Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57, 165–178 (1986)

Metrisierungstheorie und Jacobiformen

Von H. KLINGEN

Herrn B. SCHOENEBERG zum 80. Geburtstag am 8.12.86 gewidmet

H. PETERSSON hat die Metrisierungstheorie zunächst für die elliptische Modulgruppe und später für beliebige Grenzkreisgruppen erster Art entwickelt, um ordnende Gesichtspunkte für die Erzeugung von automorphen Formen durch Poincarésche Reihen zu gewinnen. Sein Vorgehen wird am besten beschrieben durch folgendes Zitat aus [7]:

Man betrachte die Entwicklung einer ganzen Spitzenform $\{\Gamma, -r, v\}$ nach der Ortsvariablen eines parabolischen Fixpunktes von Γ oder eines Punktes in $\mathfrak{H}$ oder eines hyperbolischen Fixpunktepaares von Γ. Man suche die Entwicklung der gleichen Form nach den Ortsvariablen der sämtlichen zu dem ausgewählten Punkt (oder Punktepaar) äquivalenten Punkte (oder Punktepaare) auf. Dann besteht eine Poincarésche Reihe aus der Summe über die Glieder mit einer festen Nummer n in diesen sämtlichen Entwicklungen, nachdem der Koeffizient des n-ten Gliedes der ursprünglichen Entwicklung durch Eins ersetzt worden ist.... Das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform $f(\tau)$ mit einer solchen Poincaréschen Reihe ist bis auf einen elementaren konstanten Faktor gleich dem Koeffizienten mit der genannten Nummer n in der Entwicklung von $f(\tau)$ nach der Ortsvariablen eines Punktes der genannten Klasse.

Dieses Verfahren wird in der Literatur *Prinzip der Quersummation* genannt. Es handelt sich um ein rein empirisches und formales Vorgehen, das bei anderen als den drei von PETERSSON behandelten Typen von Poincaréschen Reihen sehr wohl versagen kann, wie einfache Beispiele belegen. – Bei der Übertragung der Metrisierungstheorie auf die Siegelschen Modulformen lieferte das Prinzip der Quersummation naturgemäß die ersten Ansätze. So gelangte H. MAASS [6] zu Poincaréschen Reihen vom Exponentialtyp, und später konnte ich in [3] andere Arten von Poincaréschen Reihen erhalten. Abgesehen davon, daß die Untersuchungen in mehreren Variablen erheblich aufwendiger werden, ist aber zum Beispiel bis heute nicht bekannt, wie eine Verallgemeinerung des hyperbolischen Typs aussehen könnte.

In den nachfolgenden Ausführungen möchte ich das Prinzip der Quersummation ersetzen durch einen andersartigen Aufbau der Metrisierungstheorie. Er hat gegenüber den bisherigen Darstellungen zwei Vorteile: erstens läßt er für beliebige Entwicklungstypen durchsichtig erkennen, wie Poincarésche Reihen mit ausgezeichneten metrischen Eigenschaften gewonnen werden können; zweitens ist das Verfahren inhaltlicher Natur und nicht nur formal, so daß auch Konvergenzaussagen und explizite Formeln mit erheblich reduziertem technischen Aufwand erhalten werden können. Im Mittelpunkt steht eine einzige Intregralformel, die auf A. SELBERG zurückgeht. – Angesichts der geschilderten Sachlage sollte die Nützlichkeit der Methode an Hand neuartiger Entwicklungstypen belegt werden. Dies wird durchgeführt für die Fourier-Jacobi-Entwicklungen Siegelscher Modulformen. Es werden insbesondere Poincarésche Reihen zu Jacobiformen im Sinne von EICHLER/ZAGIER [1] aufgewiesen, die metrisch ausgezeichnete Eigenschaften besitzen und für welche die Hauptsätze der Metrisierungstheorie gelten.

1. Es sei

$$Sp(n,\mathbb{R}) \times H_n \to H_n, \qquad (m,z) \mapsto m<z> = (az+b)(cz+d)^{-1}$$

die übliche Operation der symplektischen Gruppe n-ten Grades auf dem Siegelschen Halbraum H_n, bestehend aus allen komplexen symmetrischen n-reihigen Matrizen $z=x+iy$ mit positiv definitem Imaginärteil y. Die Elemente

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$$

werden dabei in n-reihige Bestandteile a,b,c,d aufgespalten. Mit $\Gamma_n = Sp(n,\mathbb{Z})$ werde die Siegelsche Modulgruppe bezeichnet. Eine Siegelsche Modulform vom Gewicht k und Grad n ist eine holomorphe Funktion f auf H_n (für $n=1$ sei f auch holomorph in der Spitze ∞), die

$$f(m<z>) = \det(cz+d)^k f(z) \tag{1}$$

für alle $m \in \Gamma_n$ erfüllt. Siegelsche Modulformen besitzen Fourierentwicklungen vom Typ

$$f(z) = \sum_{t \geq 0} a_t e^{2\pi i \sigma(tz)},$$

wobei über alle halbganzen symmetrischen t summiert wird und σ die Matrizenspur bezeichnet. Ist $a_t = 0$ für $t \not> 0$, so liegt eine Spitzenform vor. Die Spitzenformen von festem Gewicht und Grad bilden einen (endlichdimensionalen) Vektorraum über $\mathbb{C}$. Das Peterssonsche Skalarprodukt wird für Modulformen f und g vom Gewicht k, von denen mindestens eine Spitzenform ist, durch

$$\{f,g\} = \int_{F_n} f(z)\overline{g(z)} \det(y)^k \, dv_z$$

eingeführt, wobei F_n ein Fundamentalbereich von Γ_n in H_n ist und

$$dv_z = dx\,dy/\det(y)^{n+1}$$

das symplektische Volumelement bezeichnet.

Die zentrale Integralformel ist eine Reproduktionsformel für holomorphe Funktionen auf H_n; sie geht letztlich auf A. SELBERG zurück und ist verschiedentlich in der Literatur, allerdings meist für beschränkte Realisierungen von H_n, genannt (vgl. etwa [8]).

Satz 1: *Sei $k > 2n$ ganz rational, f eine auf H_n holomorphe Funktion und* $\det(y)^{k/2} f(z)$ *dort beschränkt. Dann gilt mit einer nur von n und k abhängigen numerischen Konstanten a_{nk}*

$$f(w) = a_{nk} \int_{H_n} f(z) \det(\bar{z} - w)^{-k} \det(y)^k \, dv_z \tag{2}$$

für alle $w \in H_n$.

Der Beweis läßt sich leicht führen, indem man H_n mittels einer Cayleytransformation auf den verallgemeinerten Einheitskreis E_n abbildet. Dieser besteht aus allen n-reihigen symmetrischen Matrizen ζ mit $1 - \zeta\bar{\zeta} > 0$. Es handelt sich um ein beschränktes symmetrisches Gebiet im Sinne von E. CARTAN. Die Cayleytransformation werde noch so normiert, daß der Punkt $w \in H_n$ auf den Nullpunkt abgebildet wird. Das in Frage stehende Integral wird dann berechnet, indem man die Potenzreihenentwicklung von f nach Potenzen von $\zeta = \xi + i\eta$ ansetzt, nach homogenen Bestandteilen gleichen Grades zusammenfaßt und die Konvergenz von

$$\int_{E_n} \det(1 - \zeta\bar{\zeta})^l \, d\xi \, d\eta \qquad (l > -1)$$

nach L. K. HUA [2] benutzt.

Aus dieser Integralformel leitet man sehr einfach die Integralgleichung für beliebige Spitzenformen her. Beachtet man, daß für Spitzenformen f vom Gewicht k die Größe $\det(y)^{k/2} f(z)$ beschränkt ist, so erhält man für $k > 2n$

$$\begin{aligned} f(w) &= a_{nk} \int_{H_n} f(z) \det(\bar{z} - w)^{-k} \det(y)^k \, dv_z \\ &= a_{nk}/2 \sum_{m \in \Gamma_n} \int_{F_n} f(m\langle z\rangle) \overline{\det(m\langle z\rangle - \bar{w})}^{-k} \det(\operatorname{Img} m\langle z\rangle)^k \, dv_z \\ &= a_{nk}/2 \sum_{m \in \Gamma_n} \int_{F_n} f(z) \overline{\det(m\langle z\rangle - \bar{w})}^{-k} \overline{\det(cz + d)}^{-k} \det(y)^k \, dv_z, \end{aligned}$$

$$f(w) = a_{nk}/2 \{f, P_n^k(*, -\bar{w})\}. \tag{3}$$

Hierbei ist

$$P_n^k(z,w) = \sum_{m \in \Gamma_n} \det(m<z> + w)^{-k} \det(cz+d)^{-k}$$

die in [3] eingeführte Poincarésche Reihe vom Typ 1. Diese Integralgleichung (3) stellt schon eine erste Metrisierungsformel dar. Die Poincaréschen Reihen haben bemerkenswerte Eigenschaften, die man [3] entnehmen kann:

(i) Für $m \in Sp(n, \mathbb{R})$, $z, w \in H_n$ gilt

$$\det(m<z> + w)\det(cz+d) = \det(\tilde{m}<w> + z)\det(\tilde{c}w + \tilde{d})$$

mit $\tilde{m} = m^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *)" $\sim$ " beschreibt einen Antiautomorphismus von $Sp(n, \mathbb{R})$;

(ii) die Reihe der Beträge erfüllt

$$\overline{|P_n^k(z,w)|} \prec \overline{|P_n^k(i1, i1)|}$$

gleichmäßig in dem Produkt zweier Vertikalstreifen $V(\delta) \times V(\delta)$ positiver Mindesthöhe δ. Vertikalstreifen sind Bereiche

$$V(\delta) = \{ z \in H_n \mid \sigma(x^2) \leq \delta^{-1}, y \geq \delta 1 \} \qquad (\delta > 0);$$

(iii) $\det(y)^{k/2} \overline{|P_n^k(z,w)|}$ ist beschränkt für alle $z \in H_n$ und w aus einem Kompaktum in H_n.

Die Aussage (i) prüft man sofort nach, (ii) ist eine Folge von (i) und einer trivialen Determinatenabschätzung, (iii) ist der sogenannte Satz von Godement; er kann aus der Formel (2) nach einer Idee von C. J. Earle hergeleitet werden. Man vergleiche dazu die Ausführungen in [5] für einen verwandten Typ von Poincaréschen Reihen. Mit Hilfe dieser drei Eigenschaften erkennt man leicht, daß die Reihen $P_n^k(z,w)$ sowohl als Funktionen von z wie auch als Funktionen von w Spitzenformen vom Gewicht k darstellen. Geht man vermöge der Cayleytransformation

$$\zeta = q(z + \bar{w})(z + w)^{-1} q^{-1}, \qquad (\operatorname{Img} w)[q'] = 1$$

in den Einheitskreis über, so erweisen sich jene Reihen als die gewöhnlichen Poincaréschen Reihen, die mit Hilfe von Potenzen der Funktionaldeterminaten gebildet werden. Man erkennt jetzt auch, daß die bei der Herleitung von (3) aus (2) vorgenommene Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist, da gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Letztlich sind somit auch alle notwendigen Konvergenzuntersuchungen der Formel (2) zu entnehmen.

---

*) Allgemein sei für Matrizen $a[b] = b'ab$ erklärt, wobei b' die zu b transponierte Matrix bezeichnet.

Unter einem Entwicklungstyp von Modulformen verstehe man eine abzählbare Familie $\{h_\nu(z)\}$ von holomorphen Funktionen auf H_n, so daß sich jede Modulform f als

$$f(z) = \sum_\nu a_\nu h_\nu(z)$$

darstellen läßt. Dabei sollen die Koeffizienten a_ν durch eine Integraltransformation vom Typ

$$a_\nu = \int_K f(z) s_\nu(z) dz \tag{4}$$

mit stetigen Funktionen s_ν und einem Kompaktum K in H_n als Integrationsbereich gewonnen werden können. Beispiele werden durch die Fourierentwicklungen bzw. Taylorentwicklungen bezüglich ζ im Einheitskreis E_n gegeben. Als Integraltransformation (4) fungiert dabei die elementare Formel für die Fourierkoeffizienten periodischer Funktionen bzw. das Cauchysche Integral. – Die Abbildung

$$f \mapsto f^*, \qquad f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})}$$

führt offensichtlich automorphe Formen bezüglich einer Untergruppe G von $Sp(n, \mathbb{R})$ in automorphe Formen bezüglich $\tilde{G}$ über. Für die Modulgruppe gilt $\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n$, so daß $*$ einen Isomorphismus zwischen Siegelschen Modulformen beschreibt. Mit $\{h_\nu\}$ ist daher auch $\{h_\nu^*\}$ ein Entwicklungstyp von Modulformen. Nun gilt

Satz 2: *Sei $k > 2n$ und Δ_n eine Untergruppe von Γ_n; für einen Entwicklungstyp $\{h_\nu\}$ gelte*

$$\sum_{m \in \Delta_n} \det(m<z> + w)^{-k} \det(cz+d)^{-k} = \sum_\nu g_\nu(z) h_\nu^*(w), \tag{5}$$

wobei sich die Koeffizienten g_ν wieder nach (4) bestimmen lassen sollen. Dann stellen die mit diesen Funktionen gebildeten Poincaréschen Reihen Modulformen vom Gewicht k dar und erfüllen

(*a*) $G_n^k(z; g_\nu) = \sum_{m \in \Delta_n \backslash \Gamma_n} g_\nu(m<z>) \det(cz+d)^{-k}$ *konvergiert absolut gleichmäßig auf Vertikalstreifen positiver Mindesthöhe,*

(*b*) $\det(y)^{k/2} |G_n^k(z; g_\nu)|$ *ist beschränkt auf H_n,*

(*c*) $P_n^k(z, w) = \sum_\nu G_n^k(z; g_\nu)\, h_\nu^*(w)$.

Beweis: Zunächst sei bemerkt, daß die im Satz genannte Teilreihe von $P_n^k(z, w)$ wegen der Symmetrierelation (i) eine automorphe Form in w bezüglich $\tilde{\Delta}_n$ ist. Daher ist eine Entwicklung jener Teilreihe nach $\{h_\nu^*\}$ zwar zu erwarten; ihre Existenz wird jedoch ausdrücklich gefordert. An Hand des Cauchykriteriums erkennt man, daß sich die Eigenschaft (a) vermöge der Integraltransformation (4) aus (ii) und der daraus resultierenden absolut gleichmäßigen Konvergenz von $P_n^k(z, w)$ (z aus Vertikalstreifen positiver Mindesthöhe, w aus einem Kompaktum in H_n) ergibt. Die Aussage (b) überträgt sich direkt aus (iii) mittels jener Integraltransformation, und auch (c) kann so eingesehen werden.

Nimmt man für Δ_n die Untergruppe A_n der Translationen und als Entwicklungstyp Fourierreihen, so wird man auf die in [6] eingeführten Poincaréschen Reihen

$$\sum_{m \in A_n \backslash \Gamma_n} e^{2\pi i \sigma(t\, m<z>)} \det(cz + d)^{-k}$$

geführt. Legt man $\Delta_n = \{\pm 1\}$ und Taylorentwicklungen zugrunde, so erhält man die Poincaréschen Reihen vom Typ 2 aus [3]. Sämtliche ursprünglich nur mühsam durchzuführenden Konvergenzuntersuchungen von Poincaréschen Reihen sind somit eine einfache Folge der Eigenschaften (i) - (iii).

Die in diesem Satz gewonnenen Poincaréschen Reihen stellen auch Spitzenformen dar, weil $P_n^k(z, w)$ Spitzenform bezüglich z ist. Man bestimme nämlich die $G_n^k(z; g_\nu)$ aus (c) mittels der Integraltransformation (4) zu

$$G_n^k(z; g_\nu) = -\int_{-\bar{K}} P_n^k(z, w)\, \overline{s_\nu(-\bar{w})}\, dw$$

und berechne den t-ten Fourierkoeffizienten nach der Formel

$$-\int_{x \bmod 1} \int_{-\bar{K}} P_n^k(z, w)\, \overline{s_\nu(-\bar{w})}\, e^{-2\pi i \sigma(tz)}\, dw\, dx.$$

Der Satz von Fubini zeigt, daß dieses Integral für $t \not> 0$ verschwindet. Daß die Poincaréschen Reihen $G_n^k(z; g_\nu)$ den Raum aller Spitzenformen vom Gewicht k aufspannen, ist eine Folge von (3). Ist nämlich f eine beliebige Spitzenform, so gilt für den ν-ten Koeffizienten der Entwicklung

$$f(w) = \sum_\nu a_\nu h_\nu(w)$$

nach (3) und (4):

$$\begin{aligned} a_\nu &= \int_K f(w)\, s_\nu(w)\, dw \\ &= a_{nk}/2 \int_K \Big(\int_{F_n} f(z)\, \overline{P_n^k(z, -\bar{w})} \det(y)^k\, dv_z \Big)\, s_\nu(w)\, dw \\ &= a_{nk}/2 \int_{F_n} f(z) \Big(\int_K \overline{P_n^k(z, -\bar{w})}\, s_\nu(w)\, dw \Big) \det(y)^k\, dv_z \\ &= a_{nk}/2\, \{f, G_n^k(*; g_\nu)\}. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini ist erlaubt, weil $\det(y)^k f(z)$ auf F_n und $P_n^k(z, -\bar{w})$ für $z \in F_n$, $w \in K$ beschränkt sind. Es gilt somit für jede Spitzenform f

$$f(w) = a_{nk}/2 \sum_{\nu} \{f, \; G_n^k(*; g_\nu)\} \, h_\nu(w).$$

Steht f also senkrecht auf allen Poincaréschen Reihen $G_n^k(*; g_\nu)$, so verschwindet f identisch. – Damit ist auch

$$a_\nu(f) = a_{nk}/2 \, \{f, G_n^k(*; g_\nu)\}$$

für beliebige Spitzenformen f gezeigt. Man beachte aber, daß die Funktionen g_ν und h_ν im allgemeinen verschieden sind. Der bei den Poincaréschen Reihen vom Exponentialtyp vorliegende Spezialfall $g_\nu = h_\nu$ stellt also eine Ausnahmesituation dar. Nur in diesem Fall gelten die sogenannten Grundformeln der Metrisierungstheorie, wonach das Skalarprodukt zwischen einer beliebigen Spitzenform f und der zum ν-ten Glied eines Entwicklungstyps gehörigen Poincaréschen Reihe $G_n^k(*; h_\nu)$ bis auf einen unwesentlichen Faktor gerade der ν-te Entwicklungskoeffizient von f ist. Es besteht ein derartiger Zusammenhang vielmehr zwischen den Koeffizienten eines ersten Entwicklungstyps $\{h_\nu\}$ und den Poincaréschen Reihen zu einem zweiten im allgemeinen davon verschiedenen Entwicklungstyp $\{g_\nu\}$. $\{h_\nu\}$ und $\{g_\nu\}$ sollen komplementär zueinander heißen. Diese Kopplung wird durch die Beziehung (5) beschrieben. – Zusammenfassend kann formuliert werden

Satz 3: *Unter den gleichen Voraussetzungen wie bei Satz 2 gilt:*

(*a*) *Die Poincaréschen Reihen $G_n^k(z; g_\nu)$ spannen den vollen Raum der Spitzenformen auf (Vollständigkeitssatz),*

(*b*) *es gelten die Metrisierungsformeln*

$$a_\nu(f) = a_{nk}/2 \, \{f, G_n^k(*; g_\nu)\},$$

wobei die a_ν die Koeffizienten von f in seiner Entwicklung nach $\{h_\nu\}$ sind und die Poincaréschen Reihen zu dem zu $\{h_\nu\}$ komplementären Entwicklungstyp $\{g_\nu\}$ gebildet werden.

2. Als Anwendung der obigen Theorie soll nun eine Metrisierungstheorie für Poincarésche Reihen zu Jacobiformen entwickelt werden. Das Prinzip der Quersummation würde nicht erkennen lassen, ob man überhaupt und wenn ja, wie man zu Poincaréschen Reihen gelangen kann, welche den Raum der Spitzenformen aufspannen. Dagegen zeigt der im ersten Abschnitt vorgenommene Aufbau einen Weg, geeignete Jacobiformen ausfindig zu machen, mit deren Hilfe eine Metrisierungstheorie für Siegelsche Modulformen mit Einschluß des Vollständigkeitssatzes und der Grundformeln der Metrisierungstheorie erhalten werden kann. Jacobiformen wurden für $n = 1$ von EICHLER/ZAGIER [1] und für beliebiges n von T. YAMAZAKI [9] eingeführt.

Definition: *Es seien n, k natürliche Zahlen, $t \geq 0$ und ganz. Eine Jacobiform vom Gewicht k, Grad n und Index t ist eine holomorphe Funktion*

$$\Phi : H_n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

mit folgendem Transformationsgesetz gegenüber $\Gamma_n \times \mathbb{Z}^{2n}$:

$$\Phi(m<z_1>, (cz_1 + d)'^{-1} z_2) = \det(cz_1 + d)^k e^{2\pi i t z_2'(cz_1 + d)^{-1} c z_2} \Phi(z_1, z_2) \qquad (6)$$

für alle $m \in \Gamma_n$,

$$\Phi(z_1, z_2 + z_1 \lambda + \mu) = e^{-2\pi i t (z_1[\lambda] + 2\lambda' z_2)} \Phi(z_1, z_2) \qquad (7)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$ (geschrieben als n-reihige Spalten).

Jeder Jacobiform Φ vom Gewicht k, Grad n, Index t ordne man nun eine holomorphe Funktion $\Phi^* : H_{n+1} \to \mathbb{C}$ zu vermöge

$$\Phi^* \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2' & z_4 \end{pmatrix} = \Phi(z_1, z_2) e^{2\pi i t z_4}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Gesetze (6) bzw. (7) für Φ dem Transformationsverhalten (1) von Modulformen vom Gewicht k für Φ^* bezüglich

$$m * 1 = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad m = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda' & 1 & \mu' & \kappa \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1 & -\lambda \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

entsprechen. Diese Modulsubstitutionen erzeugen die Untergruppe C_{n+1} aller Elemente aus Γ_{n+1}, deren letzte Zeile der $(n+1)$-te Einheitsvektor ist. Somit entsprechen den Jacobiformen Φ vom Index t, Gewicht k und Grad n gewisse automorphe Formen Φ^* vom Gewicht k bezüglich der Gruppe C_{n+1} in eineindeutiger Weise. - Beispiele von Jacobiformen werden durch die Fourier-Jacobi-Entwicklungen Siegelscher Modulformen geliefert. Allgemeiner gilt

Satz 4: *Sei f eine auf H_{n+1} erklärte automorphe Form bezüglich C_{n+1} vom Gewicht k und beschränkt in Bereichen $y \geq \delta 1$ $(\delta > 0)$. Spaltet man z in*

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2' & z_4 \end{pmatrix} \quad \textit{vom Typ } (n, 1)$$

auf, so sind die Koeffizienten $\Phi_t(z_1, z_2)$ der Fourierentwicklung von f bezüglich z_4,

$$f(z) = \sum_{t \geq 0} \Phi_t(z_1, z_2) e^{2\pi i t z_4},$$

Jacobiformen vom Grad n, Index t und Gewicht k.

Beweis: Da C_{n+1} die Translationen als Untergruppe enthält, existiert eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{t \geq 0} c_t e^{2\pi i \sigma(t z)},$$

wobei über alle halbganzen $(n+1)$-reihigen t summiert wird. Die Beschränktheitsforderung für f bedingt $c_t = 0$ für nicht positiv semidefinites t. Spaltet man z und t in der oben angegebenen Weise auf, so folgt

$$f(z) = \sum_{t \geq 0} \Phi_t(z_1, z_2) e^{2\pi i t z_4}$$

mit

$$\Phi_t(z_1, z_2) = \sum c(t_1, t_2) e^{2\pi i \sigma(t_1 z_1 + t_2 z_2')} \tag{8}$$

und der Summationsbedingung

$$t_1 \geq 0, \text{ halbganz}; \quad t_2 \text{ ganz}, \begin{pmatrix} t_1 & t_2/2 \\ t_2'/2 & t \end{pmatrix} \geq 0.$$

Man nutze zunächst das Transformationsverhalten von f gegenüber $m * 1$ aus. Es wird

$$(m * 1) <z> = \begin{pmatrix} m <z_1> & (cz_1 + d)'^{-1} z_2 \\ * & z_4 - z_2'(cz_1 + d)^{-1} cz_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

also

$$f(m <z>) = \sum_{t \geq 0} \Phi_t(m <z_1>, (cz_1 + d)'^{-1} z_2) e^{2\pi i t (z_4 - z_2'(c z_1 + d)^{-1} c z_2)}$$

$$= \det(cz_1 + d)^k \sum_{t \geq 0} \Phi_t(z_1, z_2) e^{2\pi i t z_4}.$$

Koeffizientenvergleich in dieser Fourierentwicklung bezüglich z_4 liefert das Gesetz (6). Bei den übrigen Erzeugenden von C_{n+1} kann man sich auf $\mu = \kappa = 0$ beschränken, da die Periodizität von Φ_t bezüglich z_2 unmittelbar klar ist. Es wird jetzt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2' & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_1 \lambda + z_2 \\ * & z_4 + \lambda' z_2 + z_2' \lambda + z_1[\lambda] \end{pmatrix}, \tag{10}$$

also

$$f(z \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \sum_{t \geq 0} \Phi_t(z_1, z_1 \lambda + z_2) e^{2\pi i t (z_4 + z_1[\lambda] + 2\lambda' z_2)}$$

$$= \sum_{t \geq 0} \Phi_t(z_1, z_2) e^{2\pi i t z_4}.$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommt man nun das Gesetz (7).
Bemerkung: Im Hinblick auf diesen Zusammenhang nimmt man die Existenz einer Fourierentwicklung vom Typ (8) in die Definition der Jacobiformen als dritte Bedingung auf. Man spricht von Spitzenformen, wenn man die Summation in (8) sogar auf positiv definite Matrizen beschränken kann. Solche Jacobi-Spitzenformen treten in den Fourier-Jacobi-Entwicklungen Siegelscher Spitzenformen vom Grad $n+1$ auf.

Um Satz 2 zur Anwendung zu bringen, untersuche man die folgende Teilreihe von $P^k_{n+1}(z,w)$,

$$\hat{P}^k_{n+1}(z,w) = \sum_{m \in C_{n+1}} \det(m<z> + w)^{-k} \det(cz+d)^{-k}.$$

Aus den Formeln (9) und (10) entnimmt man die wichtige Beobachtung, daß die Abhängigkeit des allgemeinen Reihengliedes von z_4, w_4 durch

$$m<z> + w = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \ldots + z_4 + w_4 + \ldots \end{pmatrix}$$

bestimmt wird, wobei die freien Plätze unabhängig von z_4, w_4 sind. Hierdurch wird letztlich sichergestellt, daß man Poincarésche Reihen zu Jacobiformen bekommt. Man erhält nämlich die folgende Gestalt der Fourierentwicklung

$$\hat{P}^k_{n+1}(z,w) = \sum_t \hat{\Phi}_t\,(z_1,z_2;w_1,w_2)\,e^{2\pi i t(z_4+w_4)}. \tag{11}$$

Berücksichtigt man noch, daß $\det(y)^{k/2}\,|\hat{P}^k_{n+1}(z,w)|$ bei festem w gleichmäßig in $z \in H_{n+1}$ nach (iii) beschränkt ist, so genügt es, die Summation in (11) über positive t zu erstrecken. Nach Satz 4 sind nun die dabei auftretenden Koeffizienten $\hat{\Phi}_t(z_1,z_2;w_1,w_2)$ als Funktionen von z_1, z_2 Jacobiformen vom Index t, Gewicht k und Grad n.

Die Poincaréschen Reihen zu den so gefundenen Jacobiformen $\hat{\Phi}_t(*;w_1,w_2)$ besitzen nun die für die Metrisierungstheorie relevanten Eigenschaften. Man hat außerdem die früheren Untersuchungen etwas zu modifizieren. Es bleiben nämlich die im ersten Abschnitt vorgenommenen Betrachtungen auch richtig, wenn die Funktionen h_ν nur von einem Teil der Elemente von z abhängen und als Koeffizienten a_ν Funktionen in den übrigen Elementen von z zugelassen werden. Man kann also den Entwicklungstyp

$$h_t(z) = e^{2\pi i t z_4} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

verwenden und bekommt nach den Sätzen 2 und 3

Satz 5: *Für $k > 2n+2$ gilt:*

(a) *Die Poincaréschen Reihen*

$$H_{n+1}^{k}(z; \hat{\Phi}_t(*; w_1, w_2))$$

$$= \sum_{m \in C_{n+1} \backslash \Gamma_{n+1}} \hat{\Phi}_t(m<z>_1, m<z>_2; w_1, w_2)\, e^{2\pi i t m<z>_4} \det(cz+d)^{-k}$$

konvergieren absolut gleichmäßig bezüglich z auf Vertikalstreifen positiver Mindesthöhe und stellen Spitzenformen $(n+1)$*-ten Grades vom Gewicht k dar,*

(*b*) *die Funktionen*

$$\det(y)^{k/2} \left| H_{n+1}^{k}(z; \hat{\Phi}_t(*; w_1, w_2)) \right|$$

sind bezüglich z beschränkt auf H_{n+1},

(*c*) *es gilt*

$$P_{n+1}^{k}(z, w) = \sum_{t>0} H_{n+1}^{k}(z; \hat{\Phi}_t(*; w_1, w_2))\, e^{2\pi i t w_4},$$

(*d*) *die Poincaréschen Reihen* $H_{n+1}^{k}(z; \hat{\Phi}_t(*; w_1, w_2))$ *spannen den Raum aller Spitzenformen auf* (*Vollständigkeitssatz*),

(*e*) *es gelten die Grundformeln der Metrisierungstheorie für die Fourier-Jacobi-Koeffizienten beliebiger Spitzenformen f*

$$\Phi_t(f)(w_1, w_2) = a_{n+1,k}/2\,\{f, H_{n+1}^{k}(*; \hat{\Phi}_t(*; -\bar{w}_1, -\bar{w}_2))\}.$$

Die naheliegende Frage, ob die Poincaréschen Reihen zu beliebigen Jacobiformen konvergieren und Modulformen darstellen, kann nicht immer bejaht werden. Man kann aber zeigen

Satz 6: *Sei* Φ_t *eine Jacobiform vom Gewicht* $k > 2(n+1)$, *Grad n und Index t und sei*

$$\det(y_1)^{k/2}\, \Phi_t(z_1, z_2)\, e^{2\pi i t z_4}$$

beschränkt in H_{n+1}. *Dann konvergiert die mit dieser Jacobiform gebildete Poincarésche Reihe und stellt eine Spitzenform* $(n+1)$*-ten Grades dar.*

Beweis: Als Majorante der Poincaréschen Reihe kann offensichtlich

$$Q_{n+1}^{k}(z) = \sum_{m \in C_{n+1} \backslash \Gamma_{n+1}} \det(\operatorname{Img} m<z>_1)^{-k/2} \left|\det(cz+d)\right|^{-k}$$

gleichmäßig in H_{n+1} verwandt werden. Nun gilt (vgl. [4])

$$Q_{n+1}^{k}(z) \prec Q_{n+1}^{k}(i\,1)$$

gleichmäßig in Vertikalstreifen positiver Mindesthöhe. Die Majorante $Q_{n+1}^{k}(i\,1)$ läßt sich auch schreiben als

$$\sum_{m \in C_{n+1} \backslash \Gamma_{n+1}} \eta_2 (i\,1)^{k/2}$$

mit

$$m<z> = \xi(z) + i\eta(z), \qquad \eta(z) = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 1 & \eta_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}].$$

Mit bewährten Hilfsmitteln der symplektischen Geometrie zeigt man, daß Konvergenz vorliegt, falls

$$\int_{F^*,\ \det y \le a} y_2^{k/2}\, dv_z < \infty.$$

Hierbei ist F^* irgendein Fundamentalbereich von C_{n+1}, etwa

$$F^* = \{ z \in H_{n+1} \,|\, z_1 \in F_n, \quad x, y_3 \textit{ reduziert } \bmod 1 \},$$

und y wird analog zu η in

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 1 & y_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

aufgespalten . Für das Volumelement gilt

$$dv_z = \det(y)^{-n-2}\, dx\, dy, \qquad dy = \det(y_1)\, dy_1\, dy_2\, dy_3,$$

also ist obiges Integral gleich

$$\int_{F^*,\ \det y \le a} \det(y_1)^{-n-1} y_2^{k/2-n-2} dx\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

$$\leqslant \int_{F^*} dv_{z_1} \int_{y_2 \leqslant b} y_2^{k/2-n-2} dy_2$$

mit geeignetem b. Man hat Konvergenz für $k > 2(n+1)$. – Um nachzuweisen, daß es sich um Spitzenformen handelt, wende man den bekannten Siegelschen Φ-Operator an. Der betreffende Grenzprozeß kann gliedweise vollzogen werden, weil gleichmäßige Konvergenz in Vertikalstreifen positiver Mindesthöhe vorliegt. Alle Reihenglieder von $Q_{n+1}^k(z)$ mit Ausnahme des ersten ($m=1$) streben gegen Null bei dem Grenzprozeß $z_4 \to i\infty$. Für $m=1$ ist das betreffende Glied von $Q_{n+1}^k(z)$ unabhängig von z_4; dennoch strebt das erste Glied der Poincaréschen Reihe gegen Null, weil der Faktor $e^{2\pi i z_4}$ auftritt. Also handelt es sich um Spitzenformen.

Man kann zeigen, daß die gemäß Satz 2 erhaltenen Jacobiformen $\hat{\Phi}_t(z_1,z_2)$ die in Satz 6 geforderte Beschränktheitsbedingung erfüllen. – Zum Schluß soll zumindest für den Fall $n=1$ nachgewiesen werden, daß darüber hinaus sämtliche Jacobiformen, die bei den Fourier-Jacobi-Entwicklungen Siegelscher Spitzenformen auftreten, auch dieses Wachstumsverhalten besitzen. Zu allen diesen Jacobiformen kann man also Poincarésche Reihen bilden.

Satz 7: *Sei f eine Siegelsche Spitzenform zweiten Grades vom Gewicht k und*

$$f(z) = \sum_{t>0} \Phi_t(z_1, z_2)\, e^{2\pi i t z_4}$$

ihre Fourier-Jacobi-Entwicklung. Dann ist

$$y_1^{k/2} \Phi_t(z_1, z_2)\, e^{2\pi i t z_4}$$

gleichmäßig in $z \in H_2$ beschränkt.

Beweis: Durch Zusammenfassung der Fourierentwicklung von f bekommt man

$$y_1^{k/2}\, \Phi_t(z_1, z_2)\, e^{2\pi i t z_4} = y_1^{k/2} \sum_{t_1, t_2} c(t_1, t_2)\, e^{2\pi i (t_1 z_1 + 2 t_2 z_2 + t z_4)}, \tag{12}$$

wobei die Summation über alle t_1, t_2 zu erstrecken ist, für die $\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2' & t \end{pmatrix}$ halbganz und positiv ist. Wegen der Invarianz von

$$y_1^{k/2}\, |\, \Phi_t(z_1, z_2)\, e^{2\pi i t z_4}\, |$$

gegenüber C_2 genügt es, eine Abschätzung dieser Funktion für

$$|y_2| \leq 1/2\ y_1, \qquad y_1 \geq \delta \qquad\qquad (\delta > 0)$$

zu finden. Nun erfüllen die Koeffizienten $c(t_1, t_2)$

$$c(t_1, t_2) = \mathbf{O}\left(\det \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t \end{pmatrix}\right)^{k/2},$$

weil f Spitzenform ist. Nach einfacher Rechnung bekommt man als Majorante von (12) in dem genannten Bereich die Reihe

$$y_1^{k/2} \sum_{t_1 > 0} t_1^l\, e^{-t_1 y_1}. \tag{13}$$

mit positivem l. Hierbei sind endlich viele Anfangsglieder wegzulassen. Diese Majorante ist aber in $y_1 \geq \delta$ beschränkt. Außerdem stellen einzelne Reihenglieder von (12) ohnehin beschränkte Funktionen dar, so daß die Behauptung gefolgert werden kann.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich die Untersuchungen des 2. Abschnitts bis Satz 6 einschließlich auch für eine beliebige Aufspaltung

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2' & z_4 \end{pmatrix}$$

mit m-reihigem z_4 durchführen lassen. Der Begriff der Jacobiform ist dabei in naheliegender Weise zu verallgemeinern.

Literatur

[1] M. EICHLER / D. ZAGIER, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics 55, Birkhäuser 1985

[2] L. K. HUA, Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 6 (1963)

[3] H. KLINGEN, Über Poincarésche Reihen zur Siegelschen Modulgruppe, Mathem. Annalen 168, 157-170 (1967)

[4] H. KLINGEN, Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen, Mathem. Zeitschrift 102, 30-43 (1967)

[5] H. KLINGEN, Über Poincarésche Reihen vom Exponentialtyp, Mathem. Annalen 234, 145-157 (1978)

[6] H. MAASS, Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen, Mathem. Annalen 123, 125-151 (1951)

[7] H. PETERSSON, Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die Poincaréschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art, Abhdlg. Math. Sem. Hamburg 14, 22-60 (1941)

[8] M. STOLL, Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains, Journal r. angew. Math. 290, 191-198 (1977)

[9] T. YAMAZAKI, Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series, Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 33, 295-310 1986)

Eingegangen am 20. 10. 1986

Anschrift des Autors: Helmut Klingen, Mathematisches Institut der Universität, Albertstraße 23 b, D-7800 Freiburg, Bundesrepublik Deutschland.