Die natürliche Geometrie.

Vier Vorträge [1])

Von J. Hjelmslev in Kopenhagen.

Erster Vortrag: Die natürliche Geometrie.

1. Aristoteles hat in seiner Metaphysik für den Unterschied zwischen wirklich existierenden Kurven und den abstrakten mathematischen Kurven folgenden Ausdruck gegeben:

„Sind doch die sinnlich wahrnehmbaren Linien nicht von derselben Art, wie diejenigen, von denen der Geometer redet; nichts sinnlich wahrnehmbares ist in der Weise gerade oder rund, und der sinnlich wahrnehmbare Kreis berührt das Lineal nicht bloß an einem Punkt, sondern es verhält sich so, wie Protagoras in seiner Widerlegung der Geometer sagt."

Es geht hieraus hervor, daß schon Protagoras die Tatsache hervorgehoben hat, daß die Tangente eines wirklichen Kreises nicht nur einer Punkt, sondern eine ganze Strecke mit dem Kreis gemein hat. Er benutzte diese Tatsache, um die Geometer zu widerlegen, ebenso, wie später die Empiriker in verschiedener Weise (vergl. die Schriften des Sextus Empiricus) es getan haben.

Der hier in Rede stehende Gegensatz zwischen den wahrnehmbaren und den abstrakten geometrischen Formen ist oft hervorgehoben worden. Daß ein wirklich gezeichneter Kreis nicht bloß einen Punkt, sondern vielmehr eine ganze Strecke mit seiner Tangente gemein hat, ist eine unbestreitbare Tatsache. Und daß zwei Kreise ein Bogenstück von 60^0 oder mehr gemein haben können, ohne daß die beiden Kreise zusammenfallen, wird jeder Zeichner bestätigen. Daß zwei gerade Linien in besonderen Fällen nicht nur einen Schnittpunkt haben, sondern längs einer ganzen gemeinsamen Strecke einander durchsetzen können, ist ebenfalls bekannt. Diesen Wahrnehmungen in der Ebene entsprechen ähnliche im Raume, die Kugeln und Ebenen betreffend. Sie widerstreiten in entscheidender Weise den gewöhnlich angenommenen Axiomen der euklidischen Geometrie. Kein Wunder, daß man sich schon im Altertum mit diesem merkwürdigen Unterschied der Wahrnehmung und der Spekulation beschäftigt hat.

2. Stolz, kühn und siegend schritt aber die abstrakte Geometrie der Platonischen ewigen Formen weiter ohne sich um die Angriffe der Empiriker zu kümmern. Selbstverständlich. Ihr Erfolg war so glänzend, daß sie sich nicht um diese Kleinigkeiten zu kümmern brauchte.

Die Angrifte des Protagoras, die Angriffe der Skeptiker sind ohne wissenschaftliche Bedeutung geblieben und haben höchstens ein nachsichtiges Lächeln der Sachkundigen erweckt.

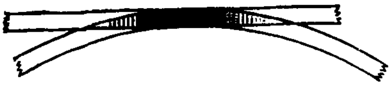
3. Und doch muß man sagen, daß diese Fragen es wohl verdienen könnten, nicht nur mit einem Lächeln abgelehnt zu werden.

Die Protagoreische Tatsache, daß die Tangente dem Kreis längs einer Strecke folgt und die anderen genannten ähnlichen Tatsachen, könnten doch wenigstens zu einem genauen Studium dieser Fragen auffordern. Wäre es

---

*) Gehalten im Juli 1922 in Hamburg auf Einladung des Mathematische Seminars der Hamburgischen Universität.

denn nicht möglich eine Geometrie aufzubauen, eine natürliche Geometrie, in der man diesen Tatsachen Rechnung trägt? Eine Geometrie der Wirklichkeit, in der die Dinge ihre natürlichen durch die Anschauung gegebenen Eigenschaften behalten und nicht erst in ganz andere Dinge verwandelt werden? Im ersten Augenblick wird man vielleicht sagen: Die genannten Abweichungen sind leicht zu erklären. Sie kommen daher, daß wir immer sehr grobe Darstellungen vor Augen haben, ziemlich dicke Bleistift- oder Kreidestreifen oder dergl. Wenn wir nur immer feinere Striche zeichnen, wird der Satz über den einzig existierenden Berührungspunkt richtiger und richtiger. Dem ist aber nicht so. Man sieht es, wenn man zwei Zeichnungen vergleicht (s. Fig. 1): ein dünner Kreis und ein ziemlich breiter Kreisring mit ungefähr demselben Radius wird gezeichnet und jedesmal eine Tangente (bez. dünne Gerade und breiter Parallelstreifen) angelegt. Es ist kein wesentlicher Unterschied zwischen den Längen der für Tangente und Kreis gemeinsame Elemente.



Figur 1

Es hat — wie wir später erfahren werden — überhaupt keine prinzipielle Bedeutung, ob man Punkte mit oder ohne Ausdehnung, Kurven mit oder ohne Breite betrachtet. Die Grenze der Oberfläche eines Papierblattes hat keine Breite. Die mit Bleistift oder Kreide gezeichneten Striche haben eine gewisse Breite.

4. Helmholtz ist wohl der erste, der ernsthaft den Gedanken einer wirklich begründeten sogenannten physischen Geometrie ausgesprochen hat. Wie aber eine derartige Begründung ausgestaltet werden sollte, lehrt er uns eigentlich nicht. Was er hierüber gesagt hat, scheint außerdem nicht für weitere Bearbeitung geeignet. Betreffend die Definition der geraden Linie spricht er z. B. folgendes aus (Wiss. Abh. II S. 649), indem er davon ausgeht, daß Messungen das wesentliche Fundament bilden müssen:

„Sobald wir nämlich eine passende Methode gefunden hätten, um zu bestimmen, ob die Entfernungen je zweier Punktepaare einander gleich (d. h. physisch gleichwertig) sind, würden wir auch den besonderen Fall unterscheiden können, wo drei Punkte a, b, c so liegen, daß außer b kein zweiter Punkt zu finden ist, der dieselben Entfernungen von a und c hätte wie b. Wir sagen in diesem Falle, daß die drei Punkte in gerader Linie liegen."

Die hier angegebene Bedingung ist aber gleichwertig mit derjenigen, daß zwei Kugeln (Kreise) mit Mittelpunkten a und c und Halbmessern ab und bc nur einen einzelnen Punkt gemein haben, was gerade, nach den vorher erwähnten Wahrnehmungen über Kugeln (und Kreise) unrichtig ist.

Die von Helmholtz aufgestellte Definition der geraden Linie widerstreitet also diesen Wahrnehmungen und ist sonach im voraus durch Protagoras widerlegt. Dasselbe gilt für die oft vorkommende Definition der geraden Linie als kürzester Weg. Auch diese Definition ist in der Wirklichkeitsgeometrie — aus demselben Grunde — unvollständig und ungenau.

Pasch hat sich die Aufgabe gestellt, eine Begründung der projektiven Geometrie in genauer Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu geben. Und er hat in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (1882) wertvolle Beiträge zur Lösung dieser Aufgabe gegeben. Er hat aber ein Axiomensystem aufgestellt, in Folge dessen zwei gerade Linien ohne Ausnahme höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Auch hier kann man deshalb sagen, daß das System als empirisches System im voraus durch Protagoras widerlegt ist.

Es ist übrigens klar, daß gerade die projektive Geometrie nicht zur Behandlung als Erfahrungsgeometrie geeignet ist. Die visuellen Eigenschaften kommen erst für ziemlich ausgedehnte Gegenstände in Betracht. Für Figuren der Zeichenebene kommen sie überhaupt nicht in Betracht. Ein Geradenstück von 3 cm kann durch visuelle Eigenschaften nicht als gerade Linie kontrolliert werden. Die Erfahrungs-Geometrie muß mit metrischen Grundlagen (Eigenschaften der festen Körper) anfangen.

F. Klein hat auch mehrmals den Gegensatz zwischen theoretischer Geometrie und Erfahrung hervorgehoben. Er hat interessante Bemerkungen an die Bezeichnungen Approximationsmathematik und Präzisionsmathematik angeknüpft und bespricht den Unterschied zwischen den wirklichen und den abstrakten Formen, ohne daß er doch auf eine systematische Behandlung der ganzen Frage eingeht.

Poincaré hat gemeint, daß die Erfahrung in eigentlichem Sinne keine Kontrolle der Geometrie geben könne, indem er den rein konventionellen Charakter der Axiome besonders streng betont hat.

Einstein hat neulich den Satz ausgesprochen: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. Ein schönes Spiel mit Worten, das inhaltlich nur aussagt, daß was bisher Mathematik genannt worden ist, nicht von der Wirklichkeit handelt. Viele Verfasser haben ähnliches gesagt. Wenn es sich von Dingen der Wirklichkeit handelt, ist jedenfalls nicht mehr die Rede von Mathematik. Gut. Nennen wir es dann etwas anderes. Der Name tut nichts zur Sache. Wir stellen uns hier die Aufgabe, eine Wissenschaft zu begründen, deren Ziel die genaue Beschreibung der wirklichen räumlichen Eigenschaften der Dinge der Außenwelt sein soll. Ob diese Wissenschaft Mathematik heißen soll oder nicht, ist uns ganz gleich. Wir wollen sie natürliche Geometrie nennen.

5. Um nun sofort begriffliche Schwierigkeiten zu vermeiden, wollen wir unsere Aufgabe folgendermaßen formulieren:

Unsere Aufgabe soll einstweilen prinzipiell dieselbe wie in der alten Geometrie sein. Wir stellen ein System von Axiomen auf. Wir verlangen aber, daß dieses System der Bedingung genügt, daß die Axiome durch genaue Untersuchungen (Experimente und Wahrnehmungen) kontrolliert und bestätigt werden können. Die Definitionen der Grundbegriffe: Ebene, gerade Linie, rechter Winkel usw. müssen so eingerichtet werden, daß sie eine bestimmte Herstellungstechnik der Dinge festsetzen, die eine Kontrolle für das Bestehen der Grundeigenschaften enthält. Diese Kontrolle wirklich auszuführen, ist Sache der Wahrnehmung und Erfahrung. Zur Definition der Ebene benutzen wir die auf Leibniz zurückgehende Eigenschaft, daß kurz ausgedrückt die Ebene in sich selbst nach allen Seiten hin verschoben werden kann, und daß sie den Raum in zwei gleiche Teile zerlegt, was in der Praxis unmittelbar zur Herstellung von ebenen Flächen (Richtplatten, Normalebenen) verwendet wird.[1]) Und die gerade Linie wird ganz entsprechend definiert (als Kante eines Normalkeils). Es wird dabei als selbstverständlich vorausgesetzt, daß alle Ebenen in einander verschoben werden können und ebenso für die geraden Linien. Hieran wird noch die Herstellung von rechten Winkeln mit Hilfe einer Normalecke geknüpft, und es wird angenommen, daß alle rechte Winkel einander kongruent sind.

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: Die Geometrie der Wirklichkeit. Acta mathematica 40. S. 38.

6. Alle Axiome müssen empirische Wahrheiten aussagen, oder jedenfalls: Kein Axiom darf empirisch unwahres aussagen.

Man darf also nicht annehmen, daß zwei Punkte eine und nur eine Gerade bestimmen. Sondern etwa: Zwei gerade Linien können einen und nur einen Punkt gemein haben, in welchem sie einander durchschneiden. In besonderen Fällen (wenn sie einen kleinen Winkel bilden) können sie aber einander längs einer Strecke durchdringen.

Zwei Punkte haben eine bestimmte Verbindungsstrecke. Diese gehört jeder Geraden an, welche durch die beiden Punkte hindurchgeht.

Ganz kurz und übersichtlich geben wir hier den wesentlichen Inhalt der übrigen Voraussetzungen für unsere Geometrie der Ebene in folgenden Grundsätzen:

Durch jeden Punkt läßt sich eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden ziehen.

Rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Katheten sind kongruent.

Es gibt ein großes Viereck mit lauter rechten Winkeln (etwa die Wandtafel), innerhalb dessen unsere ganze Geometrie verläuft.

Bezüglich der Möglichkeit gewisser Lageverschiebungen in der Ebene fügen wir noch hinzu:

Eine gerade Linie mit einer auf ihr liegenden Strecke ist umkehrbar.

Ein Kreis mit einem auf ihm liegenden Bogen ist umkehrbar.

Hierzu kommen selbstverständlich einige Axiome der Anordnung.

Uebrigens sei bemerkt, daß die hier gegebene wörtliche Form der Grundlagen nicht wesentlich ist. Wir denken hier garnicht daran, Dialektik zu treiben. Ob unsere Axiome von einander logisch unabhängig sind, kümmert uns nicht. Es handelt sich für uns nur von dem Gesamtinhalt der Voraussetzungen.

7. Es läßt sich nun beweisen:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse für gewöhnlich größer als jede Kathete. In besonderen Fällen ist die Hypotenuse der einen Kathete gleich.

Dieser Satz enthält die Protagoreische Tatsache über die Kreistangente und kann natürlich auch als Axiom aufgestellt werden, da er durch Probieren mit dem Zirkel leicht bestätigt wird.

8. Auf Grund dieser Axiome, die alle kontrollierbar sind, lassen sich nun in einfacher Weise die Sätze der Euklidischen Geometrie ableiten, indem man doch immer die für ihre empirische Wahrheit notwendigen beschränkenden Bedingungen mit erhält.

Um zu erläutern, wie die Sätze unserer Geometrie sich gestalten werden, geben wir einige Beispiele. Wie steht es z. B. mit dem Satze von der Winkelsumme im Dreieck?

Durch drei Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, ist ein Dreieck $A\,B\,C$ bestimmt. Die Seiten des Dreiecks sind die Strecken $A\,B$, $A\,C$, $A\,C$. Sie sind eindeutig bestimmt. Die geraden Linien $A\,B$, $A\,C$, $A\,C$, die diese Strecken enthalten, sind aber nicht eindeutig bestimmt. Sie können unter Berücksichtigung der vorliegenden Möglichkeiten beliebig festgelegt werden, und danach sind die Winkel des Dreiecks bestimmt. Diese Winkel haben dann die Summe von zwei Rechten. Also kurz ausgedrückt: Wenn die Richtungen der Seiten des Dreiecks festgelegt sind, machen die hierdurch bestimmten Winkel des Dreiecks immer zwei Rechte aus.

Der erste Satz vom gleichschenkligen Dreieck: Wenn in einem Dreieck ABC die beiden Seiten AB und AC gleich sind, sind auch die Winkel B und C gleich groß, wird so zu verstehen sein: Wenn die Richtungen der Seiten AB und AC festgelegt sind, kann man die Richtung von BC so festlegen, daß die beiden Winkel gleich sind.

Der zweite Satz vom gleichschenkligen Dreieck wird folgendermaßen ausgedrückt:

Wenn in einem Dreieck ABC zwei Winkel B und C gleich sind, und die geraden Linien AC und BC einen eindeutigen Schnittpunkt haben, so sind auch die Seiten AC und BC gleich. Haben die Geraden AC und BC mehrere gemeinsame Punkte, läßt sich immer ein Punkt C unter diesen herausnehmen derart, daß AC und BC gleich werden.

9. Die Euklidische Lehre vom Flächeninhalt kommt auch für unsere Geometrie in Betracht, und der pythagoreische Lehrsatz in der flächeninhaltlichen Bedeutung wird sonach Gültigkeit haben. Die ganze geometrische Algebra der Griechen wird somit auch aufgenommen werden können.

10. Die hier geschilderte synthetische Elementargeometrie ist in genauem Anschluß an die Wahrnehmung entstanden Inhaltlich unterscheidet sie sich von der Euklidischen Geometrie (in der beschränkten Ebene) nur dadurch, daß das gewöhnlich an die Spitze gestellte Axiom über die eindeutige Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte in Frage gestellt worden ist. Die hierdurch gegebene Beschränkung der Euklidischen Voraussetzungen hat wie wir gesehen haben, entsprechende Beschränkungen der Sätze nach sich gezogen. Und gerade diese Beschränkungen geben unserer Geometrie den Wahrnehmungen gegenüber das wesentliche Gepräge der Wahrheit.

Die übrigen Axiome haben, wie wir später sehen werden, der Wirklichkeit gegenüber eine zu scharfe Form. Es bietet aber gewisse praktische Vorteile, die scharfe Formulierung zu behalten. Sie gibt eine gewisse Einfachheit der Beschreibung und das Axiomensystem wird gerade in dieser Form von großem Nutzen sein als Wegweiser auf dem Wege zur natürlichen Geometrie.[2])

Eine nähere Besprechung des aufgestellten Systems folgt in meinem zweiten Vortrag.

11 Viel schwieriger gestaltet sich die Aufgabe, wenn man eine Begründung der Proportionenlehre, eine Theorie der Messung aufzustellen versucht. Es zeigen sich hier viele logische Schwierigkeiten.

In der Welt der Erfahrung steht man bei manchen Entscheidungen nicht nur zwei Möglichkeiten gegenüber: Das Ja, das Nein, sondern auch einer dritten Möglichkeit: Das in Frage gestellte. Die Grenzen dieser Möglichkeiten sind nicht scharf, oder vielmehr die Grenzen existieren nicht. Ich erinnere an das bekannte Beispiel:

Existiert ein größtes Gewicht, das ich heben kann? oder: Existiert ein kleinstes Gewicht, das ich nicht heben kann?

Was der Logiker antwortet, weiß ich nicht. Wahrscheinlich wird er die Frage ablehnen mit der Bemerkung, daß „ich“ nicht definiert bin.

Die Wahrheit ist, daß ich 1 kg, 2 kg, 3 kg usw. gewiße kleine Anzahlen von kg heben kann, und daß ich 5000 kg sicher nicht heben kann. Gewisse

---

[2]) Nach den hier dargelegten Prinzipien habe ich ein Elementarbuch herausgegeben (Elementær Geometri, København 1916, zweite Aufl. 1921), das in mehreren Schulen in Dänemark eingeführt ist.

kleine Zahlen geben ein sicheres Ja, gewisse große Zahlen ein sicheres Nein. Die Grenze ist nicht scharf oder vielmehr es gibt keine Grenze.

12. Aehnliche Dinge kommen auch in der Wirklichkeitsgeometrie vor. Als Beispiel nehmen wir eine fundamentale Frage der gewöhnlichen Geometrie, nämlich die folgende:

Zwischen zwei Punkte A und B einer Geraden läßt sich immer ein dritter Punkt einschalten.

Zu dieser Tatsache macht Pasch die folgende interessante Bemerkung: Aber bei wiederholter Anwendung dieses Satzes verliert die Figur ihre ursprüngliche Beschaffenheit. Sind A und B Punkte der ursprünglichen Figur und wird in der Geraden AB ein Punkt C zwischen A und B eingeschaltet, hierauf C_1 zwischen A und C, C_2 zwischen A und C_1, usw., so kann man immer mehr in die Nähe des Punktes A geraten und muß dann schließlich auf weitere Einschaltungen verzichten (Vorl. S. 18). Später fügt Pasch die folgende Erwägung hinzu (S. 188):

„daß man in jedem einzelnen Falle eine Strecke MN anzugeben vermag, innerhalb deren einzelne Punkte nicht mehr voneinander unterschieden werden, und daß von jeder kongruenten oder kleineren Strecke dasselbe gilt.“

Es ist nicht klar, was diese Erwägung bedeutet, und es ist tatsächlich so, daß man sie mit den übrigen Axiomen und Entwicklungen bei Pasch nicht verträglich findet.

Die Bemerkungen von Pasch sind aber an sich sehr interessant. Sie enthalten die berechtigte allgemeine Forderung, auch für die Anwendung der Logik eine Beschränkung vorzuschreiben in der Richtung der von philosophischer Seite (Dühring, Renouvier) hervorgehobene Forderung der Endlichkeit. (Das Gesetz der bestimmten Anzahl, la loi du nombre).

Das Axiom an sich wird man annehmen dürfen, seine rein logischen Konsequenzen nicht. Denn die Konsequenz ist: Zwischen zwei Punkte B und B lassen sich unendlich viele Punkte einschalten und das ist für die Erfahrung sinnlos.

Man kann dann zwei Wege gehen:

Das Axiom wird angenommen, aber mit der Beschränkung, daß reine logische Deduktionen auf Grund dieses Axioms nicht ohne Kontrolle angenommen werden;

oder:

Das Axiom wird nur mit gewissen Nebenbedingungen angenommen, die nicht näher beschrieben werden, die aber der Erfahrung und der Wahrnehmung anheimgestellt sind. Dieses so bedingt formulierte Axiom ist dadurch vor dem Mißbrauch durch die logische Deduktion gesichert.

13. Wir nehmen ein anderes Beispiel. Man sagt: Jede Strecke läßt sich in zwei gleiche Teile teilen. Man nimmt diesen Satz an als Axiom, oder man beweist den Satz. Man ist von seiner unbedingten Gültigkeit überzeugt. Wir denken uns ein System, in welchem der Satz als Axiom angenommen ist. Man deduziert: Die Hälfte der Strecke ist wieder eine Strecke, also auch halbierbar usw. Also: Die Strecke ist unbegrenzt teilbar. Fragt man die Erfahrung, ob sie dieses Resultat anerkennen will, so muß sie es verneinen. Man kann vielleicht die Strecke (sagen wir z. B. von 10 cm Länge) in 2, 2^2, 2^3, ... 2^9, aber jedenfalls nicht in 2^{1000} oder mehr gleiche Teile zerlegen. Man hat dann auch hier zwei Möglichkeiten:

Das Axiom kann angenommen werden mit beschränkter Anwendung der gewöhnlichen Logik,
oder:

Das Axiom kann angenommen werden mit einer Beschränkung, die der Erfahrung und Wahrnehmung angehört.

Den ersten Weg wird man wahrscheinlich nicht wählen. Denn die Menschen sind nicht Herren im Hause des Denkens. Sie arbeiten als Sklaven ihrer ursprünglichen Dienerin, der Logik.

Der zweite Weg scheint aber beschreitbar. Wir versuchen diesem Weg zu folgen, und es wird sich zeigen, daß wir unser Ziel erreichen werden.

14. Mit diesen Bemerkungen habe ich nun den nächsten Schritt zur Begründung der natürlichen Geometrie vorbereitet, die Aufstellung des Axioms:

Keine Strecke ist unbegrenzt teilbar.

Jede hinreichend große Strecke läßt sich in eine gewisse Anzahl gleich großer Strecken zerlegen. Diese Anzahl kann gewisse kleine Zahlenwerte 2, 3, 4 .... annehmen, aber nicht beliebig große Werte. Es gibt keine bestimmte Grenze zwischen der ersten und der zweiten Gruppe von Anzahlen.

15. Wir suchen die nächsten Konsequenzen dieses Axioms festzustellen. Ein Maßstab von z. B. 1 m ist in 1000 gleiche Teile geteilt. Jeder Teil werde mit E bezeichnet. Ein anderer Maßstab von der Länge 999 E wird gleichfalls in 1000 gleiche Teile geteilt. Wir bezeichnen diese Teile mit E_1. Vergleicht man die beiden Maßstäbe, wird man finden:

$$E = E_1,\ 2E = 2E_1,\ \ldots.\ 40E = 40E_1\ \ldots.\ \text{aber}\ \ldots.\ 500E \neq 500E_1$$

Die gewöhnlichen Größenaxiome gelten also nicht mehr.

Es ist bekannt, wie man mit Hilfe eines Nonius feine Messungen ausführt. Das Prinzip ist, daß man zwei verschiedene Maßstäbe aneinanderlegt, die mit solchen Einteilungen versehen sind, daß man bei beliebigem Nebeneinanderlegen der Maßstäbe immer gemeinsame Teilstriche der beiden Maßstäbe findet. Soll eine Strecke AB gemessen werden, legt man den ersten Maßstab mit seinem Nullpunkt auf den Punkt A, den anderen Maßstab mit seinem Nullpunkt auf B und sucht den nächsten gemeinsamen Teilstrich C in der Verlängerung von AB auf. Man setzt dann

$$AB = AC - BC = pE - qE_1,$$

indem die Einheiten der Maßstäbe wie oben mit E und E_1 bezeichnet werden. Das Prinzip ist also die Darstellung der Strecke als Differenz von zwei Strecken, die eine durch eine ganze Anzahl von Einheiten des ersten Maßstabs, die andere durch eine ganze Anzahl von Einheiten des anderen Maßstabs.

Wenn wir nun z. B. die vorher genannten beiden Maßstäbe anwenden, wie wird es dann mit unserer Nonienablesung gehen? Es wird sich zeigen, daß der Strich C zumindest an 40 verschiedenen Stellen angenommen werden kann. Man wird für die Strecke AB vielleicht folgende Ablesungen haben (in Millimetern ausgedrückt):

122,470
122,471

122,509
122,510

Wir haben also für jede Strecke nicht eine eindeutig bestimmte Zahl, die allein richtig, wir haben ein ganzes Intervall von Zahlen, die alle richtig sind. Zahl bedeutet hierbei eine Zahl mit 3 Dezimalen, andere kommen bei dieser Nonienablesung nicht in Betracht. Eine bestimmte dieser Zahlen können wir auswählen und nennen dann diese Zahl eine Fixierungszahl der Strecke AB. Wir schreiben z. B.:

$$AB \backsim 122{,}473$$

(lies: AB ist fixiert durch 122,473, oder AB hat die Fixierungszahl 122,473).

16. Es soll nun unsere Aufgabe sein, eine Geometrie auf Grund solcher Fixierungszahlen aufzustellen. Insbesondere wollen wir sofort die Aufmerksamkeit auf die fundamentale Aufgabe unserer Geometrie lenken, einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes in folgender Form:

In einem rechtwinkligen Dreieck lassen sich die Seiten so durch Zahlen fixieren, daß das Quadrat der Hypotenusenzahl der Summe der Quadrate der beiden Kathetenzahlen gleich wird.

17. Die Mehrdeutigkeit der Fixierungszahl liegt natürlich nicht an der Unvollkommenheit der Meßmethode, sondern es hat überhaupt keinen Sinn einer Strecke *eine* bestimmte, allein richtige Maßzahl zuzuordnen. Die Mehrdeutigkeit liegt also in der Natur der Sache.

Wenn zwei Strecken eine gemeinsame Fixierungszahl haben, wird man die Strecken kongruent nennen. Es stellt sich aber nun hier eine große Schwierigkeit ein. Aus $A = B$, $A = C$, kann man offenbar nicht schließen $B = C$. Es wäre dann leicht zu beweisen, daß zwei Strecken von 122 mm und 123 mm einander gleich sind, denn

$$122{,}000 = 122{,}001 = \ldots\ldots = 122{,}999 = 123{,}000,$$

und man würde so jedes falsche Resultat herleiten können. Wie man diese Schwierigkeit beseitigen kann, wird in meinem dritten Vortrag besprochen.

Zweiter Vortrag: Die gerade Linie und der rechte Winkel.

1. In meinem ersten Vortrage habe ich ein Axiomensystem skizziert, dessen wesentliche Abweichung von dem gewöhnlichen darin besteht, daß *die gerade Linie* nicht durch zwei Punkte als eindeutig bestimmt vorausgesetzt wird. Was übrigens dieses Axiomensystem charakterisiert, ist, daß *der rechte Winkel* ganz im Vordergrund steht. Die Existenz und Herstellung des rechten Winkels ist tatsächlich für die Erfahrungsgeometrie etwas Fundamentales. Der rechte Winkel muß hier ein unmittelbar Gegebenes sein. Die Eigenschaften des rechten Winkels z. B. die, daß alle rechte Winkel gleich sind, beweist man wohl in der gewöhnlichen Geometrie nach *Hilbert* auf Grund anderer weit komplizierterer Axiome. Für die Geometrie der Wirklichkeit wäre das unnatürlich. Hier muß diese Eigenschaft unmittelbar gegeben sein.

Man kann sagen, daß wir in unserem System die Bestimmung der geraden Linie durch zwei Punkte als ungenau erkennen. Und statt dieser ziehen wir die genauere Bestimmung der geraden Linie vor, nämlich durch die Bedingung, daß sie durch einen Punkt hindurchgeht und zu einer (vollständig gegebenen) Geraden senkrecht steht.

2. Für die Geometrie der Zeichenebene sind die gerade Linie und der rechte Winkel durch Lineal (Normalkeil) und Zeichendreieck (Normalecke) herzustellen. Das Eichen dieser Instrumente geschieht im Anschluß an die aufgestellten Grundeigenschaften, welche in den Definitionen enthalten sind. Die Lagenverschiebungen der Instrumente bedeuten die Manifestierung der Kongruenzaxiome. Und hierzu kommt nun noch die Existenz der rechteckigen Wandtafel oder des Zeichenpapiers, innerhalb dessen die ganze Geometrie verläuft. Daß dieses Rechteck (in zweifacher Weise) umkehrbar ist, läßt sich dann leicht beweisen, ebenso daß (nach L a m b e r t) noch andere Rechtecke mit beliebig kleineren Dimensionen existieren. Parallele Linien werden hier natürlich definiert als gerade Linien, die senkrecht zu einer und derselben Linie gezogen sind (oder wenn man will, als Gegenseiten eines Rechtecks). Die Lehre von äquidistanten Parallelen liegt dann auf der Hand. Und man kann dann auch leicht die wichtige Einsicht gewinnen, daß wenn eine Reihe von äquidistanten Parallelen mit einer anderen Reihe von äquidistanten Parallelen, die zu der ersten Reihe senkrecht steht, zum Schnitt gebracht wird, daß dann die Schnittpunkte entsprechend numerierter Geraden auf einer geraden Linien liegen. Der Satz wird mit Hilfe des Umstandes bewiesen, daß man das ganze System von Schnittpunkten in sich überführen kann, erstens derart, daß jeder Punkt in den folgenden überführt wird, und zweitens derart, daß der erste und der letzte Punkt vertauscht wird. Damit sind die Grundzüge des Beweises fertig.

Wir gehen nun dazu über, einige wichtige logische Prinzipienfragen zu besprechen.

3. Wir haben als Tatsache hingestellt, daß zwei gerade Linien längs einer Strecke einander durchschneiden können. Kann man nun bestimmte Endpunkte für diese Strecke angeben? Natürlich nicht. Man steht hier bezüglich der Frage des Zusammenfallens von Punkten den gewöhnlichen Möglichkeiten gegenüber: Dem Ja, dem Nein, dem Fraglichen. Das eine Mal wird man sagen, daß sie sicher den beiden Geraden angehören, das andere Mal, daß sie nur einer der Geraden angehören. Für eine dritte Kategorie kommt das Fragliche in Betracht. Grenzen zwischen den verschiedenen Kategorien gibt es nicht.

In Folge dessen muß man mit Schlüssen über das Zusammenfallen von Punkten der beiden Geraden sehr vorsichtig vorgehen. Es ist tatsächlich so, daß hierher gehörige Fragen, ob gewisse Punkte zusammenfallen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, ob zwei Gerade einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben, nicht durch u n s e r e A x i o m e entschieden werden, können, sondern sind auf die W a h r n e h m u n g hingewiesen. Alles was solche Fragen betrifft, darf man somit nicht durch Schlüsse allein entscheiden. Wir stehen also hier der Tatsache gegenüber, daß wir außer den Axiomen, und Schlüssen auf Grund dieser, noch ein Material haben, dem gelegentlich auch eine Rolle zukommt, das nicht axiomatisierte Erfahrungsmaterial, das also eine bisher nicht bearbeitete Beigabe zum Axiomensystem bildet. Und gerade diesen Charakter müßte man für das A x i o m e n s y s t e m d e r E r f a h r u n g erwarten, während das A x i o m e n s y s t e m d e r W i l l k ü r die Axiome allein und sonst nichts zu berücksichtigen hat.

Es werden hier die meisten meiner Zuhörer denken: Ja, aber dann muß man doch das Axiomensystem der Willkür bei weitem vorziehen. Die volle Sicherheit ist doch besser, als die immer zutage tretende Unsicherheit. Es scheint uns freilich mehr zusagend zu sein. Aber bedenken wir einmal den wahren Zusammenhang.

Bei Anwendung des Axiomensystems der Willkür hat man volle Sicherheit. Für was? Für die Schlüsse? Die reine formal-logische Behandlung? Ja, gewiß. Aber interessieren uns denn nicht auch die Resultate? Die inhaltlichen Resultate an sich? Man wird dies doch vielleicht zugeben. Und welche Sicherheit haben wir bezüglich der Resultate? Auch hier eine vollkommene Sicherheit? Gewiß. Eine vollkommene Sicherheit. Weshalb? Weil die Axiome als vollkommen sicher angenommen sind und weil man stillschweigend annimmt, daß das formale Schließen nicht von Richtigem zu Unrichtigem führen kann. Das bedeutet aber tatsächlich nichts, wenn die Axiome nach Willkür aufgestellt sind. Und wenn auch die Axiome in einer solchen Form dargestellt werden, daß sie jedes für sich bestimmten Gruppen von Erfahrungen entsprechen, so wird doch das nichts helfen. Die Resultate an sich haben der Wirklichkeit gegenüber höchstens eine gewisse Wahrscheinlichkeit und nichts mehr.

Wir können also den vollen Glauben an die Resultate nicht festhalten. Was bleibt dann übrig? Die logische Behandlung. Ja, wird man sagen, diese ist auch so reizvoll, daß wir an ihr genug haben. Gewiß, sie ist reizvoll, sehr reizvoll. Aber wir müssen bedenken, worin die logische Sicherheit besteht.

Die Axiome sind nach Willkür aufgestellt. Wie kann man wissen, daß was wir tun überhaupt einen Sinn hat? Auch nur einen logischen Sinn! Wir begegnen hier der Frage der Widerspruchsfreiheit. Wie kann man sich überzeugen, ob ein System widerspruchsfrei sei? Wenn ich einmal entdecken würde, daß ich durch Schlüsse von meinen Axiomen her auf einen Widerspruch komme, so würde das sonst so schöne logische Spiel ganz zusammenfallen. Kann ich denn im voraus wissen, daß mein nach Willkür aufgestellte Axiomensystem widerspruchsfrei ist? Gewiß nicht. Wo ist denn die vollkommene Sicherheit, derzufolge ich mein System so hoch gerühmt habe? Sie existiert leider nicht. Gelingt es uns aber einmal unsere Schlüsse so weit fortzusetzen, daß wir einen genügend umfassenden Blick über die Tragweite der aufgestellten Axiome haben, daß wir ein anschauliches Beispiel aufweisen können an welches sich unser ganzes System anwenden läßt, so haben wir eine befriedigende Sicherheit gewonnen, aber nur mit der letzten entscheidenden Hilfe der Erfahrung. Während des Aufbaues hat man aber gar keine Sicherheit dafür, daß das bisher Gewonnene überhaupt einen Sinn hat.

Ein Axiomensystem der Erfahrung hingegen gibt unmittelbare Sicherheit bezüglich der Axiome selbst, aber keine unmittelbare Sicherheit, nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit für ihre logischen Konsequenzen, wegen deren man in jedem Augenblick vor der Möglichkeit stehen kann, daß das nicht bearbeitete (nicht axiomatisierte) Nebenmaterial der Erfahrung von wesentlicher Bedeutung werden kann. Man arbeitet aber weiter. Kommt man auf einen Widerspruch, so versucht man das Nebenmaterial zu bearbeiten, bis alles wieder in dialektische Ordnung gebracht ist. Schließlich wird es vielleicht gelingen, einen gewissen Ueberblick zu gewinnen derart, daß alle wesentliche Momente für die Axiomatisierung des in Rede stehenden Erfahrungsbereichs hervorgetreten sind, und dann kann man ein endgiltiges wörtliches Axiomensystem aufstellen. Es wird sich zeigen, daß dies für die Elementargeometrie gelingen wird.

Man ersieht, daß das Axiomensystem der Erfahrung in Wirklichkeit nicht weniger sicher vor uns stehen wird, als das Axiomensystem der Willkür. Im Gegenteil. Im System der Erfahrung hat man die Sicherheit der Erfahrung.

Zeigt sich ein Widerspruch, während man versucht das System aufzubauen, so ist es kein inhaltlicher Widerspruch, sondern nur ein wörtlicher, und dieser läßt sich beseitigen. Im System der Willkür ist es anders. Zeigt sich hier ein Widerspruch, so ist er natürlich auch ein wörtlicher — von Inhalt ist ja überhaupt nicht die Rede — aber dieser Widerspruch läßt sich überhaupt nicht beseitigen.

Im System der Erfahrung bedeutet die Frage der Widerspruchsfreiheit nur eine Frage von der Ordnung des sprachlichen Ausdruckes. Im System der Willkür bedeutet sie Sinn oder Unsinn

Man wird vielleicht sagen, daß man im System der Erfahrung immer den Teufel des Zweifels zu bekämpfen hat. Im System der Willkür existiert dieser Teufel garnicht. Das heißt, man behauptet, daß er nicht existiere. Man vergißt aber, daß dieses nur eine Behauptung ist. Man glaubt, daß man so den Teufel austreiben kann. Und man entdeckt, daß er in Gestalt der Frage der Widerspruchsfreiheit viel ärger zurückkehrt. Wirkliche Befreiung kann schließlich doch nur durch die Erfahrung erzielt werden.

4. Nach dieser advokatorischen Einleitung werden meine Zuhörer gewiß denken, daß es ziemlich schlecht steht um der Widerspruchsfreiheit meines Axiomensystems. Dies ist allerdings der Fall. Es ist tatsächlich mehrmals bewiesen worden, daß 2 gerade Linien höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. Der einzige von diesen Beweisen, der den Anspruch hat ernst genommen zu werden, ist der bekannte Beweis von Proklos, den man in seinem Kommentar zum 1. Buche von Euklides findet. Es kommt darauf an zu beweisen, daß die Verlängerung einer Strecke eindeutig ist. Es sei AB die vorgelegte Strecke. Wir schlagen einen Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BA. Gäbe es nun zwei Verlängerungen der Strecke AB über B hinaus, denn müßten diese Verlängerungen den Kreis in zwei Punkten C und C_1 treffen, und da sowohl ABC wie ABC_1 ein Durchmesser des Kreises ist, würde man zwei Halbkreise haben derart, daß der eine ein Teil des andern ist, was den Größenaxiomen widerspricht.

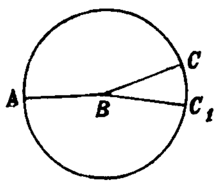


Fig. 2.

Der Beweis stützt sich auf die allgemeinen Größenaxiome, welche auf die Kreisfläche (oder Kreisperipherie) angewandt werden. Man kann sagen, daß dies etwas verwickelt ist, aber keineswegs vom Gesichtspunkte der Erfahrung. Der genannte Beweis ist jedoch auf diesen Grundlagen einwandfrei.

5. Was hat aber nun Proklos bewiesen? Wenn zwei Geraden eine Strecke AB gemein haben, so haben sie auch eine gleich große Strecke BC in der Verlängerung von AB gemein. Will man logisch streng vorgehen, muß man hinzufügen: Mit Hilfe des Eudoxischen (Archimedischen) Axioms folgt, daß die geraden Linien ganz zusammenfallen müssen. Für Nicht-Archimedische (Nicht-Eudoxische) Geometrien ist also durch Proklos nichts bewiesen. Wohl aber für die Eudoxische Geometrie — und das Eudoxische Axiom muß die Erfahrung natürlich annehmen (wenn die geraden Linien 1 mm gemein haben, werden sie eine beliebige Anzahl mm gemein haben, d. h. sie fallen zusammen). Hier hat also Proklos uns widerlegt. Nun aber erinnere ich daran, daß die Punkte C und C_1 bei Proklos entweder identisch oder verschieden sind. Bei uns haben wir eine dritte Möglichkeit: es ist fraglich ob C und C_1 verschieden sind. Nehmen wir diese Möglichkeit an so gilt der Beweis nicht. Und selbst wenn wir das erste Mal finden, daß C und C_1

zusammenfallen, stehen wir das nächste oder dritte Mal (bei fortgesetzter Anwendung) oder später diesem Fall gegenüber, und dann kommt man nicht weiter. Unsere Antwort auf die Widerlegung von Proklos ist die, daß Proklos bei seinem Beweis (erweitert mit Hilfe des Eudoxischen Axioms) voraussetzen muß, daß die geraden Linien eine scharf begrenzte Strecke gemein haben. Das haben wir aber nicht verlangt. Wir haben eben auch das fragliche Zusammenfallen von Punkten. Hierdurch schlüpfen wir also doch aus dieser Schwierigkeit heraus.

6. Nun! Lernen wir auch einmal etwas von Proklos!

Wir benutzen die Gelegenheit, da wir doch einer logischen Schwierigkeit begegnet sind, um näher darauf einzugehen, wie man eine Bedingung aufstellen kann dafür, daß ein Punkt P auf einer Geraden g liegt. Man kann diese Bedingung so aussprechen: Wenn man mit dem Punkt als Zentrum und mit einem großen Radius einen Kreis schlägt, dann soll die gerade Linie g den Kreis halbieren (wir denken hier an die Peripherie). Angenommen jetzt, wir haben zwei Gerade. Wenn ein Punkt auf beiden liegt und wir einen Kreis mit großem Radius um den Punkt schlagen, sollen, so setzen wir fest, auf diesem Kreis zwischen den beiden Geraden gleich lange Bogen abgeschnitten werden. Versucht man das zu benutzen, so zeigt es sich, daß diese Kontrolle nicht für alle Punkte die anscheinend auf den beiden Geraden liegen erfüllt wird, sondern wir bekommen eine zentrale Strecke, die für die beiden Geraden als gemeinsame Strecke gelten soll, die aber kleiner als die scheinbar gemeinsame Strecke ist.

Wenn wir dieses Kriterium für gemeinsame Punkte zweier Geraden annehmen, so wird ersichtlich, daß nun der Beweis des Proklos sich nicht durchführen läßt. Mit Hinweis auf die früheren Bezeichnungen kann man sagen: Wenn A und B im engeren Sinne (d. h. durch das aufgestellte Kriterium kontrollierte) gemeinsame Punkte der beiden Geraden sind, können C und C_1 im weiteren Sinne zusammenfallen, dann kommt man also mit dem Beweis nicht durch.

7. Wir haben bemerkt, daß der Beweis des Proklos an die Anwendung des Eudoxischen (Archimedischen) Axioms geknüpft ist. Für Nicht-Archimedische Geometrien wird er also durchaus nicht in Betracht kommen. Es ist nun für unsere Untersuchungen von großem Interesse, eine Nicht-Archimedische Geometrie aufzustellen, in welcher zwei Gerade einen „langen" Durchschnitt haben können. Dies geschieht einfach dadurch, daß man eine Koordinatengeometrie konstruiert, wo die Koordinaten duale Zahlen sind, von der Form $a + \varepsilon b$, wo a und b reelle Zahlen bezeichnen, und ε ein Buchstabe ist, mit welchem so gerechnet wird, daß $\varepsilon^2=0$.

Für diese Zahlen gilt, daß ein Produkt Null werden kann, wenn ein Faktor null ist, oder beide Faktoren ε-Zahlen sind. Die Division ist im allgemeinen möglich und eindeutig; nur wenn der Divisor eine ε-Zahl (oder Null) ist, wird sie unmöglich oder unbestimmt (wenn der Dividend auch eine ε-Zahl ist). Eine gerade Linie wird definiert durch eine Gleichung ersten Grades

$$Ax + By + C = 0$$

wo A, B, C duale Zahlen sind mit der Bedingung, daß A und B nicht beide ε-Zahlen sind.

Zwei Geraden

$$Ax + By + C = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

sollen senkrecht zu einander heißen, wenn $AA_1 + BB_1 = 0$. Es läßt sich leicht beweisen, daß hieraus notwendig folgt, daß die beiden Geraden einen bestimmten Schnittpunkt haben.

Es läßt sich allgemein beweisen, daß zwei Geraden einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt haben, wenn $AB_1 - A_1B$ keine ε-Zahl ist. Wenn $AB_1 - A_1B$ eine ε-Zahl wird, hat man entweder einen unbestimmten Schnitt, wo die Koordinaten mit gewissen ε-Zahlen variieren können, oder keinen Schnitt.

Die beiden Gleichungen

$$Ax + By = 0,$$
$$A_1x + B_1y = 0,$$

werden nämlich, wenn $AB_1 - A_1B$ eine ε-Zahl ist, von den folgenden ε-Zahlen für x und y befriedigt

$$x = Bk\varepsilon, \qquad (k \text{ reell})$$
$$y = -Ak\varepsilon,$$

was durch Einsetzen bestätigt wird.

Ein einfaches Beispiel: Die beiden Geraden

$$y = 0.$$
$$y = \varepsilon x,$$

haben alle Punkte $(\varepsilon k, 0)$, k reell gemein.

Eine Kongruenztransformation $(x_1, y) \longrightarrow (x_1, y_1)$ wird durch die Gleichungen definiert:

$$x_1 = \alpha x \pm \beta y + k,$$
$$y_1 = \beta x \mp \alpha y + l,$$

wo α, β, k, l duale Zahlen sind, und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Strecken sind gleich, wenn sie ineinander durch eine solche Transformation übergeführt werden können.

Wie leicht verständlich, wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt (0,0), durch den Punkt (1, 0) und mit dem laufenden Koordinaten (α, β) die Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

befriedigen. Hierunter hat man alle Punkte $(\varepsilon k, 1)$, k reell. Die Gerade $y = 1$ hat also unendlich viele Punkte $(\varepsilon k, 1)$ mit dem Kreis gemein.

Für jeden Punkt des Kreises gibt es eine bestimmte Tangente senkrecht zum Radius. Aber durch den Punkt gehen viele andere Tangenten mit Berührungs-Punkten in der Nähe. Es werden also hier ganz genau die empirischen Verhältnisse des Kreises und der geraden Linie wiedergegeben.

8. Es ist klar, daß man die hier abstrakt aufgestellte nicht-archimedische Geometrie praktisch anwenden kann, wenn man bei der Behandlung einer bestimmten Aufgabe unserer Geometrie dazu übergeht, die Größe ε eine hinreichend kleine Größe bezeichnen zu lassen. Wie klein ε gehalten werden muß, hängt von den Einzelfällen ab. Es ist interessant zu bemerken, daß man hier eine praktische Anwendung einer nicht-archimedischen Geometrie hat. In logischer Hinsicht interessant dürfte sein, daß diese praktische Anwendung selbst einen logischen Widerspruch enthält. Denn in der praktischen Geometrie wird man immer das Eudoxische Axiom an sich anerkennen, und trotzdem lassen sich die Resultate einer Nicht-Eudoxischen Geometrie sehr gut anwenden. Ein lehrreiches Beispiel! Empirische Axiomensysteme können in rein logischer Hinsicht widerspruchsvoll sein, und doch sind sie für die Welt der Erfahrung widerspruchsfrei. Die Frage der logischen

Widerspruchsfreiheit kann wie hier von solch kleinen Zahlengrößen abhängen, daß sie in der betreffenden Anwendung überhaupt keine Existenz haben. Man sieht auch hier, wie die Frage der Widerspruchsfreiheit für die empirische Welt keine wesentliche Bedeutung hat. Die wörtliche Widerspruchsfreiheit ist eine Bequemlichkeit, wenn sie erzielt werden kann, aber durchaus keine Notwendigkeit.

9. Wir gehen dazu über, eine andere Eigenschaft der geraden Linie näher zu besprechen, nämlich die Teilbarkeit, und deren Anwendung für die Ausgestaltung einer Theorie der linearen Messung.

Keine Strecke ist unbegrenzt teilbar. Für die Zeichenebene z. B. kann man sagen, daß $\frac{1}{100}$ mm nicht existiert, nicht einmal $\frac{1}{25}$ mm.

Stellen wir die folgende einfache Rechenaufgabe:

Wie viel ist $\frac{71}{131}$ von 37 mm? Die Frage hat einen bestimmten Sinn. Die gegebene Strecke läßt sich offenbar durch wirklich ausgeführte Teilung in 131 gleich große Teile teilen (jedes der Teile wird ja jedenfalls größer als $\frac{1}{4}$ mm), und wir nehmen dann eine Strecke, die 71 von diesen Teilen enthält. Wieviel Millimeter wird diese Strecke enthalten? Wir schätzen sofort ab, daß sie größer als die Hälfte und kleiner als $\frac{2}{3}$ der gegebenen Strecke ist. Also größer als 18 mm und kleiner als 25 mm. Wir wollen die beiden aufeinander folgenden ganzen Zahlen von mm angeben, zwischen denen die in Rede stehende Teilstrecke liegt.

Auf der Schule haben wir es wie folgt gelernt:

$$\frac{71\,.\,37}{131} = 20\frac{7}{131}.$$

Antwort: Die Strecke ist $20\frac{7}{131}$ mm, sie liegt also zwischen 20 und 21 mm. Begründung: Jedes mm wird in 131 gleich große Teile zerlegt, die ganze Strecke also in 37.131 gleich große Teile. $\frac{71}{131}$ hiervon gibt 71.37 der genannten Teile, also gerade

$$\frac{71\,.\,37}{131}\text{ mm} = 20\text{ mm} + \frac{7}{131}\text{ mm}$$

Die Bedingung dafür, daß diese Begründung und die hieraus folgende Antwort einen Sinn hat ist, daß die Teilung von 1 mm in 131 Teile ausführbar ist. Dies ist aber nicht der Fall. Die ganze Betrachtung wird also hinfällig. Trotzdem hat die gestellte Aufgabe an und für sich einen guten Sinn. Die Strecke: $\frac{71}{131}$ Teil von 37 mm existiert und liegt — sagen wir nach den oben angeführten Rechnungen wahrscheinlich — zwischen 20 und 21 mm. Wie kann man das untersuchen?

Vielleicht wird jemand sagen: Ach, wieviel Lärm um nichts. Statt Millimetern nehmen wir Zentimeter, dann geht alles wie früher. Jawohl, das ist heuristisch wertvoll, aber für die Erfahrung nicht bindend.

Unsere Frage ist dieselbe wie folgende: Wie kann man untersuchen, ob die Ungleichungen

$$\frac{21}{37} > \frac{71}{131} > \frac{20}{37}$$

gültig sind?

Betrachten wir die beiden letzteren Brüche:

$$\frac{71}{131} \text{ und } \frac{20}{37}$$

Statt diese zu vergleichen, subtrahieren wir sie von 1:

$$1-\frac{71}{131}, 1-\frac{20}{37}$$

und vergleichen die hierdurch entstehenden Brüche, die der umgekehrten Ungleichheit befriedigen werden:

$$\frac{60}{131}, \frac{17}{37}$$

Wir multiplizieren mit 2 und erhalten

$$\frac{120}{131}, \frac{34}{37}$$

Hierdurch wird keine Aenderung in den Ungleichheitszeichen eintreten.

Durch Fortsetzung dieser Prozesse erhält man erstens die Zahlen

$$1-\frac{120}{131}, 1-\frac{34}{37}$$

also

$$\frac{11}{131}, \frac{3}{37}$$

und nachher, indem mit 11 multipliziert wird

$$\frac{121}{131}, \frac{33}{37}$$

In ähnlicher Weise weiterrechnend, kommt man auf folgende Zahlen:

$$1-\frac{121}{131}, 1-\frac{33}{37},$$

$$\frac{10}{131}, \frac{4}{37},$$

$$\frac{90}{131}, \frac{36}{37},$$

$$1-\frac{90}{131}, 1-\frac{36}{37},$$

$$\frac{41}{131}, \frac{1}{37}$$

Durch diese Ersetzungen ist die Ungleichheit viermal geändert worden, sie ist also schließlich dieselbe wie ursprünglich. Da nun

$$\frac{41}{131} > \frac{1}{37},$$

$$\text{weil } 41 \cdot 37 > 131,$$

hat man auch

$$\frac{71}{131} > \frac{20}{37},$$

oder was durch diese Untersuchung natürlich nicht ausgeschloßen ist,

$$\frac{71}{131} = \frac{20}{37}.$$

10. Zwei beliebige Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ lassen sich in ganz ähnlicher Weise behandeln. Es läßt sich zeigen, daß

$$\frac{p}{q} \geqq \frac{r}{s},$$

wenn $ps > qr$.

Wird das soeben am Beispiel erläuterte Verfahren, die ursprünglich gegebenen Brüche durch andere zu ersetzen, angewandt so kommt man immer auf Brüche der Form:

$$\frac{mp - nq}{q}, \quad \frac{mr - ns}{s},$$

oder

$$\frac{nq - mp}{q}, \quad \frac{ns - mr}{s},$$

je nachdem die ursprüngliche Ungleichheit besteht oder in die umgekehrte übergeht.

Da nun die beiden Ungleichungen

$$(mp - nq)\,s > (mr - ns)\,q,$$
$$(nq - mp)\,s < (ns - mr)\,q,$$

mit der Ungleichung

$$ps > rq$$

gleichbedeutend sind, folgt, daß wenn die zu beweisende Regel für irgend zwei der neuen Brüche nachgewiesen wird, so wird sie auch für die ursprünglich gegebenen Brüche richtig sein.

Nun wird man sicher einmal auf einen Bruch kommen, dessen Zähler 1 oder Null ist, und in beiden Fällen leuchtet ein, daß die Regel richtig ist. Damit ist der Beweis im wesentlichen fertig. Es muß nur noch auf den Fall Rücksicht genommen werden, daß die beiden zu vergleichenden Strecken einander gleich sein können, ohne daß die Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$, durch welche sie als Bruchteile eines gegebenen Ganzen gekennzeichnet sind, arithmetisch gleich sind. Die aufgestellte Regel muß deshalb dahin ergänzt werden, daß die allgemeine Regel folgendermaßen lautet:

$$\text{Aus } ps > qr, \text{ folgt } \frac{p}{q} > \frac{r}{s}.$$

$$\text{Aus } ps < qr, \text{ folgt } \frac{p}{q} < \frac{r}{s}.$$

$$\text{Aus } ps = qr, \text{ folgt } \frac{p}{q} = \frac{r}{s}.$$

Es sei noch bemerkt, daß aus $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ nicht die Folgerung $ps = qr$ gezogen werden kann.

Wir haben hier nur echte Brüche betrachtet. Es wird aber keine Schwierigkeit machen, die Regeln auf andere Brüche zu erweitern.

11. Auf Grund dieser einfachen aber sehr wichtigen Untersuchungen wird es gelingen, eine natürliche Theorie der Messung zu begründen.

Zur Bezeichnung der echten Bruchteile einer Strecke, z. B. von der Länge 1 m, kommen erstens die natürlichen Brüche, die eine wirklich ausführbare Messung bezeichnen, in Betracht. Andere Brüche (künstliche Brüche) können aber auch Verwendung finden, indem man nur die allgemeine Regel aufstellt, daß reinarithmetisch größeren und kleineren Zahlen größere und kleinere (oder gleich große) Strecken entsprechen. Es werden also sozusagen die künstlichen Brüche als „Schnitte" der natürlichen Brüche definiert. Diese Betrachtung findet ihren natürlichen praktischen Abschluß durch die Noniusmessung, wie wir es in dem nächsten Vortrag sehen werden.

Dritter Vortrag: **Dinge und Zahlen.**

1. Die Pythagoreer hatten einen mystischen Wahlspruch: Die Dinge sind Zahlen. Was sie hiermit gemeint haben, weiß man nicht. Ursprünglich hat wohl der Satz nur einen Ausdruck dafür geben sollen, daß die Dinge sich durch Zahlen beschreiben lassen. Und Zahlen, das hieß: ganze Zahlen und Brüche, rationale Zahlen. Wenn das richtig sein sollte, ist es sehr merkwürdig, daß die Pythagoreer durch ihre spätere Entdeckung der Irrationalzahlen ihren eigenen Grundsatz widerlegt haben.

Indessen kann man sagen, daß der Satz für die spätere Entwicklung der griechischen Geometrie als Grundsatz bestehen konnte. Denn in dieser Geometrie wurden die geometrischen Dinge (Strecken, Winkel, Flächen) als Träger der allgemeinsten Größenvorstellung angenommen. Die Dinge waren Zahlen. Die Zahlen (rational oder irrational) waren durch die Dinge geschaffen, und nur durch die Dinge definiert.

Heutzutage stehen wir dem umgekehrten Satz gegenüber. Für die heutige Mathematik und Naturwissenschaft gilt der Wahlspruch: Die Zahlen sind Dinge. Wir stehen heute nicht nur einer Arithmetisierung der Mathematik gegenüber, sondern einer Arithmetisierung der ganzen Welt. Die Dinge werden durch die Zahlen geschaffen. Man fordert, daß die Dinge den Gesetzen des Zahlenkontinuums bis zu den letzten Finessen gehorchen sollen. Dies steht freilich zu der Erfahrung im Widerspruch. Aber darum kümmert man sich gewöhnlich nicht.

Es soll in meinem heutigen Vortrag mein Ziel sein erkennen zu lassen, wie man die Geometrie wieder in Uebereinstimmung mit dem pythagoreischen Wahlspruch in seiner ursprünglichen Bedeutung bringen kann: Die Dinge sind Zahlen, nicht allgemeine reelle Zahlen, sie sind rationale Zahlen; und noch mehr: sie sind sehr einfache rationale Zahlen.

2. Die alten Grundsätze der Größenlehre sollen nicht mehr gelten. Ich denke namentlich an die drei ersten Größenaxiome des Euklid:

1. Dinge, die demselben Ding gleich sind, sind einander gleich.
2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.
3. Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so sind die Reste gleich.

Diese Grundsätze sollen also hier als allgemeine gültige Schlußgrundlagen aufgehoben werden.

Meine Zuhörer werden neugierig fragen, was kann man dann überhaupt machen? Einiges muß doch wohl über unsere Größen vorausgesetzt werden. Allerdings. Wir müssen einige neue Axiome aufstellen. Diese bedeuten aber den alten gegenüber inhaltlich eine wesentliche Reduktion der Grundlagen. Sie werden umständlicher auszusprechen sein, aber inhaltlich sind sie einfacher. Um doch einen kurzen Ausdruck unserer neuen Größenaxiome zu haben, sagen wir, daß sie die Forderung der Existenz der Messung bedeuten.

3. Wir gehen nun daran, den Inhalt unserer Voraussetzungen näher zu beschreiben:

Eine genügend große Strecke läßt sich als Maßstab einrichten, d. h. sie kann in eine gewisse Anzahl (n) Teile geteilt werden, die erstens untereinander gleich sind, und zweitens den Bedingungen genügen, daß alle Strecken, deren jede p aufeinander folgende Teile enthält, untereinander gleich sind ($p = 2, 3, \ldots, - 1$). Welche Zahlenwerte für n in Betracht kommen, kann nicht in allgemeinen Regeln ausgesprochen werden. Es gibt gewisse kleine Zahlenwerte, die angenommen werden können. Es gibt größere Zahlenwerte, die nicht angenommen werden können. Andere Zahlenwerte sind fraglich.

Auf dem Maßstabe werden die Teilpunkte durch ganze Zahlen (Abszissen) numeriert, derart, daß jede Strecke zwischen zwei Teilpunkten durch die Differenz der entsprechenden Zahlen gemessen wird.

Durch Noniusmessung wird nun diese Zahlenzuordnung erweitert derart, daß jeder Punkt durch eine Zahl (etwa mit 3 Dezimalen) fixiert wird, und die Strecke zwischen zwei Punkten wird durch die Differenz der beiden den Punkten entsprechenden Zahlen gemessen. Gleichen Strecken entsprechen gleiche Zahlen. Die Fixierung läßt sich aber in vielfachen Weisen ausführen. Jede Strecke hat mehrere Fixierungszahlen, welche gewisse kleine Differenzen haben, die unter einer festen Grenze liegen. Als Grenze kann man für die Zeichenebene jedenfalls etwa $\frac{1}{10}$ mm angeben.

4. Wir können kurz unsere Voraussetzungen in einen Satz zusammenfassen:

Irgend ein gegebenes System von Strecken einer geraden Linie läßt sich derart fixieren, daß die Euklidischen Größenaxiome für die Fixierungszahlen erfüllt sind (innerhalb des vorliegenden Streckensystems).

5. Wir haben bisher nur Fixierungszahlen mit 3 Dezimalen in Betracht gezogen. Wir wollen nun auch andere Zahlen in Betracht nehmen, indem wir einfach durch Definition die Redeweise einführen, daß wenn eine Strecke a durch zwei Zahlen α und β (die beide Zahlen mit 3 Dezimalen sind) fixiert ist, so sagt man auch, daß a durch jede beliebige Zahl zwischen α und β fixiert wird. Umgekehrt: Wenn man sagt, daß a durch eine gewisse Zahl γ fixiert wird, bedeutet dies, daß entweder γ eine durch Messung natürlich vorkommende Fixierungszahl ist, oder wenn nicht, daß γ zwischen zwei solchen liegt.

6. Ich erinnere nun an meiner Besprechung der Bruchrechnung in meinem zweiten Vortrag. Und wir erhalten sofort den Satz:

Wenn eine Strecke a durch die Zahl α fixiert ist, dann wird man einen echten Bruchteil $\frac{p}{q}$ von a durch die Zahl $\frac{p}{q}\alpha$ fixieren können.

Also: Aus $a \sim \alpha$, $\frac{p}{q} < 1$, folgt $\frac{p}{q}a \sim \frac{p\alpha}{q}$.

7. Außer den natürlichen echten Bruchteilen einer Strecke $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{p}{q}$, wo q gewisse einfache Werte haben kann) wollen wir auch künstliche echte Bruchteile einführen (wo q beliebig große Zahlenwerte annehmen kann, oder wo man statt $\frac{p}{q}$ sogar eine irrationale Zahl < 1 nimmt, indem man (mit unserer Verabredung in 5 in Uebereinstimmung) vorausgesetzt, daß diese künstlichen Bruchzahlen zwischen zwei natürlichen liegen, die beide für die vorliegende Strecke Verwendung finden können. Es ist dann klar, daß der eben aufgestellte Satz (6) über einen echten Bruchteil einer Strecke und deren Fixierungszahl auch nach dieser Erweiterung des Begriffes des Bruchteils giltig sein wird.

8. Wir gehen dazu über zu erklären, was wir unter einer zentralen Fixierung verstehen.

Es sei eine Strecke AB vorgelegt, für welche z. B. die Fixierungszahlen

$$\left.\begin{array}{c} 122{,}470 \\ \vdots \\ 122{,}510 \end{array}\right\} \text{Intervallänge} = 0{,}04$$

brauchbar sind. Man kann dann unter diesen Zahlen einige herausnehmen, die die Eigenschaft haben, daß man diesen Zahlen eine gewisse Größe, z. B. $\frac{1}{100}$ addieren oder von ihnen subtrahieren kann, ohne daß sie aufhören Fixierungszahlen zu sein. Dieses gilt z. B. für die Zahl

$$122{,}490.$$

9. Wir nehmen nun einen kleinen Bruchteil unserer Strecke, sagen wir $\frac{1}{20}$ Solche Zahlen werden als zentrale Fixierungszahlen bezeichnet. Wir erhalten hierdurch eine kleinere Strecke AB_1. Diese hat jedenfalls Fixierungszahlen, die durch Division der Fixierungszahlen der Strecke AB durch 20 entstehen also

$$\left.\begin{array}{c} 6{,}1235 \\ 6{,}1255 \end{array}\right\} \text{Intervallänge} = 0{,}002$$

Die Intervalllänge für die so berechneten Fixierungszahlen ist sehr klein. Und man wird sofort entdecken, daß die erzeugten Fixierungszahlen zentrale Fixierungszahlen für die kleine Strecke AB_1 sein müssen. Die durch direkte Messung erhaltenen Fixierungszahlen der Strecke AB_1 müssen sich nämlich zumindest über ein Intervall von der Größe 0,04 erstrecken, und es ist somit klar, daß das durch Berechnung erzeugte Intervall (von der Länge 0,002) in jenem größeren Intervall enthalten sein muß, und wie es natürlich ist, als zentrales Intervall. Dem sicheren Intervall von Fixierungszahlen für die Strecke AB

$$
\begin{array}{c}
122{,}470 \\
\vdots \\
122{,}510
\end{array}
$$

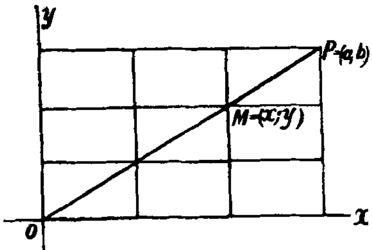
müssen in Frage stehende Zahlen vorausgehen und nachfolgen, die um das Intervall symmetrisch verteilt sind und die durch 20-Teilung Fixierungszahlen der Strecke AB_1 erzeugen.

Wir stellen deshalb das folgende Axiom auf:

W e n n e i n e S t r e c k e a d u r c h e i n e Z a h l α f i x i e r t i s t , s o i s t $\frac{1}{20}a$ durch $\frac{\alpha}{20}$ z e n t r a l f i x i e r t.

Wir schreiben: Aus $a \mathscr{J} \alpha$, folgt $\frac{1}{20} a \mathscr{J} \frac{1}{20} \alpha$, indem wir das Zeichen $\mathscr{J}$ für zentrale Fixierung einführen. Die Zahl 20 könnte offenbar durch andere Zahlen ersetzt werden.

10. Hiermit haben wir die A x i o m e d e s M a ß s t a b s aufgestellt. Wir gehen nun zu den A x i o m e n d e r M a ß e b e n e über. Die Maßebene ist nur ein Koordinatensystem, das genau konstruiert ist nach den Gesetzen der sich rechtwinklig schneidenden äquidistanten Parallelen, wodurch zwei zueinander rechtwinklige Systeme von kongruenten Maßstäben entstehen, welche durch Noniusmessung erweitert werden können. Damit läßt sich jeder Punkt unserer Ebene durch Koordinatenzahlen fixieren. Diese natürlichen Koordinatenzahlen haben nach unseren Verabredungen höchstens drei Dezimalen. Wir führen aber auch künstliche Fixierungszahlen ein, nach der angegebenen Regel.

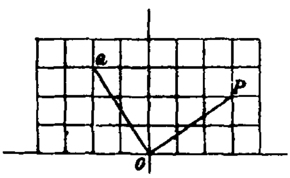


Figur 3

11. Die Darstellung der Punkte einer Strecke OP $\big(O = (0{,}0),\ P = (a, b)\big)$ durch Koordinatenzahlen ergibt sich leicht. In der Figur 3 ist

$$OM = \frac{2}{3}\, OP,$$

und es ist $x = \frac{2}{3} a$, $y = \frac{2}{3} b$. Für jeden Punkt M der Strecke OP wird man in ganz ähnlicher Weise Koordinaten $x = ma$, $y = mb$ fixieren können, indem m eine Fixierungszahl für das Verhältnis $OM : OP$ ist.



Figur 4

12. Zwei zueinander senkrechte Strecken OP und OQ (Fig. 4) werden auseinander durch Drehung der Maßebene abgeleitet. In der Figur ist $P = (3{,}2)$, $Q = (-2{,}3)$, und es ergibt sich ganz allgemein, daß aus $P = (a, b)$ folgt $Q = (\;\, b, a)$.

Die analytische Darstellung der geraden Linie, der parallelen Linien und der zueinander senkrechten Linien innerhalb der Maßebene ist hiermit begründet. worden.

13. Aus der Existenz der Maßebene folgt unmittelbar d e r P r o j e k t i o n s s a t z:

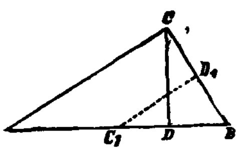
E i n M a ß s t a b w i r d d u r c h r e c h t w i n k l i g e P r o j e k t i o n i n e i n e n M a ß s t a b ü b e r g e f ü h r t.

Wenn 3 Punkte A, B, C, die auf einer geraden Linie in der angegebenen Reihenfolge liegen, in 3 Punkte A_1, B_1, C, auf einer anderen Geraden durch rechtwinklige Projektion übergeführt werden, so folgt aus dem Satz, daß jede Fixierungszahl für das Verhältnis $AB : AC$ auch als Fixierungszahl für das Verhältnis $A_1 B_1 : A_1 C_1$ brauchbar sein wird.

14. Wir machen uns daran, den Hauptsatz der Elementargeometrie, den pythagoreischen Lehrsatz zu beweisen.

Wir beginnen mit folgendem Satz:

Satz 1. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Hypotenuse AB durch die Zahl c fixiert ist, lassen sich die beiden Katheten durch solche Zahlen a und b fixieren, daß ihre Projektionen auf die Hypotenuse durch die Zahlen $\frac{a^2}{c}$ und $\frac{b^2}{c}$ fixiert werden können.



Figur 5

Beweis. Das Dreieck $B\ D\ C$ wird in eine andere Lage $B\ D_1\ C_1$ umgelegt (man wendet den Winkel B um). Wenn nun $\frac{BC}{BA} \backsim \alpha(1)$, also auch $\frac{BC_1}{BA} \backsim \alpha\ (2)$, so folgt $\frac{BD_1}{BC} \backsim \alpha, (3)$

Da $BA \backsim c$, ist nach (1) und (3)

$$BC \backsim \alpha c,$$
$$BE_1 \backsim \alpha^2 c,$$
$$BD \backsim \alpha^2 c.$$

Wird nun αc mit a bezeichnet, hat man

$$BC \backsim a, \quad BD \backsim \frac{a^2}{c}$$

w. z. b. w.

Die andere Kathete wird ähnlich behandelt.

Satz 2. Wenn 3 Punkte A, B, C auf einer geraden Linie in der angegebenen Ordnung liegen, und die Strecken AB und BC unabhängig von einander fixiert sind durch die Zahlen α und β, kann nicht vorausgesetzt werden, daß AC sich durch die Summe $\alpha + \beta$ fixieren lasse. Es läßt sich aber zeigen, daß $\frac{1}{20}$ von AC durch $\frac{1}{20}(\alpha + \beta)$ fixiert werden kann.

Beweis: AB, BC, AC können jedenfalls in irgend einer Weise durch 3 Zahlen α_1, β_1, γ_1 fixiert werden, derart, daß die letzte Zahl die Summe der beiden ersten ist (4). Man hat nun:

$$\left|\alpha - \alpha_1\right| < \frac{1}{10},$$

$$\left|\beta - \beta_1\right| < \frac{1}{10},$$

$$\left|\frac{\alpha + \beta}{20} - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{20}\right| < \frac{1}{100}.$$

da nun

$$\frac{1}{20}AC \backsim \frac{\alpha_1 + \beta_1}{20},$$

folgt sofort

$$\frac{1}{20}AC \backsim \frac{\alpha + \beta}{20}.$$

Satz 3. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC lassen sich die Seiten immer durch solche Zahlen fixieren, daß das Quadrat der Hypotenusenzahl der Summe der Quadrate der beiden Kathetenzahlen gleich wird.

Beweis. Wir bilden ein neues rechtwinkliges Dreieck mit zwanzigmal so großen Seiten. Für unsern Beweis ist es eine wesentliche Voraussetzung, daß diese Operation wirklich ausgeführt werden kann, d. h. daß man über einen so großen Bereich (wo unsere Axiome giltig sind) verfügt, daß die Operation innerhalb dessen Grenzen verläuft. Die Möglichkeit der Konstruktion folgt übrigens aus dem Satz über die senkrecht schneidenden äquidistanten Parallelen.

Das neue Dreieck sei nun mit $A_1 B_1 C_1$ bezeichnet. Seine Hypotenuse $A_1 B_1$ fixieren wir durch eine Zahl c_1. Es lassen sich nun (Satz 1) die Katheten dieses Dreiecks durch Zahlen a_1 und b_1 fixieren derart, daß die Projektionen $B_1 D_1$ und $A_1 D_1$ auf die Hypotenuse durch $\frac{a_1^2}{c_1}$ und $\frac{b_1^2}{c_1}$ fixiert werden können.

Man hat also für die 3 in gerader Linie liegenden Punkte B_1, D_1, A_1

$$B_1 D_1 \backsim \frac{a_1^2}{c_1},$$

$$D_1 A_1 \backsim \frac{b_1^2}{c_1}.$$

Hieraus folgt nun (nach Satz 2), indem wir nach dem ursprünglichen Dreieck zurückkehren:

$$BA \backsim \frac{1}{20}\left(\frac{a_1^2}{c_1} + \frac{b_1^2}{c_1}\right)$$

Man hat aber auch, da $B_1 A_1 \backsim c_1$,

$$BA \backsim \frac{1}{20} c_1.$$

Die Hypotenuse AB läßt sich also durch die beiden Zahlen

$$\frac{1}{20}\left(\frac{a_1^2}{c_1} + \frac{b_1^2}{c_1}\right) \text{ und } \frac{1}{20}c_1$$

fixieren, und deshalb auch durch ihre mittlere Proportionale, also durch

$$\frac{1}{20}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Es ist also in der Tat bewiesen, daß die Seiten des gegebenen Dreiecks durch die Zahlen

$$a = \frac{a_1}{20},\ b = \frac{b_1}{20},\ c = \frac{1}{20}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

fixiert werden können. Es ist nun

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

und hiermit ist unser Satz (der erste pythagoreische Lehrsatz) bewiesen.

Satz 4. Wenn die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC durch die Zahlen a und b unabhängig fixiert sind, so läßt sich hieraus nicht schließen, daß die Hypotenuse durch die Zahl $\sqrt{a^2 + b^2}$ fixiert werden kann. Es läßt sich aber beweisen, daß wenn das Dreieck im Maßstab 1:20 reduziert wird, daß dann die Hypotenuse des reduzierten Dreiecks durch $\frac{1}{20}\sqrt{a^2 + b^2}$ fixiert werden kann. (Der zweite pythagoreische Lehrsatz).

Beweis: Wir fixieren die Seiten des Dreiecks ABC in irgend einer Weise durch a_1, b_1, c_1 derart, daß (Satz 3)

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Man hat nun

$$\left|a - a_1\right| < \frac{1}{10},$$

$$\left|b - b_1\right| < \frac{1}{10},$$

also

$$\sqrt{\left(a - a_1\right)^2 + \left(b - b_1\right)^2} < \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Nun ist

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| \leq \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2},$$

also

$$\left|\frac{1}{20}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{20}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{200} < \frac{1}{100}$$

Da nun $\frac{1}{20}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ eine zentrale Fixierungszahl für die Hypotenuse A_1B_1 des im Maßstab 1:20 reduzierten Dreiecks ist, so wird nach der letzten Ungleichung auch $\frac{1}{20}\sqrt{a^2 + b^2}$ eine Fixierungszahl für die Strecke. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Satz 5. Hat man drei reelle Zahlen a, b, c (> 0), welche der Bedingung genügen, daß

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

so wird ein rechtwinkliges Dreieck existieren, dessen Seiten durch diese Zahlen fixiert werden können. (Der dritte pythagoreische Lehrsatz).

Es muß jedoch hierbei vorausgesetzt werden, daß die Zahlen für unseren Darstellungsbereich überhaupt in Betracht kommen können (sie dürfen nicht zu groß und nicht zu klein sein).

Der Satz wird dadurch bewiesen, daß man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, dessen Katheten durch die Zahlen $20a$ und $20b$ fixiert werden können. Wenn man dan. dieses Dreieck im Maßstab 1:20 reduziert, hat man das gesuchte Dreieck (Satz 4).

15. Es wird nun leicht sein in ganz ähnlicher Weise wie die Sätze 3 und 5 die folgenden Sätze zu beweisen:

Für beliebige Punkte $A_1, A_2, \ldots$ lassen sich Koordinaten (x_1, y_1) (x_2, y_2) ...... so fixieren, daß sämtliche Abstände $A_i A_k$ durch die Zahlen

$$\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$$

fixiert werden können.

Und ebenso:

Für beliebige Zahlenpaare (x_1, y_1), (x_2, y_2), . ., (die alle einem gewissen beschränkten Bereich angehören) lassen sich entsprechende Punkte $A_1, A_2, \ldots.$ der geometrischen Ebene bestimmen derart, daß sämtliche Abstände $A_i A_k$ durch die Zahlen

$$\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

fixiert werden können. Zahlenpaaren, die einer und derselben Gleichung ersten Grades befriedigen, entsprechen dabei Punkte einer geraden Linie (10). Wenn zwei Gleichungen ersten Grades

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

der Bedingung genügen:

$$AA_1 + BB_1 = 0,$$

so stehen die entsprechenden Geraden senkrecht zueinander (11).[1])

16. Wir haben so die Erkenntnis gewonnen, daß die gewöhnliche arithmetische Koordinatengeometrie als „Fixierungsgeometrie“ unserer wirklichen Ebene gelten kann. Und unsere Begründung der Geometrie ist hiermit im Wesentlichen zu Ende.

Ueberlegen wir schließlich, was wir tatsächlich von den aufgestellten Axiomen gebraucht haben, oder vielmehr was wir als unsere wesentliche Grundlagen erkennen müssen:

I. Die Existenz des geradlinigen Maßstabes und die hierher gehörigen Größenaxiome, die Fixierungszahlen betreffend. Die Existenz der Verschiebungen und Umkehrungen des Maßstabes in sich.

II. Die Existenz des Rechtecks mit zwei gegebenen Seiten; die Einrichtung des Rechtecks als Maßebene (Rechtwinkliges Koordinatensystem mit natürlichen Koordinaten). Die Existenz der Verschiebungen des ganzen Koordinatensystems in sich. Die Kongruenz der rechtwinkligen Koordinatensysteme.

---

[1]) Die Hauptsätze über die Koordinatenfixierung der Ebene sind schon in meiner: Elementær Geometri III, København 1921 ausführlich dargestellt worden.

Die Existenz einer Bewegung der Ebene in sich, durch welche zwei rechtwinklige Koordinatensysteme mit demselben Anfangspunkt vertauscht werden (vgl. 14. Satz 1).

III. Die Existenz des Maßbogens eines Kreises und hierher gehörige Größenaxiome, den linearen Größenaxiomen analog. Die Existenz der Verschiebungen und Umkehrungen des Maßbogens in sich. Die Existenz des Polarkoordinatensystems mit natürlichen Koordinaten.

Was die übrigen Axiome, die in meinem ersten Vortrag erwähnt wurden, anbetrifft, so zeigt es sich, daß wir diese Axiome in ihrer ursprünglichen scharfen Form nicht brauchen. Mann kann mit einem Wort sagen, daß die Forderung der Eindeutigkeit überall aufgehoben werden kann; z. B. der Satz, daß zwei Punkte eine Verbindungsstrecke haben, soll nur bedeuten daß eine Verbindungsstrecke existiert, und nicht, daß eine und nur eine existiert, d. h. die Eindeutigkeit darf als Schlußgrundlage nicht benutzt werden; wenn man von einem Schnittpunkt zweier Geraden spricht, so wird hiermit nicht die Eindeutigkeit des gemeinsamen Punktes (als Schlußgrundlage) angenommen; wenn man von einer Senkrechten durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden spricht, so wird nicht (als Schlußgrundlage) vorausgesetzt, daß diese Senkrechte eindeutig bestimmt ist, usw.

Unser Axiomensystem bedeutet sonach in rein prinzipieller Hinsicht im Vergleich mit den gewöhnlichen Axiomensystemen inhaltlich eine sehr wesentliche Reduktion. Die Forderung der Eindeutigkeit ist überall aufgehoben, d. h. man hat der Logik das Recht genommen, die Eindeutigkeit als Schlußgrundlage zu benutzen. Man kann ferner sagen, daß, wenn man überall (auch bei den Größenaxiomen, die Fixierungszahlen betreffend) die Forderung der Eindeutigkeit hinzugefügt, die natürliche Geometrie in die alte Geometrie übergehen wird. Die natürliche Geometrie wird somit allgemeiner als die gewöhnliche abstrakte Geometrie.

17. Daß wir für unsere geometrischen Dinge auch eine andere arithmetische Fixierungsgeometrie aufstellen könnten, ist klar. Und die Euklidische Geometrie in der hier gegebenen Form wird natürlich nicht widerlegt, wenn man es eines Tages aus irgend einem Grunde zweckmäßig findet, einer anderen Zahlenfixierung den Vorzug zu geben. Eben weil es sich nur um eine Fixierung handelt, wird die alte Fixierung durchaus mit der neuen verträglich sein, möge es nun eine gewöhnliche Nicht-Euklidische oder eine allgemeine Riemann'sche Zahlengeometrie sein, die man für den augenblicklich vorliegenden Zweck bequem findet. Es darf aber nie vergessen werden, daß alle derartige Fixierungen für unsere beschränkte Ebene, der Wirklichkeit gegenüber, gleichwertig sein müssen, und daß wir durch neue Fixierungen nichts neues über die „wahre Natur" dieser Ebene lernen können.

Die Dinge lassen sich mit Hilfe von Zahlen beschreiben. Man muß sich aber hüten zu glauben, daß sie sich mit Zahlen vertauschen lassen.

18. Schließlich beabsichtige ich, meinen Zuhörern einen Ueberblick über die ganze Frage zu geben und zwar dadurch, daß ich für eine Geometrie ein rein arithmetisches Beispiel konstruiere, das ein sehr einfaches Bild des in Rede stehenden Systems gibt. Wir definieren:

Ein geometrischer Punkt A ist eine Sammlung von arithmetischen Punkten (Zahlenpaaren), $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., die der Bedingung genügen, daß jeder der Ausdrücke

$$\left(x_i - y_k\right)^2 + \left(x_i - y_k\right)^2$$

kleiner als eine feste Zahl ε^2 ist. Diese feste Zahl kann eine beliebige im voraus gegebene Größe haben, z. B. die Einheit. Die Anzahl der arithmetischen Punkte A_1, A_2, ... ist jedesmal eine beliebige, wenigstens 1. Es können auch unendlich viele Punkte in der Sammlung vorkommen. Die Zahlenwerte x_i und y_i können innerhalb eines beschränkten Gebiets beliebige reelle Werte annehmen.

Wir wollen sagen, daß der geometrische Punkt A durch einen arithmetischen Punkt (ξ, η) fixiert wird, wenn

$$\left(\xi - x_i\right)^2 + \left(\eta - y_i\right)^2 < \varepsilon^2$$

für jeden arithmetischen Punkt $\left(x_i, y_i\right)$ in A. Man schreibt

$$A \sim (\xi, \eta).$$

A wird also durch jeden seiner arithmetischen Punkte fixiert werden können. Aber natürlich auch durch andere.

Man kann auch von einer zentralen Fixierung sprechen, wenn eine gewisse Umgebung von (ξ, η) aus lauter Fixierungspunkten besteht.

Zwei geometrische Punkte sind inzident, wenn sie einen gemeinsamen Fixierungspunkt haben.

3 oder mehrere geometrische Punkte liegen in einer geraden Linie, wenn sie durch arithmetische Punkte, die arithmetisch linear voneinander abhängen (in einer arithmetischen Linie liegen), fixiert werden können.

Durch zwei geometrische Punkte läßt sich immer eine gerade Linie legen. Ist A durch die Punkte $\left(x_i, y_i\right)$, B durch $\left(u_k, v_k\right)$, gegeben, setzt man z. B.

$$C = \left(\mu x_i + (1 - \mu)\, u_k\,,\ \mu y_i + (1 - \mu)\, v_k\right),$$

wo i und k alle ihre Werte durchlaufen und $0 < \mu \leqq 1$. Hierdurch ist eine Strecke AB als „Ort" der Punkte C definiert. Man kann aber unzählbare andere Erzeugungen einer Strecke AB angeben.

Zwei geometrisch gerade Linien sind parallel bezw. senkrecht zueinander, wenn sie durch parallele bezw. senkrecht zueinander stehende Linien fixiert werden können.

Der Abstand zweier geometrischer Punkte wird durch jede Zahl fixiert, die den arithmetischen Abstand zwischen entsprechenden arithmetischen Fixierungspunkten angibt.

Ist $A \sim (x_1, y_1)$ $B \sim (x_2, y_2)$ setzt man

$$AB \sim \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Daß zwei Abstände gleich groß sind bedeutet, daß sie eine gemeinsame Fixierungszahl haben.

Zwei Figuren werden als kongruent bezeichnet, wenn sie sich nach den gebenen Regeln arithmetisch fixieren lassen durch arithmetisch kongruente Punktsysteme.

19. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß in dieser Geometrie alle Sätze gerade denselben Charakter haben, wie die von uns in der natürlichen Geometrie aufgestellten. Der pythagoreische Lehrsatz gilt gerade in der Form, die wir angegeben haben.

Die ganze analytische Geometrie ebenso.

Die alten Grundlagen, worauf die Euklidische Geometrie aufgebaut war, sind aber ungültig. Die Größenaxiome sind ungültig: $a = b$, und $b = c$, gibt nicht $a = c$, usw., sondern vielmehr das, was Poincaré „un désaccord intolérable“ nennt: $a = b$, $b = c$, $a > c$, (oder $a < c$).

Untersucht man die anderen gewöhnlich aufgestellten Axiome, die alle eine streng kategorische Form haben, so zeigt sich ebenso, daß sie ungiltig sind. Jedes Axiom, welches z. B. die eindeutige Existenz eines Punktes, einer geraden Linie usw. fordert, ist im voraus aufzugeben. Denn man kann immer Punkte mit anderen inzidenten Punkten vertauschen, ohne daß die in Betracht kommenden Eigenschaften aufhören zu gelten. Man kann freilich von einem Punkte aus auf einer geraden Linie nach einer gegebenen Seite eine Strecke abtragen, die einer gegebenen gleich wird, aber nicht in eindeutiger Weise. Zwei Dreiecke mit stückweise kongruente Seiten sind nicht notwendig kongruent; wenn A, B, C auf einer geraden Linie liegen, kann man mehrere Dreiecke AB_1C bilden, wo $AB = AB_1$, $BC = B_1C$ (vergl. die Helmholtz'sche Definition der geraden Linie).

Was die Axiome der Anordnung betrifft, so kommen wir auf die früher erwähnte Erwägung von Pasch zurück. Das Axiom von der Einschaltung eines Punktes zwischen zwei anderen gilt hier nicht unbedingt. Zwei Punkte A und B können verschieden sein (d. h. nicht inzident), und doch kann man keinen Punkt einschalten, ohne daß dieser Punkt mit wenigstens einem der gegebenen inzident wird. Man lernt hier wie die Erwägung von Pasch (und natürlich wie alles übrige bei Pasch) modifiziert werden muß um dialektisch reine Formen anzunehmen.

Der Satz von der unbeschränkten Halbierung einer Strecke läßt sich auch leicht untersuchen. Man kann eine Strecke in so viele gleiche Teile zerlegen, daß zwei aufeinander folgende Teilpunkte inzident werden, und dann ist die Teilung als solche schon illusorisch.

20. Ich habe hier nur die ebene Geometrie betrachtet. Die räumliche Geometrie läßt sich nach denselben Prinzipien behandeln. Andere Dimensionszahlen können in gewissem Sinne auch in Betracht kommen.

Für eine Dimension würde man eine natürliche Behandlung des Eindimensionalen erhalten: Eine natürliche Arithmetik mit beschränkten rationalen Zahlen, deren Nenner beschränkt ist. Es werden sich hier Berührungspunkte mit den neueren Untersuchungen von Brouwer und Weyl ergeben. In welchem Maße wage ich nicht festzustellen, weil ich nicht viel von diesen Arbeiten verstehe.

Auch für die übrige Welt der Erfahrung dürften die hier geschilderten Vorstellungen über Dinge und Zahlen nicht ohne Bedeutung sein. Vor allem muß hervorgehoben werden, daß wir bei unseren Betrachtungen gezeigt haben, daß der Begriff des mathematischen Kontinuums zur wissenschaftlichen Behandlung von Erfahrungsgrößen ganz entbehrlich ist.

Vierter Vortrag: Kurven und Flächen.

1. In meinem ersten Vortrag habe ich als Einleitung ein vorläufiges Axiomensystem aufgestellt, nach dem Vorbilde der sonst bekannten Axiomensysteme, nur so, daß die Wahrnehmung möglichst vollständig berücksichtigt wurde. Im zweiten Vortrag haben wir gewisse logische Prinzipienfragen betreffend dieses Axiomensystem behandelt. Im dritten Vortrag haben wir durch unsere Theorie der Messung die eigentlichen Grundlagen erhalten. Wir sind uns hierbei darüber klar geworden, daß gewisse von den ursprünglich aufgestellten Axiomen eine zu scharfe Form hatten, indem — wie wir es kurz ausdrücken können — die unbedingte Eindeutigkeit, die in diesen Axiomen verlangt war, aufgegeben werden mußte. Wir werden z. B. fortwährend das folgende Axiom festhalten: Durch einen Punkt kann eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden gezogen werden; wir fordern aber nicht ausdrücklich, daß es nur eine gibt. Und so wird es bei allen einleitenden Sätzen gehen.

Wir halten es für unnötig, alle diese Einzelfragen hier zu besprechen, umsomehr als wir schließlich ein arithmetisches Bild entworfen haben, wodurch die ganze Geometrie der Wirklichkeit erläutert wurde und welches Aufschluß über jede solche Frage geben wird. Hinsichtlich dieses Bildes darf ich vielleicht doch nicht die Bemerkung unterdrücken, daß die Geometrie der Wirklichkeit durch dieses Bild nicht definiert wird. Die Geometrie der Wirklichkeit ist etwas an sich Gegebenes; ihre Gesetze gestalten sich aber ähnlich wie die Gesetze der erwähnten bildlichen Geometrie.

2. Uebrigens ist es interessant, und spielt eine gewisse erkenntnis-theoretische Rolle, daß dieser bildlichen Geometrie eine noch weitere Bedeutung zukommen kann.

Wir betrachten z. B. die Zeichenebene. Was wir hier Punkte nennen, sind für unser empirisch gegebenes Wahrnehmungsgebiet ausdehnungslose Punkte („feine Punkte“). Die geraden Linien sind durch unsere feinsten Lineale gegeben („feine Geraden“) usw. Nun definieren wir innerhalb der Zeichenebene selbst eine „grobe Geometrie“ in folgender Weise:

Ein „grober Punkt“ ist ein Gebiet der Zeichenebene derart, daß irgend zwei Punkte, die sicher innerhalb dieses Gebiets gelegen sind, eine Entfernung kleiner als 1 cm haben. Der grobe Punkt läßt sich durch jeden feinen Punkt innerhalb des Gebietes fixieren.

3 grobe Punkte liegen in einer „groben Geraden“, wenn sie sich durch 3 feine Punkte derart fixieren lassen, daß diese in einer feinen Geraden enthalten sind.

Der Abstand zweier groben Punkte wird durch den Abstand zweier ihrer feinen Fixierungspunkte fixiert.

Wenn das Zeichenpapier in Millimeterquadrate eingeteilt ist, lassen sich hierdurch sofort brauchbare Fixierungszahlen ablesen.

Für diese „grobe Geometrie“ gilt unsere ganze natürliche Geometrie: z. B. der pythagoreische Lehrsatz (in der angegebenen Form, die Fixierungszahlen betreffend); als Beispiel anderer Sätze nennen wir den Satz vom Höhenschnittpunkt eines Dreiecks (in folgender Form: Die Höhen lassen sich so bestimmen, daß ein gemeinsamer Punkt existiert) usw.

3. Man ist daran gewöhnt, die Sätze der Geometrie als Sätze zu betrachten, die nie auf der Welt genau zutreffen werden, weil wir die Gegenstände nicht „genau" herstellen können. Wir haben hier die Geometrie so eingerichtet, daß in jedem Erfahrungsgebiet die Sätze genau zutreffen werden. Der Tischler ist ebensowohl im Stande genaue rechtwinklige Körper herzustellen wie der Instrumentenmacher. Ob sie ebenso haltbar sind, ist eine andere Frage. Man kann im Sande mit einem Stock ebensowohl ein genaues Rechteck zeichnen, wie auf der feinsten Zeichenebene mit einem scharfen Bleistift. Die genaue Darstellung der Dinge ist in jedem Herstellungsgebiet etwas erreichbares, nicht ein von der Wirklichkeit weit entferntes Ideal.

Der Stuart Mill'sche Ausruf: „Es gibt keinen Kreis, wo alle Radien genau gleich groß sind", paßt also nicht mehr für unsere Geometrie. Man wird vielleicht sagen: Ja, aber die Genauigkeit haben wir tatsächlich nur erzielt dadurch, daß wir definitionsgemäß die Ungenauigkeit als Genauigkeit kanonisiert haben. Antwort: Wir haben ganz genau definiert, was Genauigkeit ist. In der sonst bekannten Geometrie gibt es überhaupt keine Definition der Genauigkeit; es ist demnach gegenstandslos nach Genauigkeit zu fragen.

4. Es wird sehr bequem sein, wenn gewisse Punkte $A_1, A_2, \ldots\ldots$ der geometrischen Ebene durch rechtwinklige Koordinaten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots$ fixiert werden, von einer Abbildung zu reden, wobei die Punkte der geometrischen Ebene in Punkte der arithmetischen Ebene übergehen:

$$A_1 \longrightarrow (x_1, y_1), \quad A_2 \longrightarrow (x_2, y_2),$$

Von dieser Abbildung gilt dann, daß sie nicht eindeutig ist. Denn die Zahlen können durch andere Fixierungszahlen ersetzt werden.

Umgekehrt kann man die arithmetische Ebene auf die geometrische Ebene abbilden. Zwei verschiedene Punkte der arithmetischen Ebene gehen dann in zwei verschiedene oder zusammenfallende Punkte über. Eine gerade Linie und ein außerhalb dieser liegender Punkt der arithmetischen Ebene gehen in eine gerade Linie und einen außerhalb (oder auf) dieser liegenden Punkt der geometrischen Ebene über (wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß die Abbildung überhaupt möglich ist). Eine Stützgerade einer Figur der arithmetischen Ebene geht in eine Stützgerade der entsprechenden Figur in der geometrischen Ebene über. Ein konvexes Polygon geht sonach in ein konvexes Polygon über.

5. Eine Kurve in der wirklichen Geometrie wird als der lückenlose Weg eines Punktes erzeugt. In der groben Geometrie wird das bedeuten, daß man eine Reihe von groben Punkten hat, wobei zwei aufeinanderfolgende Punkte inzident sind. Man sieht sofort, daß diese Reihe von Punkten in vielfacher Weise durch eine andere Reihe von Punkten, die mit den vorigen inzident sind, ersetzt werden kann Dies läßt sich so ausdrücken: Eine Kurve in der groben Geometrie kann durch eine endliche geordnete Reihe von feinen Punkten fixiert werden, wobei der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Punkten unter der Punktschwelle liegt. In ganz derselben Weise kann man in einer feinen Geometrie (etwa in der Geometrie der Zeichenebene) die Kurven behandeln. Sie können hier durch eine endliche geordnete Reihe von Punkten der arithmetischen Ebene fixiert werden. Man sieht, daß die arithmetische Geometrie die Rolle spielt, daß sie für jedes vorliegende Erfahrungsgebiet als die „feinere" Geometrie gelten kann, aus welcher man immer die Fixierungen erhalten kann. Ein Kontinuum in der

natürlichen Geometrie wird sich immer durch eine endliche Anzahl von Punkten der arithmetischen Ebene fixieren lassen. Man kann ein arithmetisches Quadrat in so viele Teilquadrate zerlegen, daß jeder dieser Teile in einen Punkt der geometrischen Ebene übergeht, während zwei Nachbarteile immer in inzidente Punkte übergehen.

6. Mit dem arithmetischen Kontinuum als solchem hat man nichts zu tun. Eigentliche mengentheoretische Fragen kommen nicht vor. Es gibt keine unendliche Menge von Dingen. Infolge dessen ist es selbstverständlich, daß irgend eine Menge von Größen ein Maximum hat. Hat man z. B. eine Menge von Größen, deren Fixierungszahlen zwischen 1 und 1000 liegen, so teilt man das Zahlenintervall von 1 bis 1000 in so viele gleich große Intervalle, daß jedes Intervall kleiner als die Schwelle der Fixierungszahl einer Größe der vorliegenden Art ist. Jede der vorgelegten Größen muß dann einem der kleinen Intervalle angehören. Und es ist somit klar, daß ein Maximum (und ein Minimum) existieren muß. In unserer Geometrie wird es sonach im voraus sicher sein, daß das isoperimetrische Problem eine Lösung hat, d. h. in unserer Geometrie ist der Beweis von Steiner für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises genügend und vollständig. Ich kann nicht unterlassen zu dieser Frage ein Zitat aus dem schönen Buche von Blaschke: „Kreis und Kugel" zu bringen: Nachdem Blaschke unter Berücksichtigung aller modernen Forderungen an Strenge den Existenzbeweis geführt hat, fügt er Folgendes hinzu:

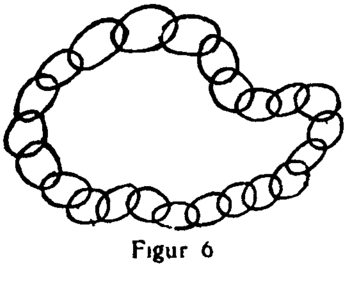
„Der Gedanke des Beweises ist im wesentlichen der alte von Steiner herrührende. Nur haben wir ihn so gewendet, daß dabei die Existenzfrage mit erledigt wurde . . . .

Freilich mußte dabei die ursprüngliche Methode so in das Prokrustesbett der Analysis hineingezwängt werden, daß die frühere Einfachheit stark gelitten hat. Was hätte der alte Steiner, der kein Freund übertriebener Höflichkeit war, zu einer solchen Behandlung gesagt? Günstigenfalls hätte er Faust zitiert:

Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn . . .
Wer will was Lebendiges erkennen und beschreiben,
Sucht erst den Geist herauszutreiben,
Dann hat er die Teile in seiner Hand,
Fehlt leider! nur das geistige Band."

Es gibt aber doch also ein Heilmittel gegen dieses Uebel. Es gibt tatsächlich eine wahre und richtige Geometrie, wo der Beweis von Steiner genau und vollständig ist. Diese Geometrie ist die natürliche Geometrie.

7. Ein anderer Fall, in welchem man auch das Uebel der „spanischen Stiefeln" gefühlt hat, ist der Jordan'sche Kurvensatz. Wie wird dieser Satz in unserer Geometrie aussehen? Einfach so: Wir haben eine geschlossene Reihe von groben Punkten (konvexe Gebilde, vergl. Fig. 6), von denen jeder mit dem folgenden und dem vorhergehenden inzident ist, aber nicht mit den übrigen. Die von diesen groben Punkten gebildete geschlossene Linie (Strom) teilt die Ebene in zwei getrennte Gebiete. Der Beweis wird dadurch geführt, daß man



Figur 6

für je zwei aufeinanderfolgende grobe Punkte einen gemeinsamen Fixierungspunkt auswählt und zeigt, daß das durch diese Fixierungspunkte bestimmte geschlossene Polygon die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, was gerade durch Anwendung der Gebiete der groben Punkte in einfachster Weise geschehen kann.

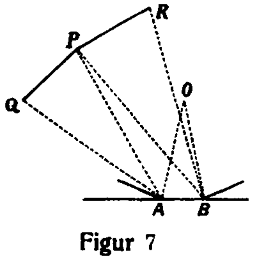
Ganz dieselbe Betrachtung gilt für feine geschlossene Kurven, indem man nur die entsprechenden groben Punkte mit ihren Fixierungspunkten in der arithmetischen Ebene auswählt.

Für die Topologie werden die groben Kurven (und die groben Flächen) vollständig genügen. Für die Mechanik sind sie die allein richtigen.

8. Um eine einfache Anwendung anderer Art zu geben, nehmen wir als Beispiel die Konstruktion der Tangente einer Cykloide, wie sie zum ersten Mal 1638 von Descartes in einem Brief an Pater Mersenne angegeben ist. Zum Beweis läßt Descartes zunächst ein reguläres Polygon abrollen und bemerkt dabei, daß die Tangente der von einem Punkt augenblicklich beschriebenen Bahn senkrecht steht zur Verbindungsgeraden zwischen dem Punkt und demjenigen Eckpunkt des Polygons, um welchen das Polygon momentan gedreht wird. Er fügt nun hinzu, daß dies auch gilt, wenn das Polygon hunderttausend Seiten hat. Es gilt sonach auch für den Kreis.

Dieser Beweis wird heutzutage nicht als befriedigend anerkannt, weil er keine sichere Anknüpfung an klare Definitionen der Tangente und der Bogenlänge hat. Wir wollen versuchen den Beweis des Descartes in einen für unsere natürliche Geometrie giltigen Beweis umzugestalten.

9. Betrachten wir zunächst in der arithmetischen Ebene ein reguläres Polygon „mit 100 000 Seiten", das auf einer geraden Linie abrollt. Die Eckpunkte dieses Polygons werden durch Abbildung auf unsere geometrische Ebene den vollständigen Kreis erzeugen. Und das rollende Polygon gibt den rollenden Kreis, weil die geraden Linien, die die Seiten des Polygons enthalten, in Kreistangenten übergehen müssen (als Stützgerade des Polygons gehen sie in Stützgerade des Kreises über), und weil die Länge des Polygonenumfangs und Teile davon der Länge der Kreisperipherie und ihrer Teile als Fixierungszahlen entsprechen müssen. (Wir kommen später auf diese Frage zurück).

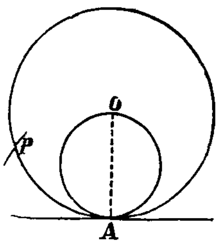


Figur 7

Wenn nun ein Punkt P in fester Verbindung mit dem rollenden Polygon ist, wird dieser Punkt eine Reihe von Lagen erhalten, denjenigen Lagen des Polygons entsprechend, in welchen das Polygon eine Seite auf der festen Geraden hat. Diese Reihe von Punkten folgt so dicht aufeinander, daß sie durch Abbildung auf die geometrische Ebene die ganze Cykloide erzeugen werden. Es sei Q der vorausgehende, R der nachfolgende Punkte von P (Fig. 7). Von Q nach P kommt man durch Drehung um A, von P nach R durch Drehung um B. Beidemal ist der Drehungswinkel α (der Nachbarwinkel des Polygonenwinkels). Wir untersuchen die gebrochene Linie QPR, und fragen, nach welcher Seite sie ihre Hohlheit kehrt. Der Winkel APB sei mit γ bezeichnet. Die Summe der Winkel QPA APB, BPR ist $180^0 - \alpha + \gamma$, und sie wird also kleiner oder größer als 180^0 je nachdem $\gamma < \alpha$ oder $\gamma > \alpha$ ausfällt.

Wenn nun für eine gewisse Abteilung der Rollbewegung des Polygons immer $\gamma < \alpha$ oder immer $\gamma > \alpha$ ausfällt, wird das bedeuten, daß die dieser Abteilung der Bewegung entsprechenden Lagen des Punktes P die Eckpunkte eines konvexen Polygons bilden, und daß die geraden Linien OQ und PR Stützgerade dieses Polygons werden. Die Bedingung $\gamma < \alpha$ (bez. $\gamma > \alpha$) läßt sich offenbar auch so ausdrücken, daß der Punkt P außerhalb (bez. innerhalb) des Kreises ABO liegt (O ist das Zentrum des rollenden Polygons).

10. Durch Abbildung auf unsere geometrische Ebene kommt man nun tatsächlich zum gewünschten Resultat: Der Kreis OAB wird auf dem Kreis mit Durchmesser OA abgebildet. (Fig. 8). Wenn nun P außerhalb des Kreises liegt (was bei der gemeinen Cykloide immer der Fall ist), wird P einen konvexen Bogen beschreiben, für welchen die zu PA in P senkrecht errichtete Gerade eine Stützgerade ist. Aus unseren Betrachtungen können natürlich noch mehr Schlüsse (über Wendepunkte, allgemeinere Cykloiden usw.) gezogen werden, auf die wir hier nicht näher eingehen.



Figur 8

11. In der natürlichen Geometrie ist die einfache Kurve mit einem Polygon gleichwertig, dessen aufeinanderfolgende Seiten unmerklich ineinander übergehen. Die geraden Linien, welche die Seiten des Polygons enthalten, werden als Tangenten bezeichnet. Zwei nah aufeinanderfolgende dieser Tangenten sollen ein Element gemein haben, das auch der Kurve angehört. Wenn das Polygon konvex ist, wird auch die Kurve konvex. Die Tangente wird dann als Stützgerade erkannt. Und dies ist eigentlich die fundamentale anschauliche Eigenschaft der Tangente. Eine natürliche Kurve läßt sich aus einer endlichen Anzahl konvexer Bogen zusammensetzen.

Eine arithmetische Kurve $y = f(x)$ kann bisweilen in eine geometrische Kurve abgebildet werden. Hierzu sind gewisse Bedingungen der Oszillationen der Funktion $f(x)$ erforderlich. Daß die Funktion differenzierbar ist, ist nicht notwendig (wir brauchen ja überhaupt von der Funktion nur eine endliche Anzahl von Werten zu kennen, um die Abbildung auf die geometrische Ebene zu vollziehen), sondern sehr bequem, insofern man durch Berechnung von $f'(x)$ eine brauchbare Fixierungszahl für die Neigung der Tangente erhalten kann. Dies ist aber im voraus nicht sicher; hierzu müssen gewisse Forderungen an die Oszillationen von $f'(x)$ gestellt werden. Wir müssen uns damit begnügen einige hinreichende Bedingungen anzugeben. Wenn $f'(x)$ eine monotone Funktion ist, wird die natürliche Kurve sicher konvex. Die arithmetische Tangente wird dann sicher in eine Stützgerade übergeführt, und wenn $f'(x)$ nicht zu stark variiert, wird die betreffende natürliche Kurve einfach sein, und ihre Tangenten lassen sich gerade durch die Neigungszahl $f'(x)$ fixieren. Natürlich kann man immer in jedem vorliegenden Falle eine genaue Untersuchung hierüber anstellen.

12. Die Bogenlänge eines Bogens kann man in der natürlichen Geometrie zunächst als die Summe seiner geradlinigen Elemente betrachten. Wenn man aber bedenkt, daß die Herstellung dieser Summe wegen der großen Anzahl der Summanden im allgemeinen eine ungenaue Fixierungszahl erzeugt, wird man wenn möglich andere Hilfsmittel zur Herstellung einer genauen Fixierungszahl in Betracht ziehen. Das Problem entsteht schon bei der Fixierung des Umfanges eines Polygons mit wenigen Seiten. Dieser Umfang ist eine an sich existierende Längengröße, die durch die ganze Figur, und nicht durch ihre einzelnen Teile jede für sich, gegeben ist. Wir kommen bei dieser allgemeinen Frage auf die von Archimedes aufgestellten charakterisierenden Eigenschaften der Bogenlänge zurück:

Für jeden konvexen Bogen gibt es eine Größe, die die Länge des Bogens heißen soll, und die den folgenden allgemeinen Bedingungen genügt:

1. Die gerade Linie AB ist kürzer als jeder andere Bogen mit denselben Endpunkten.

2. Wenn zwei konvexe Bogen, die dieselben Endpunkte A und B haben und auf derselben Seite der Geraden AB liegen, eine solche Lage haben, daß der eine den anderen ganz umschließt, so ist die Länge des umschließenden Bogens größer als die des eingeschlossenen.

Wir nehmen diese Archimedischen Größeneigenschaften an für die Fixierungszahlen der natürlichen konvexen Bogen, doch mit dem Vorbehalten, daß wir statt der verlangten Ungleichheiten allein, auch Gleichheiten zulassen. Wir fügen noch hinzu, daß, wenn die Kurve in lineare Elemente zerlegt wird, die Fixierungszahlen derselben immer so gewählt werden können, daß ihre Summe die Fixierungszahl der Bogenlänge erzeugt.

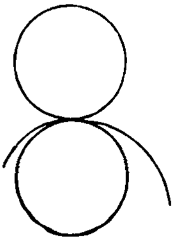
Ist nun ein natürlicher Bogen durch einen arithmetischen **konvexen** Bogen $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ fixiert, läßt sich mit Hilfe von in- und umgeschriebenen Polygonen auf Grund der aufgestellten Größenaxiome für die Bogenlänge leicht beweisen, daß

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

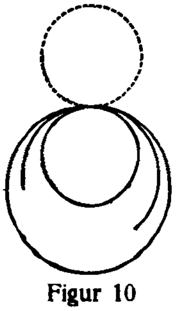
eine brauchbare Fixierungszahl für die Länge des natürlichen Bogens ist. Es ist aber dabei durchaus wesentlich, daß der Bogen $y = f(x)$ konvex ist.

13. Für die natürliche Geometrie ist es sehr wichtig, daß die arithmetische Geometrie ihre Begriffe und Operationen solcherweise erklärt, daß es möglich wird, sie unmittelbar auf die natürliche Geometrie zu überführen. Diese Bedingung ist nicht immer (man könnte sagen: im allgemeinen nicht) durch die gewöhnlichen Hilfsmittel der Analysis erfüllt. Es hat sich bei neueren Untersuchungen gezeigt, wie interessante Sätze sich über konvexe Kurven und Flächen aussagen lassen, wie schöne und einfache Untersuchungen man mit den Begriffen „Stützgerade" und „Stützebene" anstellen kann, und viele von den hierher gehörigen Resultaten lassen sich unmittelbar (oder jedenfalls durch leichte Modifizierung) auf die natürliche Geometrie überführen. Ich werde nun zeigen wie man mit Hilfe ähnlicher Begriffe wie „Stützkreis" und „Stützkugel" gewisse Definitionen von Kurven und Flächen aufstellen kann, die mir geeignet scheinen, die nächsten Grundlagen für eine natürliche Lehre der krummen Gebilde herzustellen.

14. Wir definieren einen **glatten Bogen** als einen Jordanbogen, der in jedem inneren Punkt des Bogens auf jeder Seite des Bogens einen Stützkreis hat, dessen Radius größer als eine feste Grenze r (> 0) ist. Dies ist natürlich so zu verstehen, daß es zwei Kreise (mit Radius $> r$) gibt, die durch den



Figur 9



Figur 10

betreffenden Punkt P des Bogens gehen und durch den Bogen von einander getrennt sind. Der Bogen kann andere Punkte als P mit den Kreisen gemein haben, durchsetzt aber die Kreise nicht. Es ist klar, daß die Kreise einander in P berühren müssen. Der Bogen verläuft entweder außerhalb beider Kreise (Fig. 9) oder außerhalb des einen und innerhalb des anderen (Fig. 10). Der letzte Fall ist aber, wie leicht ersichtlich, auf den ersten zurückzuführen (vergl. den punktierten Kreis).

15. Es fällt in die Augen, daß diese sehr anschauliche Eigenschaft einer Kurve sofort nach sich zieht, daß die Kurve in jedem inneren Punkt eine Tangente mit zwei entgegengesetzten Halbtangenten besitzt. Es folgt dies einfach daraus, daß die beiden gegebenen Stützkreise einander berühren. Uebrigens gibt es in jedem Punkt P der Kurve unendlich viele Stützkreise, erstens zwei mit dem Radius r, dann auch alle Kreise, die innerhalb eines dieser Kreise liegen, und die Kurve in P berühren. Es ist im voraus gegeben, daß auch andere Stützkreise in P existieren (mit Radius $< r$); sie müssen aber alle die Kurve in P berühren. Hieraus folgt, daß wenn P auf der Kurve stetig variiert, die Tangente in P stetig variieren muß. Denn ein Stützkreis (etwa auf der inneren Seite des Bogens) mit Radius r wird immer derart variieren, daß seine Verdichtungskreise auch Stützkreise werden, und hieraus folgt weiter, daß jede Verdichtungsgerade der Tangenten selbst eine Tangente ist.

16. Im Folgenden werden wir die innere und äußere Seite des Bogens unterscheiden und dementsprechend reden wir von inneren und äußeren Stützkreisen. Fassen wir nun das ganze Büschel von Berührungskreisen im Punkt P ins Auge, so ist ersichtlich, daß dieses Büschel aus zwei stetigen Scharen besteht: die inneren Stützkreise und die äußeren Stützkreise. Diese Scharen sind durch zwei bestimmte Stützkreise abgeschlossen. Jeder der übrigen Berührungskreise in P kann von zweierlei Art sein: Entweder ist er Stützkreis im kleinen, d. h. er ist Stützkreis für einen Teilbogen des ursprünglichen Bogens, für welchen P ein innerer Punkt ist, oder er schneidet den Bogen in P oder in unendlich vielen Punkten mit dem Grenzpunkt P. Nehmen wir nun alle Stützkreise in Betracht, auch die Stützkreise im kleinen, so folgt hieraus, daß die inneren Stützkreise einen inneren Grenzkreis und die äußeren einen äußeren Grenzkreis haben. Die beiden Grenzkreise sind im allgemeinen nicht Stützkreise. Sie werden als innerer und äußerer Schmiegungskreis bezeichnet. Sie können zusammenfallen, und die Kurve hat dann im Punkte einen einzigen Schmiegungskreis. Sie können aber auch verschieden sein. Die zwischenliegenden Berührungskreise werden dann den Bogen in P durchschneiden oder in unendlich vielen Punkten schneiden mit einer Verdichtungsstelle in P. Ein Berührungskreis, welcher den Bogen in P durchkreuzt, soll ein Kreuzkreis des Bogens genannt werden.

17. Glatte Kurven werden durch Transformationen reziproker Radien wieder in glatte Kurven übergeführt. Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Der Satz ist leicht dahin zu erweitern, daß glatte Kurven durch reguläre analytische Transformationen in glatte Kurven übergehen. Die Stützkreise gehen nämlich in „Stützkurven" über, für welche wieder Stützkreise existieren usw.

18. Es ist nun aber besonders interessant, daß eine glatte Kurve im Kleinen durch Inversion in eine glatte konvexe Kurve verwandelt werden kann. In einem inneren Punkt P der Kurve legen wir einen inneren Stützkreis γ mit Radius r derart, daß der Bogen ganz außerhalb γ

fällt. Wir nehmen um P einen kleinen Bogen der Kurve, so klein, daß die inneren Stützkreise mit Radius r für diese Umgebung so wenig untereinander verschieden sind, daß es einen gemeinsamen inneren Punkt O aller dieser Kreise gibt. Hieraus folgt, daß jeder Punkt des kleinen Bogens einen Stützkreis durch O hat. Mit O als Zentrum wird dann der kleine Bogen durch Inversion in einen anderen Bogen übergeführt, der in jedem Punkt eine Stützgerade hat, d. h., er ist ein konvexer Bogen.

Der Begriff der glatten Kurve wird somit sehr wesentliche Vorteile für geometrische Untersuchungen haben. Es ist übrigens sofort ersichtlich, daß wenn wir die Kurve (im Kleinen) durch eine Gleichung $y = f(x)$ darstellen, dann wird $f(x)$ einmal differenzierbar, aber nicht notwendig zweimal. Hingegen kann man sagen, daß die Funktion $f'(x)$ beschränkte Differenzenquotienten hat, also

$$\left| \frac{F_1(x_1) - F_1(x_2)}{x_1 - x_2} \right| < M, \quad x_2 \neq x_2,$$

wo M eine feste Zahl ist.

19. Der angegebene Kurvenbegriff ist unmittelbar in der natürlichen Geometrie zu verwenden. Die vorstehenden Betrachtungen können auch hier im wesentlichen durchgeführt werden. Nur existieren natürlich unendlich viele Schnittpunkte nicht mehr. Die Berührungskreise der Kurve sind entweder Stützkreise oder Kreuzkreise in dem Sinne, daß sie einen gewissen Bogen (ohne scharf bestimmte Endpunkte) mit der Kurve gemein haben, längs dessen sie sich an die Kurve stützen bezw. durch die Kurve hindurchgehen. Es läßt sich auf diesen Grundlagen die elementare Lehre von den Schmiegungskreisen, Evoluten usw. für die natürlichen Kurven sehr einfach begründen.

20. Nun zu den Flächen! Wir definieren eine glatte Fläche als ein einfaches Flächenstück derart, daß jeder innere Punkt des Flächenstücks eine Stützkugel (mit nach unten beschränktem Radius) auf jeder Seite der Fläche aufweist. Die Fläche hat dann notwendig in jedem inneren Punkt eine Tangentialebene, die stetig mit dem Punkt variiert. Es ergibt sich durch ganz ähnliche Betrachtungen wie bei den glatten Kurven, daß es in jedem Punkte der Fläche zwei Schmiegungskugeln gibt, deren jede eine Reihe von Stützkugeln (im Großen oder im Kleinen) abgrenzt. Bezüglich Transformationen gelten ganz ähnliche Sätze wie bei den glatten Kurven:

Glatte Flächen gehen durch reguläre analytische Transformationen in glatte Flächen über, und jede glatte Fläche läßt sich im Kleinen durch Inversion in eine glatte konvexe Fläche überführen.

Die Fläche wird von einer Ebene, die nicht Tangentialebene ist, in einer glatten ebenen Kurve geschnitten (weil Stützkugeln in Stützkreisen geschnitten werden).

21. Eine glatte Raumkurve ist die gemeinsame Kante zweier glatten Flächen, die einander nicht berühren. Durch Inversion kann eine glatte Raumkurve im Kleinen in die Kante zweier konvexer glatter Flächen überführt werden.

Was die Theorie der glatten Kurven und Flächen besonders abgerundet erscheinen läßt, ist daß diese Gebilde der arithmetischen Geometrie durch Abbildung auf den wirklichen Raum unmittelbar wieder glatte Kurven und Flächen geben werden.

Man kann natürlich den Kurven und Flächen weitere spezialisierende Bedingungen auferlegen, aber die hier gegebenen Definitionen dürften die allgemeinsten Definitionen sein, die bei Abbildung auf den wirklichen Raum zu natürlichen glatten Kurven und Flächen führen.

22. Die gewöhnliche Theorie der Kurven und Flächen hat einen zu stilisierten Charakter. Was wir gewöhnlich von unseren Kurven und Flächen verlangen, sind Bequemlichkeitsbedingungen, die bei Ausführung der Rechnungen als natürlich und leicht eingeführt werden und haben oft keine eigentliche Anknüpfung an unsere wirklichen Gebilde.

Einige einleitende Arbeiten in der Richtung einer anschaulichen Geometrie liegen schon vor. Die schönen Untersuchungen von C. Juel über Kurven in der Ebene und im Raume und über Flächen dritter Ordnung geben ein Beispiel für die Behandlung der einleitenden projektiv-topologischen Eigenschaften der krummen Gebilde. Auch für die übrige Geometrie liegen einige Ansätze vor. Man muß aber weiter. Einfache Sätze über Ovale werden oft nur bewiesen unter Voraussetzung mehrmaliger Differenzierbarkeit, was im allgemeinen nur eine Bequemlichkeit bedeutet. Die wahre Geometrie entsteht erst wenn es gelingt auf derartige Voraussetzungen zu verzichten. Der bekannte und oft behandelte Satz von Minkowski über elliptisch-gekrümmte Ovale gilt z. B. auch in dieser Form: Wenn ein Oval im kleinen höchstens vier Punkte mit einer Hyperbel gemein haben kann, dann gilt das auch im Großen.

Bei Versuchen in dieser Richtung zeigt sich immer, daß die Sätze eine Form annehmen, bei welcher das Kontinuum keine wesentliche Rolle mehr spielt. Wir können dann ebensowohl diskrete Punktmengen wie stetige Punktmengen in Betracht ziehen: Kurven und Polygone „mit 100000 Seiten" sind sozusagen gleichwertig. Wir nähern uns dann der natürlichen Geometrie. Für die Geometrie der Flächen wird man schließlich, auch für tiefer liegende Probleme eine Form finden, in welcher das „vor" und „nachher", „innerhalb" und „außerhalb" der Begriff der geordneten endlichen Menge die eigentlichen Schlußgrundlagen bilden. Es möge der künftigen Wissenschaft vorbehalten sein, diese neue natürliche Geometrie zu schaffen!