)\quad \mu = \frac{4}{3}\frac{e^2\omega_1}{\pi c^3}$$

wird daher

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\sum_s (a_s\,p)^2 h\omega_s = \frac{p^2}{2m}\left(1 - \frac{\mu}{m}\right).$$

Gemäss unserer Voraussetzung (I) ist es konsequent, hierin den zweiten Term zu vernachlässigen, und wir erhalten nunmehr den Hamiltonoperator des endgültig reduzierten Problems zu

$$(\mathrm{IV})\quad H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}' - h\sum_s \vec{a}_s Q_s) + \sum_s \frac{1}{2}(P_s'^2 + Q_s^2)h\omega_s.$$

Im kräftefreien Fall $V(x) = 0$ bekommen wir die Lösungen

$$(13)\quad \psi_0(x', Q_s) = e^{\frac{i}{h}\vec{p}\cdot\vec{x}}\prod_s h_{n_s}(Q_s)$$

worin die $h_n(Q)$ die normierten Orthogonalfunktionen sind, die den

(1) Auf Grund von (6) und (7) findet man leicht für die elektrostatische Energie der Ladungsverteilung $eD(\vec{\xi})$ den Wert $w = \frac{e^2\omega_1}{\pi c}$ sodass (12) die bekannte Beziehung $\mu = \frac{4}{3}\frac{w}{c^2}$ für sphärisch symmetrische Ladungsverteilungen wiedergibt.

hermiteschen Polynomen zugeordnet sind und die Gleichung

$$-\frac{d^2h_n}{dQ^2} + Q^2h_n = (2n+1)h_n$$

erfüllen. Die durch

$$\frac{1}{2}(P'^2_s + Q_s^2) = n_s + 1/2 \tag{14}$$

definierten Quantenzahlen n_s können als Anzahlen der « freien Lichtquanten » der Frequenz ω_s bezeichnet werden und sind von den Lichtquantenzahlen

$$\frac{1}{2}(P_s^2 + Q_s^2) = N_s + 1/2$$

die sonst in der Strahlungstheorie benützt werden, verschieden. Es folgt aber aus dem Hamiltonoperator, dass — in der hier benützten Näherung — die freien Lichtquantenzahlen n_s es sind, die direkt mit einem Spektrograph beobachtet werden können, da nur diese sich, vom geladenen Körper räumlich getrennt, frei fortpflanzen können. Insbesondere entspricht bei gegebenem Teilchenimpuls $\vec{p}$ der Zustand kleinster Energie, in welchem alle Quantenzahlen n_s verschwinden, der Abwesenheit von Strahlung im eigentlichen Sinn. Die Normierung der Eigenfunktionen (13) in Bezug auf den Ortsraum ist so vorgenommen, dass die mittlere Dichte des Teilchens in grossen Räumen gleich 1 wird, was für die hier zu behandelnden Stossprobleme zweckmässig ist. Wie leicht zu sehen, bilden diese Funktionen ein vollständiges Orthogonalsystem hinsichtlich der Parameter p und n_s (¹).

Allgemein können wir daher $\vec{p}$ und die n_s als Argumente der Wellenfunktion einführen gemäss dem Ansatz

$$\psi(x', Q) = \sum_{n_s} \int d^3p\varphi(p, n_s) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\,\vec{x})} \prod_s h_{n_s}(Q_s) . \tag{15}$$

(¹) In *A* wurde versucht, den kräftefreien Fall strenger zu behandeln, ohne den Teilchenort x mit einem festen Ort zu identifizieren. Das erhaltene Funktionensystem *A*, (17), das als Verallgemeinerung unseres Systems (13) erscheint, ist indessen nicht orthogonal, wie aus der Spezialisierung der Gl. *A*, (21), (22), (23) für $V(x) = 1$ unmittelbar hervorgeht. Es besteht allerdings annähernde Orthogonalität für die Matrixelemente zwischen solchen Zuständen, für welche der totale Impuls $|\Sigma n_s \vec{k}_s|$ der Strahlung sehr klein ist gegen die Impulsänderung $|\vec{p} - \vec{p'}|$ des Teilchens. In Fällen, wo nur Matrixelemente von $V(x)$ zwischen solchen Zuständen die Endresultate wesentlich beeinflussen, dürften daher die allgemeineren Formeln in *A* eine brauchbare Näherung darstellen. Unter unseren weitergehenden Voraussetzungen (II) und vor allem (III) scheint uns dagegen die hier eingeschlagene Methode konsequenter, bei der für die Lichtemission nur die elektrische Dipolstrahlung in Betracht gezogen wird.

Die Wellenfunktionen $\varphi(\vec{p}, n_s)$ genügen dann gemäss (IV) bei Anwesenheit von Kräften (bei Weglassen der Nullpunktsenergie der Strahlung) in einem stationären Zustand der Energie E der Schrödingergleichung

$$E\varphi(\vec{p}, n_s) = \left(\frac{p^2}{2m} + h \sum_s n_s \omega_s\right) \varphi(p, n_s)$$

$$+ \sum_{n'_s} \int d^3p' (p \,|\, V \,|\, p') \prod_s (n_s, p \,|\, K \,|\, n_s', p') \varphi(p', n_s') \tag{16}$$

mit

$$(p \,|\, V \,|\, p') = \frac{1}{(2\pi h)^2} \int e^{\frac{i}{h} (\vec{p}' - \vec{p}) \vec{x}} V(x) d^3x \tag{17}$$

$$(n_s, p \,|\, K \,|\, n_s', p') = \int e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \vec{a}_s Q_s} h_{n'_s}(Q) h_{n_s}(Q) dQ\,. \tag{18}$$

Es ergibt sich mit der Abkürzung

$$w_s = \frac{1}{2} [(\vec{p}' - \vec{p}) \vec{a}_s]^2 \tag{19}$$

$$(n, p \,|\, K \,|\, n', p') = e^{-\frac{w}{2}} \sqrt{n!\, n'!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sqrt{w})^{n'-n+2k}}{(n-k)!\, k!\, (n'-n+k)!}\,. \tag{20}$$

Wenn man $\frac{1}{(n'-n+k)!} = 0$ setzt für $n' - n + k < 0$ gilt diese Gleichung sowohl für $n' \geq n$ als auch für $n' \leq n$ und überdies erkennt man durch die Substitution $k' = n' - n + k$ die Symmetrie des Ausdruckes in n und n'. Für $\vec{p}' = \vec{p}$ ist K nur von Null verschieden, wenn $n = n'$ und in diesem Fall gleich 1. Weiter gilt speziell

$$(n, p' \,|\, K \,|\, 0, p') = e^{-\frac{w}{2}} (i\sqrt{w})^n \frac{1}{\sqrt{n!}}\,.$$

Aus (18) folgt mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation für die $h_n(Q)$ bei Summation über alle n' sofort

$$\sum_{n'_s} (n, p \,|\, K \,|\, n', p') (n', p' \,|\, K \,|\, n'', p'') = (n, p \,|\, K \,|\, n'', p'') \tag{21}$$

und speziell für $p'' = p$, $n'' = n$:

$$\sum_{n'} |(n, p \,|\, K \,|\, n', p')|^2 = 1 \tag{21 a}$$

Für $n' = 0$ folgt dies auch leicht direkt aus (20 a).

Wir werden uns hier für ein spezielles zu (16) gehöriges Eigenwertproblem interessieren, das einer in der $+ x_1$ - Richtung einfallenden ebenen Welle ohne Lichtquant entspricht, die durch das

Kraftfeld gestreut wird. Es muss daher hier speziell gelten

$$\psi(x', Q) = e^{\frac{i}{h} p_0 x_1'} \prod_s h_0(Q_s) + \psi_1(x', Q_s) \tag{22}$$

worin $\psi_1(x', Q_s)$ für alle Q_s und grosse $\overrightarrow{x'}$ (oder $\overrightarrow{x}$) nur *auslaufende* Kugelwellen enthalten darf (Ausstrahlungsbedingung). Entsprechend der Zerlegung (22) bekommen wir aus (15) und (16) mit

$$E = p_0^2/2m$$

$$\varphi(\overrightarrow{p}, n_s) = \delta(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_0}) \prod_s \delta(n_s, 0) + \frac{f(\overrightarrow{p}, n_s)}{\frac{p_0^2 - p^2}{2m} - h \sum_s n_s \omega_s} \tag{23}$$

worin f die Gleichung zu erfüllen hat

$$f(\overrightarrow{p}, n_s) = (p|V|p_0) \prod_s (n_s, p|K|0, p_0) + \tag{24}$$
$$+ \sum_{n'_s} \int d^3p'(p|V|p') \frac{\prod_s (|n_s, p|K|n_s', p') f(n_s', p')}{\frac{p_0^2 - p'^2}{2m} - h \sum n_s' \omega_s}.$$

Der Ausstrahlungsbedingung wird in bekannter Weise automatisch genügt, wenn man in (15) und (16) oder (24) bei der Integration über den p - bezw. p' - Raum in folgender Weise *in die komplexe Ebene ausweicht*: Man integriere in Polarkoordinaten, führe die Winkelintegrationen in normaler Weise durch, umfahre aber bei der Integration über den Absolutbetrag $|\overrightarrow{p}| = P$ bezw. $|\overrightarrow{p'}| = P'$ die auf der positiven reellen Achse liegenden Pole des Integranden in der *unteren* komplexen P - bezw. P' - Halbebene. Aus (23) berechnet man leicht [1], dass so für grosse $|\overrightarrow{x'}| = r$ eine Streuwelle

$$A \cdot \frac{e^{\frac{i}{h} p_0' r}}{r}$$

resultiert, deren Impuls durch die Energiebedingung

$$\frac{1}{2m} p_0'^2 = \frac{1}{2m} p_0^2 - h \sum n_s \omega_s \tag{25}$$

gegeben ist [2] und deren Amplitude

$$A = 4\pi^2 hmf(|p_0'| \cdot \overrightarrow{e}, n_s) \tag{26}$$

[1] Vgl. hierzu auch P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, 2 Aufl., § 53, insbes. p. 200, Gl. (37), (38). Die hier mit f bezeichnete Grösse unterscheidet sich von der Diracschen um den Faktor $(2\pi h)^{-\frac{3}{2}}$.

[2] Für Werte der n_s, für welche die rechte Seite von (25) negativ ist, fällt $\psi(x')$ für grosse r rascher ab als mit $1/r$.

beträgt, worin $\vec{e} = \vec{x}/r$ ein Einheitsvektor in der betrachteten Emissionsrichtung ist. Bei gegebenen Quantenzahlen n_s der emittierten freien Lichtquanten ist daher der Wirkungsquerschnitt dq der Streuung des Teilchens in der Richtung $\vec{e}$ pro Winkelbereich $d\Omega$ gegeben durch

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |f(|p_0'| \cdot \vec{e}, n_s)|^2. \tag{27}$$

§ 3. Streuung des Körpers und Lichtemission in schwachen Kraftfeldern.

Da einer allgemeinen Diskussion des durch die Gleichungen (23) und (24) (und der zugehörigen Integrationsvorschrift) definierten Problems grosse mathematische Schwierigkeiten entgegenstehen, wollen wir uns hier auf ein so schwaches Kraftfeld beschränken, dass dieses als kleine Störung des kräftefreien Problems angesehen werden kann (¹).Dementsprechend werden wir hier nur die Terme erster Ordnung in $V(x)$ in der gestörten Wellenfunktion beibehalten (Born'sche Näherung). Es sei aber bemerkt, dass einer Fortsetzung des Verfahrens nichts im Wege steht und dass für die Berechtigung, bei der ersten Näherung der Störungsrechnung stehen zu bleiben, die in der klassischen Mechanik definierte « Stosszeit » ganz gleichgültig ist (²). Die erste Näherung der Störungstheorie bei Entwick-

(¹) Dies ist im Einklang mit der in A eingeschlagenen Methode. In B wird versucht das Problem — wenigstens unter der einschränkenden Annahme $e^2/hc << 1$ — für allgemeine Kraftfelder anzugreifen, indem von der Wellenfunktion

$$\varphi(p, n_s) = \varphi^0(p) \prod_s (n_s, p \,|\, k \,|\, 0, p_0)$$

als erster Näherung ausgegangen wird, worin $\varphi^0(p)$ die strenge Lösung des strahlungslosen Problems bedeutet. D. h. $\varphi^0(p)$ erfüllt die Gleichungen

$$\varphi_0(p) = \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) + \frac{f^0(\vec{p})}{\frac{1}{2m}(p_0^2 - p^2)} \quad \text{mit} \quad f^0 = (p \,|\, V \,|\, p_0) + \int \frac{d^3p(p \,|\, V \,|\, p') f_0(p')}{\frac{1}{2m}(p_0^2 - p'^2)}.$$

Da aber diese Wellenfunktion $\varphi(p, n_s)$ nur elastisch reflektierte Kugelwellen enthält [vgl. den Unterschied der Energienenner in $\varphi^0(p)$ und in (23)] ist es nicht zulässig, von einer solchen Wellenfunktion ausgehend, ein gewöhnliches Störungsverfahren anzuwenden. Deshalb ist bisher nicht erwiesen, dass die in B angewandte Methode — abgesehen vom Fall schwacher Kraftfelder, wo sie mit der Methode von A zusammenfällt — zu korrekten Resultaten führt.

(²) Für das spezielle Kraftfeld $V(r) = \frac{h^2}{2m} \cdot K \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ (worin K von der Dimension einer reziproken Länge ist) haben wir die zweite Näherung der Stölung nach dem Kraftpotential folgt unmittelbar aus (24) zu

$$f(\overrightarrow{p}, n_s) = (p \,|\, V \,|\, p_0) \cdot \prod_s (p, n_s \,|\, K \,|\, p_0, 0)$$

da der nächste Term bereits von zweiter Ordnung ist. Einsetzen von (19) und (20 a) ergibt mit Beachtung von (25)

$$|f(\overrightarrow{p_0}', n_s)|^2 = (p_0' \,|\, V \,|\, p_0)|^2 \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s}. \tag{28}$$

Die Form der Abhängigkeit der rechten Seite von n_s bedeutet, dass die Emission der verschiedenen Quanten (gleicher oder verschiedener Frequenz) bei gegebenem p_0 und p'_0 *statistisch* unabhängig ist. Es scheint uns dies charakteristisch für schwache Kraftfelder zu sein.

Die Tatsache, dass der totale Wirkungsquerschnitt bei gegebener Ablenkungsrichtung des Teilchens in der üblichen Strahlungstheorie divergiert, hängt unmittelbar damit zusammen, dass das unendliche Produkt in (28) null ist, sobald nur endlich viele der n_s von Null verschieden sind; nach (5) und (11) ist nämlich die Summe $\sum_s w_s^2$ bei kleinen ω_s wie $\int \frac{d\omega_s}{\omega_s}$ divergent. Bereits in A wurde daraus geschlossen, dass bei jedem Durchgang des geladenen Körpers durch das Kraftfeld unendlich viele kleine Quanten $h\omega_s$ emittiert werden und dass es insbesondere keine vollkommen elastischen Stösse mit exakt verschwindendem Energieverlust des Teilchens geben könne.

Darüber hinausgehend wollen wir hier aber zunächst den exakten Ausdruck für den Wirkunsquerschnitt dq berechnen, wenn — bei irgend welcher Lichtemission — der Energieverlust

$$\frac{1}{2m}(p_0^2 - p_0'^2) = h \sum_s n_s \omega_s$$

des Körpers bei gegebenem Ablenkungswinkel zwischen E und $E+dE$ liegt:

$$E < h \sum_s n_s \omega_s < E + dE\,. \tag{29}$$

rungstheorie ermittelt und festgestellt, dass sie (für beliebige Werte der Ladung des Körpers) klein bleibt gegen die erste, sobald

$$K << \alpha.$$

Für das Coulombfeld ($\alpha = 0$) versagt dagegen die Born'sche Näherung, sobald $|p_0'| \backsim hK$, also insbesondere in der Nähe der Kante des Brems-spektrums ($p_0' = 0$), wie das ja auch wohl bekannt ist.

Gemäss (27), (28) ist dieser bestimmt durch

(30) $$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot S(E) dE$$

mit

(31) $$S(E)dE = \sum_{E < h\Sigma n_s \omega_s < E+dE} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} \cdot e^{-w_s}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in folgender Weise auswerten. Mit Einführung der Dirac'schen δ-Funktion lässt sich zunächst schreiben

$$S = \Sigma (n_s) \delta(E - h \sum_s n_s \omega_s) \cdot \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s}$$

wobei nun die Summe über *alle* n_s zu erstrecken ist (¹). Sodann ist

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Setzen wir dies ein und vertauschen die Integration über α mit der Summation über die n_s, so folgt

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha E} \prod_s \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-i\alpha h \omega_s n_s} \cdot e^{-w_s}$$

oder durch Ausführung der Summation über n_s

(32) $$S = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{i\alpha E + f(\alpha)}$$

mit

$$f(\alpha) = \sum_s w_s (e^{-i\alpha h \omega_s} - 1).$$

Mit Hilfe von (11) lässt sich die Summe nach Einsetzen des Ausdrukkes (5) in ein Integral verwandeln und es ergibt sich

(33) $$f(\alpha) = C \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} (e^{-i\alpha h\omega} - 1) \cdot G(\omega)$$

worin

(34) $$C = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{hc} \cdot \frac{(\vec{p_0} - \vec{p_0}')^2}{m^2 c^2}$$

gesetzt ist und $G(\omega)$ wieder den Abschneidefaktor bedeutet. Man sieht zunächst, dass ohne den Abschneidefaktor ($G(\omega) = 1$, Punktladung) $f(\alpha) = -\infty$ und $S = 0$ wird. *Der Wert von* S(E) *muss daher wesentlich von* ω_1 *und im Allgemeinen auch von der Form der Funktion* G(ω) *abhängen.* Es sollen später besondere Fälle für

(¹) In *A* wird hier $h\Sigma n_s \omega_s$ im Argument der δ Funktion vernachlässigt, was uns nicht konsequent erscheint.

allgemeines $G(\omega)$ diskutiert werden. Zunächst wollen wir die Rechnung für die in (86) angegebene Wahl $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$ durchführen. In diesem Fall lässt sich $f(\alpha)$ in einfacher Weise in geschlossener Form auswerten zu [1]

$$(35)\quad f(\alpha) = -C \lg(1 + i\alpha h\omega_1) = \lg(1 + i\alpha h\omega_1)^{-C} \quad \text{für} \quad G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}.$$

In diesem Fall wird (32)

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha E}(1 + i\alpha h\omega_1)^{-C}\, d\alpha$$

und mit

$$1 + i\alpha h\omega_1 = \frac{h\omega_1}{E}\cdot z\,; \qquad e^{i\alpha E} = e^z e^{-E/h\omega_1}\,; \qquad d\alpha = \frac{1}{E}\frac{dz}{i}$$

$$S = e^{-E/h\omega_1}\frac{1}{h\omega_1}\left(\frac{h\omega_1}{E}\right)^{C-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int z^{-C} e^z\, dz.$$

Der Integrationsweg im Integral über dz kann so deformiert werden, dass er, den Nullpunkt links lassend, von $-\infty - i\varepsilon$ bis $-\infty + i\varepsilon$ läuft und nach einer bekannten Formel wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int z^{-C} e^z dz = \frac{1}{\Gamma(C)}$$

$$(36)\qquad S = \frac{1}{h\omega_1}\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^{C-1}\frac{e^{-E/h\omega_1}}{\Gamma(C)} \quad \text{für} \quad G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}.$$

Auf dieselbe Funktion $S(E)$ lässt sich eine andere psysikalisch interessante Grösse zurückführen, die wir den spektralen *Emissionskoeffizienten* nennen können. Er gibt die unter stationären Bedingungen von je einem durch die (senkrecht zur X_1 Achse gelegene) Flächeneinheit hindurchtretendem einfallenden Teilchen emittierte Energie im Frequenzintervall $(\omega, \omega + d\omega)$ an und soll mit $A(\omega)d\omega$ bezeichnet werden [2]. Dabei können wir auch noch die Richtung

[1] Es ist $\int_0^\infty \frac{dx}{x}(e^{-x} - e^{-ax}) = \lg a.$

[2] Ist J_0 die Stromdichte (pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtretende Teilchenzahl) der einfallenden Teilchen, so soll

$$J_0 A(\omega)d\omega$$

die pro Zeiteinheit bei den betrachteten Prozessen emittierte Lichtenergie sein. Ist N die Anzahl der Streuzentren pro Volumeinheit, so ist

$$-\frac{dE}{dx} = E\cdot N\int_0^\infty A(\omega)d\omega$$

der gesamte mittlere Energieverlust von einfallenden Teilchen der Energie E pro Längeneinheit. Es hat $A(\omega)d\omega$ die Dimension erg cm².

des beim Prozess abgelenkten Teilchens (als in einem bestimmten räumlichenWinkel der Grösse $d\Omega$ liegend) spezifizieren und zunächst auch den Energieverlust des Teilchens (als im Intervall E, $E + dE$ liegend); über letzteren werden wir aber nachher integrieren. Dabei betrachten wir die in dieses Frequenzintervall (ω, $\omega + d\omega$) emittierte Energie *gleichgültig welche anderen Frequenzen bei den betrachteten Prozessen noch gleichzeitig emittiert werden. Ferner lassen wir die Richtung der emittierten Quanten beliebig.* Aus (27) und (28) folgt zunächst bei gegebenem $\vec{p_0}'$ unmittelbar

$$A(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{0<\omega_s<\omega \text{ und} \\ \omega_s>\omega+d\omega}}(s) \quad \Sigma(n_s) \frac{1}{n_s!} w_s^{n_s} e^{-w_s} \cdot \prod_{\omega<\omega_s<\omega+d\omega}(s) \quad \Sigma(n_s) n_s h\omega_s \frac{w_s}{n_s!} e^{-w_s}.$$

Hierin müssen die n_s stets die den Energiesatz zum Ausdruck bringende Bedingung

$$E < h \Sigma n_s \omega_s < E + dE$$

erfüllen, die man wie oben durch Einführung der δ Funktion zu berücksichtigen hat. Diese Bedingung hat direkt zur Folge, dass

$$h\omega \leq E \tag{37}$$

sein mus, damit überhaupt die von der Frequenz ω emittierte Strahlungsenergie von Null verschieden sein kann. Mit derselben Methode wie oben erhält man unmittelbar

$$A(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot S(E-h\omega)dE \cdot C \cdot G(\omega) \cdot hd\omega \tag{38}$$

worin also der Wert der Funktion S beim Argumentwert $E - h\omega$ eingeht, C wieder durch (34) gegeben ist und stets

$$|p_0'| = \sqrt{p_0^2 - 2mE} \tag{39}$$

einzusetzen ist. Gibt man nur die Richtung des Teilchenimpulses nach der Emission vor, so hat man mit diesem Wert von $|p_0'|$ über die möglichen Energieverluste des Teilchens zu integrieren und erhält

$$\bar{A}(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\,\pi^4 h^2 m^2 \cdot G(\omega) \cdot hd\omega \int_{h\omega}^{E} \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot \tag{38 a}$$
$$\cdot S(E - h\omega) \cdot CdE\,.$$

Hierin ist $E_0 = p_0^2/2m$ die Anfangsenergie des Teilchens. Wie wir sehen werden, hat in manchen Fällen $S(E)$ ein scharfes Maximum in der Nähe von $E = 0$. Dann ist es erlaubt, für p_0' speziell

$$\sqrt{p_0^2 - 2mh\omega}$$

einzusetzen und die ersten beiden Faktoren in (38a) vor das Integral zu ziehen und auch die gemäss (32), (33) in der Funktion S vorkommende Grösse C bei der Integration konstant zu halten. In diesem Falle ist es nützlich, die Relation

$$\int_0^\infty S(E)dE = 1 \quad \text{bei festem } |p_0'| \tag{40}$$

im Auge zu behalten, die gemäss der Definition (31) von S mit der *Gl.* (21a) für $n = 0$ identisch ist. Man bestätigt auch leicht, dass der Ausdruck (36) dieser Bedingung genügt.

Im folgenden § soll nun das in den Gleichungen (30) und (38) zusammengefasste Resultat in physikalisch interessanten Sonderfällen näher diskutiert werden.

§ 4. Diskussion zweier Grenzfälle.

A) $C >> 1$.

Wenn wir sehr kleine Ablenkungswinkel des Teilchens ausschliessen, wird $(\vec{p}_0 - \vec{p}_0')^2$ von der Grössenordnung p_0^2, so dass die vorausgesetzte Ungleichung die Form annimmt

$$\frac{e^2}{hc} \cdot \frac{E_0}{mc^2} >> 1 \tag{41}$$

wenn

$$E_0 = \frac{p_0^2}{2m} = h\omega_0 \tag{42}$$

die Anfangsenergie des Teilchens, ω_0 die zugehörige obere Grenze des Bremsspektrums bedeutet. Zusammen mit der Voraussetzung (I)

$$\frac{e^2\omega_1}{mc^3} << 1 \tag{I}$$

folgt hieraus sogleich

$$\omega_1 << \omega_0 \tag{43}$$

das heisst, die Quantenkante des Spektrums wird hier in Wahrheit gar nie erreicht, da infolge der endlichen Grösse des geladenen Körpers viel früher ein Abschneiden des Spektrums erfolgt.

Zunächst sieht man bei der speziellen Wahl $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$ aus (36), dass bei festem C die Funktion $S(E)$ bei $E = (C-1)\, h\omega_1 \backsim h\omega_1 C$ ein Maximum besitzt. Für grosse C ist dieses Maximum sehr steil, denn die Anwendung der Stirling'schen Formel ergibt

$$(44) \qquad h\omega_1 S(E) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi C}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(E-h\omega_1 C)^2}{(h\omega_1)^2 \cdot C}}; \quad \left(\frac{E-h\omega_1 C}{h\omega_1 C}\right)^2 = \frac{1}{C}.$$

Das heisst, der relative Spielraum von E, wo $S(E)$ merklich von Null verschieden ist, wird von der Grössenordnung $1/\sqrt{C}$ also bei grossem C sehr klein. Mit Rücksicht auf (40) kann man daher in erster Näherung setzen

$$(45) \qquad S(E) = \delta(E - h\omega_1 C).$$

Wir zeigen nun, dass dieses Resultat für grosse C von der speziellen Form des Abschneidens unabhängig ist. Aus (32) (33) ist leicht zu sehen, dass für grosse C nur die Werte von f für kleine $\alpha h\omega_1$ massgebend sind. Entwickelt man nun in (33) im Integranden die Exponentialfunktion nach α, so ergibt der in α lineare Term

$$f(\alpha) = C \cdot (-i\alpha h) \int_0^\infty G(\omega) d\omega = -C i \alpha h \omega_1$$

mit der Definition (7) von ω_1 und durch Einsetzen in (32) folgt wieder (45) für $S(E)$. Das Hinzunehmen des in α quadratischen Terms der Reihenentwicklung von $f(\alpha)$ ergibt dann wieder eine Gauss'sche Fehlerverteilung von $S(E)$ mit einem relativen Spielraum der Grössenordnung $1/\sqrt{C}$ um das Maximum $E = Ch\omega_1$.

Unser Resultat bedeutet, dass im betrachteten Grenzfall bei gegebender Winkelablenkung des Körpers der Energieverlust gegeben ist durch

$$(46) \qquad E = Ch\omega_1 = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{e^2}{c^3} (\vec{v} - \vec{v}')^2 \cdot \omega_1,$$

wenn $\vec{v} = \vec{p}_0/m$ und $\vec{v}' = \vec{p}_0{}'/m$ Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Teilchens bedeuten. Da dies gemäss (1) sehr klein ist gegen die Anfangsenergie E_0 können wir in (46) den Betrag von $|v'|$ gleich $|v|$ setzen und schreiben

$$(46\text{ a}) \qquad E = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} v^2 \cdot 2 \cdot (1 - \cos\vartheta)\omega_1$$

worin ϑ der Ablenkungswinkel des Teilchens ist [1].

[1] Wir haben uns durch besondere Rechnungen davon überzeugt, dass die hier vernachlässigten, zu $\vec{A}^2$ proportionalen Terme des Hamiltonoperators (1) auch im hier betrachteten Grenzfall $C \gg 1$ im Resultat nur Korrekturen höherer Ordnung in der als klein angenommenen Grösse $e^2\omega_1/mc^3$ hervorrufen.

Für den spektralen Emissionskoeffizienten ergibt sich durch Einsetzen von (45) in (38 a)

$$\bar{A}(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \cdot \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^2} \cdot (\vec{v} - \vec{v}')^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} \cdot |(p_0'|V|p_0)|^2 G(\omega)d\omega \,.$$

Es wäre hierbei p_0' zunächst durch (39) mit dem Wert

$$E = h\omega + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}(v - v')^2 \cdot \frac{\omega_1}{\pi}$$

bestimmt. Wegen $C >> 1$ ist aber hierin $h\omega$ stets gegen den zweiten Term zu vernachlässigen, es sei denn, dass $\omega >> \omega_1$, wo aber $A(\omega)$ wegen des Abschneidefaktors ohnehin verschwindet bezw. sehr klein wird; zweitens ist wegen (1) der zweite Term in E stets klein gegen E_0 sodass in (47) mit hinreichender Genauigkeit

$$|p_0'| \backsim |p_0|$$

gesetzt werden kann. Der spektrale Emissionskoeffizient ist also hier, solange $\omega << \omega_1$ bei gegebenem Ablenkungswinkel des Teilchens unabhängig von ω und wird für $\omega \backsim \omega_1$ einfach proportional zum Abschneidefaktor $G(\omega)$.

Das Verhalten des geladenen Körpers (Energieverlust und emittiertes Spektrum) bei gegebener Winkelablenkung ist hier genau dasselbe, *das aus der klassischen Elektrodynamik folgen würde, wenn die Geschwindigkeitsänderung des Körpers von* $\vec{v}$ *auf* $\vec{v}'$ *« plötzlich » erfolgt, d. h. in einer Zeit, die kurz ist gegen* $1/\omega^1$ (¹). Der totale Wirkungsquerquerschnitt (Integration über dE) für die Ablenkung des Körpers in einen gegebenen Winkelbereich ist dagegen nach (30), (40) und (45) derselbe wie in der ersten Born'schen Näherung der strahlungslosen Wellenmechanik.

Es ist bemerkenswert, dass in diesem Fall, wo die Ablenkung des Körpers nicht nach der klassischen Mechanik behandelt werden kann, auch die klassisch berechnete « Stosszeit » keine Rolle spielt. Andrerseits wäre es sehr erwünscht, im umgekehrten Fall eines quasiklassisch wirkenden Kraftfeldes (in welchem natürlich die Born'sche Näherung versagt), im Falle $C >> 1$ den Grenzübergang zur klassischen Elektrodynamik zu untersuchen. Hier müsste der Wert von ω_1 (Dimension des Körpers) aus dem Resultat herausfallen, wenn die vektorielle Geschwindigkeitsänderung in der Zeit $1/\omega_1$, stets klein ist gegen die jeweils vorhandene Geschwindigkeit.

(¹) Vgl. hiezu auch N. Bohr u. L. Rosenfeld, « Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math. fys. Meddel. », XII, 8, 1933.

B) $C << 1$.

Dieser Fall ist besonders interessant, da er einen Vergleich mit der gewöhnlichen Strahlungstheorie zulässt, bei der nach Potenzen von $\frac{e^2}{hc} \cdot \frac{v_0^2}{c^2}$ entwickelt wird. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, führt diese im Fall schwacher Kraftfelder zum Resultat, dass neben der elastischen Streuung mit dem Wirkungsquerschnitt

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 |(p_0' | V | p_0)|^2 \tag{48 a}$$

eine unelastische Streuung stattfindet, deren Wirkungsquerschnitt, wenn der Energieverlust des Teilchens zwischen E und $E + dE$ liegt, gegeben ist durch (¹)

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2 \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{e^2}{hc} \frac{(\vec{p_0}' - \vec{p_0})^2}{m^2 c^2} \cdot \frac{dE}{E} . \tag{48 b}$$

Das Integral über dq wird bei $E = 0$ logarithmisch unendlich (« Ultrarotkatastrophe»).

Da in dieser Theorie nur solche Prozesse berücksichtigt werden, bei denen nur ein einziges Lichtquant emittiert wird, folgt der spektrale Emissionskoeffizient zu

$$\bar{A}(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2 \cdot \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} \frac{(\vec{p_0}' - \vec{p_0})^2}{m^2} d\omega . \tag{48 c}$$

Wenn wir zunächst der Einfachheit halber $G(\omega) = e^{-\omega/\omega_1}$ voraussetzen so kann das Resultat der hier entwickelten Theorie direkt aus (30), (36), (38) abgelesen werden, wenn wir noch beachten, dass wegen $C << 1$ gesestzt werden kann $\Gamma(C) = \frac{1}{C}\Gamma(C+1) \backsim \frac{1}{C}$

$$SdE = C \frac{dE}{E} \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C e^{-E/h\omega_1} = d\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C e^{-E/h\omega_1} . \tag{49}$$

Insbesondere folgt für den Wirkungsquerschnitt

$$dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0' | V | p_0)|^2 C \frac{dE}{E} \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C e^{-E/h\omega_1} . \tag{50}$$

Eine streng elastische Streuung gibt es, wie bereits erwähnt, in dieser Theorie nicht. Das Integral von (50) zwischen den Grenzen 0

(¹) Vgl. z. B. W. HEITLER, *The Quantum Theory of radiation*, p. 166, Gl. (17). Wir setzen hier der Punktladung entsprechend $G(\omega) = 1$.

und E ist nunmehr wegen des zusätzlichen Faktors E^C endlich und hat bis auf Terme der Ordnung C den Wert

$$(51)\qquad \left(\int dq\right)_0^E = d\Omega\, 16\pi^4 h^2 m^2 \,|(p_0'|V|p_0)|^2 \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C .$$

Die vernachlässigten Terme der Ordnung C rühren daher, dass $|p_0'|$ und C von der Integrationsvariable E abhängen, während hier die betreffenden Werte für $|p_0'| = |p_0|$ eingesetzt wurden. Ist

$$(52)\qquad -C\lg\frac{E}{h\omega_1} << 1 \quad \text{oder} \quad \lg h\omega_1 - \lg E << \frac{1}{C}$$

so kann $\left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C \backsim 1$ gesetzt werden *und* (51) *stimmt mit dem durch* (48) *gegebenen Wirkungsquerschnitt der alten Theorie für die elastische Streuung überein. Ebenso stimmt unter der Voraussetzung* (52) *der allgemeinere Ausdruck* (50) — *abgesehen vom Abschneidefaktor* $e^{-E/h\omega_1}$ — *mit* (48b) *überein. Was das Verhalten des Teilchens betrifft, ist also* (52) *die Gültigkeitsbedingung für die alte Theorie.* Nur ein sehr schmales Gebiet in der Nähe von $E = 0$ ist durch diese für den Anwendungsbereich der alten Theorie ausgeschlossen. Die Grösse dieses Gebiets hängt dagegen wesentlich ab vom Wert ω_1 der Abschneidefrequenz.

Für den Emissionskoeffizienten erhält man aus (38) durch Reihenentwicklung von $|p'_0|$ an der Stelle $E = h\omega$ und Vernachlässigung von Grössen der Ordnung C^2 das Resultat

$$(53)\qquad A(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|}|(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{e^2}{c^3}\frac{(\vec{p_0}-\vec{p_0'})^2}{m^2}\cdot$$
$$\cdot\, e^{-\frac{\omega}{\omega_1}} \int_0^{\frac{\omega_0-\omega}{\omega_1}} C\cdot x^{C-1} e^{-x}\,dx$$

worin $|p_0'| = \sqrt{p_0^2 - 2mh\omega}$ einzusetzen ist.

Bisher wurde über ω_0/ω_1 noch nichts vorausgesetzt und die abgeleiteten Formeln beanspruchen für beliebige Werte dieses Verhältnisses gültig zu sein. Ist insbesondere $\omega_1 << \omega_0$ (grosser Körper), so kann für $\omega_0 - \omega >> \omega_1$ das Integral in (53) einfach 1 gesetzt werden. Während dieser Fall nichts Ueberraschendes bietet, wollen wir von nun an ausdrücklich

$$(54)\qquad \omega_0 << \omega_1$$

voraussetzen, sodass stets $e^{-\frac{E}{h\omega_1}} \backsim 1$ und $e^{-\frac{\omega}{\omega_1}} \backsim 1$, $e^{-\frac{\omega_0}{\omega_1}} \backsim 1$ angenommen werden kann. Es ist dann bei konsequenter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in C

$$(50\,a) \qquad dq = d\Omega \cdot 16\pi^4 h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 C \cdot \left(\frac{E}{h\omega_1}\right)^C \frac{dE}{E}$$

$$(53\,a) \qquad \bar{A}(\omega)d\omega = d\Omega \cdot 16^4 \omega h^2 m^2 \frac{|p_0'|}{|p_0|} |(p_0'|V|p_0)|^2 \cdot \frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c^3}\frac{(\vec{p_0'}-\vec{p_0})^2}{m^2}\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_1}\right)^C.$$

Die Gültigkeitsgrenzen der gewöhnlichen Strahlungstheorie sind nach wie vor durch (52) bestimmt. Die letztere Formel enthält das Resultat, dass in unmittelbarer Nähe der Kante die spektrale Intensität rascher nach Null abfällt als in der gewöhnlichen Strahlungstheorie (1).

Das Ueberraschende an diesem Resultat besteht darin, dass auch wenn $\omega < \omega_0 << \omega_1$ der Wert von ω_1 aus dem Endresultat nicht herausfällt, sondern die Gültigkeitsgrenze der gewöhnlichen Theo-

(1) Es möge hier noch die Verallgemeinerung der unter der Voraussetzung (54) gültigen Resultate für eine beliebige Art des Abschneidens angegeben werden. Es kommt in diesem Fall darauf an, die durch (33) definierte Funktion $f(\alpha)$ für grosse Werte des Argumentes $\alpha h\omega_1$ zu ermitteln. Die Verallgemeinerung von (35) ist

$$(*) \qquad f(\alpha) = -C\left\{\lg(\alpha h\omega_1) + i\frac{\pi}{2} + \gamma\right\} + \dots \quad \text{für} \quad \alpha h\omega_1 >> 1$$

worin γ eine Konstante von der Grössenordnung 1 ist. Man leitet z. B. diese Formel aus der entsprechenden Formel für $f'(\alpha)$ ab. Für kleine $E/h\omega_1$ folgt dann aus (32)

$$(49') \qquad S dE = \frac{dE}{E}\left(\frac{E}{e^\gamma \cdot h\omega_1}\right)^C \frac{1}{\Gamma(C)} \backsim C\frac{dE}{E}\left(\frac{E}{e^\gamma h\omega_1}\right)^C$$

für kleine C und $\frac{E}{h\omega_1}$. Das heisst, es ist ω_1 stets durch $\omega_1 \cdot e^\gamma$ zu ersetzen.

Zum gleichen Resultat führt auch folgende Variante des Summationsverfahrens von § 3. Man setze

$$S = \left(\frac{\partial S'}{\partial E}\right)_{p_0'}.$$

(Differentiation bei festem p_0') mit

$$S' = \sum_{h\sum_s n_s\omega_1 < E} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w_s^n e^{-w_s}.$$

Bei kleinem C ist es erlaubt, statt der Nebenbedingung $h\sum n_s\omega_1 < E$ den Faktor $e^{-h\sum_s n_s\omega_s/E}$ hinzuzufügen und über alle n_s zu summieren. Das Resultat ist

$$S' = e^{\varphi\left(\frac{1}{E}\right)}; \quad \varphi(\alpha) = f(-i\alpha) = C\int_0^\infty \left(\frac{d\omega}{\omega}\right)(e^{-\alpha h\omega} - 1)G(\omega).$$

Aus (*) folgt wieder (49') für $E/h\omega_1 << 1$.

Für scharfes Abschneiden [$G(\omega) = 1$ für $\omega < \omega_1$ und $G(\omega) = 0$ für $\omega > \omega_1$] ist γ die Euler'sche Konstante.

rie wesentlich bestimmt. Es ist daher wichtig, festzustellen, von welchen Frequenzen der durch (31) definierten Summe S die Abhängigkeit ihres Wertes von ω_1 herrührt. Bilden wir (bei festem p_0')

$$S' = \int_0^E S dE = \sum_{h\sum_s n_s \omega_s < E} (n_s) \prod_s \frac{1}{n_s!} w^{n_s} e^{-w}$$

so ist unmittelbar zu sehen, dass dies *durch die Terme mit* $n_s = 0$ *für* $\omega > E/h$ bedingt wird. Nehmen wir hier ein scharfes Abschneiden an, so sieht man leicht, dass

$$\prod_{\omega_s > E/h} e^{-w} = exp \cdot \left\{ - C \int_{E/h}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\omega} \right\} = \left(\frac{E}{h\omega_1} \right)^C$$

den Hauptterm liefert ([1]). Ueberdies bekommen wir eine obere Schranke für S', wenn wir für $\omega_s < E/h$ über *alle* n_s summieren (was jeweils den Wert 1 in $\prod_s$ ergibt) statt die Ungleichung $\sum_s n_s \omega_s < E/h$ einzuhalten. Daher ist ([2])

$$S' < \left(\frac{E}{h\omega_1} \right)^C.$$

Es möge noch darauf hingewiesen werden, dass die formale Entwicklung von (50a) nach Potenzen von C gemäss

$$\left(\frac{E}{h\omega_1} \right)^C = 1 + C \lg \left(\frac{E}{h\omega_1} \right) + \ldots$$

(wobei natürlich die Integrierbarkeit von dq bei $E = 0$ wieder verloren geht) mit den Resultaten der höheren Näherungen der gewöhnlichen Störungstheorie, bei der ja nach e^2/hc entwickelt wird, übereinstimmen muss. In der Tat divergieren diese höheren Näherungen für Punktladungen.

Die Abhängigkeit des Resultates von ω_1 verhindert einerseits eine Anwendung auf wirkliche Elektronen. Zwar könnte man daran denken, entgegen der Voraussetzung (II) ω_1 durch eine Grösse der Ordnung mc^2/h zu ersetzen, doch wäre ein solches Vorgehen rein spekulativ. Andrerseits scheint sie zu zeigen, dass die feineren Züge der Quantenelektrodynamik räumlich ausgedehnter Ladungen im Falle $\frac{1}{2} m v_0^2 << h\omega_1$ nicht in direkter Weise mit korrespondenzmässigen Ueberlegungen in Verbindung gebracht werden können.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

([1]) Nach Anmerkung S. 174 ist gerade für $n_s = 0$ die Vernachlässigung der Retardierung erlaubt.

([2]) Vgl. den Faktor e^γ in Anm. von voriger Seite.