Algebraische Konstruktion reeller Körper.

Von EMIL ARTIN und OTTO SCHREIER in Hamburg.

E. STEINITZ hat durch seine „Algebraische Theorie der Körper"[1]) weite Gebiete der Algebra einer abstrakten Behandlungsweise erschlossen; seiner bahnbrechenden Untersuchung ist zum großen Teil die starke Entwicklung zu danken, die seither die moderne Algebra genommen hat. Noch immer aber gibt es viele Zweige der Algebra, die sich den abstrakten Methoden bisher entzogen haben, wie etwa die reelle Algebra und gewisse Teile der algebraischen Zahlentheorie. Wir erwähnen z. B. den Lehrsatz von STURM über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung, die Theorien der Einheiten in Zahlkörpern, der Klassenkörper und der Reziprozitätsgesetze.

Um die reelle Algebra abstrakt behandeln zu können, muß man sich notwendig zunächst die Frage vorlegen, durch welche Eigenschaften sich die reellen Körper, insbesondere die Körper aller reellen oder aller reellen algebraischen Zahlen vor anderen Körpern auszeichnen. Man wird versuchen, diese Eigenschaften durch einfache Axiome zu beschreiben. Ein solches Axiomensystem wird verschiedenen Forderungen genügen müssen. Zunächst muß es mit dem Begriff „reell" im gewöhnlichen Sinn im Einklang stehen. Ein absolut algebraischer Körper z. B. wird nur dann reell heißen dürfen, wenn es einen mit ihm isomorphen, im gewöhnlichen Sinne reellen algebraischen Zahlkörper gibt. Sodann muß das Axiomensystem es ermöglichen, rein algebraisch den Existenzbeweis für eine möglichst ausgedehnte Klasse von reellen Körpern zu führen, die natürlich als spezielle Fälle die reellen algebraischen Zahlkörper umfassen muß. Von diesen, im abstrakten Sinn reellen Körpern ist dann nachzuweisen, daß in ihnen die Sätze der reellen Algebra gelten.

Eine solche Kennzeichnung der reellen Körper ist in der Tat möglich. Es wäre naheliegend, vom Begriff des geordneten Körpers auszugehen. Vom Standpunkt der abstrakten Algebra, die doch mit vorgegebenen Körpern arbeitet, wird aber eine Definition vorzuziehen sein, die allein die Operationen der Addition und Multiplikation verwendet und die Möglichkeit nach sich zieht, den Körper zu ordnen. Man wird von einer solchen Definition auch erwarten dürfen, daß sie leichter zu einem algebraischen Existenzbeweis für reelle Körper führt.

Die gesuchte Grundeigenschaft der reellen Körper ist nun folgende: E s s o l l e r l a u b t s e i n, a u s d e m V e r s c h w i n d e n e i n e r S u m m e v o n

[1]) Crelle, Bd. 137 (1910), S. 167—309.

Quadraten stets auf das Verschwinden der einzelnen Quadrate zu schließen. Oder, was damit gleichbedeutend ist: -1 darf nicht als Quadratsumme darstellbar sein. Diese Bedingung wird besonders durch eine Untersuchung[2]) des einen von uns nahegelegt, in der der Körper der reellen algebraischen Zahlen durch algebraische Eigenschaften gekennzeichnet wird. Daß man nunmehr die reelle Algebra vollkommen abstrakt aufbauen kann, soll im folgenden gezeigt werden.

In der anschließenden Arbeit[3]) wird sich die Fruchtbarkeit dieser Begriffsbildungen herausstellen: Es lassen sich mit ihrer Hilfe die Fragen nach der Darstellbarkeit eines Körperelements als Quadratsumme beantworten und HILBERTS Problem der definiten Funktionen findet so seine Lösung.

I. Definition und Haupteigenschaften der reellen Körper.

Ein Körper heiße „reell", wenn in ihm -1 nicht als Quadratsumme darstellbar ist.

Ein reeller Körper hat stets die Charakteristik Null, denn in einem Körper der Charakteristik p ist -1 Summe von $(p-1)$ Summanden 1^2.

Ein Körper K heiße „geordnet", wenn für seine Elemente die Eigenschaft, positiv (>0) zu sein, gemäß den folgenden Forderungen definiert ist:

1. *Für jedes Element a aus K gilt genau eine der Beziehungen*

$$a = 0, \qquad a > 0, \qquad -a > 0.$$

2. *Ist $a > 0$ und $b > 0$, so ist $a + b > 0$ und $ab > 0$.*

Ist $-a > 0$, so sagen wir: a ist negativ.

Definieren wir in einem geordneten Körper allgemein eine Größenbeziehung durch die Festsetzung

$$a > b \text{ (oder } b < a), \quad \text{wenn} \quad a - b > 0,$$

so zeigt man mühelos, daß die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Verstehen wir ferner unter dem Betrag $|a|$ eines Elements das nicht-negative unter den Elementen a, $-a$, so gelten für das Rechnen mit Beträgen die Regeln

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \qquad |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Ebenso erkennt man die Richtigkeit von $|a|^2 = a^2$. Also ist ein Quadrat stets nicht-negativ. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$, folglich

---

[2]) E. ARTIN, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. Hamb. Abh. Bd. 3 (1924), S. 319—323.

[3]) E. ARTIN, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate.

$-1 < 0$ und daher -1 in K nicht als Quadratsumme darstellbar. D. h.: Jeder geordnete Körper ist reell.

Ein Körper P heiße „reell abgeschlossen"[4]*, wenn zwar P reell, dagegen keine algebraische Erweiterung von P reell ist.*

Satz 1. *Jeder reell abgeschlossene Körper kann auf eine und nur eine Weise geordnet werden.*

Sei P reell abgeschlossen. Dann wollen wir zeigen:

Jedes von 0 verschiedene Element a aus P ist entweder selbst Quadrat oder aber ist $-a$ Quadrat, wobei diese Fälle einander ausschließen. Quadratsummen von Elementen aus P sind selbst Quadrate.

Hieraus wird Satz 1 unmittelbar folgen; denn durch die Festsetzung $a > 0$, wenn a Quadrat und von 0 verschieden ist, wird dann offenbar eine Ordnung des Körpers P definiert sein und sie ist die einzig mögliche, da ja Quadrate in jeder Ordnung $\geqq 0$ ausfallen müssen.

Ist γ nicht Quadrat eines Elements aus P, so ist $P(\sqrt{\gamma})$ eine algebraische Erweiterung von P, also nicht reell. Demnach gilt eine Gleichung

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \sqrt{\gamma} + \beta_\nu)^2$$

oder

$$-1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2 + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu,$$

wobei die α_ν, β_ν zu P gehören. Hierin muß der letzte Term verschwinden, da sonst $\sqrt{\gamma}$ entgegen der Annahme in P läge. Dagegen kann das erste Glied nicht verschwinden, da andernfalls P nicht reell wäre. Daraus schließen wir zunächst, daß γ in P nicht als Quadratsumme darstellbar ist; denn sonst erhielten wir auch für -1 eine Darstellung als Quadratsumme. D. h.: Ist γ nicht Quadrat, so auch nicht Quadratsumme. Oder positiv gewendet: Jede Quadratsumme in P ist auch Quadrat in P.

Nunmehr erhalten wir

$$-\gamma = \frac{1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2}$$

Zähler und Nenner dieses Ausdrucks sind Quadratsummen, also selbst Quadrate, daher ist $-\gamma = c^2$, wo c in P liegt. Demnach gilt für jedes Element aus P mindestens eine der Gleichungen $\gamma = b^2$,

---

[4]) Wir haben die kurze Bezeichnung „reell abgeschlossen" der präziseren „reell-algebraisch abgeschlossen" vorgezogen.

$-\gamma = c^2$; ist aber $\gamma \neq 0$, so können nicht beide bestehen, da sonst $-1 = \left(\frac{b}{c}\right)^2$ wäre, was nicht geht.

Auf Grund von Satz 1 nehmen wir im folgenden reell abgeschlossene Körper stets als geordnet an.

Satz 2. *In einem reell abgeschlossenen Körper besitzt jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle.*

Der Satz ist für den Grad 1 trivial. Wir nehmen an, er sei bereits für alle ungeraden Grade $< n$ bewiesen; $f(x)$ sei ein Polynom des ungeraden Grades $n\,(> 1)$. Ist $f(x)$ reduzibel in dem reell abgeschlossenen Körper P, so besitzt mindestens ein irreduzibler Faktor einen ungeraden Grad $< n$, also auch eine Nullstelle in P. Die Annahme, $f(x)$ wäre irreduzibel, soll jetzt ad absurdum geführt werden. Es sei nämlich α eine symbolisch adjungierte Nullstelle von $f(x)$. $P(\alpha)$ wäre dann nicht-reell, also hätten wir eine Gleichung

$$(1) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(\alpha))^2,$$

wobei die $\varphi_\nu(x)$ Polynome höchstens $(n-1)$-ten Grades mit Koeffizienten aus P sind. Aus (1) erhalten wir eine Identität

$$(2) \qquad -1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(x))^2 + f(x)\,g(x).$$

Die Summe der φ_ν^2 hat geraden Grad, da die höchsten Koeffizienten Quadrate sind und sich also beim Addieren nicht wegheben können. Ferner ist der Grad positiv, da sonst schon (1) einen Widerspruch enthielte. Demnach hat $g(x)$ einen ungeraden Grad $\leqq n-2$, also besitzt $g(x)$ jedenfalls eine Nullstelle a in P. Setzen wir aber a in (2) ein, so haben wir

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(a))^2,$$

womit wir bei einem Widerspruch angelangt sind, da die $\varphi_\nu(a)$ in P liegen.

Satz 3. *Ein reell abgeschlossener Körper ist nicht algebraisch abgeschlossen. Dagegen ist der durch Adjunktion von i*[5]*) entstehende Körper algebraisch abgeschlossen.*

Die erste Hälfte ist trivial. Denn die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist in jedem reellen Körper unlösbar.

[5]) i bedeutet hier und im folgenden stets eine Nullstelle von $x^2 + 1$.

Die zweite Hälfte folgt unmittelbar aus

Satz 3a. *Besitzt in einem geordneten Körper K jedes positive Element eine Quadratwurzel und jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle, so ist der durch Adjunktion von i entstehende Körper algebraisch abgeschlossen.*

Zunächst bemerken wir, daß in $K(i)$ jedes Element eine Quadratwurzel besitzt und daher jede quadratische Gleichung lösbar ist. Sei nämlich $a+bi$ ein Element aus $K(i)$ (a und b in K). Dann liegt auch $\sqrt{a^2+b^2}$ in K, ferner ist $|\sqrt{a^2+b^2}| \geqq |a|$. Also gehören

$$c_1 = \left|\sqrt{\frac{a+|\sqrt{a^2+b^2}|}{2}}\right| \quad \text{und} \quad c_2 = \left|\sqrt{\frac{-a+|\sqrt{a^2+b^2}|}{2}}\right|$$

zu K und es ist $(c_1 + i c_2 \operatorname{sign} b)^2 = a + bi$.

Um nun nachzuweisen, daß in $K(i)$ jedes irreduzible Polynom aus K eine Nullstelle besitzt, kann man nach Gauss folgendermaßen verfahren. Es sei bewiesen, daß jedes doppelwurzelfreie Polynom mit Koeffizienten aus K, dessen Grad durch 2^{m-1}, aber nicht durch 2^m teilbar ist, in $K(i)$ eine Wurzel besitzt. (Dies trifft für $m = 1$ nach Voraussetzung zu.) $f(x)$ sei ein doppelwurzelfreies Polynom n-ten Grades, wo $n = 2^m q$, q ungerade. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ seien die Wurzeln von $f(x)$ in einer Erweiterung von K. Wir wählen c aus K so, daß die $\frac{n(n-1)}{2}$ Ausdrücke $\alpha_j\alpha_k + c(\alpha_j + \alpha_k)$ für $1 \leqq j < k \leqq n$ lauter verschiedene Werte haben[6]). Da diese Ausdrücke ersichtlich einer Gleichung vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ in K genügen, so liegt nach Annahme mindestens einer von ihnen in $K(i)$, etwa $\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Zufolge der Bedingung, der c unterworfen war, ist aber $K(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = K(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2))$; also finden wir α_1 und α_2 durch Auflösung einer quadratischen Gleichung in $K(i)$.

Mit Hilfe der Galoisschen Theorie kann der Beweis auch folgendermaßen geführt werden: Da in K jedes Polynom ungeraden Grades (>1) reduzibel ist, besitzt K bloß algebraische Erweiterungen von geradem Grad. Es sei nun G eine Galoissche Erweiterung vom Grade $n = 2^m q$ (q ungerade) des Körpers K und $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von G in bezug auf K. $\mathfrak{H}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der Ordnung 2^m (eine solche ist nach dem Satz von Sylow vorhanden) und H der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Körper; dann hat H den Grad q in bezug auf K, also muß $q = 1$ sein und H stimmt mit K überein. D. h. G hat den Grad 2^m in bezug auf K und kann also aus K durch wiederholte Adjunktion von Quadratwurzeln erzeugt werden. Nach dem oben Gesagten liegt demnach G in $K(i)$. W. z. b. w.

[6]) Dies ist möglich, weil $f(x)$ doppelwurzelfrei sein sollte.

Satz 4. *Es sei Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, P ein Unterkörper von Ω, aus dem Ω durch eine einfache Erweiterung hervorgeht. Dann ist P reell abgeschlossen.*

Es sei $\Omega = P(\xi)$. Dann kann ξ nicht transzendent in bezug auf P sein, sonst wäre ja $x^2 - \xi = 0$ in Ω unlösbar, also Ω nicht algebraisch abgeschlossen. Demnach ist Ω eine endliche Erweiterung von P. Von hier an verläuft der Beweis genau so wie a. a. O.[2]) 1—6.

Die reell abgeschlossenen Körper sind demnach identisch mit denjenigen Körpern der Charakteristik Null[7]), die durch einfache Erweiterung algebraisch abgeschlossen werden können.

Satz 5. *Es sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus dem reell abgeschlossenen Körper P und a, b Elemente aus P, für die $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gibt es mindestens ein Element c in P zwischen a und b, für das $f(c) = 0$.*

Da $P(i)$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt $f(x)$ in P in lineare und in irreduzible quadratische Faktoren. Ein irreduzibles quadratisches Polynom $x^2 + px + q$ ist in P beständig positiv, denn es kann in der Form geschrieben werden: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$; hierin ist der erste Term stets $\geqq 0$ und der zweite wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität positiv. Daher kann ein Vorzeichenwechsel von $f(x)$ nur durch Vorzeichenwechsel eines Linearfaktors, also durch eine Nullstelle im Intervall $a < x < b$ bewirkt werden.

Satz 6. *In einem reell abgeschlossenen Körper gelten die Sätze der reellen Algebra. Z. B.: Gleichmäßige Stetigkeit eines Polynoms in jedem Intervall $a \leqq x \leqq b$. Das Theorem von Rolle. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Der Satz von Sturm über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem Intervall.*

Jede rationale Funktion, deren Nenner für $a \leqq x \leqq b$ nicht verschwindet, nimmt in diesem Intervall einen größten und einen kleinsten Wert an, und zwar finden sich diese Extremwerte unter den Werten für $x = a, b, \xi_j$, wo ξ_j die Nullstellen der Ableitung unserer Funktion im betrachteten Intervall durchläuft.

Sämtliche Nullstellen des Polynoms $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ sind ihrem Betrage nach kleiner als $1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

Die Beweise sind auf Grund von Satz 5 wörtlich so zu führen, wie sonst üblich. Man vergleiche etwa die betreffenden Abschnitte von H. Webers Lehrbuch der Algebra I (insbesondere die §§ 35, 91, 112, 114 der 2. Aufl.).

---

[7]) Diese Voraussetzung ist entbehrlich, worauf wir noch zurückkommen.

II. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

Wir wenden uns jetzt zum Nachweis der Existenz gewisser reell abgeschlossener Erweiterungen von reellen Körpern sowie reell abgeschlossener Unterkörper von algebraisch abgeschlossenen Körpern.

Satz 7. *Es sei K ein reeller Körper, Ω ein algebraisch abgeschlossener Körper über K. Dann gibt es (mindestens) einen reell abgeschlossenen Körper P zwischen K und Ω, für den $\Omega = P(i)$.*

Zum Beweis denken wir uns die Elemente von Ω wohlgeordnet: $1 = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\omega \cdots$ und definieren für jede bei dieser Wohlordnung verwendete Ordinalzahl ν die Körper K_ν, K_ν^* folgendermaßen: $K_0 = K_0^* = K$. Sind nun K_μ, K_μ^* für $\mu < \nu$ definiert, so sei K_ν^* die Vereinigung der K_μ $(\mu < \nu)$ und

$K_\nu = K_\nu^*(a_\nu)$, wenn dieser Körper reell,

$K_\nu = K_\nu^*$ sonst.

Daß K_ν^* stets ein Körper ist, folgt unmittelbar aus Steinitz a. a. O.[1]) § 2, Satz 2 und dieselbe Schlußweise zeigt auch, daß alle Körper K_ν reell sind; ebenso ist ihre Vereinigung P ein reeller Körper. Wir behaupten, daß P den Bedingungen des Satzes genügt. Denn ist $a = a_\nu$ ein Element aus Ω, das nicht zu P gehört, so gehört a auch nicht zu K_ν, d. h. $K_\nu^*(a)$ ist nicht reell und a fortiori $P(a)$ nicht reell. Daher ist P reell abgeschlossen. Da aber eine einfache transzendente Erweiterung eines reellen Körpers offenbar reell ist, folgt weiter, daß Ω algebraisch in bezug auf P ist. Da nach Satz 3 auch $P(i)$ algebraisch abgeschlossen ist, muß wegen der Eindeutigkeit der algebraischen, algebraisch-abgeschlossenen Erweiterung von P der Körper Ω mit $P(i)$ identisch sein.

Einige Sonderfälle bzw. unmittelbare Folgerungen von Satz 7 mögen noch besonders formuliert werden.

Satz 7a. *Zu jedem reellen Körper K gibt es (mindestens) eine reell abgeschlossene, algebraische Erweiterung.*

Wir brauchen zum Beweis bloß für Ω in Satz 7 die algebraisch abgeschlossene, algebraische Erweiterung von K zu wählen.

Satz 7b. *Jeder reelle Körper kann auf (mindestens) eine Weise geordnet werden.*

Dies folgt ohne weiteres aus Satz 1 und 7a.

Ist ferner Ω irgendein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und setzen wir in Satz 7 für K den Körper der rationalen Zahlen, so haben wir

Satz 7c. *Jeder algebraisch abgeschlossene Körper Ω der Charakteristik Null enthält (mindestens) einen reell abgeschlossenen Unterkörper P, für den $\Omega = P(i)$.*

Für geordnete Körper läßt Satz 7 a sich wesentlich verschärfen:

Satz 8. *Ist K ein geordneter Körper, so gibt es eine und — von äquivalenten Erweiterungen abgesehen — nur eine algebraische, reell abgeschlossene Erweiterung P von K, deren Ordnung eine Fortsetzung der Ordnung von K ist. P besitzt außer dem identischen keinen Automorphismus, der die Elemente aus K fest läßt.*

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz. *Sei K ein geordneter Körper, $\bar{K}$ der Körper, der aus K durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus allen positiven Elementen von K hervorgeht. Dann ist $\bar{K}$ reell.*

Es genügt offenbar zu zeigen, daß keine Gleichung der Form

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \xi_\nu^2 \tag{3}$$

besteht, wo die c_ν positive Elemente aus K, die ξ_ν aber Elemente aus $\bar{K}$ sind. Angenommen, es gäbe eine solche Gleichung. In den ξ_ν könnten natürlich nur endlich viele der zu K adjungierten Quadratwurzeln wirklich auftreten, etwa $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_r}$. Wir denken uns unter allen Gleichungen (3) eine solche gewählt, für die r möglichst klein ausfällt. (Sicher ist $r \geqq 1$, da in K keine Gleichung der Form (3) existiert.) ξ_ν läßt sich in der Gestalt $\xi_\nu = \eta_\nu + \zeta_\nu \sqrt{a_r}$ darstellen, wo η_ν, ζ_ν in $K(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_{r-1}})$ liegen. Also hätten wir

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu a_r \zeta_\nu^2 + 2\sqrt{a_r} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu \zeta_\nu. \tag{4}$$

Verschwindet in (4) der letzte Summand, so wäre (4) eine Gleichung der selben Gestalt wie (3), enthielte aber weniger als r Quadratwurzeln. Verschwindet er aber nicht, so läge $\sqrt{a_r}$ in $K(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{r-1}})$ und (3) könnte wieder mit weniger als r Quadratwurzeln geschrieben werden. Unsere Annahme führt daher zu einem Widerspruch.

Nach dieser Vorbereitung können wir nun Satz 8 beweisen. Sei P eine algebraische, reell abgeschlossene Erweiterung von $\bar{K}$. Eine solche gibt es nach Satz 7a, da $\bar{K}$ bereits als reell erkannt ist. P ist auch algebraisch in bezug auf K und die Ordnung von P ist eine Fortsetzung derer von K, da doch jedes positive Element aus K in $\bar{K}$ Quadrat ist, also erst recht in P.

Es sei jetzt P^* eine zweite algebraische, reell abgeschlossene Erweiterung von K, deren Ordnung die von K nicht ändert. $f(x)$ sei ein, nicht notwendig irreduzibles Polynom mit Koeffizienten aus K. Der Sturmsche Satz gestattet uns, bereits in K zu entscheiden, wieviele Wurzeln $f(x)$ in P besitzt. Wir brauchen bloß eine Sturmsche

Kette für $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ etwa an den Stellen $\pm(1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$ zu untersuchen (Satz 6). Daher hat $f(x)$ in P ebensoviele Wurzeln wie in P^*. Insbesondere besitzt jede Gleichung in K, die in P mindestens eine Wurzel besitzt, auch in P^* mindestens eine Wurzel und umgekehrt. Seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ die Wurzeln von $f(x)$ in P, $\beta_1^*, \beta_2^*, \cdots, \beta_r^*$ die Wurzeln von $f(x)$ in P^*. Ferner sei ξ in P so gewählt, daß $K(\xi) = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$, und $F(x) = 0$ die irreduzible Gleichung für ξ in K. $F(x)$ besitzt also in P die Wurzel ξ, daher auch in P^* mindestens eine Wurzel η^*; $K(\xi)$ und $K(\eta^*)$ sind äquivalente Erweiterungen von K. Da $K(\xi)$ durch die r Nullstellen $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ von $f(x)$ erzeugt wird, muß auch $K(\eta^*)$ durch r Wurzeln von $f(x)$ erzeugt werden; nun ist $K(\eta^*)$ ein Unterkörper von P^*, also gilt $K(\eta^*) = K(\beta_1^*, \cdots, \beta_r^*)$. Demnach sind $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ und $K(\beta_1^*, \cdots, \beta_r^*)$ äquivalente Erweiterungen von K. Um nun zu zeigen, daß P und P^* äquivalente Erweiterungen von K sind, bemerken wir, daß eine isomorphe Abbildung von P auf P^* notwendig die Ordnung erhalten muß, da diese ja durch die Eigenschaft, Quadrat zu sein oder nicht zu sein, erklärt ist. Wir definieren daher folgende Abbildung σ von P auf P^*. Sei α ein Element aus P, $p(x)$ das irreduzible Polynom in K, dessen Nullstelle α ist, und $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$ die sämtlichen Wurzeln von $p(x)$ in P; speziell sei $\alpha = \alpha_k$. Sind dann $\alpha_1^* < \alpha_2^* < \cdots < \alpha_r^*$ die Wurzeln von $p(x)$ in P^*, so sei $\sigma(\alpha) = \alpha_k^*$. Offenbar ist σ eineindeutig und läßt die Elemente aus K fest. Es ist nachzuweisen, daß σ eine isomorphe Abbildung ist. Sei zu diesem Zweck $f(x)$ wieder irgendein Polynom in K, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ seine Wurzeln in P, $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots, \gamma_s^*$ die in P^*. Ferner sei $g(x)$ das Polynom in K, dessen Nullstellen die Quadratwurzeln aus den Wurzeldifferenzen von $f(x)$ sind. $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_t$ seien die Nullstellen von $g(x)$ in P, $\delta_1^*, \delta_2^*, \cdots, \delta_t^*$ die in P^*. Nach dem oben Bewiesenen sind $G = K(\gamma_1, \cdots, \gamma_s, \delta_1, \cdots, \delta_t)$ und $G^* = K(\gamma_1^*, \cdots, \gamma_s^*, \delta_1^*, \cdots, \delta_t^*)$ äquivalente Erweiterungen von K. Es gibt also eine isomorphe Abbildung τ von G auf G^*, die K elementweise fest läßt. Durch τ wird jedem γ ein γ^*, jedem δ ein δ^* zugeordnet. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\tau(\gamma_k) = \gamma_k^*$, $\tau(\delta_h) = \delta_h^*$ ist. Ist nun $\gamma_k < \gamma_l$ (in P), so ist $\gamma_l - \gamma_k = \delta_h^2$ für einen gewissen Index h, also auch $\gamma_l^* - \gamma_k^* = \delta_h^{*2}$, demnach $\gamma_k^* < \gamma_l^*$ (in P^*). τ ordnet also die Wurzeln von $f(x)$ in P und P^* einander der Größe nach zu. Da dies folglich auch für die Nullstellen der in K irreduziblen Faktoren von $f(x)$ gilt, haben wir $\tau(\gamma_k) = \sigma(\gamma_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, s)$. Indem wir also dafür sorgen, daß zwei beliebig vorgegebene Elemente α, β aus P sowie $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ unter den Wurzeln von $f(x)$ vorkommen, erkennen wir, daß σ eine isomorphe Abbildung von P auf P^* ist, und zwar die einzige, die K elementweise fest läßt. Wählen wir

$P^* = P$, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung über die Automorphismen von P.

Wir wollen jetzt geordnete Körper untersuchen, deren Ordnung dem Axiom des ARCHIMEDES bzw. einer gewissen Verallgemeinerung davon genügt.

Sei G ein geordneter Körper, K ein Unterkörper von K. Ein Element α aus G heißt „in bezug auf K unendlich groß", wenn $|\alpha| > c$ für jedes Element c aus K, dagegen „in bezug auf K unendlich klein", wenn $0 < |\alpha| < c$ für jedes positive Element c aus K.

Ist α in bezug auf K unendlich groß, so ist $\frac{1}{\alpha}$ in bezug auf K unendlich klein und umgekehrt.

Wir nennen nun einen geordneten Körper über K „in bezug auf K Archimedisch", wenn er keine in bezug auf K unendlich großen (oder kleinen) Elemente enthält.

Für den Fall, daß K der Körper der rationalen Zahlen ist, lassen wir den Zusatz „in bezug auf K" weg.

Ist K_1 in bezug auf K_2 Archimedisch und K_2 in bezug auf K_3 Archimedisch, so ist auch K_1 in bezug auf K_3 Archimedisch.

Ein Körper A zwischen G und K heißt insbesondere „in bezug auf K maximal-Archimedisch", wenn A in bezug auf K Archimedisch ist, aber keine in G enthaltene Erweiterung von A in bezug auf K Archimedisch ist.

Daß es stets (mindestens) einen solchen in bezug auf K maximal-Archimedischen Körper A in G gibt, ist durch Wohlordnung mühelos zu zeigen. (Vgl. den Beweis von Satz 7.) Desgleichen, daß A so gewählt werden kann, daß ein gegebener, in bezug auf K Archimedischer Unterkörper von G zu A gehört.

Für reell abgeschlossene Körper beweisen wir weitergehend

Satz 9. *Sei P reell abgeschlossen und K ein Unterkörper von P. Dann sind alle in bezug auf K maximal-Archimedischen Unterkörper von P äquivalente Erweiterungen von K und reell abgeschlossen.*

Sei A ein in bezug auf K maximal-Archimedischer Unterkörper von P. Wir beweisen zuerst: Jedes in bezug auf A algebraische Element ϱ aus P gehört zu A. Denn jedes Element aus $A(\varrho)$ ist algebraisch in bezug auf A und ist daher nach Satz 6 seinem Betrag nach kleiner als ein gewisses Element aus A. Daher enthält $A(\varrho)$ kein in bezug auf A unendlich großes Element, ist also in bezug auf A Archimedisch, folglich auch in bezug auf K, d. h. $A(\varrho) = A$.

Nun besitzt jedes Polynom ungeraden Grades mit Koeffizienten aus A in P eine Nullstelle. Nach dem soeben Bewiesenen gehört diese Nullstelle bereits zu A. Ebenso gehört die Quadratwurzel aus einem positiven

Element von A zu A. Nach Satz 3a ist somit $A(i)$ algebraisch abgeschlossen und daher keine algebraische Erweiterung von A reell, also A reell abgeschlossen.

Jetzt sei Γ die Menge der Elemente aus P, die in bezug auf K nicht unendlich groß sind. Offenbar ist Γ ein Ring. Sei ferner $\mathfrak{u}$ die Menge, bestehend aus 0 und den in bezug auf K unendlich kleinen Elementen aus P. $\mathfrak{u}$ ist ein Teil von Γ, und zwar ist $\mathfrak{u}$ ein Primideal. Denn die Differenz zweier in bezug auf K unendlich kleinen Elemente ist selbst unendlich klein und das Produkt zweier Elemente ist stets und nur dann in bezug auf K unendlich klein, wenn mindestens einer der Faktoren es ist. Sei $\mathfrak{A}$ der Bereich der Restklassen mod $\mathfrak{u}$. $\mathfrak{A}$ ist ein Körper. Denn ist $\gamma \not\equiv 0(\mathfrak{u})$, so ist γ nicht unendlich klein, also $\frac{1}{\gamma}$ nicht unendlich groß in bezug auf K; d. h. $\frac{1}{\gamma}$ gehört zu Γ. Eine von 0 verschiedene Restklasse mod $\mathfrak{u}$ enthält entweder nur positive oder nur negative Elemente; wir nennen daher eine von 0 verschiedene Restklasse positiv, wenn sie aus positiven Elementen besteht. $\mathfrak{A}$ ist durch diese Festsetzung geordnet, da alle an die Eigenschaft „positiv" gestellten Forderungen erfüllt sind. In jeder Restklasse mod $\mathfrak{u}$ liegt höchstens ein Element aus K[8]). Die durch K repräsentierten Restklassen bilden daher einen mit K isomorphen Unterkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ ist in bezug auf $\mathfrak{K}$ Archimedisch, denn Γ enthält kein in bezug auf K unendlich großes Element, also $\mathfrak{A}$ keine in bezug auf $\mathfrak{K}$ unendlich große Restklassen.

Wir behaupten nunmehr: Jeder in bezug auf K maximal-Archimedische Unterkörper A von P besteht aus einem vollen Repräsentantensystem der Restklassen mod $\mathfrak{u}$, läßt sich also auf $\mathfrak{A}$ in der Weise isomorph beziehen, daß jedem Element aus A die von ihm repräsentierte Restklasse mod $\mathfrak{u}$ entspricht. (Damit wird Satz 9 vollständig bewiesen sein.) Eine Restklasse mod $\mathfrak{u}$ enthält zunächst höchstens ein Element aus A und umgekehrt gehört jedes Element von A zu Γ, also zu einer Restklasse mod $\mathfrak{u}$. Aber jede Restklasse enthält auch mindestens ein Element aus A. Nehmen wir nämlich an, die Restklasse R enthielte kein Element aus A! Nach dem bereits Bewiesenen wären alle Elemente aus R transzendent in bezug auf A. Sei t ein Element aus R. Wir wollen zeigen: $A(t)$ ist in bezug auf A, also auch in bezug auf K Archimedisch. (Damit wird ein Widerspruch hergestellt sein.) Da jedes Element aus $A(t)$ sich auf die Form $\frac{f(t)}{g(t)}$ bringen läßt, wo f und g Polynome mit Koeffizienten aus A sind,

---

[8]) Aus $a \equiv b(\mathfrak{u})$ folgt $a-b$ in $\mathfrak{u}$, d. h. entweder 0 oder in bezug auf K unendlich klein, also $a = b$, wenn a und b zu K gehören.

da ferner $f(t)$ zu Γ gehört und demnach nicht unendlich groß in bezug auf K ist, so genügt es nachzuweisen: $g(t)$ ist nicht unendlich klein in bezug auf A. Wir bestimmen zu diesem Zweck zwei Elemente a, b aus A, so daß $a < t < b$ und $g(x)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ keine Nullstelle (in P) besitzt. Dies ist stets möglich. Besitzt nämlich $g(x)$ überhaupt keine Nullstelle (in P), die größer als t ist, dann sei b irgendein Element aus A, das t übertrifft. Andernfalls sei b' die kleinste Nullstelle von $g(x)$, die größer ist als t. b' ist algebraisch in bezug auf A, gehört also zu A und es ist $b' \not\equiv t$ (u). Also ist $b' - t$ nicht unendlich klein in bezug auf K, es gibt folglich ein $c > 0$ in K, so daß $b' - t > c$. Setzen wir jetzt $b \doteq b' - c$, so haben wir $t < b < b'$ und $g(x)$ verschwindet nicht für $t \leqq x \leqq b$. Analog wird a bestimmt. $|g(x)|$ besitzt nun für $a \leqq x \leqq b$ ein positives Minimum μ. Und zwar ist $\mu = |g(\xi)|$, wo ξ nach Satz 6 entweder eine Nullstelle von $g'(x)$ im betrachteten Intervall oder eines der Elemente a, b ist. Unter allen Umständen gehört daher ξ zu A, also auch μ. Es ist demnach $|g(t)|$ mindestens so groß wie das positive Element μ aus A, also ist $|g(t)|$ nicht unendlich klein in bezug auf A.

III. Beispiele und Anwendungen.

Wir wollen in diesem letzten Abschnitt einige Anwendungen auf die algebraischen Zahlkörper machen sowie Beispiele von reellen Körpern geben, die in mancher Hinsicht neues Licht auf die gewonnenen Ergebnisse werfen.

Wir schicken einen für die Konstruktion von Beispielen sehr bequemen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz. *Ist K der Quotientenkörper des Ringes R und ist R geordnet, so kann K auf eine und nur eine Weise so geordnet werden, daß die Ordnung von R erhalten bleibt.*

Es sei nämlich K in der gewünschten Weise geordnet. Ist nun $a = \frac{b}{c}$ ein beliebiges Element aus K, wobei b und c Ringelemente sind und $c \neq 0$, so folgt aus $a > 0$, $a = 0$, $-a > 0$ bzw.: $bc > 0$, $bc = 0$, $-bc > 0$. Also ist die Ordnung durch die von R eindeutig bestimmt. Umgekehrt erkennt man sofort, daß durch die Festsetzung $a > 0$, wenn $bc > 0$, tatsächlich eine Ordnung der verlangten Art gegeben ist.

Insbesondere läßt sich also der Körper der rationalen Zahlen nur auf eine Weise ordnen, da der Ring der ganzen rationalen Zahlen offenbar nur der natürlichen Ordnung fähig ist. Aus Satz 8 gewinnen wir daher:

Satz 8a. *Es gibt — von isomorphen Körpern abgesehen — einen und nur einen reell abgeschlossenen, absolut algebraischen Körper, den Körper der — im gewöhnlichen Sinn —* „reellen"[9]) *algebraischen Zahlen*.[10])

Ferner beweisen wir

Satz 10. *Ein reeller, absolut algebraischer Körper K ist stets mit einem* reellen *Zahlkörper isomorph. Jeder Anordnung von K entspricht umkehrbar eindeutig eine isomorphe Abbildung von K auf einen* reellen *Zahlkörper, bei der die Anordnung von K in die natürliche Ordnung des* reellen *Zahlkörpers übergeht. Verschiedene Anordnungen von K führen dann und nur dann auf denselben* reellen *Zahlkörper, wenn sie durch einen Automorphismus von K auseinander hervorgehen.*

Sei nämlich K reell und absolut algebraisch. K werde in irgendeiner Weise geordnet (Satz 7b); P sei die reell abgeschlossene, absolut algebraische Erweiterung von K, welche die gewählte Ordnung von K nicht zerstört (Satz 8). Dann ist P mit dem Körper P^* aller reellen algebraischen Zahlen isomorph, demnach K mit einem Unterkörper K^* von P^*. Da die isomorphe Beziehung zwischen P und P^* die Ordnung erhält, entspricht der Anordnung von K die natürliche Ordnung von K^*. Umgekehrt gibt jede isomorphe Abbildung von K auf einen reellen Zahlkörper K^* zu einer Ordnung von K Anlaß, indem man die natürliche Ordnung von K^* vermöge der gegebenen Abbildung auf K überträgt. Die behauptete Eineindeutigkeit folgt nun aus der Bemerkung, daß ein reeller Zahlkörper keinen Automorphismus außer dem identischen besitzt, der die natürliche Ordnung erhält, und daß zwei verschiedene reelle Zahlkörper niemals unter Aufrechterhaltung der natürlichen Ordnung isomorph aufeinander bezogen werden können.

Als Spezialfall haben wir den

Satz 10a. *Die Anzahl der* reellen *unter den konjugierten eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K ist gleich der Anzahl der verschiedenen Anordnungen, deren K fähig ist, also insbesondere Null, wenn K nicht reell ist.*

Im Gegensatz zu Satz 8a gilt für transzendente Körper der

Satz 11. *Ist Ω ein algebraisch abgeschlossener, aber nicht absolut algebraischer Körper der Charakteristik Null, so gibt es zwei*[11]) *reell abgeschlossene, nicht isomorphe Unterkörper P_1, P_2 von Ω, so daß $P_1(i) = P_2(i) = \Omega$. Hat Ω einen Transzendenzgrad $\leq \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ = Mächtigkeit des Kontinuums), so können P_1 und P_2 beide Archimedisch gewählt werden.*

---

[9]) „Reell" im gewöhnlichen Sinn ist hier und im folgenden durch Frakturbuchstaben hervorgehoben.

[10]) Dieser Satz ist bereits a. a. O.[2]) bewiesen, allerdings nicht rein algebraisch.

[11]) Sogar unendlich viele.

Sei zum Beweis R der Körper der rationalen, $\mathfrak{R}$ der Körper aller reellen Zahlen. Wir denken uns in $\mathfrak{R}$ eine Basis $\mathfrak{B}$ der transzendenten Zahlen gewählt, also eine Menge von den Eigenschaften: 1. Jede Zahl aus $\mathfrak{B}$ ist transzendent in bezug auf den aus R durch Adjunktion der übrigen Zahlen von $\mathfrak{B}$ hervorgehenden Körper. 2. $\mathfrak{R}$ ist algebraisch in bezug auf $R(\mathfrak{B})$. (Die Existenz einer solchen Menge wird in der üblichen Weise gezeigt.)

Es sei nun Ω algebraisch abgeschlossen, von der Charakteristik Null, vom Transzendenzgrad $\mathfrak{t}\,(>0)$ und zunächst $\mathfrak{t} \leqq \mathfrak{c}$. Dann wählen wir aus $\mathfrak{B}$ zwei nicht identische Teilmengen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ der Mächtigkeit $\mathfrak{t}$, die Zahl a sei etwa in $\mathfrak{B}_1$ nicht aber in $\mathfrak{B}_2$ enthalten. Ω_1 und Ω_2 seien die Körper der in bezug auf $R(\mathfrak{B}_1)$ bzw. $R(\mathfrak{B}_2)$ algebraischen (komplexen) Zahlen. Ω ist mit Ω_1 und Ω_2 isomorph. P_1 und P_2 seien die Körper der in Ω_1 bzw. Ω_2 enthaltenen reellen Zahlen. P_1 und P_2 sind reell abgeschlossen, da offenbar $P_1(i) = \Omega_1$, $P_2(i) = \Omega_2$, aber sicher nicht isomorph. Gäbe es nämlich eine isomorphe Abbildung zwischen P_1 und P_2, so müßte sie einerseits die rationalen Zahlen fest lassen, andrerseits die Ordnung erhalten (Satz 1). Dies aber ist unmöglich, denn in P_2 gibt es keine Zahl, die den gleichen Schnitt in R erzeugt wie die zu P_1 gehörige Zahl a. Wegen des Isomorphismus zwischen Ω, Ω_1 und Ω_2 enthält daher Ω zwei Unterkörper, die mit P_1 bzw. P_2 isomorph sind und aus deren jedem Ω durch Adjunktion von i entsteht. Damit ist unsere Behauptung für $\mathfrak{t} \leqq \mathfrak{c}$ bewiesen.

Für beliebiges $\mathfrak{t}\,(>0)$ verfahren wir so. Es sei $\mathfrak{X}$ eine Basis der Transzendenten von Ω. $\mathfrak{X}$ werde in irgendeiner Weise geordnet[12]). Wir ordnen jetzt die Potenzprodukte der Elemente von $\mathfrak{X}$: Sind $x_1, \cdots, x_n$ endlich viele Elemente von $\mathfrak{X}$, deren Numerierung gemäß der Ordnung von $\mathfrak{X}$ gewählt sei, so gehe das Produkt $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ dem Produkt $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ voran, wenn die erste nichtverschwindende Differenz $b_j - a_j$ positiv ausfällt. Sei nunmehr $f(x)$ ein Element des Polynombereichs $R[\mathfrak{X}]$. Dann setzen wir fest: $f(x)$ ist positiv, wenn der Koeffizient des ersten in $f(x)$ wirklich auftretenden Potenzprodukts der x positiv ist[13]). Damit ist der Ring $R[\mathfrak{X}]$ und nach unserem Hilfssatz auch der Körper $R(\mathfrak{X})$ geordnet. P_1 sei nun die reell abgeschlossene, in Ω enthaltene Erweiterung von $R(\mathfrak{X})$, die die eben definierte Anordnung von $R(\mathfrak{X})$ erhält. Offenbar ist jetzt $\Omega = P_1(i)$ und der maximale Archimedische Unterkörper von P_1 hat den Typus des Körpers aller reellen algebraischen Zahlen.

---

[12]) „Geordnet" ist hier im Sinne der allgemeinen Mengenlehre, nicht im Sinne der Ordnung eines Körpers gemeint.

[13]) Diese Anordnung bedeutet: Jedes Element x von $\mathfrak{X}$ ist positiv und unendlich klein in bezug auf die Polynome in den auf x folgenden Elementen von $\mathfrak{X}$.

Nun ordnen wir $R[\mathfrak{X}]$ und damit $R(\mathfrak{X})$ in anderer Weise: y sei ein festgewähltes Element aus $\mathfrak{X}$, die übrigbleibende Menge sei $\mathfrak{X}'$. Die Potenzprodukte der Elemente von $\mathfrak{X}'$ ordnen wir wie zuvor. Ist $f(y, x')$ wieder ein Element des Polynombereichs $R[\mathfrak{X}]$ und $g(y)$ der Koeffizient des ersten in $f(y, x')$ wirklich auftretenden Potenzprodukts der x', so heiße bei der neuen Ordnung $f(y, x')$ positiv, wenn $g(e)$ eine positive reelle Zahl ist; dabei bedeutet e die Basis der natürlichen Logarithmen. Bestimmen wir jetzt einen reell abgeschlossenen Körper P_2 zwischen $R(\mathfrak{X})$ und Ω, der die neue Anordnung von $R(\mathfrak{X})$ nicht zerstört, so ist wieder $P_2(i) = \Omega$. Aber P_2 enthält einen Archimedischen Unterkörper vom Transzendenzgrad 1, nämlich $R(y)$. Folglich kann P_2 nicht mit P_1 isomorph sein (Satz 9).

In einem reell abgeschlossenen Körper können die Nullstellen eines Polynoms mit Koeffizienten aus dem Körper stets getrennt werden. Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß dies in einem geordneten, nicht reell abgeschlossenen Körper nicht notwendig zutrifft: Sei $R(x)$ der Körper der rationalen Funktionen der Unbestimmten x mit rationalen Koeffizienten. Wir ordnen $R(x)$ durch die Vorschrift: x soll positiv und unendlich klein sein, d. h. in einem Polynom gibt die niedrigste auftretende Potenz den Ausschlag. In dem zugehörigen reell abgeschlossenen, relativ algebraischen Körper besitzt die Gleichung $(y^2 - x)^2 - x^3 = 0$ zwei positive Nullstellen $\sqrt{x(1 \pm \sqrt{x})}$. Diese beiden Nullstellen können in $R(x)$ nicht getrennt werden. Dieses Beispiel läßt erkennen, daß der Eindeutigkeitsbeweis in Satz 8 ohne Trennung der Wurzeln geführt werden muß.

Schließlich soll noch gezeigt werden, daß ein geordneter Körper, der nicht reell abgeschlossen ist, sehr wohl nicht-isomorphe maximal-Archimedische Unterkörper besitzen kann. Zu diesem Zweck sei A der Körper aller reellen algebraischen Zahlen, in natürlicher Weise geordnet; $A(e)$ entstehe aus A durch Adjunktion der Basis der natürlichen Logarithmen; P sei der (reell abgeschlossene) Körper der reellen, in bezug auf $A(e)$ algebraischen Zahlen. Wir betrachten nun den geordneten Körper $G = P(x)$, der aus P durch Adjunktion der unendlich kleinen Unbestimmten x hervorgeht. P und $A(e+x)$ sind dann zwei Archimedische Unterkörper von G. Von beiden läßt sich zeigen, daß sie sogar maximal-Archimedisch sind. Trotzdem sind sie ersichtlich nicht isomorph, denn P ist reell abgeschlossen, $A(e+x)$ ist es nicht.

Hamburg, Mathematisches Seminar, im Juni 1926.