

## Beweis eines Funktionalsatzes für konvexe Körper

Von H. HADWIGER in Bern

Von W. BLASCHKE stammt die Idee, die vier fundamentalen Maßzahlen eines konvexen Körpers des gewöhnlichen Raumes, nämlich die Konstante  $C = 4\pi$ , das Integral der mittleren Krümmung  $M$ , die Oberfläche  $F$  und das Volumen  $V$  im wesentlichen durch ihre Eigenschaften der Bewegungsinvarianz, Additivität und der Beschränktheit zu charakterisieren<sup>1)</sup>. Meines Wissens ist ein diesbezüglicher uneingeschränkter Satz noch nicht nachgewiesen worden<sup>2)</sup>.

An die Stelle der Beschränktheit kann man auch die etwas stärkere Voraussetzung der Stetigkeit treten lassen<sup>3)</sup>.

In der vorliegenden Note beweise ich nun, daß die vier Maßzahlen  $C$ ,  $M$ ,  $F$  und  $V$  im wesentlichen die einzigen bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale konvexer Körper sind<sup>4)</sup>. Dies ist Inhalt des weiter unten ausführlicher formulierten Funktionalsatzes. Vorbereitend erklären wir zunächst einige hierzu erforderlichen Begriffe.

Wir betrachten Funktionale  $\varphi(A)$ , die über der Klasse der konvexen Körper  $A$  des dreidimensionalen euklidischen Raumes eindeutig und reellwertig definiert sind. Ein Funktional heißt *bewegungsinvariant*, falls

$$(I) \quad \varphi(A) = \varphi(A')$$

ist, wobei  $A$  und  $A'$  kongruent sind, geschrieben  $A \simeq A'$ .

<sup>1)</sup> W. BLASCHKE, Vorlesungen über Integralgeometrie II, Hamburger Mathematische Einzelschriften, 22. Heft, Leipzig und Berlin 1937; insbesondere S. 43.

<sup>2)</sup> Die an sich naheliegende Beweiskonstruktion, welche eine Zerlegung eines Funktionals der fraglichen Eigenschaften in die den Grundfunktionalen entsprechenden Bestandteile vorsieht, führt beim Besuch der Identifikation des letzten Anteils, der dem Volumen entspricht, auf erhebliche Schwierigkeiten. W. BLASCHKE überwindet diese durch Hinzunahme einer weiteren sich nur auf diesen Teil beziehenden Voraussetzung (Affininvarianz). Da die anderen Teile diese Zusatzvoraussetzung nicht erfüllen, wird nicht eine gewünschte Charakterisierung durch gemeinsame Eigenschaften erzielt.

<sup>3)</sup> Im Hinblick auf die vielgestaltigen Anwendungen einer solchen Charakterisierung wäre es sehr wünschbar, einen entsprechenden Satz mit den von W. BLASCHKE vorgeschlagenen Voraussetzungen zu erbringen, da eine bestehende Beschränktheit wesentlich leichter verifizierbar ist, als eine Stetigkeit. Dies scheint jedoch ziemlich schwierig zu sein!

<sup>4)</sup> Ein entsprechender sich auf den  $k$ -dimensionalen Raum beziehender Satz soll im Rahmen einer ausführlicheren Darstellung veröffentlicht werden. Es handelt sich um die Charakterisierung der  $k + 1$  MINKOWSKISCHEN Quermaßintegrale.

Ein Funktional heißt *additiv*, falls

$$(II) \quad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B) + \varphi(AB)$$

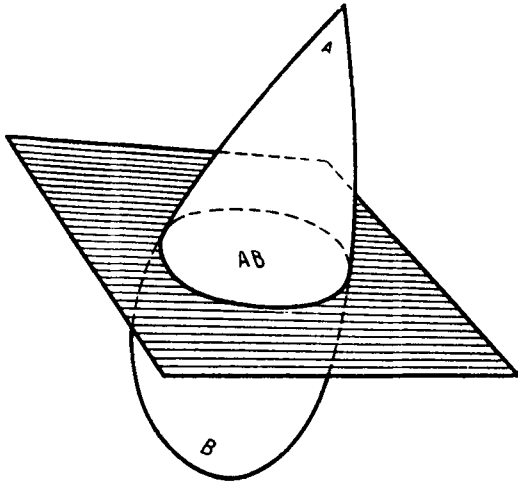


Abb. 1.

gilt, wobei ein konvexer Körper  $A + B$  durch einen ebenen Schnittbereich  $AB$  in die beiden ebenfalls konvexen Teilkörper  $A$  und  $B$  zerlegt sei (vgl. Abb. 1).

Ein Funktional heißt endlich *stetig*, falls für eine konvergente Folge  $\{A_n\}$  konvexer Körper mit  $A_n \rightarrow A$

$$(III) \quad \varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A)$$

gilt.

Wir formulieren nun den folgenden

**Funktionalssatz:**

*Die Mannigfaltigkeit der über der Klasse der konvexen Körper  $A$  des gewöhnlichen Raumes definierten bewegungsinvarianten, additiven und stetigen Funktionale  $\varphi(A)$  ist identisch mit der linearen Schar*

$$\varphi(A) = \alpha C(A) + \beta M(A) + \gamma F(A) + \delta V(A),$$

*welche durch die vier Grundfunktionale  $C(A)$ ,  $M(A)$ ,  $F(A)$  und  $V(A)$  aufgespannt wird. Die vier Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  sind jedem Funktional eindeutig und fest zugeordnet.*

Die Anwendung dieses Satzes zur Herleitung zahlreicher alter und neuer Resultate der Maßgeometrie und Integralgeometrie konvexer Körper gestaltet sich sehr ergebnisreich<sup>1)</sup>.

Die Aufgabe dieser Arbeit bestehe indessen nur darin, den Beweis für die Richtigkeit des Funktionalssatzes zu erbringen.

**Beweis:**

Ein Funktional, das die Eigenschaften (I), (II) und (III) aufweist, bezeichnen wir kurz als (I, II, III)-Funktional.

Die Tatsache, daß die vier Grundfunktionale  $C(A)$ ,  $M(A)$ ,  $F(A)$  und  $V(A)$  einzeln (I, II, III)-Funktionale sind, ist geläufig und wird hier als bekannt vorausgesetzt. Da die drei Eigenschaften bei Linearkombination

<sup>1)</sup> Ein Aufsatz „Über einige Anwendungen eines Funktionalssatzes über konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie“ erscheint voraussichtlich in Heft 4, Bd. 54 (1950) der Monatshefte für Mathematik, Wien.

von Funktionalen erhalten bleiben, folgt aus dem soeben erwähnten Sachverhalt, daß die im Funktionalsatz angesetzte lineare Schar aus (I, II, III)-Funktionalen besteht. Unsere Aufgabe besteht demnach darin, umgekehrt zu zeigen, daß jedes (I, II, III)-Funktional in der erwähnten Schar enthalten ist.

Es sei also  $\varphi(A)$  irgendein (I, II, III)-Funktional. Es muß die Existenz von vier Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  nachgewiesen werden, so daß für alle  $A$  die im Funktionalsatz angeführte Darstellung gilt.

Wir betrachten zunächst einen beliebig gewählten Punkt  $P$ , und wir bestimmen eine Konstante  $\alpha$  so, daß

$$(1) \quad \varphi(P) = 4\pi\alpha = \alpha C(P)$$

ist. Wegen (I) gilt offenbar (1) für alle Punkte. Wir setzen nun

$$(2) \quad \varphi_1(A) = \varphi(A) - \alpha C(A).$$

Dies ist wieder ein (I, II, III)-Funktional und insbesondere gilt

$$(3) \quad \varphi_1(P) = 0$$

für jeden Punkt  $P$ . Es bezeichne jetzt  $U$  eine Strecke der Länge  $u$ . Mit Rücksicht auf (I) ist offenbar  $\varphi_1(U) = f(u)$ . Mit (II) und (3) folgert man das Bestehen der CAUCHYSchen Funktionalgleichung

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Da wegen (III)  $f(u)$  für  $u > 0$  stetig sein muß, läßt sich nach geläufiger Tatsache eine Konstante  $\beta$  so finden, daß  $f(u) = \pi\beta u$  ist. Somit hat man

$$(4) \quad \varphi_1(U) = \beta M(U)$$

für jede Strecke  $U$ . Nun setzen wir weiter

$$(5) \quad \varphi_2(A) = \varphi_1(A) - \beta M(A),$$

wodurch ein (I, II, III)-Funktional gewonnen wird, für welches

$$(6) \quad \varphi_2(U) = 0$$

für jede Strecke  $U$  gilt.

Wir betrachten jetzt einen ebenen polygonalen konvexen Bereich  $P$ . Wird  $P$  durch Schnitte, die man sich orthogonal zu der Trägerebene von  $P$  geführt denke, in konvexe Teilpolygone  $P_v$  zerlegt (vgl. Abb. 2), so gewinnt man durch wiederholte Anwendung von (II) mit jeweiliger Berücksichtigung von (6) die Relation

$$(7) \quad \varphi_2(P) = \sum_v \varphi_2(P_v),$$

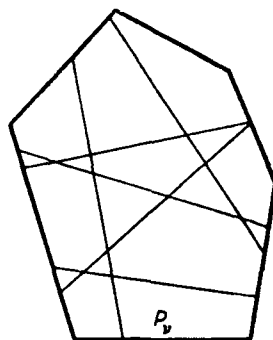


Abb. 2.

durch welche eine einfache Additivität des Funktionals (5) zum Aus-

druck gebracht ist. Die Konsequenz von (I) ist nun die, daß für zwei konvexe ebene polygonale Bereiche  $P$  und  $Q$ , die im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich sind,

$$(8) \quad \varphi_2(P) = \varphi_2(Q)$$

gelten wird. Diese Einsicht ergibt sich leicht auf Grund von (7) mit Hilfe einiger einfacher zusätzlicher Betrachtungen. Da nach einem geläufigen klassischen Lehrsatz aber flächengleiche Polygone immer zerlegungsgleich sind, folgt so, daß  $\varphi_2(P) = f(p)$  sein muß, wo  $p$  den Flächeninhalt von  $P$  bezeichnet. Eine einzige Schnittführung läßt aus (7) erneut die Funktionalgleichung  $f(p + q) = f(p) + f(q)$  hervorgehen. Da wegen (III)  $f(p)$  für  $p > 0$  stetig sein muß, läßt sich eine Konstante  $\gamma$  so wählen, daß  $f(p) = 2\gamma p$  ist. Wird  $P$  als uneigentlicher konvexer Körper des Raumes aufgefaßt, so ist  $F(P) = 2p$  zu setzen, und somit ergibt sich für alle ebenen konvexen polygonalen Bereiche  $P$

$$(9) \quad \varphi_2(P) = \gamma F(P).$$

Endlich machen wir den Ansatz

$$(10) \quad \psi(A) = \varphi_2(A) - \gamma F(A),$$

wodurch wieder ein (I, II, III)-Funktional erklärt ist, für das

$$(11) \quad \psi(P) = 0$$

für jeden ebenen polygonalen Bereich  $P$  gilt.

Es bezeichne nun  $S$  ein konvexes Polyeder. Wird dieses durch ebene Schnitte in konvexe Teilpolyeder  $S_v$  zerlegt, so folgt durch wiederholte Anwendung von (II) mit jeweiliger Berücksichtigung von (11) die Relation

$$(12) \quad \psi(S) = \sum_v \psi(S_v),$$

wodurch wieder eine einfache Additivität des mit (10) eingeführten Funktionals ausgedrückt wird. Sind zwei konvexe Polyeder  $S$  und  $T$  im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich, so folgt aus (12) offenbar

$$(13) \quad \psi(S) = \psi(T).$$

An dieser Stelle behindert nun eine typische Schwierigkeit den einfachen durch die vorhergehende Entwicklung nahegelegten Weg des Weiter-schließens. Wegen des HILBERT-DEHNSchen Zerlegungsdilemmas kann aus (13) nicht gefolgert werden, daß  $\psi(S)$  als Funktion des Volumens darstellbar ist. — Wir betrachten jedoch zunächst nur solche Polyeder  $P$ , die mit einem Würfel zerlegungsgleich sind. Innerhalb dieser speziellen Polyederklasse gilt nun offensichtlich  $\psi(P) = f(p)$ , wenn wir vorübergehend das Volumen von  $P$  mit  $p$  bezeichnen. Dies folgt nach (13) mit Rücksicht auf die triviale Tatsache, daß ein Würfel bis auf die Lage im Raum durch sein Volumen eindeutig bestimmt ist.

Zerschneiden wir einen Würfel parallel zu einer Seitenfläche in zwei Paralleleotope und beachten wir den Umstand, daß diese wieder zu der oben festgelegten speziellen Polyederklasse gehören, so folgert man neuerdings die Relation  $f(p+q) = f(p) + f(q)$ . Demnach gilt wieder wegen (III)  $f(p) = \delta p$ , wo endlich  $\delta$  eine vierte Konstante bezeichnet. Also hat man

$$(14) \quad \psi(P) = \delta V(P)$$

für alle Polyeder  $P$ , die mit einem Würfel zerlegungsgleich sind<sup>1)</sup>.

Endlich wählen wir den Ansatz

$$(15) \quad \chi(A) = \psi(A) - \delta V(A),$$

womit wir zum letztenmal ein neues (I, II, III)-Funktional in den Kreis unserer Betrachtungen schließen. Dieses hat wegen (14) und (11) die Eigenschaft, für alle ebenen Polygone und für alle mit einem Würfel zerlegungsgleichen Polyeder zu verschwinden, was wir durch

$$(16) \quad \chi(P) = 0$$

ausdrücklich festhalten wollen.

Es sollen nun  $S$  und  $T$  zwei beliebige konvexe Polyeder bezeichnen. Der Ursprungspunkt  $Z$  des Raumes sei ein innerer Punkt von  $T$ . Durch die Anschrift  $S \times T$  bezeichnen wir dasjenige ebenfalls konvexe Polyeder, das durch die MINKOWSKISCHE lineare Kombination aus  $S$  und  $T$  hervorgeht. Wir erklären diese bekannte Operation noch kurz in einer für uns geeigneten Weise. Bedeutet  $T^\sigma$  das durch eine Schiebung  $\sigma$  aus  $T$  hervorgehende Polyeder, so ist

$$(17) \quad S \times T = \sum T^\sigma \quad (Z^\sigma \in S),$$

d.h. die MINKOWSKISCHE Summe  $S \times T$  ist die Vereinigungsmenge aller mit  $T$  translationsgleichen Polyeder, für welche der dem Ursprung  $Z$  entsprechende Punkt zu  $S$  gehört.

Weiter bedeute  $\tau$  eine Raumrichtung, die wir durch einen in  $Z$  angreifenden Einheitsvektor festlegen wollen.

Es sollen nun  $S(\tau)$  und  $T(\tau)$  die ebenen polygonalen Stützbereiche bezeichnen, in welchen die Polyeder  $S$  und  $T$  durch die beiden der Richtung  $\tau$  zugeordneten<sup>2)</sup> parallelen Stützebenen berührt werden. Die

<sup>1)</sup> Da nicht bekannt ist, ob die Teilklasse der speziellen Polyeder  $P$  in der Klasse der beliebigen Polyeder  $S$  in einem geeigneten Sinn dicht liegt, kann aus der Gültigkeit von (16) für  $P$  nicht dadurch auf eine solche für  $S$  geschlossen werden, daß man schlechthin die Stetigkeit beansprucht.

Hierbei ist die Beschränkung auf konvexe Polyeder sehr wesentlich. Wird diese Voraussetzung nicht beachtet, so kann die hier aufgeworfene Frage natürlich trivial beantwortet werden. Andererseits ist die Voraussetzung der Konvexität für die Gültigkeit eines Funktionalsatzes der von uns betrachteten Form unentbehrlich.

<sup>2)</sup> Die Stützebenen stehen orthogonal zum Richtungsvektor, der in denjenigen Halbraum weist, der den Körper nicht enthält.

diesen Bereichen zukommenden Dimensionen seien  $i(\tau)$  und  $j(\tau)$ . Ferner sei  $\overline{T}(\tau)$  die konvexe abgeschlossene Hülle von  $Z$  und  $T(\tau)$ ; es handelt sich offenbar um ein  $1 + j(\tau)$  dimensionales Pyramidenpolyeder.

Wie man sich leicht auf Grund der Erklärung (17) überlegt, gilt für die MINKOWSKISCHE Summe folgende Darstellung

$$(18) \quad S \times T = S + \sum_{\tau} S(\tau) \times \overline{T}(\tau),$$

wobei sich die Summation nur über diejenigen Richtungen  $\tau$  zu erstrecken braucht, für welche die betreffenden Summanden der Darstellungsformel 3-dimensional sind; hierzu ist jedenfalls die Bedingung  $i(\tau) + j(\tau) \geq 2$  notwendig. Wir wollen nun zunächst voraussetzen, daß sich die beiden Polyeder insofern in einer allgemeinen relativen Lage befinden, als für alle  $\tau$  die Bedingung  $i(\tau) + j(\tau) \leq 2$  erfüllt ist. Das Nichterfülltsein dieser Bedingung bedeutet, daß das eine Polyeder Kanten aufweist, die zu Seitenflächen des anderen Polyeders parallel sind oder daß die Polyeder sogar parallele Seitenflächen besitzen; diese, eine spezielle relative Lage der Polyeder andeutenden Vorkommnisse, seien also zunächst ausgeschlossen.

Die in (18) vorgesehene Summation erstreckt sich demnach über endlich viele Richtungen  $\tau$ , für die nunmehr stets  $i(\tau) + j(\tau) = 2$  zu gelten hat. Diese lassen sich somit in drei Klassen  $\tau_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ) so einteilen, daß  $i(\tau_\nu) = \nu$  und  $j(\tau_\nu) = 2 - \nu$  gilt. Setzen wir jetzt noch abkürzend  $T_\nu = \sum_{\tau_\nu} S(\tau) \times \overline{T}(\tau)$ , so nimmt unsere Darstellungsformel die übersichtliche Form

$$(19) \quad S \times T = S + T_0 + T_1 + T_2$$

an. Aus der vorstehenden Konstruktion folgt, daß das Polyeder  $T_0$  mit  $T$  zerlegungsgleich ist. Nach Ansatz (15) ist klar, daß das Additionsgesetz (12) sinngemäß auch für das Funktional  $\chi$  gilt. Hieraus folgert man die Beziehung

$$(20) \quad \chi(T_0) = \chi(T).$$

Weiter stellt man fest, daß die Polyeder  $T_1$  und  $T_2$  in lauter gerade oder schiefe Zylinderpolyeder zerfallen. Nach einer geläufigen Tatsache der Elementargeometrie sind somit  $T_1$  und  $T_2$  mit einem Würfel zerlegungsgleich. Nach (16) hat man somit

$$(21) \quad \chi(T_1) = \chi(T_2) = 0.$$

Durch nochmalige Anwendung des oben erwähnten Additionsgesetzes gewinnt man nun nach (19) die für uns wesentliche Schlüsselrelation

$$(22) \quad \chi(S \times T) = \chi(S) + \chi(T).$$

Dies wurde allerdings unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die

beiden Polyeder  $S$  und  $T$  sich in der oben erörterten allgemeinen relativen Lage befinden. Nun läßt sich aber ein Polyeder  $T$ , das sich zu  $S$  in einer speziellen Lage befindet, stets als Grenzpolyeder einer Folge mit ihm kongruenter in allgemeiner Lage darstellen, so daß die übliche Beanspruchung von (III) die uneingeschränkte Geltung von (22) ergibt; hierbei wurde noch eine geläufige Stetigkeitseigenschaft der MINKOWSKI-schen Addition gebraucht.

Es sei  $\lambda > 0$  und es bezeichne  $\lambda T$  das zu  $T$  homothetische Polyeder, das durch Streckung im Verhältnis  $1:\lambda$  vom Ursprung  $Z$  aus, aus  $T$  hervorgeht. Setzen wir  $\chi(\lambda T) = f(\lambda)$ , so schließt man nach (22) mit der geläufigen Relation  $\lambda T \times \mu T = (\lambda + \mu) T$  auf die bereits mehrfach beanspruchte Funktionalgleichung  $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$ . Wegen (III) ist wieder  $f(\lambda) = f(1)\lambda$ , so daß man

$$(23) \quad \chi(\lambda T) = \lambda \chi(T)$$

gewinnt.

Nun bedeute  $p(T, \tau)$  die Stützgröße von  $T$  in Richtung  $\tau$  bezüglich des Ursprungs  $Z$ , den wir als inneren Punkt von  $T$  vorausgesetzt haben. Dann ist bekanntlich

$$(24) \quad M(T) = \int p(T, \tau) d\tau.$$

$d\tau$  bezeichnet hier das Oberflächendifferential der durch den Richtungsvektor  $\tau$  festgelegten Einheitskugel um  $Z$ .

Nachfolgend bedeute  $\varkappa$  eine Drehung um  $Z$  und durch  $T^*$  und  $\tau^*$  sollen das Polyeder und der Richtungsvektor bezeichnet werden, welche nach Ausübung von  $\varkappa$  aus  $T$  und  $\tau$  hervorgegangen sind.

Für festes  $\tau_0$  ist  $p(T, \tau_0^*)$  eine mittelbare<sup>1)</sup> Funktion über der Drehgruppe. Dies bedeutet folgendes: Zu einem beliebigen  $\varepsilon > 0$  gibt es ein System von endlich vielen Drehungen  $\varkappa_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), so daß für jede beliebige weitere Drehung  $\varkappa$  stets

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n p(T, \tau_0^{*\varkappa_\nu}) - \frac{1}{4\pi} \int p(T, \tau) d\tau \right| < \varepsilon$$

gilt. Hierbei stellt  $\varkappa_\nu + \varkappa$  diejenige Drehung dar, die durch aufeinanderfolgende Ausführung der Drehungen  $\varkappa_\nu$  und  $\varkappa$  erzeugt wird. Die oben stehende Relation läßt sich nach einer naheliegenden Umdeutung im linksstehenden Ausdruck auch auf die Form

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n p(T^{-\varkappa_\nu}, \tau_0^*) - \frac{1}{4\pi} M(T) \right| < \varepsilon$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. HADWIGER, Über eine Mittelwertformel für Richtungsfunktionale im Vektorraum und einige Anwendungen; Journal für die reine und angewandte Mathematik 185, Berlin 1943, insbesondere S. 3: Ein Hilfssatz über RIEMANNsche Integrale von Funktionen auf Kugelflächen.

bringen, wobei noch (24) verwendet wurde, und  $-z$  die zu  $z$  inverse Drehung bezeichnen soll. Da  $\tau_0^* = \tau$  eine beliebige Richtung repräsentiert, kann auch

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n p(T^{-z_i}, \tau) - \frac{1}{4\pi} M(T) \right| < \varepsilon$$

geschrieben werden.

Beachtet man nun die für die Stützgrößen gültigen Gesetze, wonach  $p(S \times T, \tau) = p(S, \tau) + p(T, \tau)$  und  $p(\lambda T, \tau) = \lambda p(T, \tau)$  gilt, so läßt sich die oben gewonnene Relation in der folgenden Form darstellen:

$$(25) \quad \left| p(T_n, \tau) - \frac{1}{4\pi} M(T) \right| < \varepsilon.$$

Hierbei bezeichnet

$$(26) \quad T_n = \frac{1}{n} T^{-z_1} \times \frac{1}{n} T^{-z_2} \times \dots \times \frac{1}{n} T^{-z_n}.$$

Ist jetzt  $K$  eine Kugel vom Radius  $r$ , den wir so wählen, daß  $4\pi r = M(T)$  ist, so daß also

$$(27) \quad M(T) = M(K)$$

gilt, so läßt sich aus (25) entnehmen, daß sich eine konvergente Folge  $\{T_n\}$  nach (26) so konstruieren läßt, daß  $T_n \rightarrow K$  ausfällt. Andererseits folgt aus (22) und (23) in Verbindung mit (I), daß stets

$$(28) \quad \chi(T_n) = \chi(T)$$

gelten muß. Demnach muß wegen (III) offenbar mit  $T_n \rightarrow K$

$$(29) \quad \chi(T) = \chi(K)$$

sein. Diese Relation muß aber auch richtig sein, wenn wir an Stelle von  $T$  speziell einen Würfel  $W$  treten lassen, dessen Größe gemäß (27) durch  $M(W) = M(K)$  bestimmt ist. Da nach (16) aber  $\chi(W) = 0$  ist, hat dies die Konsequenz, daß  $\chi(K) = 0$  sein muß. So folgt endlich nach (29)

$$(30) \quad \chi(T) = 0.$$

Da aber  $T$  ein beliebiges konvexes Polyeder darstellt, folgt so, indem wir (III) ein letztes Mal anwenden, daß für einen beliebigen konvexen Körper  $A$

$$(31) \quad \chi(A) = 0$$

zu gelten hat.

Lesen wir jetzt die Relationen (31), (15), (10), (5), (2) in dieser Reihenfolge rückwärts, so läßt sich die gesuchte Darstellung

$$(32) \quad \varphi(A) = \alpha C(A) + \beta M(A) + \gamma F(A) + \delta V(A)$$

ablesen. Damit ist der Beweis des Funktionalsatzes abgeschlossen.