Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 59, 1 – 14 (1989)

Über Relationen zwischen Artinschen L-Funktionen

Von E. KLEINERT

1. Einleitung

In seiner Arbeit [1], dann aufs neue in [2], hat EMIL ARTIN 1923 die nach ihm benannten L-Funktionen eingeführt, deren Grundeigenschaften folgendermaßen beschrieben werden können: es sei L/K eine endliche Galoissche Erweiterung von Zahlkörpern mit der Gruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L/K)$,

$$a(G) = K_0(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{Z}\chi_i,\ \chi_i \in \mathrm{Irr}\ G$$

der Darstellungsring von G und $\mathscr{M}$ der Körper der meromorphen Funktionen auf der komplexen Zahlebene. Die Bildung der Artinschen L-Funktionen erweist sich dann als Homomorphismus

$$\mathscr{L}(L/K): \begin{cases} (a(G), +)) \to \mathscr{M}^{\times}, \\ \chi \to L(s, \chi); \end{cases}$$

ist $L \supset E \supset K$ ein Zwischenkörper und H die Fixgruppe von E, so kommutiert das Dreieck

$$\begin{tikzcd} a(G) \arrow[dr, "\mathscr{L}(L/K)"] & \\ & \mathscr{M}^{\times}, \\ a(H) \arrow[uu, "\mathrm{ind}"] \arrow[ur, "\mathscr{L}(L/E)"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

in dem $\mathrm{ind} = \mathrm{ind}_H^G$ die Induktion von Charakteren bezeichnet; ist zusätzlich E/K galois'sch und $\bar{G} = G/H$, so kommutiert das Dreieck

$$\begin{tikzcd} a(G) \arrow[dr, "\mathscr{L}(L/K)"] & \\ & \mathscr{M}^{\times}, \\ a(\bar{G}) \arrow[uu, "\mathrm{inf}"] \arrow[ur, "\mathscr{L}(E/K)"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

in dem $\mathrm{inf} = \mathrm{inf}_{\bar{G}}^G$ das Hochheben von Charakteren bezeichnet. Schließlich ist $L(s, 1) = \zeta_K(s)$ die Zetafunktion von K, und die Funktionen

$$\Lambda(s, \chi) = A(\chi)^{s/2}\, \gamma(s, \chi)\, L(s, \chi)$$

mit geeigneten „Gammafunktoren“ $\gamma(s, \chi)$ und einer Konstanten $A(\chi)$, erfüllen eine Funktionalgleichung

$$\Lambda(s, \chi) = W(\chi)\, \Lambda(1 - s, \bar{\chi}) \tag{3}$$

(für Näheres siehe [5]).

Die Frage nach Relationen zwischen L-Funktionen, also nach dem Kern von $\mathscr{L}(L/K)$, wurde schon von ARTIN gestellt und seither sporadisch aufgegriffen (siehe [6] und [7]). ARTIN zeigte, daß für $K = \mathbb{Q}$, $\mathscr{L}(L/\mathbb{Q})$ injektiv ist; zusammen mit (1) und (2) erhält man daraus eine allgemeine Antwort: man wähle irgendeinen über $\mathbb{Q}$ galoisschen Erweiterungskörper $\tilde{L}$, so daß ein Körperturm

$$\begin{tikzcd} \tilde{L} \arrow[d, dash] \arrow[dd, bend left=60, dash, "H"] \arrow[ddd, bend right=60, dash, "M"'] \\ L \arrow[d, dash, "G"] \\ K \arrow[d, dash] \\ \mathbb{Q} \end{tikzcd} \tag{4}$$

mit den angedeuteten Galoisgruppen entsteht; für $\chi \in a(G)$ ist dann

$$L(s, \chi) = L(s, \operatorname{ind}_H^M \operatorname{inf}_G^H \chi) = 1$$

genau dann, wenn

$$\operatorname{ind}_H^M \operatorname{inf}_G^H \chi = 0;$$

der Kern von $\mathscr{L}(L/K)$ ist also, da inf_G^H den Darstellungsring $a(G)$ kanonisch mit einem direkten Summanden von $a(H)$ identifiziert, im wesentlichen der Kern einer Induktionsabbildung. Die gestellte Frage ist hiermit, von der gruppentheoretischen Seite, beantwortet. Andererseits sind die L-Funktionen durch arithmetische Objekte definiert; Relationen zwischen jenen müssen sich also durch solche zwischen diesen ausdrücken lassen. ARTIN selbst bemerkt hierzu, nach dem Beweis der Injektivität von $\mathscr{L}(L/\mathbb{Q})$, daß bei größeren Grundkörpern „die konjugierten Primideale alles zerstören“ können. Er führt das nicht näher aus; Ziel der folgenden Seiten ist es, dieser Bemerkung nachzugehen.

2. Eine einfache Beobachtung

Beim Umgang mit den Artinschen L-Funktionen führen die verzweigten Primideale zu einer kleinen Komplikation, die sich aber hier umgehen läßt. Dazu dient

Lemma 1. *Sei $\mathfrak{o}_K$ der Ganzheitsbereich von K und S eine endliche Menge von Primidealen von K mit der Eigenschaft*

$$\mathfrak{p} \in S \wedge \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{p}' \cap \mathbb{Z} \Rightarrow \mathfrak{p}' \in S;$$

ferner sei $L_S(s, \chi)$ die um die Eulerfaktoren zu S reduzierte L-Funktion und $\mathscr{L}_S(L/K)$ die Abbildung $\chi \to L_S(s, \chi)$. Dann ist

$$Ke\, \mathscr{L}(L/K) = \operatorname{Ke} \mathscr{L}_S(L/K).$$

Beweis. Der Identitätssatz für Dirichletreihen (siehe [8], § 1) übersetzt sich in einen Identitätssatz für rationale Eulerprodukte

$$\prod_p f_p(p^{-s})^{-1}, \quad f_p(X) \in \mathbb{C}([X],$$

in denen p die rationalen Primzahlen durchläuft. Nach der Voraussetzung an S ist $L_S(s, \chi)$ ein Quotient rationaler Eulerfaktoren. Daraus folgt, indem man $\chi = \chi_1 - \chi_2$ als Differenz eigentlicher Charaktere schreibt,

$$L(s, \chi) = 1 \Rightarrow L_S(s, \chi) = 1;$$

die Umkehrung ergibt sich daraus, daß ein nichttrivialer Quotient von endlich vielen Eulerfaktoren, nach Multiplikation mit Gammafaktoren, keine Funktionalgleichung vom Typus (3) erfüllen kann (dieses Argument erscheint bereits in [3], 4.9).

Wir werden im folgenden stets annehmen, daß S alle im jeweiligen Kontext auftretende Verzweigung absorbiert.

Für ein Primideal $\mathfrak{p} \notin S$ sei $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ ein Primteiler in L, $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ der Frobeniusautomorphismus und $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = cl_G \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]$ seine Konjugationsklasse, aufgefaßt als Element des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}CG$, der von den Klassen $C_1, \ldots, C_h$ von G erzeugt wird. Damit können wir schreiben (für $\operatorname{Re} s > 1$)

$$\log L_S(s, \chi) = \sum_{m \geq 1} \sum_{\mathfrak{p} \notin S} \chi\left(\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)^m\right) \frac{1}{mN\mathfrak{p}^{ms}},$$

mit einer schon von Artin bewiesenen Darstellung der L-Reihen. Nach dem Identitätssatz für Dirchletreihen und Lemma 1 ist also $L(s, \chi) = 1$ gleichbedeutend mit

$$\underset{N = p^n \in \mathrm{N}}{\forall} \chi\left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}, m_\mathfrak{p} \\ N\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}} = N}} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)^{m_\mathfrak{p}} \frac{1}{m_\mathfrak{p}}\right) = 0. \tag{5}$$

Für die rationale Primzahl p seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ ihre Primteiler in K mit den Restklassengeraden $f_i = f(\mathfrak{p}_i/p)$. Die Summe in (5) wird damit zu

$$\sum_{\substack{i, n_i \\ f_i n_i = n}} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{n_i} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{n} \sum_{f_i | n} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{\frac{n}{f_i}} f_i. \tag{6}$$

Wir setzen

$$a(L/K, p^n) = \sum_{f_i|n} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{\frac{n}{f_i}} f_i \in \mathbb{Z}CG$$

und

$$A_S(L/K) = {}_{\mathbb{Z}}\langle a(L/K, p^n) \mid n \in \mathbb{N}, p \text{ hat keinen Teiler in } S\rangle .$$

Den Index S werden wir im folgenden unterdrücken, da wir uns nie auf ihn beziehen.

Die Elemente von $a(G)$ sind lineare Funktionen auf $\mathbb{Z}CG$; schärfer gilt, daß

$$\mathbb{C} \otimes a(G) \times \mathbb{C}CG \to \mathbb{C}$$

eine nichtentartete Paarung ist, oder, mit dem üblichen Ausdruck: die irreduziblen Charaktere bilden eine Basis des Raums der Klassenfunktionen auf G. Also ist auch

$$a(G) \times \mathbb{Z}CG \to R \tag{7}$$

mit $R = \mathbb{Z}[\chi_i(C_j) \mid i, j = 1, \ldots, h]$ nicht entartet; wir schreiben gelegentlich $\langle \chi, a\rangle$ für $\chi(a)$. Für eine Teilmenge M von $a(G)$ oder $\mathbb{Z}CG$ sei $M^\perp$ die orthogonale Menge. Damit haben wir

Satz 1. Ke $\mathscr{L}(L/K) = A(L/K)^\perp$.

Die arithmetische Bedeutung von Relationen zwischen den L-Funktionen kommt damit in den Blick. In die Definition der Erzeugenden $a(L/K), p^n)$ von $A(L/K)$ gehen zwei Phänomene ein, die man, jedes für sich, bei weitem nicht beherrscht: die Primzerlegung in der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ und das Verhalten der Artinabbildung $\mathfrak{p} \to \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$. Nach Satz 1 bedeuten Relationen zwischen L-Funktionen also eine Einschränkung an das kombinierte Verhalten beider; wir werden dies unten (Satz 4) schärfer fassen.

Ist $K = \mathbb{Q}$, so ist

$$a(L/\mathbb{Q}, p) = \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right);$$

da nach dem Satz von Tschebotareff jedes $g \in G$ als Frobeniusautomorphismus auftritt, ist

$$A(L/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}CG \tag{8}$$

und daher $\mathscr{L}(L/\mathbb{Q})$ injektiv, denn (7) ist nichtentartet. Die gleiche Schlußweise, negativ gewendet, liefert einen „Anti-Tschebotareff" für voll träge Primstellen:

Korollar 1. *Ist* Ke $\mathscr{L}(L/K) \neq 0$, *so ist nicht jedes* $g \in G$ *Frobeniusautomorphismus einer Primstelle* $\mathfrak{p}$ *von* K, *die in* $K/\mathbb{Q}$ *voll träge ist.*

Daß dies für Ke $\mathscr{L}(L/K) = 0$ falsch sein kann, sieht man leicht an zyklischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$, etwa Gal $(L/\mathbb{Q}) = C_6$ und Gal $(L/K) = C_2$.

3. Invarianzen für die $a(L/K, p^n)$

Entsprechend den Invarianzen (1) und (2) wird man solche für die $a(L/K, p^n)$ unter den zu ind und inf adjungierten Abbildungen erwarten.

Sei $H < G$ eine Untergruppe. Dann haben wir ein Diagramm nichtentarteter Paarungen und adjungierter Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} a(G) & \times & \mathbb{Z}CG & \to & R \\ {\scriptstyle\text{ind}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{res}} & & \| \\ a(H) & \times & \mathbb{Z}CH & \to & R; \end{array} \tag{9}$$

ist $G = \dot\bigcup g_i H$ die Linksnebenklassenzerlegung, so ist hierbei

$$\text{res}\, cl_G(g) = \sum_i \dot{cl}_H(g_i g g_i^{-1})$$

mit

$$\dot{cl}_H(g_i g g_i^{-1}) = \begin{cases} cl_H(g_i g g_i^{-1}) & \text{falls } g_i g g_i^{-1} \in H \\ 0 & \text{sonst}; \end{cases}$$

es gilt also

$$\langle \text{ind}\, \psi, a \rangle = \langle \psi, \text{res}\, a \rangle$$

für $\psi \in a(H)$, $a \in \mathbb{Z}CG$. Ist H normal, $\bar{G} = G/H$, so haben wir

$$\begin{array}{ccccc} a(G) & \times & \mathbb{Z}CG & \to & R \\ {\scriptstyle\text{inf}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{def}} & & \| \\ \bar{a}(G) & \times & \mathbb{Z}C\bar{G} & \to & R \end{array} \tag{10}$$

mit der durch

$$\text{def}\, cl_G(g) = cl_{\bar{G}}(gH)$$

definierten *Deflation*; es gilt also

$$\langle \text{inf}\, \psi, a \rangle = \langle \psi, \text{def}\, a \rangle$$

für $\psi \in a(\bar{G})$, $a \in \mathbb{Z}CG$.

Satz 2. *Sei* $H < G = \text{Gal}\,(L/K)$ *eine Untergruppe und* E *der Fixkörper. Dann gilt*

(i) $\text{res}\, a(L/K, p^n) = a(L/E, p^n)$, *alle* p, n;
ist H *normal, gilt*
(ii) $\text{def}\, a(L/K, p^n) = a(E/K, p^n)$.

Beweis. Sei $\chi \in a(H)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \chi, \text{res}\, a(L/K, p^n) \rangle &= \langle \text{ind}\, \chi, a(L/K, p^n) \rangle \\ &= \langle \chi, a(L/E, p^n) \rangle; \end{aligned} \tag{11}$$

die zweite Gleichung wegen (1) und der Tatsache, daß $\frac{1}{n}\langle\chi, a(L/E, p^n)\rangle$ der Koeffizient von p^{-ns} der Dirichletreihe $\log L_S(s, \chi)$ ist.

Da (11) für alle $\chi \in a(H)$ gilt und (7) nichtentartet ist, folgt (i). Ebenso beweist man (ii).

Bemerkung. Natürlich kann man Satz 2 auch direkt, ohne Rückgriff auf (1) und (2) beweisen und erhält damit, indem man die Gleichungen im obenstehenden Beweis rückwärts liest, einen neuen Beweis für diese Invarianzen, zu denen also Satz 2 „dual" ist. Wir benutzen dazu die Eigenschaften der Frobeniusautomorphismen, wie man sie etwa in [4], Ch. III findet, insbesondere: sind $\tilde{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ Primstellen in L, E, K, so ist

$$\left[\frac{L/K}{\tilde{\mathfrak{P}}}\right]^{f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})} = \left[\frac{L/E}{\tilde{\mathfrak{P}}}\right],$$

und weiter gilt

$$\left[\frac{L/K}{\tilde{\mathfrak{P}}}\right]^{m} \in H \Leftrightarrow f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})/m; \tag{12}$$

letzteres wird klar durch Betrachtung der lokalen Erweiterungen. Mit den Bezeichnungen von (6) seien $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}_i$ Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ in L, $G = \mathring{\bigcup} g_j H$ die Nebenklassenzerlegung. Damit wird

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} a(L/K, p^n) &= \operatorname{res} \sum_{f_i|n} cl_G \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}_i}\right]^{\frac{n}{f_i}} f_i \\
&= \sum_{f_i|n} f_i \sum_j \dot{c}l_H \left(\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}_i}\right]^{g_j}\right)^{\frac{n}{f_i}} \\
&= \sum_{f_i|n} f_i \sum_j \dot{c}l_H \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}_i^{g_j}}\right]^{\frac{n}{f_i}} \\
&= \sum_{f_i|n} f_i \sum_{\substack{j \\ f(\mathfrak{P}_{ij}/\mathfrak{p}_i)/\frac{n}{f_i}}} cl_H \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}_{ij}}\right]^{\frac{n}{f_i}}, \quad \mathfrak{P}_{ij} = \mathfrak{P}_i^{g_j} \cap E
\end{aligned}$$

wegen (12). Nun beachte man

$$f_i \cdot f(\mathfrak{P}_{ij}/\mathfrak{p}_i) = f(\mathfrak{P}_{ij} \mid p)$$

und folgenden Hilfssatz, dessen einfachen Beweis wir nicht ausführen:

Lemma 2. *Für jedes Primideal $\mathfrak{P}$ von L gilt, mit* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$,

$$\#\{g_k \mid \mathfrak{P}^{g_k} \cap E = \mathfrak{P} \cap E\} = f(\mathfrak{P} \cap E \mid \mathfrak{p}).$$

Weil alle Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ in E von der Form $\mathfrak{P}_{ij}$ sind, werden sie alle in der letzten Doppelsumme erfaßt; ferner ist, wenn $f(\mathfrak{P}_{ij}/\mathfrak{p}_i) \Big| \dfrac{n}{f_i}$,

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}_{ij}}\right]^{\frac{n}{f_i}} = \left[\frac{L/E}{\mathfrak{P}_{ij}}\right]^{\frac{n}{f(\mathfrak{P}_{ij}/p)}};$$

und nach Lemma 2 kommt jedes solche Element $f(\mathfrak{P}_{ij}/\mathfrak{p}_i)$-mal in der letzten inneren Summe vor. Daraus folgt (i). Zum Beweis von (ii) braucht man nur zu bemerken, daß

$$\left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right]\Big|_E = \left[\frac{E/K}{\mathfrak{P} \cap E}\right]$$

und daher

$$\operatorname{def} cl_G \left[\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right] = cl_G \left[\frac{E/K}{\mathfrak{P} \cap E}\right]$$

ist.

Mit den Bezeichnungen von (4) haben wir jetzt auch

$$\begin{aligned} A(L/K) = \operatorname{def} A(\tilde{L}/K) &= \operatorname{res} \operatorname{def} A(\tilde{L}/\mathbb{Q}) \\ &= \operatorname{res} \operatorname{def} \mathbb{Z}CM, \end{aligned} \tag{13}$$

letzteres wegen (8).

4. Γ-Invarianz

Kennt man, im konkreten Fall, die linke Seite in Satz 1, so auch $A(L/K)^{\perp\perp}$; dieser Modul enthält natürlich $A(L/K)$, wird aber mit diesem im allgemeinen nicht übereinstimmen. Ist $M \subset a(G)$ oder $\subset \mathbb{Z}CG$ irgendein Teilmodul, so kann man, da in (7) $rk\ R > 1$ sein kann, nicht ohne weiteres auf $rk\ M + rk\ M^{\perp} = h$ schließen; man hat lediglich

$$rk\ M^{\perp} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \otimes M^{\perp} \leqq \dim (\mathbb{C} \otimes M)^{\perp} = h - \dim \mathbb{C} \otimes M = h - rk\ M,$$

also

$$rk\ M + rk\ M^{\perp} \leqq h, \tag{14}$$

aber natürlich kann die Ungleichung echt sein, ebenso $rk\ M < rk\ M^{\perp\perp}$. Die Verhältnisse klären sich auf durch die Operation der Galoisgruppe

$$\Gamma = \operatorname{Gal}(\mathbb{Q}\, R/\mathbb{Q});$$

da $\mathbb{Q}R$ ein Teilkörper des $|G|$-ten Einheitswurzelkörpers über $\mathbb{Q}$ ist, ist Γ eine Faktorgruppe von $(\mathbb{Z}/_{|G|\mathbb{Z}})^{\times}$. Γ operiert in natürlicher Weise auf R und $a(G)$, auf $\mathbb{Z}CG$ durch die Definition

$$(cl_G\, g)^{\gamma} = cl_G\, g^f, \gamma \in \Gamma, g \in G,$$

wobei $f \bmod |G|\,\mathbb{Z}$ ein Urbild von γ in $(\mathbb{Z}/_{|G|\mathbb{Z}})^{\times}$ ist; man überlegt sich unschwer, daß diese Definition gerechtfertigt ist; mit ihr wird (7) eine Γ-äquivariante Paarung, d.h.

$$\langle \chi^{\gamma}, a \rangle = \langle \chi, a^{\gamma} \rangle = \langle \chi, a \rangle^{\gamma}, \tag{15}$$

$\chi \in a(G)$, $a \in \mathbb{Z}CG$, $\gamma \in \Gamma$.

Satz 3. *Sei M ein Γ-Untermodul von $a(G)$ oder $\mathbb{Z}CG$. Dann ist*

$$rk\, M + rk\, M^{\perp} = h$$

sowie

$$rk\, M = rk\, M^{\perp\perp}.$$

Beweis. Sei etwa $M \subset a(G)$. Wegen (15) identifiziert sich $\mathbb{Z}CG/_{M^{\perp}}$ mit einem Untermodul von $\mathrm{Hom}_{\Gamma}(M, R)$; also ist

$$h - rk\, M^{\perp} \leqq rk\, \mathrm{Hom}_{\Gamma}(M, R).$$

Wir zeigen nun

$$rk\, \mathrm{Hom}_{\Gamma}(M, R) = rk\, M \tag{16}$$

für beliebige $\mathbb{Z}\,\Gamma$-Gitter; mit (14) folgt daraus

$$rk\, M + rk\, M^{\perp} = h;$$

ebenso folgt

$$rk\, M^{\perp} + rk\, M^{\perp\perp} = h,$$

da mit M auch $M^{\perp}$ ein Γ-Modul ist, und durch Subtraktion dieser Gleichungen erhält man

$$rk\, M = rk\, M^{\perp\perp}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} rk\, \mathrm{Hom}_{\Gamma}(M, R) &= \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\Gamma}(\mathbb{Q}\, M, \mathbb{Q}\, R) \\ &= \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\Gamma}(\mathbb{Q}\, M, \mathbb{Q}\, \Gamma), \end{aligned}$$

da wegen des Normalbasensatzes $\mathbb{Q}\, R$ isomorph zum regulären $\mathbb{Q}\Gamma$-Modul $\mathbb{Q}\Gamma$ ist. $\mathbb{Q}\Gamma$ ist als kommutative halbeinfache Algebra ein direktes Produkt von Körpern,

$$\mathbb{Q}\Gamma = K_1 \times \ldots \times K_r,$$

und jeder (endlich erzeugte) $\mathbb{Q}\Gamma$-Modul A ist von der Form

$$A = K_1^{n_1} \times \ldots \times K_r^{n_r},\ n_i \in \mathbb{N}_0;$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\Gamma}(A, \mathbb{Q}\Gamma) &= \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_{K_i}(K_i^{n_i}, K_i) \\ &\approx \prod K_i^{n_i} = A, \end{aligned}$$

wobei „$\approx$" einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen bezeichne. Mit $A = \mathbb{Q}M$ folgt (16) und damit Satz 3.

Demnach benötigen wir nun

Lemma 3. *$A(L/K)$ ist Γ-invariant.*

Beweis. Sei $\gamma \in \Gamma$ und $f \in \mathbb{Z}$ mit $f \bmod |G| \to \gamma$. Dann ist, mit den Bezeichnungen von (6),

$$a(L/K, p^n)^\gamma = \sum_{f_i/n} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{\frac{n}{f_i}f} f_i .$$

Da $(f, |G|) = 1$ und $f \bmod |G|$ wählbar ist, können wir nach dem Dirichletschen Primzahlsatz annehmen, daß f teilerfremd zu allen f_i ist. Dann ist

$$f_i/n \Leftrightarrow f_i/fn ,$$

und die Summe wird zu

$$\sum_{f_i/fn} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)^{\frac{nf}{f_i}} f_i = a(L/K, p^{nf}) \in A(L/K) .$$

Dies beweist Lemma 3.

Korollar 2. *$rk\, A(L/K) = rk\, A(L/K)^{\perp\perp}$.*

Aus Satz 3 folgt auch rk im $\mathscr{L}(L/K) = rk\, A(L/K)$, doch werden wir im nächsten Abschnitt eine schärfere Bestimmung dieses Ranges herleiten.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch zeigen, daß $A(L/K) = A(L/K)^{\perp\perp}$ nur im Fall $K = \mathbb{Q}$ auftreten kann; mittels Satz 3 überlegt man sich leicht, daß ein Γ-invariantes Teilgitter M von $\mathbb{Z}CG$ mit $M = M^{\perp\perp}$ *extremal*, d.h. in keinem echten Obergitter gleichen Ranges enthalten ist. Man sieht aber sofort (an den Einsklassen), daß in einer Situation (4) das Bild von def $\circ$ res nie extremal ist, falls $H \neq M$.

Beispiel. Sei $L/\mathbb{Q}$ galoissch mit der Gruppe S_4 und K der Fixkörper der Vierergruppe

$$V_4 = \langle x, y \rangle, x = (12)(34), y = (13)(24).$$

Nach Artin ist Ke $\mathscr{L}(L/K) =$ Ke $\mathrm{ind}_{V_4}^{S_4}$; und dies ist gleich $A(L/K)^\perp$ nach Satz 1. Elementare Rechnungen ergeben

$$A(L/K)^{\perp\perp} = \{a + b(x + y + xy) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}CV_4 = \mathbb{Z}V_4 .$$

Mit (13) berechnet man andererseits

$$A(L/K) = \mathrm{res}\, \mathbb{Z}CS_4 = \{6a + 2b(x + y + xy) \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

also

$$\left|\frac{A(L/K)^{\perp\perp}}{A(L/K)}\right| = 12 .$$

5. Reduktion auf Primideale vom Grad 1

Bekanntlich verursachen die Primideale 1. Grades in K den Pol der Zetafunktion, stellen also, in gewissem Sinne, deren entscheidenden Teil. Daher liegt die Vermutung nahe, daß auch die L-Reihen durch die zu jenen Primidealen gehörenden Koeffizienten bestimmt wird. Wir setzen demnach

$$A_1(L/K) = {}_{\mathrm{Z}}\langle a(L/K, p)\rangle;$$

nach Definition ist, in unserer üblichen Notation,

$$a(L/K, p) = \sum_{f_i=1} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right).$$

Seien $\chi_1, \chi_2 \in a(G)^+$ zwei eigentliche Charaktere mit

$$\chi_1|_{A_1(L/K)} = \chi_2|_{A_1(L/K)}.$$

Dies bedeutet, daß die L-Reihen $\log L_S(s, \chi_1)$ und $\log L_S(s, \chi_2)$ für alle p die gleichen Koeffizienten bei p^{-s} haben. Nach (1) und (2) aber kann man jede L-Reihe als L-Reihe zu einer Erweiterung $\tilde{L}/\mathbb{Q}$ auffassen. Hier aber ist, wie wir schon gesehen haben,

$$A_1(\tilde{L}/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}C\mathrm{Gal}\,(\tilde{L}/\mathbb{Q}),$$

also ist in der Tat $L_S(s, \chi_1) = L_S(s, \chi_2)$.

Daraus folgt, nun wieder im allgemeinen Fall,

$$A_1(L/K)^\perp \subset \mathrm{Ke}\,\mathscr{L}(L/K).$$

Wegen $A_1(L/K) \subset A(L/K)$ ist aber natürlich

$$A(L/K)^\perp \subset A_1(L/K)^\perp,$$

und Satz 1 liefert jetzt

$$A_1(L/K)^\perp = A(L/K)^\perp. \tag{17}$$

Wir benötigen nun noch

Lemma 4. *$A_1(L/K)$ ist Γ-invariant.*

Beweis: Das Argument von Lemma 3 ist hier nicht wiederholbar; wir müssen weiter ausholen und gehen wieder von (4) aus. Sei p gegeben und $\mathfrak{P}/p$ ein Primteiler von p in $\tilde{L}$, $D = D(\mathfrak{P})$ die Zerlegungsgruppe. Dann sind $\mathfrak{P}^g \cap K, g \in M$, alle Primteiler von p in K, und

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^{g_1} \cap K = \mathfrak{P}^{g_2} \cap K &\Leftrightarrow \mathfrak{P}^{g_1} = \mathfrak{P}^{g_2 h} \text{ für ein } h \in H\\ &\Leftrightarrow g_2^h g_1^{-1} \in D\\ &\Leftrightarrow Dg_2\, H = Dg_1\, H;\end{aligned}$$

mit

$$\{\mathfrak{P}^g \cap K \mid g \in D \overset{M}{\backslash\!/} H\}$$

erhalten wir also alle Primteiler von p in K ohne Wiederholungen. Die Restklassengrade ergeben sich aus

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{P}^g \mid p) = |D^g| &= f(\mathfrak{P}^g \mid \mathfrak{P}^g \cap K) f(\mathfrak{P}^g \cap K \mid p) \\ &= |D^g \cap H| f(\mathfrak{P}^g \cap K \mid p), \end{aligned}$$

da wir nur mit unverzweigtem p zu tun haben, also

$$f(\mathfrak{P}^g \cap K \mid p) = \frac{|D^g|}{|D^g \cap H|}$$

und

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{P}^g \cap K \mid p) = 1 &\Leftrightarrow |D^g \cap H| = |D^g| \\ &\Leftrightarrow D^g \cap H = D^g \\ &\Leftrightarrow D^g \subset H. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$a(L/K, p) = \sum_{f_i = 1} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right) = \sum_{\substack{g \in D \overset{M}{\backslash\!/} H \\ D^g \subset H}} \operatorname{def}_G^H cl_H \left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}}\right]^g.$$

Für $\gamma \in \Gamma$, $f \bmod |G| \to \gamma$, finden wir also

$$a(L/K, p)^\gamma = \sum_g \operatorname{def}_G^H cl_H \left(\left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}}\right]^f\right)^g. \tag{18}$$

Wieder nach dem Dirichletschen Satz können wir annehmen, daß $(f, |D|) = 1$. Nach Tschebotareff ist

$$\left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}}\right]^f = \left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}'}\right]$$

ein Frobeniusautomorphismus zu einem unverzweigten $\mathfrak{P}'$, und

$$D(\mathfrak{P}') = \left\langle \left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}'}\right] \right\rangle = \left\langle \left[\frac{\tilde{L}/K}{\mathfrak{P}}\right]^f \right\rangle = D(\mathfrak{P}).$$

Mit (18) folgt daraus

$$a(L/K, p)^\gamma = a(L/K, p'), (p') = \mathfrak{P}' \cap \mathbb{Z}.$$

und damit Lemma 4.

Mit Lemma 4, Satz 3 und (17) können wir nun schließen, daß

$$\begin{aligned} rk\, A_1(L/K) &= h - rk\, A_1(L/K)^{\perp} \\ &= h - rk \operatorname{Ke} \mathscr{L}(L/K) \\ &= rk \operatorname{Im} \mathscr{L}(L/K), \end{aligned}$$

übrigens auch

$$rk\, A_1(L/K) = rk\, A(L/K),$$

was aus den Definitionen nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Jedenfalls haben wir

Satz 4. *Die Anzahl der unabhängigen Artinschen L-Funktionen zur Erweiterung L/K ist $rk\, A_1(L/K)$.*

In den Erzeugenden $a(L/K, p)$ von $A_1(L/K)$ ist kodifiziert, in welcher Weise die Abbildung $\mathfrak{p} \to \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$ und die Relation „charakteristikgleich" auf der Menge der Primideale 1. Grades von K miteinander verknüpft sind; obwohl es schwierig zu sehen ist, welche Aussage $rk\, A_1(L/K)$ über diese Verknüpfung macht, mag Satz 4 als arithmetische Interpretation von rk im $\mathscr{L}(L/K)$ gelten.

Wir wollen noch auf eine merkwürdige Konsequenz von Satz 4 hinweisen. Es sei im Zahlkörper K eine Idealklassengruppe H im Sinn der Klassenkörpertheorie gegeben; wir bilden die Ausdrücke

$$a(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{p}' \cap \mathbb{Z}} (\mathfrak{p}') \in \mathbb{Z} H = \mathbb{Z}CH,$$

in denen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ die zu einem Erklärungsmodul von H teilerfremden Primideale 1. Grades von K durchlaufen und $(\mathfrak{p})$ das Bild von $\mathfrak{p}$ in H bezeichne. Dann gilt: Wenn der Klassenkörper L zu H über $\mathbb{Q}$ galoissch und $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ zentral in $M = \operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist, dann ist $rk \langle a(\mathfrak{p}), \mathfrak{p} \rangle = |H|$. Denn die Induktionsabbildung ind_G^M ist in diesem Fall injektiv, also

$$rk\, A_1(L/K) = |G|$$

nach Satz 4, und der Reziprozitätsisomorphismus $H \cong G$ identifiziert $a(\mathfrak{p})$ mit $a(L/K, \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z})$. Hier deutet sich, wie schon in (13), ein Zusammenhang mit dem Erweiterungsproblem an.

6. Ein Beispiel

Sei $q > 2$ eine Primzahl und $L/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung mit der Gruppe S_q (bekanntlich haben asymptotisch 100% aller irreduziblen $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad q die Galoisgruppe S_q); weiter sei $x = (12 \ldots q) \in S_q$ und K der Fixkörper von $C_q = \langle x \rangle$. Irr C_q ist dann gegeben durch $\{\chi_\nu\}_{\nu=0,\ldots,q-1}$

$$\chi_\nu : x \to \omega^\nu = \exp \frac{2\pi i \nu}{q}.$$

Da $N_{S_q}(C_q)$ transitiv auf $C_q \setminus \{1\}$ und damit auch auf $\{\chi_1, \ldots, \chi_{q-1}\}$ operiert, folgt leicht, daß Ke $\operatorname{ind}_{C_q}^{S_q}$ von den Elementen $\chi_1 - \chi_i$, $i = 2, \ldots, q-1$ erzeugt wird, also mit Satz 1

$$A(L/K)^{\perp\perp} = \langle \chi_1 - \chi_i, i \rangle^{\perp}.$$

Für $a = \sum_{j=0}^{q-1} a_j x^j \in \mathbb{Z}C_q$ ist

$$\chi_i(a) = \sum_{j=0}^{q-2} (a_j - a_{q-1})\, \omega^{ij}$$

und daher

$$\begin{gathered}\forall_i\, \chi_1(a) = \chi_i(a)\\ \Leftrightarrow\\ \forall_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)|\mathbb{Q})} \quad \chi_1(a) = \chi_1(a)^{\sigma}\\ \Leftrightarrow \chi_1(a) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a_j = a_{q-1}, j = 1, \ldots, q-2;\end{gathered}$$

also

$$A(L/K)^{\perp\perp} = \{a + b(x + \ldots + x^{q-1}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}. \tag{19}$$

(Die Berechnung von $A(L/K)$ aufgrund von (13) wäre hier bereits eine ziemlich schwierige Aufgabe.)

Mit Standardmethoden der Algebraischen Zahlentheorie (man benutze [4], Ch. III, 2.8) zeigt man, daß es zwei Typen der Zerlegung rationaler unverzweigter Primzahlen p in $K/\mathbb{Q}$ gibt:

i) p hat $s = \dfrac{(q-1)!}{f}$ Primteiler vom Grade f, die in L zerfallen (alle von q verschiedenen Elementordnungen von S_q treten als f auf);

ii) p hat $q-1$ Primteiler $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_M$ vom Grad 1 und $N = \dfrac{(q-1)! + 1}{q} - 1$ Teiler $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_N$ vom Grad q; die $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_j$ sind träge in L/K.

Wir lesen nun einfach ab, was es bedeutet, daß alle $a(L/K, p^n)$ in $A(L/K)^{\perp\perp}$ enthalten sind. Der erste Fall gibt nichts Nennenswertes. Im zweiten ist

$$a(L/K, p) = \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right)$$

und

$$a(L/K, p^q) = (q-1) \cdot 1 + q \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{L/K}{\mathfrak{q}_j}\right);$$

da die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ träge sind, folgt nach (19)

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}_i}\right) = x^i, \quad i = 1, \ldots, q-1$$

bei geeigneter Numerierung, und desgleichen, daß die $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{q}_j}\right)$, $j = 1, \ldots, N$, sich gleichmäßig auf die x^i $i = 1, \ldots, q - 1$ verteilen. Dies kann man natürlich auch ohne Rückgriff auf die L-Funktionen beweisen, indem man, wie beim Beweis von Lemma 4, die Frobeniusklassen der Primteiler von p in K durch diejenigen der Teiler von p in L ausdrückt. Doch sind offenbar die Moduln $A(L/K)$ die natürlichen Träger für Information solcher Art.

Aus (i), (ii) und (19) lassen sich übrigens $A_1(L/K)$ und $A(L/K)$ leicht berechnen; man bekommt

$$A_1(L/K) = \mathbb{Z}(q-1)! + \mathbb{Z}(x + \ldots + x^{q-1}),$$
$$A(L/K) = \mathbb{Z}\, B + \mathbb{Z}(x + \ldots + x^{q-1}),$$

mit

$$B = ggT\left\{\frac{(q-1)!}{f} \,\middle|\, f \neq q \text{ ist Elementordnung in } S_q\right\}.$$

Literatur

[1] E. ARTIN, Über eine neue Art von L-Reihen. Hamb. Abh. (1923), 89–108.
[2] E. ARTIN, Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren. Hamb. Abh. **8** (1930), 292–306.
[3] P. DELIGNE and J.-P. SERRE, Formes modulaires de poids 1. Ann. Sci. E. N. S. 4^e ser., t. 7 (1974), 507–530.
[4] G. JANUSZ, Algebraic Number Fields. Acad. Press 1973.
[5] J. MARTINET, Character Theory and Artin L-functions, in: Algebraic Number fields, ed. FRÖHLICH, Proc. Symp. London Math. Soc., Academic Press 1977.
[6] V. SNAITH, Applications of explicit Brauer Induction. Proc. Symp. in Pure Math., vol. 47, AMS 1987, pt. 2, 495–532.
[7] Z. SUETUNA, Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern. Crelle **177** (1937), 6–12.
[8] D. ZAGIER, Zetafunktionen und quadratische Körper. Springer 1981.

Anschrift des Autors: ERNST KLEINERT, Mathematisches Seminar, Universität Hamburg, Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13

Eingegangen am 20. 2. 1989,
in veränderter Form am 12. 5. 1989