Über die Flächen $rt - s^2 = K =$ konst. und ihren Zusammenhang mit den Flächen $Kr + t = 0$

Wilhelm Blaschke zum 70. Geburtstag gewidmet

Von Karl Strubecker in Karlsruhe

In der von W. Blaschke entwickelten affinen *Differentialgeometrie* spielen die Integralflächen

$$z = z(x, y) \tag{1}$$

der partiellen Differentialgleichung

$$rt - s^2 = K = \text{konst.} \qquad (K \neq 0) \tag{2}$$

dadurch eine ausgezeichnete Rolle, daß ihre *Affinnormalen untereinander parallel* sind. Blaschke bezeichnet diese Flächen daher als *uneigentliche Affinsphären*[1].

Für diese interessanten Flächen hat schon G. Darboux eine einfache integrallose Darstellung angegeben, der man in den Begriffsbildungen der *Geometrie des isotropen Raumes* eine einfache kinematische Deutung geben kann[2]. Insbesondere ist der Ausdruck (2) die sog. *isotrope Relativkrümmung* der Fläche (1). *Uneigentliche Affinsphären* (2) *sind also Flächen fester Relativkrümmung im isotropen Raume.*

I.

Wir wollen zuerst ein einfaches *Theorem* beweisen, das, wie sich am Schlusse der Arbeit zeigen wird, ein gewisses Gegenstück zu einem bekannten Satze von H. A. Schwarz über euklidische Minimalflächen[3] darstellt.

Im isotropen Raume sind, in seiner allgemeinsten Auffassung, ausgezeichnet: ein Fernpunkt U (z. B. der Fernpunkt der z-Achse) und

---

[1] W. Blaschke, Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. Reidemeister, Berlin 1923, insbes. § 78.

[2] K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$, Math. Z. 47 (1942) 743—777.

[3] W. Blaschke, Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950, S. 126.

das Büschel der durch ihn laufenden Ferngeraden. Daher spielen auch die Paraboloide

$$(3)\qquad \begin{cases} 2z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0 \end{cases}$$

eine ausgezeichnete Rolle, ebenso die daraus durch Parallelverschiebung entstehenden Flächen. Wir wollen einen Flächenstreifen

$$(4)\qquad \begin{cases} [x(t),\ y(t),\ z(t),\ p(t),\ q(t)] \\ dz = p\,dx + q\,dy, \end{cases}$$

der auf einem solchen Paraboloid (3) liegt, kurz als einen *isotropen sphärischen Streifen* bezeichnen, weil man jede der Flächen (3) und ihre homothetischen Flächen als *Kugeln des isotropen Raumes* auffassen kann. Für einen solchen Streifen ist nach (3)

$$(5)\qquad dz = a_{11}x\,dx + a_{12}(x\,dy + y\,dx) + a_{22}y\,dy\,.$$

Dann gilt der folgende

Satz 1: *Enthält die Fläche $z = z(x, y)$ der festen isotropen Relativkrümmung*

$$(6)\qquad K = rt - s^2 = \pm D$$

einen auf der isotropen Kugel (3) *liegenden sphärischen Streifen, so ist sie bezüglich der Kugel* (3) *selbstpolar.*

Zum Beweis bemerken wir, daß die Koordinaten zweier bezüglich der isotropen Kugel (3) *polaren Flächenelemente* $E = (x, y, z, p, q)$ und $E^* = (x^*, y^*, z^*, p^*, q^*)$ durch die folgenden Formeln zusammenhängen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x^* &= a^{11}p + a^{12}q \\ y^* &= a^{12}p + a^{22}q \\ z^* &= px + qy - z \\ p^* &= a_{11}x + a_{12}y \\ q^* &= a_{12}x + a_{22}y \end{aligned}$$

wobei die $a^{ik} = a^{ki}$ die reduzierten Adjunkten der Elemente $a_{ik} = a_{ki}$ der Determinante $|a_{ik}|$ sind, also insbesondere

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{12} & a^{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}$$

ist.

Aus (7) folgt für die isotropen Relativkrümmungen

$$K = rt - s^2 \quad \text{und} \quad K^* = r^*t^* - s^{*2}$$

zweier bezüglich (3) polarer Flächen Φ und Φ^* die Formel

$$r^* t^* - s^{*2} = \frac{\partial(p^* q^*)}{\partial(x^* y^*)} = \frac{\partial(p^* q^*)}{\partial(x\, y)} \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial(x^* y^*)}{\partial(x\, y)}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{12} a_{22} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\begin{vmatrix} a^{11} a^{12} \\ a^{12} a^{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}} = \frac{D^2}{rt - s^2}$$

oder

$$K^* = \frac{D^2}{K}. \tag{9}$$

Daher geht die Klasse der Flächen mit fester Relativkrümmung $K = +D$ (bzw. $K = -D$) *wegen* $K^* = +D$ (bzw. $K^* = -D$) *durch das Polarsystem der isotropen Kugel* (3) *in sich über.*

Enthält nun die Fläche Φ der festen Relativkrümmung (6) einen auf der isotropen Kugel (3) liegenden *sphärischen Streifen* (4), so liegt dieser von selbst auch auf der polaren Fläche Φ^* mit derselben Relativkrümmung (6).

Weil aber sphärische Streifen (4) nie charakteristische Streifen der Gleichung (6) sind und daher durch den sphärischen Streifen (4) die Fläche (6) *eindeutig* bestimmt ist, ist tatsächlich $\Phi \equiv \Phi^*$, w. z. b. w.

II.

Wir setzen jetzt in (3) $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, fassen also im folgenden die Paraboloide

$$z = a_{12}\, x\, y + A\, x + B y + C \tag{10}$$

als *Kugeln des isotropen Raumes* auf.

Gegenstück der Lieschen *Geraden-Kugel-Transformation* im isotropen Raum ist dann die bekannte *Eulersche Berührungstransformation*[4], die man in der folgenden involutorischen Gestalt schreiben kann:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= p\,, \\ \bar{y} &= y\,, \\ \bar{z} &= p\, x - z\,, \\ \bar{p} &= x\,, \\ \bar{q} &= -q\,. \end{aligned} \tag{11}$$

[4] K. Strubecker, Über die Eulersche Transformation, Comptes Rendus Inst. Sci. Roumanie 3 (1939) 1—6.

Erweitert man die EULERsche Transformation auf Flächenelemente zweiter Ordnung, $E = (x, y, z, p, q, r, s, t)$, so gilt noch

$$(12)\qquad \bar{r} = \frac{1}{r}, \qquad \bar{s} = -\frac{s}{r}, \qquad \bar{t} = \frac{s^2 - rt}{r}.$$

Also ist

$$(13)\qquad rt - s^2 = -\frac{\bar{t}}{\bar{r}}.$$

Daraus folgt

Satz 2: *Die Flächen Φ der festen Relativkrümmung*

$$(14)\qquad rt - s^2 = K$$

werden durch die isotrope Geraden-Kugel-Transformation (11/12) *in die Integralflächen der Gleichung*

$$(15)\qquad K\bar{r} + \bar{t} = 0$$

verwandelt (und umgekehrt). Die Geometrien der Flächen (14) *und* (15) *stehen dabei in engstem Zusammenhang.*

Insbesondere entsprechen den Flächen der festen Relativkrümmungen

$$\begin{matrix}(16)\\(16\text{a})\end{matrix}\qquad rt - s^2 = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

die Flächen

$$(17)\qquad \bar{r} + \bar{t} = 0,$$

$$(17\text{a})\qquad \bar{r} - \bar{t} = 0,$$

d. s. Schiebflächen mit zwei Scharen konjugiert-komplexer bzw. reeller ebener Schiebkurven.

Den (zylindrischen, ebenen) *Charakteristiken* der Flächen (17) und (17a) entsprechen in der Geraden-Kugel-Transformation (11) auf den Flächen (16) und (16a) ebenfalls die Charakteristiken, nämlich die *Asymptotenlinien* (und umgekehrt).

Tatsächlich ist durch die EULERsche Transformation (11/12) ganz allgemein der Gleichung der *Asymptotenlinien*

$$(18)\qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

die Gleichung

$$(19)\qquad \bar{r}\,d\bar{x}^2 - \bar{t}\,d\bar{y}^2 = 0$$

zugeordnet.

(18) liefert die Charakteristiken der Flächen (16) und (16a) und (19) jene der Flächen (17) und (17a). Man kann, bezogen auf die Mannig-

faltigkeit der isotropen Kugeln (10) die Linien (19) als die *Krümmungslinien* der Flächen (17) bzw. (17a) auffassen.

Damit ist dann auch im isotropen Raume der LIEsche Satz als gültig nachgewiesen:

Satz 3: *Durch die (isotrope) Geraden-Kugel-Transformation werden (isotrope) Krümmungslinien und Asymptotenlinien vertauscht.*

Weil die beiden Scharen der ebenen zylindrischen *Krümmungslinien* der Flächen (17) und (17a) *in parallelen isotropen Ebenen*

$$x \pm i y = \text{const.}, \tag{20}$$

$$x \pm y = \text{const.} \tag{20a}$$

liegen, sind die *Asymptotenlinien* der Flächen (16) und (16a) *in linearen Komplexen* enthalten, deren MONGEsche Gleichungen die Gestalt

$$dz = \pm i (x dy - y dx) + \alpha dx + \beta dy, \tag{21}$$

$$dz = \pm (x dy - y dx) + \alpha dx + \beta dy \tag{21a}$$

haben.

Einem auf den Flächen (16) oder (16a) vorhandenen *isotropen sphärischen Streifen* entspricht dabei vermöge der Geraden-Kugel-Transformation auf den Flächen (17) oder (17a) ein *geradliniger Streifen.*

Der in Satz 1 niedergelegten *Selbstpolarität* der Flächen $rt - s^2 = \pm 1$, welche einen *sphärischen Streifen* enthalten, entspricht dann durch die Geraden-Kugel-Transformation die Tatsache, daß die Flächen $r \pm t = 0$, wenn sie eine *Gerade* (allgemeiner Lage) enthalten, stets *bezüglich dieser Geraden symmetrisch* sind. Diese Symmetrie ist dabei im Sinne der Metrik des isotropen Raumes zu verstehen.

Da man ferner die Flächen $r \pm t = 0$ in dieser Metrik als *isotrope Minimalflächen* auffassen kann, ist schließlich auch der Zusammenhang unseres Satzes 1 mit dem erwähnten, für den isotropen Raum ausgesprochenen, SCHWARZschen Theorem hergestellt[5], das besagt:

Satz 4: *Enthält eine isotrope Minimalfläche $r \pm t = 0$ eine (reelle) nicht isotrope Gerade, so ist sie (im Sinne der isotropen Kinematik) bezüglich dieser Geraden symmetrisch.*

Der Zusammenhang zwischen Satz 1 und Satz 4 wird dabei durch die isotrope Geraden-Kugel-Transformation (EULERsche Transformation) hergestellt.

---

[5] K. STRUBECKER, Über Potentialflächen, Archiv der Mathematik **5** (1954) 32—38.

Eingegangen am 1. 8. 1955