

# Elementare Begründung der Knotentheorie<sup>1)</sup>.

Von KURT REIDEMEISTER in Königsberg.

Im folgenden soll eine elementare Grundlegung der Knotentheorie angedeutet werden. Um alle für unser Ziel unwesentlichen Schwierigkeiten auszuschalten, betrachten wir geschlossene doppelpunktfreie Polygone des dreidimensionalen euklidischen Raumes und fragen nach ihren Invarianten gegenüber „Deformationen“, die geeignet erklärt werden. Kurven, die auseinander durch Deformation hervorgehen, werden auch kurz „derselbe Knoten“ genannt. Unser Ziel ist es, die Rechenvorschriften — im weitesten Sinne genommen — zu kennzeichnen, die bei einem vorgelegten Knoten immer ausführbar sind, und die zu Knoteninvarianten führen.

Nun können wir bei jedem Knoten gewiß seine „regulären“ Projektionen berechnen, d. h. diejenigen Projektionen, die nur endlich viele und nur zweifache Doppelpunkte besitzen. Wenn wir umgekehrt eine solche Projektion kennen und an den Doppelpunkten noch vermerken, welcher Zweig der Kurve der „obere“, welcher der „untere“ ist, so ist durch die so normierte Projektion der Knoten bestimmt. Und wir können daher sagen, daß eine berechenbare Knoteninvariante zugleich eine Eigenschaft ist, die allen regulären normierten Projektionen des Knotens gleichzeitig zukommt — und umgekehrt.

Die allgemeinste reguläre normierte Projektion eines Knotens geht nun aber aus irgendeiner solchen durch Anwendung von drei gewissen Operationen hervor, und es läßt sich deswegen gleich präziser eine Knoteneigenschaft kennzeichnen als eine Eigenschaft einer regulären normierten Projektion, die bei jenen drei Operationen erhalten bleibt (§ 1).

Die Gruppe des Knotens läßt sich nunmehr formal, d. h. ohne ihre Bedeutung zu kennen, als Knoteninvariante nachweisen (§ 2, Nr. 1, 2).

Aber es zeigt sich mehr: Liest man in einer bestimmten Weise die Relationen der Knotengruppe aus der Projektion des Knotens ab und vergleicht diese definierenden Relationen für zwei verschiedene Projektionen desselben beliebig deformierten Knotens, so enthalten diese Systeme mehr gemeinsame Eigenschaften, als daß nur die durch diese Relationen bestimmte Gruppe bei beiden dieselbe wäre: vielmehr sind gewisse Elemente der Gruppe topologisch ausgezeichnet (§ 2, Nr. 3, 4).

---

<sup>1)</sup> Über diese Arbeit wurde im Januar 1926 in Hamburg berichtet.

Schließlich geben wir eine formale Definition der Poincaréschen Zahlen der Gruppe  $\mathfrak{K}_2$ <sup>1)</sup> und erkennen sie auf unserem ganz elementaren Wege als Knoteninvarianten (§ 2, Nr. 5).

## § 1. Die Knotenprojektionen.

1. Ein Knoten möge als geschlossenes, zusammenhängendes Polygon des euklidischen Raumes mit endlich vielen Ecken erklärt werden. In jedem Eckpunkt des Polygons stoßen zwei Strecken zusammen und zwei seiner Eckpunkte lassen sich immer durch zwei Streckenzüge verbinden. Ein Knoten ist also gegeben, wenn die Eckpunkte in zyklisch bestimmter Reihenfolge gegeben sind.

Unter Deformation eines Knotens werde die sukzessive Erzeugung neuer Knoten aus einem vorgelegten durch folgende beiden Prozesse verstanden:

1. Sei  $PQ$  eine Strecke des Polygons mit den Endpunkten  $P$  und  $Q$ , seien  $PR$  und  $RQ$  zwei weitere Strecken mit den Endpunkten  $P, R$ , bzw.  $R, Q$ . Die Dreiecksfläche  $PQR$  habe außer der Strecke  $PQ$  keinen Punkt mit dem Knoten gemeinsam.  $PQ$  wird durch  $PR, RQ$  ersetzt.

2. Der zu 1 inverse Prozeß.

Zwei Knoten, die sich ineinander durch endlich viele Schritte 1 und 2 deformieren lassen, werden isotop genannt oder kurz als derselbe Knoten bezeichnet. Die Aufgabe ist es, einen Überblick über alle Eigenschaften eines Knotens (in dem eben erklärten engeren Sinne) zu gewinnen, d. h. alle Deformationsinvarianten eines geschlossenen zusammenhängenden Streckenzuges anzugeben.

Dies geschieht am bequemsten durch Behandlung der orthogonalen Projektionen eines Knotens.

2. Wir nennen eine Projektion *regulär*, wenn die projizierenden Strahlen höchstens zwei Strecken des Polygons treffen, und dies nur endlich oft, die Projektion also nur zweifache scheinbare Doppelpunkte, und zwar nur endlich viele, besitzt. Die singulären Projektionsrichtungen können danach aus zwei Gründen singulär sein:

- a) Es schneiden sich die Projektionen von mindestens drei Strecken  $s_1, s_2$  und  $s_3$  in einem Punkte, aber es gibt nur endlich viele Doppelpunkte. Dann trifft der Projektionsstrahl durch diesen mehrfachen Punkt die drei Geraden, auf denen  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$  liegen. Diese Geraden sind windschief, und der Projektionsstrahl gehört also dem durch die drei Geraden bestimmten einschaligen Hyperboloid an. Wir erhalten also alle singulären Richtungen dieser Art, wenn wir

<sup>1)</sup> Vgl. „Knoten und Gruppen“ § 2, Nr. 3.

je drei windschiefe Geraden, auf denen Strecken des Netzes liegen, herausgreifen, die durch sie bestimmten Hyperboloide und alsdann die Kegel zweiter Ordnung bilden, deren Erzeugende zu denen der Hyperboloide parallel sind.

- b) Die Projektion eines Eckpunktes fällt in die Projektion einer Strecke oder eines anderen Eckpunktes. Alsdann ist der Projektionsstrahl zu einer Ebene parallel, welche durch eine Strecke und einen Eckpunkt des Polygons hindurchgeht, der nicht ein Endpunkt jener Strecke ist.

Die regulären Projektionsrichtungen zerfallen also in endlich viele Gebiete  $G_1, \dots, G_m$ , deren Randelemente die Kegel und Ebenen der singulären Projektionsrichtungen sind.

3. Die Projektionen mögen nun *normiert* werden. Wir legen für jede Projektionsrichtung „oben“ und „unten“ fest, ferner benennen wir die Doppelpunkte der Projektion mit  $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$  und die ihnen auf dem Knoten entsprechenden Punkte mit  $d'$  und  $d''$ , und zwar liege  $d''$  unter  $d'$ . Wir nennen  $d''$  eine Unterkreuzungsstelle,  $d'$  eine Über-

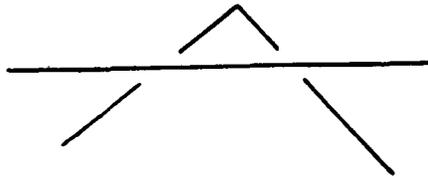


Fig. 1.

kreuzungsstelle. Wir normieren die Projektion, indem wir bei jedem  $\bar{d}_\nu$  bemerken, auf welchem Zweige  $d''$  liegt. Haben zwei Kurven dieselbe normierte Projektion, so sind sie isotop.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die normierte Projektion bei Deformation des Knotens und bei Veränderung der Projektionsrichtung verändert. Indem wir von der trivialen Operation, daß die Projektion eines Eckpunktes einen scheinbaren Doppelpunkt passiert, absehen, behaupten wir, daß sich diese Veränderungen auf die folgenden *drei Operationen* zurückführen lassen:

1. a) Zwei Streckenzüge des Knotens, deren Projektionen keine gemeinsamen Punkte hatten, schieben sich so übereinander, daß in dem einen Zuge zwei benachbarte Überkreuzungsstellen, im anderen zwei benachbarte Unterkreuzungsstellen auftreten. (Fig. 1.)  
 b) Es findet das zu a) Inverse statt.
2. a) Ein Streckenzug, dessen Projektion doppeltpunktfrei war, verwandelt sich in eine Schleife. Es entsteht ein neuer Doppelpunkt  $\bar{d}_{n+1}$ . Die zugeordneten  $d^{n+1}$  und  $d_{n+1}$  sind benachbart. (Fig. 2.)  
 b) Die zu a) inverse Operation.

3. Ausgangsfigur: drei Streckenzüge  $z_1, z_2, z_3$  erzeugen in der Projektion drei Doppelpunkte, die zu je zweien benachbart sind. Und zwar überkreuze  $z_1$  sowohl  $z_2$  wie  $z_3$ ,  $z_2$  überkreuze  $z_3$ . Operation:  $z_i$  wird durch die Überkreuzungsstelle von  $z_k$  und  $z_l$  hindurchgeschoben. Die inverse Operation ist dieselbe. (Fig. 3.)

4. Der Beweis dieser Behauptung sei kurz angedeutet. Der Knoten werde deformiert, indem die Strecke  $PQ$  durch die beiden Strecken  $PR, QR$  ersetzt wird. Die Projektionsrichtung werde so gewählt, daß sowohl der ursprüngliche wie der deformierte Knoten sich regulär projizieren.

$\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ , die Projektionen von  $P, Q, R$ , mögen nicht in einer Geraden liegen. Das Dreieck  $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$  enthält dann gewiß nur endlich viele Doppelpunkte im Innern und auf dem Rande. Das Dreieck  $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$  kann daher durch Strecken, deren Projektionen senkrecht auf  $\bar{P}\bar{Q}$  oder

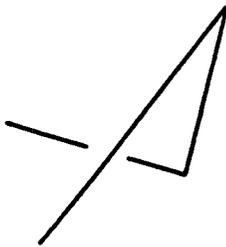


Fig. 2.

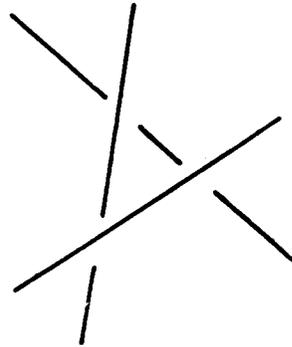


Fig. 3.

parallel zu  $\bar{P}\bar{Q}$  sind, so in Dreieck und Vierecke unterteilt werden, daß die entsprechenden Teilpolygone von  $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$ , Dreiecke, Trapeze und Rechtecke, nur höchstens einen Doppelpunkt im Innern enthalten und alsdann gerade von zwei, sonst nur von höchstens einem Streckenzug zweimal getroffen werden. Durch kleine Verschiebungen der Strecken läßt es sich erreichen, daß diese Teilpolygone von  $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$  nur in den Kanten, nicht aber in den Ecken von den Projektionen weiterer Streckenzüge des Knotens, die nicht zur Unterteilung des Dreiecks  $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$  gehören, getroffen werden — außer in den Eckpunkten  $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ .

Nun kann man  $\bar{P}\bar{R}\bar{Q}$  durch endliche viele der Operationen 1, 2 und 3 in  $\bar{P}\bar{Q}$  überführen, indem man „etagenweise“ die Dreiecke und Vierecke der Unterteilung abbaut.

Um eine bestimmte singuläre Projektionsrichtung zu passieren, deformieren wir den Knoten so, daß diese Richtung nicht mehr singulär ist. passieren dann die Richtung und deformieren alsdann den Knoten wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurück.

Damit ist gezeigt: *die Knoteneigenschaften fallen mit denjenigen Eigenschaften der regulären normierten Projektionen zusammen, die bei den Operationen 1, 2, 3 erhalten bleiben.*

## § 2. Die Knotengruppe.

1. Wir wollen nunmehr verschiedene Knoteneigenschaften unter unserem Gesichtspunkte betrachten, zunächst die *Gruppe des Knotens*. Wir ordnen jeder Projektion eines Knotens formal ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen<sup>1)</sup> zu.

Die Projektion besitze  $n$  Doppelpunkte. Wir teilen den Knoten in  $n$  Streckenzüge  $z_1, \dots, z_n$ , die von einer Unterkreuzungsstelle  $d_\nu$  bis zur nächsten reichen, und ordnen jedem  $z_\nu$  eine Erzeugende  $C_\nu$  zu. Jedem Doppelpunkte  $\bar{d}_\nu$  ordnen wir aber in folgender Weise eine Relation zu. Es mögen bei  $d_\nu$  etwa  $z_\lambda$  und  $z_{\lambda+1}$  zusammenstoßen und der Streckenzug  $z_\lambda z_{\lambda+1}$  von  $z_\mu$  überkreuzt werden. Auf dem Knoten sei eine positive Richtung erklärt und in der Projektionsebene ein positiver Drehungssinn. Wir zeichnen nun um  $\bar{d}_\nu$  einen kleinen Kreis, der nacheinander  $\bar{z}_{\lambda+1}, \bar{z}_\mu, \bar{z}_\lambda, \bar{z}_\mu$  — die Projektionen von  $z_i$  seien  $\bar{z}_i$  benannt — überschreite, und bilden die Relation

$$K_\nu(C) = \bar{C}_{\lambda+1}^{-1} C_\mu^\varepsilon C_\lambda C_\mu^{-\varepsilon} = 1,$$

wo  $\varepsilon = +1$  oder  $= -1$  ist, je nachdem die Richtung von  $\bar{z}_\mu$  in  $\bar{d}_\nu$  sich durch eine positive oder negative Drehung von einem Winkel kleiner als zwei rechte in die positive Richtung von  $\bar{z}_\lambda$  überführen läßt.

Wir müssen untersuchen, wie sich diese Relationen verändern, wenn wir die Operationen 1, 2 und 3 auf die Projektionen anwenden. Die Erzeugenden, die der abgeänderten Projektion zugeordnet werden, mögen durch Querstriche bezeichnet werden.

2. Op. 1. a) Es mögen die neuen Doppelpunkte durch Überschiebung von  $z_\mu$  über  $z_\lambda$  entstehen. Aus den beiden Relationen für die neuen Doppelpunkte, nämlich

$$\bar{C}_{\lambda+1}^{-1} \bar{C}_\mu^\varepsilon \bar{C}_\lambda \bar{C}_\mu^{-\varepsilon} = 1, \quad \bar{C}_{\lambda+2}^{-1} \bar{C}_\mu^{-\varepsilon} \bar{C}_{\lambda+1} \bar{C}_\mu^\varepsilon = 1 \quad (\mu = \mu \text{ oder } \mu + 2),$$

folgt  $\bar{C}_{\lambda+2} = \bar{C}_\lambda$ . Setzen wir nun

$$\bar{C}_i = \bar{C}_i \quad (i = 1, \dots, \lambda), \quad \bar{C}_{\lambda+1} = D, \quad \bar{C}_{k+2} = \bar{C}_k \quad (k = \lambda, \dots, n),$$

<sup>1)</sup> Diese Begriffe sind kurz in § 1, Nr. 1, 2 von „Knoten und Gruppen“ erläutert (S. 8).

so bestehen zwischen den  $\bar{C}_\nu$  dieselben Relationen wie zwischen den  $C_\nu$ , und außerdem zwischen  $\bar{C}_\nu$  und  $D$  die beiden Relationen

$$D^{-1} \bar{C}_\mu^{\epsilon} \bar{C}_\lambda \bar{C}_\mu^{-\epsilon} = 1, \quad \bar{C}_\lambda^{-1} \bar{C}_\mu^{-\epsilon} D \bar{C}_\mu^{\epsilon} = 1.$$

Die zweite ist eine Folgerelation der ersten.

Op. 2. a) Es möge sich in den Streckenzug  $z_\nu$  eine Schlinge legen. Dem neuen Doppelpunkte entspricht die Relation

$$\bar{C}_{\lambda+1}^{-1} \bar{C}_\lambda^{\epsilon} \bar{C}_\lambda \bar{C}_{\lambda+1}^{-\epsilon} = 1 \quad \text{oder} \quad \bar{C}_{\lambda+1}^{-1} \bar{C}_{\lambda+1}^{\epsilon} \bar{C}_\lambda \bar{C}_{\lambda+1}^{-\epsilon} = 1,$$

woraus  $\bar{C}_{\lambda+1} = \bar{C}_\lambda$  folgt. Setzen wir

$$\bar{C}_i = \bar{C}_i \quad (i = 1, \dots, \lambda), \quad \bar{C}_{k+1} = \bar{C}_k \quad (k = \lambda, \dots, n),$$

so bestehen zwischen den  $\bar{C}_\nu$  dieselben Relationen wie zwischen den  $C_\nu$ .

Op. 3. Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nach der Orientierung, welche die Streckenzüge des Dreiecks durch Orientierung des Knotens bekommen. Hier werde nur einer dieser Fälle herausgegriffen. Die Relationen der Ausgangsprojektion bezüglich der Doppelpunkte des Dreiecks seien

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & C_{\mu+1}^{-1} C_\lambda^{\epsilon_1} C_\mu \quad C_\lambda^{-\epsilon_1} = 1, \\ \text{(1) (b)} \quad & C_{\nu+1}^{-1} C_\mu^{\epsilon_2} C_\nu \quad C_\mu^{-\epsilon_2} = 1, \quad \epsilon_i = \pm 1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{(c)} \quad & C_{\nu+2}^{-1} C_\lambda^{\epsilon_3} C_{\nu+1} \quad C_\lambda^{-\epsilon_3} = 1. \end{aligned}$$

Dann sind die Relationen der  $\bar{C}$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \bar{C}_{\mu+1}^{-1} \bar{C}_\lambda^{\epsilon_1} \bar{C}_\mu \quad \bar{C}_\lambda^{-\epsilon_1} = 1, \\ \text{(2) (b)} \quad & \bar{C}_{\nu+1}^{-1} \bar{C}_\mu^{\epsilon_2} \bar{C}_\nu \quad \bar{C}_\mu^{-\epsilon_2} = 1, \\ \text{(c)} \quad & \bar{C}_{\nu+2}^{-1} \bar{C}_{\mu+1}^{\epsilon_3} \bar{C}_{\nu+1} \quad \bar{C}_{\mu+1}^{-\epsilon_3} = 1. \end{aligned}$$

Hierin muß  $\epsilon_3 = \epsilon_1$  sein (siehe Fig. 3). Eliminiere ich  $C_{\nu+1}$  mittels (1b) aus (1c) und  $\bar{C}_{\nu+1}$  mittels (2b) aus (2c) und ersetze in der zweiten so erhaltenen Relation  $\bar{C}_{\mu+1}^{\epsilon_2} \bar{C}_\lambda^{\epsilon_3}$  mittels (2a) durch  $\bar{C}_\lambda^{\epsilon_3} \bar{C}_\mu^{\epsilon_2}$ , so sind die Relationen zwischen den  $C_i$  und den  $\bar{C}_i$  ( $i \neq \nu + 1$ ) dieselben und  $C_{\nu+1}$ ,  $\bar{C}_{\nu+1}$  treten nur noch in der einen Relation (1b) bzw. (2b) auf.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die neuen Relationensysteme aus den ursprünglichen durch Erweiterungen und Reduktionen

erster und zweiter Art<sup>1)</sup> hervorgehen, d. h. durch Hinzunahme oder Fortlassen von Folgerelationen oder durch Hinzunahme oder Ausschaltung von Erzeugenden, die sich durch die übrigen auf Grund der Relationen ausdrücken lassen. Mithin sind die durch die Relationen definierten Gruppen alle miteinander identisch.

3. Die durch die Veränderung der Projektionen induzierten Reduktionen zweiter Art sind aber keineswegs die allgemeinsten. Vielmehr werden immer nur neue Erzeugende durch Gleichungen

$$(3) \quad C_\rho = C_\mu^\varepsilon C_\lambda C_\mu^{-\varepsilon} \quad \varepsilon = \pm 1$$

eingeführt. Jede Eigenschaft  $E(K_\nu; C)$  also, die bei Reduktionen und Erweiterungen erster Art und bei Reduktionen und Erweiterungen zweiter Art von der Form (3) erhalten bleibt, ist eine Knoteneigenschaft.

Aus dem besonderen Charakter der Relationen  $K_\nu$  und der Erweiterungen zweiter Art (3) folgt: *Alle erzeugenden  $C_\rho$  lassen sich als transformierte von irgendeiner unter ihnen*

$$C_\rho = L_\rho C_1 L_\rho^{-1}$$

darstellen. Ich erhalte also eine neue Knotengruppe, wenn ich zu den Relationen  $K_\nu = 1$  die Forderung  $C_1^\eta = 1$  hinzufüge.

4. Aus demselben Umstande kann man folgern, daß es zu jedem Elemente  $C_i$  eine topologisch ausgezeichnete Klasse von Elementen  $L_i^\varepsilon C_i^k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \varepsilon = \pm 1$ ) gibt, die mit  $C_i$  vertauschbar sind.

Sei etwa  $i = 1$ . Infolge der Relationen  $K_\nu = 1$  kann man  $C_2 = C_\alpha^\varepsilon C_1 C_\alpha^{-\varepsilon} = L_2 C_1 L_2^{-1}$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) setzen, dann diesen Wert in die Gleichung  $C_3^{-1} C_\beta^\eta C_2 C_\beta^{-\eta} = 1$  ( $\eta = \pm 1$ ) einsetzen und  $C_3 = C_\beta^\eta L_2 C_1 L_2^{-1} C_\beta^{-\eta} = L_3 C_1 L_3^{-1}$  setzen und so fortfahrend alle Elemente  $C_i$  in dieser ganz bestimmten Weise als Transformierte von  $C_1$  schreiben. Schließlich erhält man

$$C_n = L_n C_1 L_n^{-1}, \quad C_1 = L_1 C_1 L_1^{-1}.$$

$L_1$  ist also mit  $C_1$  vertauschbar.

Berechnet man bei einer anderen Projektion desselben Knotens die Relationen für die Erzeugenden  $\bar{C}_i$ , so erhält man nach Nr. 2 eine isomorphe Gruppe. Das eineindeutige Sichentsprechen zweier Elemente  $\bar{A}$  und  $A$  werde  $\bar{A} \sim A$  geschrieben. Wir beweisen nun

$$\bar{L}_1 \sim L_1 C_1^k.$$

$L_1$  läßt sich natürlich nach dem angegebenen Verfahren nur berechnen, wenn es ein  $C_1$  entsprechendes Element  $\bar{C}_1$  gibt.

Geht die zweite Projektion aus der ersten durch Operation 1a hervor, so kann  $\bar{L}_1$  zerlegt werden zu (vgl. Nr. 2, Operation 1)

$$\bar{L}_1 = \bar{M}_\lambda \bar{C}_\rho^{-\epsilon} \bar{C}_\rho^\epsilon \bar{L}_\lambda = \bar{M}_\lambda \bar{L}_\lambda \sim M_\lambda L_\lambda = L_1.$$

Bei Operation 2a kann  $\bar{L}_1$  zerlegt werden zu (vgl. Nr. 2, Operation 2)

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \bar{M}_\lambda \bar{C}_\lambda^\epsilon \bar{L}_\lambda = \bar{M}_\lambda \cdot \bar{L}_\lambda \bar{C}_1^\epsilon \bar{L}_\lambda^{-1} \cdot L_\lambda = M_\lambda \bar{L}_\lambda \bar{C}_1^\epsilon \\ &\sim M_\lambda L_\lambda C_1^\epsilon = L_1 C_1^\epsilon \end{aligned}$$

oder zu

$$\bar{L}_1 = \bar{M}_{\lambda+1} \bar{C}_{\lambda+1}^\epsilon \bar{L}_\lambda = \text{usw.}$$

Bei Operation 3 kann  $\bar{L}_1$  zerlegt werden zu (vgl. Nr. 2, Operation 3)

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \bar{M}_{\nu+1} \bar{C}_{\mu+1}^{\epsilon_1} \bar{C}_\lambda^{\epsilon_2} \bar{L}_\nu = \bar{M}_{\nu+1} \bar{C}_\lambda^{\epsilon_2} \bar{C}_\mu^{\epsilon_2} \bar{L}_\nu \\ &\sim M_{\nu+1} C_\lambda^{\epsilon_2} C_\mu^{\epsilon_2} L_\nu = L_1 \end{aligned}$$

oder ganz ähnlich. Die Bedeutung der  $\bar{M}$  und  $M$  ist wohl aus dem Zusammenhang zu entnehmen.

5. Wir haben in der formalen Kennzeichnung der Knoteninvarianten aber auch ein Hilfsmittel, um ohne Kenntnis der Gruppen Rechenprozesse, die *Gruppeninvarianten der Knotengruppe* liefern, auf diesem ganz elementaren Wege als *Knoteninvarianten* zu erkennen.

Als Beispiel hierfür sei folgende Rechenvorschrift angegeben. Es werde eine Matrix  $\mathfrak{M}$  mit  $n$  Zeilen und  $n$  Kolonnen gebildet, ihre Zeilen mögen den Doppelpunkten  $\bar{d}_\nu$ , ihre Kolonnen den Strecken  $z_\lambda$  zugeordnet sein, und zwar enthalte die Zeile von  $\bar{d}_\nu$  i. allg. lauter 0, nur in der Kolonne für  $z_\lambda$  und  $z_{\lambda+1}$  je eine 1, in der Kolonne für  $z_\mu$  eine  $-2$  (vgl. Nr. 1). Die von 1 verschiedenen Elementarteiler der Matrix  $\mathfrak{M}$  sind Knoteninvarianten.

Sehen wir zu, wie sich die Matrix bei Operation 1a verändert. Die neuen Überkreuzungsstellen mögen durch Überkreuzen von  $z_\mu$  über  $z_n$  entstehen. Die neue Matrix  $\mathfrak{M}$  stimmt alsdann in der 2-ten, 3-ten bis  $n$ -ten Zeile und der 1-ten, 2-ten bis  $n$ -ten Kolonne mit  $\mathfrak{M}$  überein. Die  $(n+1)$ -te Zeile enthält bei der  $z_\mu$  entsprechenden Kolonne eine  $-2$ , bei der  $z_n$  und  $z_{n+1}$  entsprechenden eine 1. Die  $(n+2)$ -te Zeile in der  $z_\mu$  entsprechenden Kolonne eine  $-2$ , bei der  $z_{n+1}$  und  $z_{n+2}$  ent-

sprechenden eine 1. Die erste Zeile enthält statt bei  $z_n$  in der Kolonne für  $z_{n+2}$  eine 1.

Subtrahiert man nun die  $(n+1)$ -te Zeile von der  $(n+2)$ -ten und die neue  $(n+2)$ -te Zeile von der 1-ten, so erhält man eine Matrix  $\mathfrak{M}^*$ , welche einerseits dieselben Elementarteiler wie  $\mathfrak{M}$  hat, andererseits aber aus  $\mathfrak{M}$  hervorgeht, indem man zwei Zeilen und zwei Kolonnen hinzufügt. Dabei enthalten die neuen Kolonnen nur je eine 1, in je einer der neuen Zeilen, sonst lauter 0. Daher sind die von 1 verschiedenen Elementarteiler von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}^*$  und mithin auch von  $\mathfrak{M}$  und  $\overline{\mathfrak{M}}$  dieselben.

Bei den anderen Operationen kommt man durch ganz ähnliche Überlegungen zum Ziel.

Man kann diese Elementarteiler leicht für bestimmte Typen von Knoten ausrechnen und so z. B. die alternierenden Torusknoten klassifizieren.

Die Elementarteiler von  $\mathfrak{M}$  sind die Poincaréschen Zahlen der Gruppe  $\mathfrak{R}_2$  (s. <sup>1)</sup> S. 25).