Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57, 69–85 (1986)

Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten

von U. Pachner

1. *Einleitung*: Das Studium der Geometrie der Simplizialkomplexe hat eine lange und reiche Tradition. Obwohl dieses Gebiet durchaus genügend Leben aus der Kraft und Schönheit seiner Strukturaussagen bezieht, ist seine Entwicklung und Bedeutung in weit stärkerem Maße geprägt von den weitverzweigten Anwendungen und nicht zuletzt auch von dem Bedürfnis, algebraische und topologische Sachverhalte geometrisch interpretieren zu können.

In der kombinatorischen Topologie zählt die Methode der stellaren Unterteilungen zum unentbehrlichen Handwerkszeug. Eine Grundlage hierfür liefert der fundamentale Satz über die Äquivalenz des Homöomorphieproblems für kompakte Polyeder (im semilinearen Sinn) mit der stellaren Äquivalenz beliebiger Triangulierungen dieser Polyeder (siehe z. B. in [1, 13]). Dieser Satz ist 1970 von Ewald und Shephard für konvexe Polytope verschärft worden [12]. Das Interesse an solchen Untersuchungen ist durch neuere Anwendungen für Fächer torischer Variätäten weiter bereichert worden [7, 9, 11, 22].

Bei simplizialen Kugeln und Sphären hat sich für viele Problemstellungen der Schälbarkeitsbegriff als besonders schlagkräftig erwiesen. Der Nachweis der Schälbarkeit polytopaler Sphären durch Bruggesser und Mani [5] und der Beweis der Upper Bound Conjecture durch McMullen [21] zählen sicherlich zu den Höhepunkten dieser Entwicklung. Als eine weitere Anwendung erwähnen wir die Parametrisierung von Cohen-Macaulay Ringen zu schälbaren Komplexen durch Kind und Kleinschmidt [16]. Ferner besteht auch ein rein topologisches Interesse an solchen Untersuchungen. Bis heute ist nämlich die Frage ungelöst, ob es überhaupt einen Algorithmus gibt, mit dessen Hilfe entschieden werden kann, ob eine gegebene kombinatorische Mannigfaltigkeit eine Kugel oder Sphäre ist (siehe z. B. in [6]). Die Schälbarkeit liefert hier ein hinreichendes, algorithmisch angehbares Kriterium. Bei den Gegenbeispielen zur Hirschvermutung für 3-Sphären von Mani und Walkup findet man eine praktische Anwendung für diese Beweismethode [20].

Leider hat sich herausgestellt, daß der Schälbarkeitsbegriff nicht so allgemein wie die stellare Äquivalenz ist. So weiß man seit einiger Zeit von der Existenz nicht schälbarer, simplizialer semilinearer Kugeln ab Dimension 3 [17] und von der Existenz nicht semilinearer und damit nicht schälbarer triangulierter Sphären ab Dimension 5 (Edwards [8]). Mittlerweile ist sogar nachgewiesen worden, daß auch die semilinearen Sphären nicht alle schälbar sind (Mandel, 1982 [19]).

Diese Einschränkungen sind mit eine Motivation für die Suche nach weiteren

Konstruktionsmethoden, die einerseits allgemeiner als Schälungen sind, mit denen sich aber andererseits Probleme angehen lassen, die stellaren Äquivalenzen bisher nicht zugänglich sind. Im Hintergrund steht dabei natürlich auch die Tatsache, daß einige der genannten Ergebnisse durchaus verallgemeinert werden konnten - allerdings nur mit tiefliegenden Hilfsmitteln der algebraischen Geometrie und der homologischen Algebra. So gilt die COHEN-MACAULAY Eigenschaft und die Upper Bound Conjecture allgemein für simpliziale Sphären (REISNER [26], STANLEY [28]).

Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen stehen bistellare Operationen. Hierbei handelt es sich um ganz spezielle Kombinationen von je einer stellaren und einer inversen stellaren Unterteilung. In einer Arbeit von 1978, in der EWALD sein gemeinsames Ergebnis mit SHEPHARD durch Anwendung eines BRUGGESSER/MANI Schälprozesses verschärft [10], werden diese elementaren Operationen wegen ihres engen Zusammenhanges mit Schälungen zum erstenmal als eigenständige Operationen studiert. In [23, 24] sind die Ergebnisse von EWALD für Polytope weiter ausgebaut und teilweise auf allgemeinere Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden. Eine praktische Anwendung dieser Ergebnisse findet man in der Konstruktion aller 1142 simplizialer 4-Polytope mit 9 Ecken bei ALTSHULER, BOKOWSKI und STEINBERG [2]. Eine neuere interessante Anwendung bistellarer Operationen findet man bei DANILOV [7] im Beweis eines Zerlegungssatzes für Morphismen torischer Varietäten.

Wir zeigen hier als Hauptergebnis, daß für geschlossene semilineare Mannigfaltigkeiten die bistellare Äquivalenz gleichbedeutend mit der stellaren Äquivalenz (also mit der p.l. Homöomorphie) ist. Insbesondere läßt sich also jede semilineare simpliziale Sphäre durch bistellare Operationen aus dem Randkomplex eines Simplexes gewinnen. Hiermit können wir dann weiter zeigen, daß jede semilineare simpliziale Sphäre Randkomplex einer schälbaren simplizialen Kugel ist, eine Eigenschaft, von der man bisher annahm, daß sie stärker als die bistellare Äquivalenz ist [13]. Als weitere Folgerung zeigen wir, daß man jede semilineare simpliziale Kugel durch elementare Schälungen, inverse elementare Schälungen und bistellare Operationen aus einem Simplex erzeugen kann.

Zum Abschluß geben wir noch einen Zusammenhang zwischen bistellaren Äquivalenzen und h-Vektoren geschlossener simplizialer Mannigfaltigkeiten. Dem h-Vektor einer simplizialen Mannigfaltigkeit entspricht eindeutig der f-Vektor, der als Komponenten die Anzahlen f_i der i-dimensionalen Zellen hat. Mit Hilfe bistellarer Äquivalenzen legen wir dann einen trivialen Beweis der DEHN-SOMMERVILLE Gleichungen vor und geben einige zur g-Vermutung von MCMULLEN [4, 21, 29] äquivalente Aussagen an. Diese Beziehungen demonstrieren die Nähe bistellarer Äquivalenzen zu Schälungen und die Vorzüge gegenüber stellaren Äquivalenzen.

2. *Schälungen und stellare Vertauschungen*

Zu Beginn listen wir die notwendigen Definitionen und Begriffe auf. Sei $\mathscr{C}$ ein endlicher Simplizialkomplex im euklidischen Raum. Die Elemente aus $\mathscr{C}$ heißen *Zellen* von $\mathscr{C}$, *Ecken* von $\mathscr{C}$ sind die 0-Zellen, *Kanten* die 1-Zellen und *Facetten* die (bzgl. Inklusion) maximalen Zellen von $\mathscr{C}$. Die *Dimension* $n = \dim \mathscr{C}$ von $\mathscr{C}$ ist die maximale Dimension der Zellen von $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ heißt dann simplizialer n-Komplex. Haben alle Facetten von $\mathscr{C}$ gleiche Dimension, so heißt $\mathscr{C}$ *homogen.*

Für $A \in \mathscr{C}$ bezeichnet $st(A;\mathscr{C}) := \{B \in \mathscr{C} : A \subset B\}$ den (offenen) *Stern* von A in $\mathscr{C}$, $\overline{st}(A;\mathscr{C})$ ist der kleinste Subkomplex von $\mathscr{C}$, der $st(A;\mathscr{C})$ enthält, $ast(A;\mathscr{C}) := \{B \in \mathscr{C} : B \cap A = 0\}$ ist der *Antistern* von A in $\mathscr{C}$ und $\operatorname{link}(A;\mathscr{C}) := \overline{st}(A;\mathscr{C}) \cap ast(A;\mathscr{C})$ heißt *Verkettungskomplex* von A in $\mathscr{C}$. Die *Trägermenge* von $\mathscr{C}$ ist definiert durch $|\mathscr{C}| := \cup \mathscr{C}$. Mit $\mathscr{C} \approx \mathscr{C}'$ bezeichnen wir die Isomorphie zweier Komplexe, des öfteren verwenden wir aber auch das Gleichheitszeichen, wo Isomorphismen zugelassen sind.

Für ein konvexes Polytop P bezeichnet $\bar{P}$ den natürlichen Seitenverband von P und $\mathscr{B}(P) := \bar{P} \backslash \{P\}$ den *Randkomplex* von P.

Im folgenden bezeichnet T^d stets ein d-Simplex. Sphären Kugeln, Mannigfaltigkeiten und Homöomophismen sind stets als *p. l. Sphären usw. zu verstehen. Simpliziale Sphären, Kugeln bzw. Mannigfaltigkeiten sind endliche Triangulierungen von Sphären, Kugeln bzw. Mannigfaltigkeiten.*

Ist $\mathscr{M}$ eine simpliziale Mannigfaltigkeit mit $|\mathscr{M}| = M$, so bezeichnet $bd\,M$ den Rand von M und $int\,M = M \backslash bd\,M$ das Innere von M. Der Randkomplex $Bd\,M$ ist wie üblich definiert, also $|Bd\,\mathscr{M}| = bd\,M$, und $Int\,\mathscr{M} := \mathscr{M} \backslash Bd\,\mathscr{M}$. Mit $\mathscr{C} \cdot \mathscr{C}'$ bezeichnen wir die Verbindung zweier Simplizialkomplexe (*join* in [12, 15]).

Definition 1: Sei $\mathscr{M}$ eine simpliziale n-Mannigfaltigkeit, $A \in \operatorname{Int} \mathscr{M}$ und $\operatorname{link}(A;\mathscr{M}) = \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{L}$ für ein Simplex $B \in \mathscr{M}$, $\dim A, \dim B \geqq 0$.

Dann heißt

$$\kappa_{(A,\,B)} \mathscr{M} := (\mathscr{M} \backslash A \cdot \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{L}) \cup B \cdot \mathscr{B}(A) \cdot \mathscr{L}$$

eine *stellare Vertauschung.*

Bemerkungen und Zusätze:

1. Bei der obigen Operation wird natürlich stillschweigend vorausgesetzt, daß B mit $\mathscr{B}(A) \cdot \mathscr{L}$ verbindbar ist und $|\mathscr{M} \backslash A \cdot \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{L}| \cap B \cdot bd\,A \cdot |\mathscr{L}| = bd\,A \cdot bd\,B \cdot |\mathscr{L}|$ gilt. $\mathscr{M}$ läßt sich geometrisch stets so realisieren, daß dies der Fall ist.

2. Es gilt stets $\kappa^{-1}{}_{(A,\,B)} = \kappa_{(B,\,A)}$.

3. *Im Fall* $\mathscr{L} = \{\phi\}$, also $dim\,A + dim\,B = n$, heißt $\chi_A := \chi_{(A,\,B)} := \kappa_{(A,\,B)}$ eine bistellare k-Operation, falls $\dim A = k$ ist.

4. Ist $B = b$ ein Punkt, so heißt $\sigma_A := \sigma_{(A,\,b)} := \kappa_{(A,\,b)}$ eine *stellare Unterteilung.* Ist dabei A eine Facette, so heißt σ_Δ eine *Facettenteilung.* in diesem Fall gilt $\sigma_A = \chi_A$, d. h. jede Facettenteilung ist eine bistellare n-Operation. Ist $A = a$ eine Ecke, so ist $\kappa_{(a,B)} = \sigma_B^{-1} \stackrel{\llcorner}{=} \chi_a$ eine inverse Unterteilung und speziell für $dim\,B = n$ ist dann $\sigma_B^{-1} \stackrel{\llcorner}{=} \chi_a$ eine inverse Facettenteilung bzw. bistellare 0-Operation.

5. Die Gleichung $\mathscr{M}' = \kappa_{(A,B)} \mathscr{M}$ beinhaltet im folgenden nicht nur die durch die Definitionsgleichung gegebene mengentheoretische Beziehung zwischen $\mathscr{M}$ und

$\mathcal{M}'$, sondern stets auch das Vorliegen der speziellen Voraussetzung in der Definition, was also stets zusätzlich überprüft werden muß. Nur im Falle stellarer Unterteilungen sind diese Voraussetzungen trivial, d.h. stellare Unterteilungen sind unbeschränkt durchführbar.

6. Zwei geschlossene simpliziale n-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ heißen *stellar äquivalent* bzw. *bistellar äquivalent*, wenn sie durch eine Kette von stellaren und inversen stellaren Unterteilungen bzw. durch bistellare Operationen ineinander überführt werden können. Zusätzlich sind jeweils Isomorphismen zugelassen. Schreibweise: $\mathcal{M}' \overset{st}{\sim} \mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}' \overset{bst}{\sim} \mathcal{M}$.

7. Für eine bistellare Operation $\chi_{(A,B)}$ gilt stets $\chi_{(A,B)} = \sigma_B^{-1}\sigma_A$ (daher die Bezeichnung *bistellar*). Somit folgt aus der bistellaren Äquivalenz zweier Komplexe stets die stellare Äquivalenz $\kappa_{(A,B)} = \sigma_B^{-1}\sigma_A$. Da nach Bemerkung 4 auch noch jede stellare und jede inverse stellare Unterteilung eine stellare Vertauschung ist, sind die stellare Äquivalenz und die Äquivalenz bezüglich stellarer Vertauschungen gleichbedeutend. (Siehe Beispiele 1 bis 3 Seite 73)

Wir wollen zeigen, daß die bistellare Äquivalenz geschlossener simplizialer Mannigfaltigkeiten gleichbedeutend mit der stellaren Äquivalenz und damit auch gleichbedeutend mit der Homöomorphie der Trägermengen der Mannigfaltigkeiten ist (siehe [13]). Dazu benötigen wir den Schälbarkeitsbegriff.

Definition 2: Seinen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ simpliziale n-Mannigfaltigkeiten und $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \bar{F}$, wo F eine Facette von $\mathcal{M}$ und $|\mathcal{M}'| \cap F$ eine $(n-1)$-Kugel oder Sphäre ist. Dann heißt der Übergang von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}'$ eine *elementare Schälung* von $\mathcal{M}$. Eine *elementare Randoperation* ist eine elementare Schälung oder eine inverse elementare Schälung. Lassen sich durch elementare Schälungen der Reihe nach sämtliche Facetten $F_r, \ldots, F_1$ von $\mathcal{M}$ entfernen, bis als letztes nur noch eine Facette F_0 übrigbleibt, so heißt $\mathcal{M}$ *schälbar* und $(F_0, \ldots, F_r)$ eine *Schälung* von $\mathcal{M}$.

Bemerkungen. 1. Ist $(F_0, \ldots, F_r)$ eine Schälung von $\mathcal{M}$, so gilt für $i = 1, \ldots, r$:

$$F_i \cap \Big(\bigcup_{0 \leqq j \leqq i-1} F_j \Big) = |st(B_i; \mathcal{B}(F_i))| = B_i \cdot bd\, A_i$$

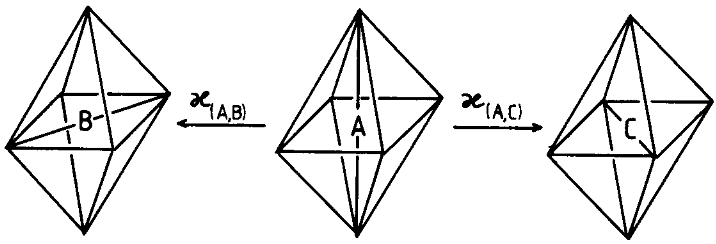
wo A_i, B_i Seiten von F_i sind und $A_i \cdot B_i = F_i$ gilt. Eine schälbare Mannigfaltigkeit ist eine Kugel oder Sphäre. Es gilt dann $0 \leqq \dim B_i \leqq n-1$ für $i = 1, \ldots, r$, falls $\mathcal{M}$ eine Kugel ist und $0 \leqq \dim B_i \leqq n-1$ für $i = 1, \ldots, r-1, B_r = \emptyset, A_r = F_r$, falls $\mathfrak{M}$ eine Sphäre ist.

2. Es gibt nicht schälbare simpliziale Kugeln und Sphären [17, 19].

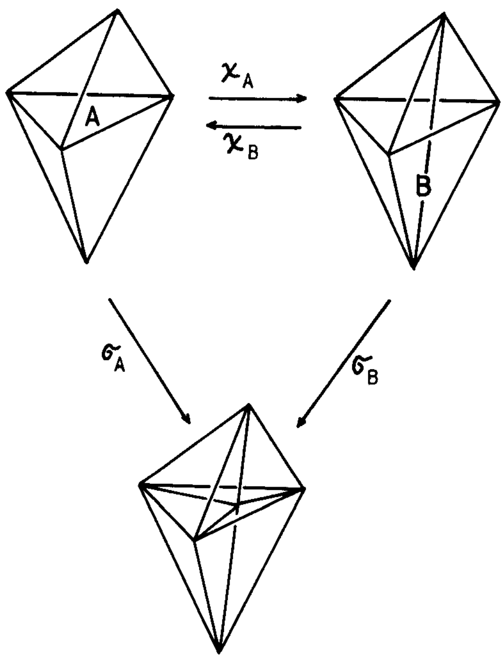
Beim Vergleich der Definitionen 1 und 2 sieht man sofort, daß eine elementare Randoperation einer simplizialen Mannigfaltigkeit im Randkomplex der Mannigfaltigkeit eine bistellare Operation induziert. Mit den Bezeichnungen von Bemerkung 1 zu Definition 2 erhält man also:

Beispiele:

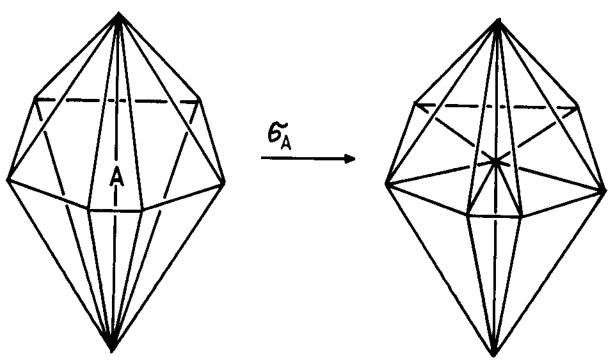
1.



2.



3.



(L. 1) *Ränder schälbarer Kugeln sind bistellar äquivalent zum Rand eines Simplexes. Ist* $(F_o, \ldots, F_r)$ *eine Schälung einer simplizialen d-Kugel* $\mathscr{K}$, *so gilt:*

$$\chi_{A_1} \cdots \chi_{A_r} Bd\,\mathscr{K} = \mathscr{B}(T^d).$$

Wie bereits erwähnt, kennt man nicht schälbare simpliziale Kugeln. Auf die folgende schwächere Fragestellung weiß man hingegen bisher noch nicht die Antwort. Wir werden später eine etwas schwächere Aussage beweisen.

Problem 1. Läßt sich jede simpliziale Kugel durch elementare Randoperationen in ein Simplex überführen?

Für einen weiteren Zusammenhang zwischen Schälungen und bistellaren Äquivalenzen betrachten wir bistellare Operationen mit ausgezeichnetem Punkt p, wie sie von Ewald [10] eingeführt worden sind.

Definition 3. Sei $\mathscr{M}$ eine simpliziale n-Mannigfaltigkeit, p eine Ecke von $\mathscr{M}$ und F eine Facette aus ast $(p; \mathscr{M})$, so daß gilt:

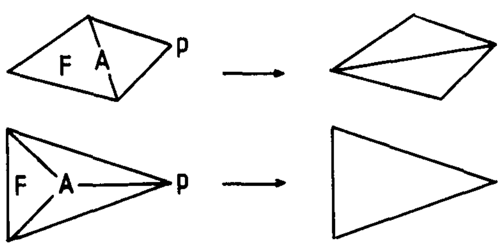
$$\bar{F} \cap \overline{st}(p; \mathscr{M}) = \overline{st}(A; \mathscr{B}(F)) \text{ für eine Seite } \emptyset \neq A \in \mathscr{B}(F).$$

Dann kann man auf $\mathscr{M}$ die bistellare Operation χ_A anwenden, und wir setzen $\chi_A =: \chi_{p/F}$.

Bemerkungen. 1. In einer geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ ist $\chi_{p/F}$ genau dann möglich, wenn die Entfernung der Facette F aus *ast* $(p; \mathscr{M})$ eine elementare Schälung ist.

2. Bei simplizialen Polytopen taucht diese Operation auf, wenn man eine Ecke p des Polytops geeignet "nach außen zieht", bis man eine Facette aus *ast* $(p; \mathscr{B}(P))$ "sieht".

Beispiele.



Aus Bemerkung 1 zu Definition 3 schließt man leicht:

(L. 2) *Sphären mit einem schälbaren Antistern sind bistellar äquivalent zum Rand eines Simplexes. Für eine simpliziale* $(d-1)$*-Sphäre* $\mathscr{S}$ *ist* $(F_o, \ldots, F_r)$ *genau dann eine Schälung von* $ast(p; \mathscr{S})$, *wenn gilt:*

$$\chi_{p/F_1} \cdots \chi_{p/F_r} = \mathscr{B}(p \cdot F_o) = \mathscr{B}(T^d).$$

Es sei bemerkt, daß es simpliziale Sphären mit einem nicht schälbaren Antistern gibt [17]. Ungelöst ist noch die Frage, ob es simpliziale Sphären gibt, bei denen die Antisterne sämtlicher Ecken nicht schälbar sind.

Als letztes sei noch ein direkter Zusammenhang zu Schälungen von Sphären angegeben.

(L. 3) *Schälbare Sphären sind bistellar äquivalent zum Rand eines Simplexes. Es ist* $(F_o, \ldots, F_r)$ *genau dann eine Schälung der simplizialen* $(d-1)$*-Sphäre* $\mathcal{S}$, *wenn* $\chi_{p/F_1} \cdots \chi_{p/F_{r-1}} \chi_{(F_r, p)} \mathcal{S} = \mathcal{B}(T^d)$ *gilt.*

Nach diesen Vorbetrachtungen wollen wir nun wie angekündigt die Äquivalenz von Homöomorphie und bistellarer Äquivalenz beweisen. Dazu benötigen wir noch einige Hilfssätze.

Lemma 1. *Sei* $\mathcal{M}$ *eine simpliziale n-Mannigfaltigkeit,* $A \in Int\, \mathcal{M}$ *und* $p \in \operatorname{link}(A; \mathcal{M})$. *Ferner gelte:*

(1) $ast(p; link(A; \mathcal{M}))$ *ist schälbar,*

(2) $\operatorname{Int}(ast(p; link(A; \mathcal{M}))) \cap link(p; \mathcal{M}) = \{\emptyset\}$.

Dann ist $\mathcal{M}' := (\mathcal{M} \setminus st(A; \mathcal{M})) \cup p \cdot ast(P; \mathcal{B}(A) \cdot link(A; \mathcal{M})) \overset{bst}{\sim} \mathcal{M}$.

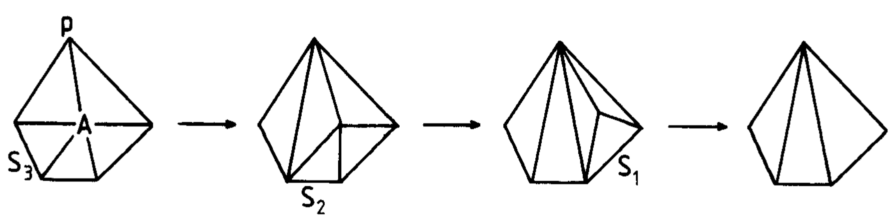
Beweis. Sei $(S_1, \ldots, S_r)$ eine Schälung von $\operatorname{ast}(p; \operatorname{link}(A; \mathcal{M}))$. Dann ist $(A \cdot S_1, \ldots, A \cdot S_r)$ eine Schälung von $\operatorname{ast}(p; \overline{\mathrm{st}}(A; \mathcal{M}))$ und es gilt

$$\begin{aligned} &\chi_{p/A \cdot S_1} \cdots \chi_{p/A \cdot S_r} \overline{\mathrm{st}}(A; \mathcal{M}) \\ &= \bar{p} \cdot \operatorname{ast}(p; Bd(\overline{st}(A; \mathcal{M}))) \\ &= \bar{p} \cdot \operatorname{ast}(p; \mathcal{B}(A) \cdot \operatorname{link}(A; \mathcal{M})). \end{aligned}$$

Diese bistellaren Operationen sind genau dann auch in ganz $\mathcal{M}$ durchführbar, wenn die jeweils neu hinzukommenden Zellen nicht schon vorher zu $\mathcal{M}$ gehören. Dies genau aber gewährleistet (2), und somit gilt auch

$$\chi_{p/A \cdot S_1} \cdots \chi_{p/A \cdot S_r} \mathcal{M} = \mathcal{M}'.$$

Beispiel.



Bemerkung. Nach Definition 3 gilt

$$\chi_{p/A\cdot S_1}\cdots\chi_{p/A\cdot S_r}=\chi_A\,\chi_{A\cdot B_2}\cdots\chi_{A\cdot B_r}$$

mit

$$\dim A+1\le \dim A\cdot B_i\le n-1 \text{ für } i=2,\ldots,\mathrm{r}.$$

Lemma 2. *Sei $\mathcal{M}$ eine simpliziale n-Mannigfaltigkeit, $A\in \operatorname{Int}\mathcal{M}$ und $\operatorname{link}(A;\mathcal{M}) = \mathscr{B}(B)\cdot\mathscr{L}$ für ein Simplex $B\notin\mathcal{M}$. Ist dann $\mathscr{L}$ schälbar, so sind $\mathcal{M}$ und $\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}$ bistellar äquivalent.*

Beweis. Sei zunächst $\dim B>0$ vorausgesetzt. Es sei dann $B=p\cdot B'$, wo p eine beliebige Ecke von B ist. Dann gilt $p\in\operatorname{link}(A;\mathcal{M})$ und weiter:

(1) $\operatorname{ast}(p;\operatorname{link}(A;\mathcal{M}))=\overline{B'}\cdot\mathscr{L}$ ist schälbar, da $\mathscr{L}$ schälbar ist,

(2) $\operatorname{Int}(\operatorname{ast}(p;\operatorname{link}(A;\mathcal{M})))=B'\cdot\mathscr{L}$ enthält wegen $p\cdot B'=B\notin\mathcal{M}$ kein Element aus $\operatorname{link}(p;\mathcal{M})$.

Nach Lemma 1 ist dann $\mathcal{M}$ bistellar äquivalent zu

$$(\mathcal{M}\setminus A\cdot\mathscr{B}(B)\cdot\mathscr{L})\cup p\cdot B'\cdot\mathscr{B}(A)\cdot\mathscr{L}=\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}.$$

Ist $\dim B=0$ und $\dim A>0$, so erhält man wie oben, daß $\mathcal{M}':=\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}$ bistellar äquivalent zu $\mathcal{M}=\kappa_{(B,A)}\mathcal{M}'$ ist. Im Fall $\dim A=\dim B=0$ sind $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ natürlich isomorph.

Bemerkung. Ist $\mathscr{L}$ polytopal, so ist $\mathscr{L}$ nach einem Satz von BRUGESSER/MANI stets schälbar [5]. Im Fall $\dim\mathscr{L}\le 2$ ist $\mathscr{L}$ nach dem Satz von STEINITZ (siehe z. B. in [14]) stets polytopal und damit auch schälbar.

Wir brauchen noch einen Vertauschungssatz über stellare Vertauschungen.

Lemma 3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine simpliziale Mannigfaltigkeit,*

$$\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}=(\mathcal{M}\setminus A\cdot\mathscr{B}(B)\cdot\mathscr{L})\cup\mathscr{B}(A)\cdot B\cdot\mathscr{L},$$

$$\kappa_{(C,D)}\mathscr{L}=(\mathscr{L}\setminus C\cdot\mathscr{B}(D)\cdot\mathscr{L}')\cup\mathscr{B}(C)\cdot D\cdot\mathscr{L}' \textit{ und } D\notin\mathcal{M}.$$

Dann gilt:

$$\kappa_{(B\cdot C,D)}\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}=\kappa_{(A,B)}\kappa_{(A\cdot C,D)}\mathcal{M} \tag{1}$$

$$\operatorname{link}(B\cdot C;\kappa_{(A,B)}\mathcal{M})=\mathscr{B}(A)\cdot\mathscr{B}(D)\cdot\mathscr{L}'$$

$$\operatorname{link}(A\cdot C;\mathcal{M})=\mathscr{B}(B)\cdot\mathscr{B}(D)\cdot\mathscr{L}' \tag{3}$$

$$\operatorname{link}(A;\kappa_{(A\cdot C,D)}\mathcal{M})=\mathscr{B}(B)\cdot\kappa_{(C,D)}\mathscr{L} \tag{4}$$

Aus Platzgründen geben wir nur den groben Beweisgang an. Man zeigt zunächst (2) und dann hiermit, daß $\kappa_{(B\cdot C,D)}$ auf $\kappa_{(A,B)}\mathcal{M}$ anwendbar ist. Mit Hilfe von (3) zeigt man dann, daß $\kappa_{(A\cdot C,D)}\mathcal{M}$ wohldefiniert ist und bestimmt diese Mannigfaltigkeit. Sodann kann man (4) und $B\notin\kappa_{(A\cdot C,D)}\mathcal{M}$ nachweisen, weshalb dann $\kappa_{(A,B)}$ auf $\kappa_{(A.C,D)}\mathcal{M}$ anwendbar ist. Zum Schluß zeigt man dann die Identität (1).

Mit dem folgenden Darstellungssatz aus [25] erhalten wir das letzte Hilfsmittel für unser Haupttheorem.

Lemma 4. *Jede simpliziale Sphäre $\mathcal{S}$ besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_r,$$

wo die $\mathcal{S}_i$ keine nichttrivialen Darstellungen als Verbindungen von Sphären zulassen.

Zusatz. Unter den obigen Sphären der Zerlegung mögen auch Randkomplexe von Simplexen auftreten. Ihre Verbindung ist dann isomorph zum Randkomplex eines Polytops - eines sogenannten Simplexoids P (Siehe [18]). Bezeichnet $\mathcal{S}'$ die Verbindung der restlichen Sphären, so erhält man die Darstellung

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{S}'.$$

Diese Darstellung ist unter der Maßgabe, daß P maximal sein soll, d. h. daß sich aus $\mathcal{S}'$ kein Randkomplex eines Simplexes weiter abspalten läßt, dann ebenfalls eindeutig. Natürlich ist dabei zugelassen, daß $\mathcal{B}(P)$ *oder* $\mathcal{S}'$ verschwinden.
Wir kommen nun zum Beweis unseres Haupttheorems.

Theorem 1. *Zwei geschlossene simpliziale Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn sie bistellar äquivalent sind.*

Beweis. Nach Bemerkung 7 zu Definition 1 genügt es zu zeigen, daß stets

$$\kappa_{(A,B)} \mathcal{M} \overset{bst}{\sim} \mathcal{M} \text{ gilt.}$$

Für $n := \dim \mathcal{M} \leq 4$ folgt die Behauptung sofort aus Lemma 2 mit Bemerkung. Ansonsten sei $\operatorname{link}(A; \mathcal{M}) = \mathcal{B}(B) \cdot \mathcal{L}$ und sodann $\mathcal{L} = \mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{S}$ die eindeutige Darstellung von $\mathcal{L}$ nach dem Zusatz zu Lemma 4. Wir führen dann den Beweis weiter durch Induktion nach $m := \dim \mathcal{S}$.
Im Fall $m \leq 2$ ist $\mathcal{S}$ und damit auch $\mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{S}$ schälbar. Die Behauptung folgt dann wieder sofort aus Lemma 2.

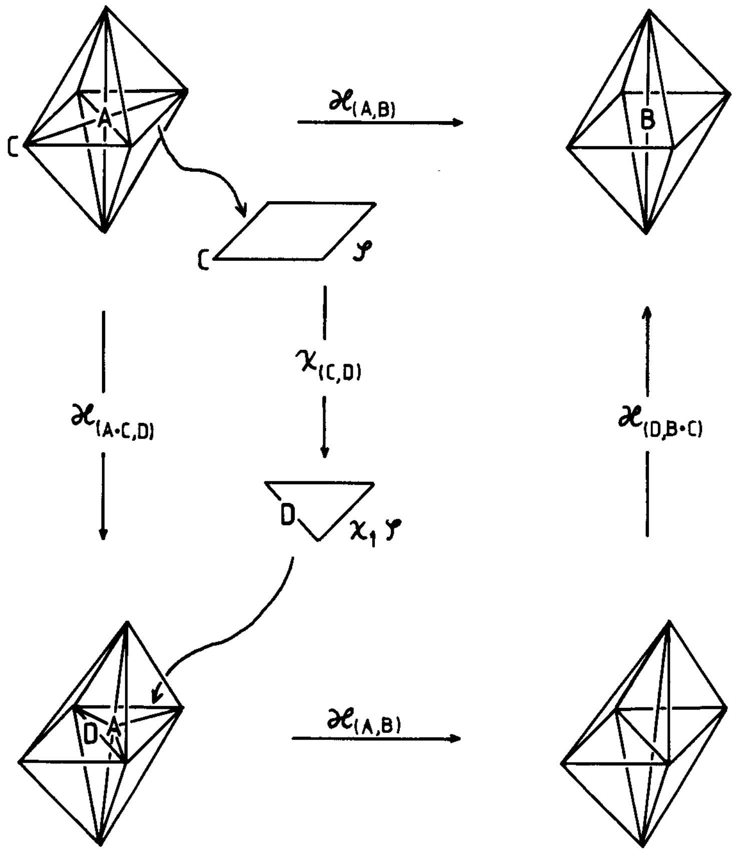
Sei also $m \geq 3$. Wegen $m < n$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{S} \overset{bst}{\sim} \mathcal{B}(T^{m+1})$, d. h. es existiert eine Kette

$$\chi_r \cdots \chi_1 \mathcal{S} = \mathcal{B}(T^{m+1}).$$

Der Beweis geht dann weiter mit Induktion nach r.
Für $r = 0{,}1$ ist $\mathcal{S}$ polytopal und man kann wieder direkt Lemma 2 anwenden. Ansonsten gelte $\chi_1 \mathcal{S} = \kappa_{(C,D)} \mathcal{S}$. Dann ist $\kappa_{(C,D)}$ auch auf $\mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{S}$ anwendbar und zwar gilt: $\kappa_{(C,D)}(\mathcal{B}(P) \cdot \mathcal{S}) = \mathcal{B}(P) \cdot \chi_1 \mathcal{S}$.

Wir unterscheiden dann:
Fall 1. $D \notin \mathcal{M}$.
Nach Lemma 3 gilt dann:

$$\kappa_{(A,B)} \kappa_{(A \cdot C,D)} \mathcal{M} = \kappa_{(B \cdot C,D)} \kappa_{(A,B)} \mathcal{M}. \tag{1}$$



Ferner erhält man, wobei in Lemma 3 $\mathscr{L}' = \mathscr{B}(P)$ *zu setzen ist:*

(2) $\operatorname{link}(B \cdot C, \kappa_{(A,B)} \mathscr{M}) = \mathscr{B}(A) \cdot \mathscr{B}(D) \cdot \mathscr{B}(P)$. Nach Lemma 2 ist dann

$$\kappa_{(B\cdot C,D)}\, \kappa_{(A,B)} \mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \kappa_{(A,B)} \mathscr{M}.$$

(3) $\operatorname{link}(A \cdot C; \mathscr{M}) = \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{B}(D) \cdot \mathscr{B}(P)$, nach Lemma 2 folgt ebenso

$$\kappa_{(A\cdot C,D)} \mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \mathscr{M}.$$

(4) $\operatorname{link}(A, \kappa_{(A\cdot C,D)} \mathscr{M}) = \mathscr{B}(B) \cdot \kappa_{(C,D)} \mathscr{L} = \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{B}(P) \cdot \chi_1 \mathscr{S}$.

Hieraus erhält man dann noch

$$\kappa_{(A,B)}\, \kappa_{(A\cdot C,D)} \mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \kappa_{(A\cdot C,D)} \mathscr{M}$$

und zwar durch Induktion nach m, wenn sich aus $\chi_1 \mathscr{S}$ ein Simplexrand abspalten läßt, oder sonst durch Induktion nach r, da $\chi_1 \mathscr{S}$ nunmehr durch r-1 bistellare Operationen in $\mathscr{B}(T^{m+1})$ überführt werden kann.

Damit ist der Fall 1 abgeschlossen. Es sei noch erwähnt, daß man, wenn $D = p$ ein Punkt, also χ_1 eine Facettenteilung ist, stets $p \notin \mathscr{M}$ wählen kann, so daß hierfür der Fall 1 Anwendung findet.

Fall 2. $D \in \mathscr{M}$.
Es sei dann p eine beliebige Ecke von D, $D = p \cdot D'$ mit $D' \neq \emptyset$. Wir betrachten dann in $\mathscr{S}$ die stellare Unterteilung

$$\kappa_{(p,p')}\mathscr{S} = (\mathscr{S} \setminus p \cdot \operatorname{link}(p;\mathscr{S})) \cup p' \cdot \operatorname{link}(p;\mathscr{S}),$$

wo $p' \notin \mathscr{M}$ eine neue Ecke ist.
Nach Lemma 3 gilt dann:

$$\kappa_{(B\cdot p,p')}\kappa_{(A,B)}\mathscr{M} = \kappa_{(A,B)}\kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M} \tag{1}$$

und ferner:

$$\operatorname{link}(B \cdot p; \kappa_{(A,B)}\mathscr{M}) = \mathscr{B}(A) \cdot \mathscr{B}(P) \cdot \operatorname{link}(p;\mathscr{S}). \tag{2}$$

Wegen $\dim \operatorname{link}(p;\mathscr{S}) = m - 1$ folgt dann nach Induktionsnahme

$$\kappa_{(B\cdot p,p')}\kappa_{(A,B)}\mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \kappa_{(A,B)}\mathscr{M}.$$

$$\operatorname{link}(A \cdot p; \mathscr{M}) = \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{B}(P) \cdot \operatorname{link}(p;\mathscr{S}). \tag{3}$$

Hieraus folgt dann ebenso nach Induktionsnahme

$$\kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \mathscr{M}.$$

$$\operatorname{link}(A; \kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M}) = \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{B}(P) \cdot \kappa_{(p,p')}\mathscr{S}. \tag{4}$$

Dabei ist $\kappa_{(p,p')}\mathscr{S} \approx \mathscr{S}$, so daß sich $\kappa_{(p,p')}\mathscr{S}$ durch die $\chi_r, \ldots, \chi_1$ entsprechenden bistellaren Operationen $\chi_r', \ldots, \chi_1'$ in $\mathscr{B}(T^{m+1})$ überführen läßt. Hierbei gilt

$$\chi_1' = \kappa_{(c,p'\cdot D')}.$$

Wegen $D' \notin \mathscr{B}(A \cdot p) \cdot \mathscr{B}(B) \cdot \mathscr{B}(D) \cdot \operatorname{link}(p;\mathscr{S}) = \operatorname{link}(p'; \kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M})$ gilt nunmehr aber $p' \cdot D' \notin \kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M}$, so daß man nach Fall 1 auch noch
$\kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M} \overset{bst}{\sim} \kappa_{(A,B)}\kappa_{(A\cdot p,p')}\mathscr{M}$ erhält.
Damit ist der Beweis ganz abgeschlossen.

Korollar 1. *Je zwei simpliziale Sphären gleicher Dimension sind bistellar äquivalent. Jede simpliziale* $(d-1)$*-Sphäre ist bistellar äquivalent zu* $\mathscr{B}(T^d)$.

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun auch (L.1) umkehren und folgendermaßen verschärfen.

Theorem 2. *Die simplizialen* $(d\text{-}1)$*-Sphären sind genau die Ränder von schälbaren d-Kugeln.*
Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5. *Sei* $\mathscr{K}$ *eine simpliziale d-Kugel und* $A \in \operatorname{Int}\mathscr{K}$. *Mit* $\mathscr{K}$ *ist dann auch* $\sigma_A\mathscr{K}$ *schälbar.*
Beweis. Sei $(F_1, \ldots, F_r)$ eine Schälung von $\mathscr{K}$. Für eine Facette $F_i = A \cdot S$ *aus* $st(A;\mathscr{K})$ gilt dann nach Definition 2

$$F_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j = A' \cdot S' \cdot bd(A'' \cdot S''), \text{ wo } A' \cdot A'' = A \text{ und } S' \cdot S'' = S \text{ ist.}$$

Es sei dann $(A_1, \ldots, A_k)$ im Fall $A' = A$ eine beliebige Anordnung der Facetten von A, im Fall $A' \in \mathscr{B}(A)$ eine Anordnung, bei der zu Beginn die Facetten von A stehen, die A' enthalten, sagen wir $A' = \bigcap_{j=1}^{s} A_j$. Wir ersetzen dann in $(F_1, \ldots, F_r)$ die Facette F_i durch die Folge $a \cdot A_1 \cdot S, \ldots, a \cdot A_k \cdot S$, wenn $\sigma_A \mathscr{K} = \sigma_{(A,a)} \mathscr{K}$ mit $a \in \operatorname{int} A$ ist. Tut man dies für jede Facette aus $st(A; \mathscr{K})$, so erhält man eine Schälung $(F'_1, \ldots, F'_t)$ von $\sigma_A \mathscr{K}$. Es gilt nämlich: Ist $F'_k = F_i \notin st(A; \mathscr{K})$, so ist $F'_k \cap \bigcup_{j=1}^{k-1} F'_j = F_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$ eine $(d-1)$-Kugel, da nach Voraussetzung $(F_1, \ldots, F_r)$ eine Schälung ist.

Für eine der neuen Facetten $F'_k = a \cdot A_m \cdot S$, wo $A \cdot S = F_i \in st(A; \mathscr{K})$ ist, erhält man:

$$\begin{aligned} D := {} & F'_k \cap \bigcup_{j=1}^{k-1} F'_j \\ = {} & a \cdot A_m \cdot S \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{i-1} F_j \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} a \cdot A_j \cdot S\Big) \\ = {} & (a \cdot A_m \cdot S \cap A' \cdot S' \cdot bd(A'' \cdot S'')) \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} a \cdot (A_m \cap A_j) \cdot S \\ = {} & a \cdot A_m \cdot S' \cdot bd\, S'' \cup (a \cdot A_m \cap A' \cdot bd\, A'') \cdot S \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} a \cdot (A_m \cap A_j) \cdot S \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$D' := a \cdot A_m \cdot S' \cdot bd\, S'' \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} a \cdot (A_m \cap A_j) \cdot S$$

eine Vereinigung von Facetten von $a \cdot A_m \cdot S$. Ferner gilt:

Fall 1. $A' = A$.
Dann entfällt der mittlere Ausdruck sowieso und somit ist $D = D'$ eine Vereinigung von Facetten von $a \cdot A_m \cdot S = F'_k$.
Fall 2. $A' \in \mathscr{B}(A)$.
Für $m \leq s$, also $A' \subset A_m$, gilt dann $a \cdot A_m \cap A' \cdot bd\, A'' = A_m$. Somit ist $D = D' \cup A_m \cdot S$ ebenfalls Vereinigung von Facetten von F'_k.

Für $m > s$ gilt wegen $A' \cdot bd\, A'' = \bigcup_{j=1}^{s} A_j$:

$$(a \cdot A_m \cap A' \cdot bd\, A'') \cdot S \subset a \cdot \Big(A_m \cap \bigcup_{j=1}^{s} A_j\Big) \cdot S \subset \bigcup_{j=1}^{m-1} a \cdot (A_m \cap A_j) \cdot S \subset D',$$

und damit ist dann ebenfalls $D = D'$ Vereinigung von Facetten von F'_k.
Da die Vereinigung von Facetten eines d-Simplexes stets eine $(d-1)$-Kugel oder Sphäre ist, ist damit die Schälbarkeitsbedingung nachgewiesen.

Beweis zu Theorem 2. Sei $\mathscr{S}$ eine simpliziale $(d-1)$-Sphäre. Nach Korollar 1 gilt $\mathscr{S} = \chi_r \ldots \chi_1 \mathscr{B}(T^d)$. Für $r = 0{,}1$ ist klar, daß $\mathscr{S}$ Rand einer schälbaren Kugel ist.

Ansonsten sei $\mathscr{K}'$ eine schälbare simpliziale d-Kugel mit $Bd(\mathscr{K}') = \chi_{r-1} \dots \chi_1 \mathscr{B}(T^d)$. Außerdem gelte $\chi_r = \kappa_{(A,B)}$.

Fall 1. $B \notin \mathscr{K}'$. Dann ist offensichtlich $\mathscr{K} := \mathscr{K}' \cup \bar{A} \cdot B$ eine inverse elementare Schälung von $\mathscr{K}'$. Also ist $\mathscr{K}$ schälbar und außerdem ist $Bd(\mathscr{K}) = \mathscr{S}$.
Fall 2. $B \notin \mathscr{K}'$. Wegen $B \notin Bd\,\mathscr{K}'$ (Definition 1!) gilt dann $B \in \operatorname{Int} \mathscr{K}'$. Nach Lemma 5 ist dann $\sigma_B\, \mathscr{K}'$ schälbar und außerdem gilt
$Bd(\sigma_B \mathscr{K}') = Bd\,\mathscr{K}' = \chi_{r-1} \dots \chi_1 \mathscr{B}(T^d)$ und $B \notin \sigma_B \mathscr{K}'$. Der Rest folgt dann aus Fall 1.

Bei berandeten simplizialen Mannigfaltigkeiten kann man natürlich im Innern ebenfalls bistellare Operationen durchführen, wobei der Rand aber invariant bleibt. Beim Homöomorphieproblem muß man daher zusätzlich Operationen betrachten, die den Rand verändern. Hier bieten sich die elementaren Schälungen und deren Inversen an. Wir können allerdings nur für Kugeln zeigen, daß man damit auskommt.

Theorem 3. *Jede simpliziale d-Kugel $\mathscr{K}$ läßt sich durch bistellare Operationen und elementare Randoperationen in das d-Simplex T^d überführen.*

Beweis. Nach Theorem 1 gilt

$$\mathscr{S} := \mathscr{K} \cup p \cdot Bd(\mathscr{K}) \overset{bst}{\sim} \mathscr{B}(T^{d+1}),$$

wo p ein mit $\mathscr{K}$ verbindbarer Punkt ist.
Nach Theorem 5 [23] existiert dann eine Kette

$$\chi_r \dots \chi_1 \mathscr{S} = \sigma_s \dots \sigma_1 \mathscr{B}(T^{d+1}),$$

wo die σ_i Facettenteilungen und die χ_j bistellare k-Operationen mit $k > 0$ sind. Hieraus folgt $p \in \chi_i \dots \chi_1 \mathscr{S} =: \mathscr{S}_i$ für $i = 1, \dots, r$. Sei $\chi_i := \chi_{(A_i, B_i)}$. Für den Antistern von p gilt dann:
Für $p \in B_i$ ist $ast(p; \mathscr{S}_i)$ eine elementare Schälung von $ast(p; \mathscr{S}_{i-1})$, für $p \in A_i$ ist $ast(p; \mathscr{S}_i)$ eine inverse elementare Schälung von $ast(p; \mathscr{S}_{i-1})$ und $ast(p; \mathscr{S}_i) = \chi_i\, ast(p; \mathscr{S}_{i-1})$ sonst.
Insgesamt also wird $\mathscr{K}$ mit Hilfe der betrachteten elementaren Operationen in $ast(p; \sigma_s \dots \sigma_1 \mathscr{B}(T^{d+1}))$ überführt.
Nun ist $\sigma_s \dots \sigma_1 \mathscr{B}(T^{d+1})$ isomorph zum Rand eines sogenannten Stapelpolytops, und Antisterne von Ecken eines Polytops sind schälbar. Hieraus folgt dann sofort die Behauptung.
Wir vermuten, daß man in Theorem 3 auf keine der drei Operationen verzichten kann (vgl. Problem 1!). Eine Übertragung unseres Beweises auf berandete Mannigfaltigkeiten ist offensichtlich nicht ohne weiteres möglich, dennoch nehmen wir an:

Vermutung 1. Zwei berandete simpliziale Mannigfaltigkeiten sind genau dann homöomorph, wenn sie durch bistellare Operationen und elementare Randoperationen ineinander überführt werden können.

Der Vollständigkeit wegen geben wir noch einige weitere offene Probleme und hierzu bekannte Teilergebnisse an. Dazu definieren wir:

Definition 4. Eine Familie geschlossener simplizialer Mannigfaltigkeiten heißt χ-zusammenhängend, wenn sich je zwei Elemente der Familie innerhalb der Familie durch bistellare Operationen ineinander überführen lassen.

Hier sind einige der bekannten Ergebnisse:
(*L*.4) *Die Familien* $\mathscr{P}_d^s$ *der Randkomplexe simplizialer d-Polytope sind für alle d* χ*-zusammenhängend* (EWALD/SHEPHARD [10,12]).

(*L*.5) *Die Teilfamilien* $\mathscr{P}^s_{(v,d)}$ *der Randkomplexe simplizialer d-Polytope mit v Ecken sind für alle v, d* χ*-zusammenhängend* [24].

Gemäß Theorem 1 und Korollar 1 gilt:

(*L*.6) *Jede Homöomorphieklasse geschlossener simplizialer n-Mannigfaltigkeiten ist* χ*-zusammenhängend, z.B. die Familien* $\mathscr{S}_n^s$ *der simplizialen n-Sphären oder die Familien der orientierbaren, geschlossenen simplizialen Flächen vom gleichen Geschlecht.*

Für die Teilklassen mit gleicher Eckenzahl ist das Analogon zu (L.5) noch offen:

Problem 2. Sind die Familien $\mathscr{S}^s_{(v,n)}$ der simplizialen n-Sphären mit v Ecken χ-zusammenhängend?

Für Mannigfaltigkeiten ist die entsprechende Frage selbst für die Dimension 2 noch ungelöst. Für 2-Sphären erhält man eine positive Antwort aus (L.5) und der Tatsache, daß 2-Sphären stets polytopal sind. Ansonsten ist nur bekannt:

(*L*.7) $\mathscr{S}^s_{(v,3)}$ *ist für alle* $v \leq 9$ χ*-zusammenhängend* (ALTSHULER, BOKOWSKI, STEINBERG [2]).

(*L*.8) *Die Teilfamilie* $\mathscr{S}'_{(v,n)}$ *aller Sphären aus* $\mathscr{S}^s_{(v,n)}$, *die sich bistellar ohne Facettenteilungen in* $\mathscr{B}(T^{n+1})$ *überführen lassen, ist* χ*-zusammenhängend* [23]. *Hierzu gehören z.B. die polytopalen Sphären, die Sphären mit einem schälbaren Antistern einer Ecke und die Ränder schälbarer Kugeln ohne innere Ecken.*

Offensichtlich ist $\mathscr{S}^s{}_{(v,n)}$ genau dann χ-zusammenhängend, wenn $\mathscr{S}^s{}_{(v,n)} = \mathscr{S}'{}_{(v,n)}$ gilt. Hierzu und auch für andere Fragen ist von Interesse:

Problem 3. Ist jede simpliziale Sphäre Randkomplex einer schälbaren simplizialen Kugel ohne innere Ecken?

Man kann die Elemente der betrachteten Familien auch als Ecken eines Graphen betrachten, die durch eine Kante verbunden sind, wenn die beiden Elemente durch eine einzige bistellare Operation auseinander hervorgehen. Von Interesse ist dann die Frage nach dem Durchmesser der Graphen. Hierunter fällt auch die folgende Verschärfung von Theorem 2:

Problem 4. Man bestimme obere Schranken für die kleinste Zahl $\mu(v,d)$ für die gilt: Jede (polytopale) $(d-1)$-Sphäre mit v Ecken ist Randkomplex einer schälbaren simplizialen d-Kugel mit höchstens $\mu(v,d)$ Facetten.
Zum Abschluß wollen wir noch einige Seitenzahlprobleme anschneiden. Anders als bei stellaren Operationen kann man bei bistellaren Äquivalenzen die Änderungen der Anzahlen f_i der i-dimensionalen Seiten einer simplizialen Mannigfaltigkeit explizit berechnen. Es hat sich dabei als vorteilhaft erwiesen, an Stelle des f-Vektors $(f_o,\ldots,f_{d-1})$ mit dem h-Vektor $(h_o,\ldots,h_d)$ eines simplizialen $(d-1)$-Komplexes zu arbeiten. Dieser ist durch

$$h_i = \sum_{j=-1}^{i-1} (-1)^{i-j-1} \binom{d-j-1}{d-i} f_j \quad (f_{-1} := 1)$$

definiert und dem f-Vektor eindeutig zugeordnet. Was die algebraische Bedeutung der h_i bei Cohen-Macaulay Komplexen betrifft, verweisen wir auf [28].
Bei einer bistellaren k-Operation $\chi_A = \kappa_{(A,B)}$ vermindert sich f_i durch die Herausnahme von $A\cdot\mathscr{B}(B)$ aus dem Komplex um $\binom{d-k}{d-i}$ für $i = k,\ldots,d-1$ und wächst durch die Hinzunahme von $\mathscr{B}(A)\cdot B$ um $\binom{k+1}{d-i}$ für $i = d-k-1,\ldots,d-1$. Mit Hilfe der obigen Gleichung erhält man dann leicht:

(L.9) *Seien $\mathscr{M},\mathscr{M}'$ geschlossene simpliziale $(d-1)$-Mannigfaltigkeiten und $\mathscr{M}' = \chi_r\cdots\chi_1\mathscr{M}$, wobei die Anzahl der bistellaren k-Operationen gleich α_k sei. Dann gilt:*

$$h_i(\mathscr{M}') - h_i(\mathscr{M}) = \sum_{k=d-i}^{d-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{d-1-k} - \alpha_k).$$

Hiermit wird der Beweis der folgenden klassischen Resultate trivial.

(L.10) *Für eine geschlossene simpliziale $(d-1)$-Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ sind $(h_{d-i} - h_i)(\mathscr{M})$ und die Euler-Charakteristik $\chi(\mathscr{M})$ topologische Invarianten. Insbesondere gilt für eine simpliziale $(d-1)$-Sphäre $\mathscr{S}$ $(h_{d-i} - h_i)(\mathscr{S}) = 0$ für $i = 0,\ldots,d$ (Dehn-Sommerville Gleichungen) und $\chi(\mathscr{S}) = 1 + (-1)^{d-1}$.*

Beweis. Nach Theorem 1 lassen sich Triangulierungen homöomorpher, geschlossener Mannigfaltigkeiten durch bistellare Operationen ineinander überführen. Nach (L.9) ändert sich dabei $h_{d-i} - h_i$ um

$$\left(\sum_{k=i}^{d-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{d-i-1} \alpha_k\right) - \left(\sum_{k=d-i}^{d-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k\right) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k = 0.$$

Wegen $h_o = 1$ und $\chi(\mathscr{M}) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k(\mathscr{M}) = 1 + (-1)^{d-1} h_d$ folgt hieraus auch die Invarianz der Euler-Charakteristik. Die speziellen Aussagen für Sphären erhält man dann sofort aus dem Randkomplex des d-Simplexes.

Zum Abschluß geben wir noch einen Zusammenhang mit einem offenen Problem. Zur Formulierung benötigen wir die folgende Definition.

Definition 5. Für natürliche Zahlen h, i sei

$h = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \ldots + \binom{n_j}{j}$ die eindeutige Darstellung von h mit der der Maßgabe $n_i > \ldots > n_j \geq j \geq 1$ und es sei dann

$$h^{<i>} := \binom{n_i+1}{i+1} + \ldots + \binom{n_j+1}{j+1}, 0^{<i>} := 0.$$

Eine endliche oder nicht endliche Folge nicht negativer ganzer Zahlen $(h_o, h_1, \ldots)$ heißt dann eine 0-Sequenz, wenn gilt:

$$h_o = 1, h_1 \geq 0 \textit{ und } 0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>} \textit{ für } i \geq 1.$$

Die folgende sogenannte g-Vermutung von Mc Mullen konnte bisher nur für polytopale Sphären bewiesen werden [29].

Vermutung 2. Für simpliziale $(d-1)$-Sphären gilt:

$$(h_o, h_1 - h_o, \ldots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1}) \textit{ ist eine 0-Sequenz.}$$

Nach Korollar 1 ist diese Vermutung äquivalent mit:

Vermutung 3. In jeder Kette $\chi_r \ldots \chi_1 \mathscr{B}(T^d)$ gilt für die Anzahl α_k der bistellaren k-Operationen:

$$(1, \alpha_{d-1} - \alpha_0, \ldots, \alpha_{d-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - \alpha_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1}) \text{ ist eine 0-Sequenz.}$$

Ein weiteres Korollar erhält man mit Theorem 2.

Vermutung 4. Für schälbare simpliziale d-Kugeln gilt:

$$(1, h_1 - h_d, \ldots, h_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} - h_{d-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1}) \text{ ist eine 0-Sequenz.}$$

Begründung. Führt man bei einer simplizialen d-Kugel $\mathscr{K}$ eine inverse elementare Schälung aus, so wächst $h_k(\mathscr{K})$ für genau ein k um 1 und bleibt sonst unverändert. Gleichzeitig wird für dasselbe k in $\mathscr{B}(\mathscr{K})$ eine bistellare $(d-k)$-Operation induziert. Für eine schälbare d-Kugel $\mathscr{K}$ läßt sich also die Sphäre $\mathscr{S} = \mathscr{B}(\mathscr{K})$ durch $\alpha_k = h_{d-k}(\mathscr{K})$ bistellare k-Operationen aus dem Simplex konstruieren.

Literatur

[1] J. W. Alexander, The combinatorial theory of complexes, Ann. of Math. 31, 292-320 (1930).

[2] A. Altshuler, J. Bokowski, L. Steinberg, The classification of simplicial 3-spheres with nine vertices into polytopes and non polytopes, Discrete Math. 31 (1980), 115 - 124.

[3] D. W. Barnette, A proof of the lower bound conjecture for convex polypes, Pacific J. Math. 46 (1973), 349 - 354.

[4] L. J. Billera, C.W. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, J. Comb. Theory Ser. A 31 (1981), 237-255.

[5] H. Bruggesser, P. Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand, 29 (1972), 197-205.

[6] G. Danaraj, V. Klee, Which spheres are shellable? Ann. of Discrete Math. 2 (1978), 33-52.

[7] V. I. Danilov, Birational Geometry Of Toric 3-Folds, Math. USSR Izvestiya, Vol. 21 (1983), No. 2.

[8] R. D. Edwards, The double suspension of a certain homology 3-sphere is S^5, A.M.S. Notices 22 (1975), A-334.

[9] F. Ehlers, Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, Math. Ann. 218 (1975), 127-156.

[10] G. Ewald, Über die stellare Äquivalenz konvexer Polytope, Resultate der Math. 1 (1978), 54-60.

[11] G. Ewald, Torische Varietäten und konvexe Polytope, Bericht Nr. 40/1985, Ruhr-Universität Bochum.

[12] G. Ewald, G. C. Shephard, Stellar subdivisions of boundary complexes of convex polytopes, Math. Ann. 210 (1974), 7-16.

[13] L. C. Glaser, Geometrical Combinatorial Topology, Bd. 1, New York 1970.

[14] B. Grünbaum, Convex Polytopes, Interscience, New York 1967.

[15] J. F. P. Hudson, Piecewise Linear Topology, New York: Benjamin 1969.

[16] B. Kind, P.Kleinschmidt, Schälbare Cohen-Macaulay Komplexe und ihre Parametrisierung, Math. Z. 167, 173-179 (1979).

[17] P. Kleinschmidt, Stellare Abänderungen und Schälbarkeit von Komplexen und Polytopen, J. of Geom. 11/2, 161-176 (1978).

[18] P. Kleinschmidt, U. Pachner, Shadow-boundaries and cuts of convex polytopes. Mathematika 27 (1980), 58-63.

[19] A. Mandel, Topology of Oriented Matroids, Ph. D. Thesis. University of Waterloo, Ontario, Canada 1982.

[20] P. Mani, D.W.Walkup, A 3-sphere Counterexample to the W -path Conjecture, Math. of Operation Research 5 (1980), 595-598.

[21] P. Mc Mullen, The maximum numbers of faces oc a convex polytope, Mathematika 17, 179-184 (1970).

[22] T. Oda, Torus embeddings and applications, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.

[23] U. Pachner, Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. Arch. Math. 30, 89-98 (1978).

[24] U. Pachner, Über die bistellare Äquivalenz simplizialer Sphären und Polytope. Math. Z. 176, 565-576 (1981).

[25] U. Pachner, Diagonalen in Simplizialkomplexen, Geome. Ded. 24 (1987), 1–28.
[26] G. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Adv. in Math. 21 (1976), 30-49.
[27] R. P. Stanley, Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 81, 133-135 (1975).
[28] R. P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Stud. Appl. Math. 54, 135-142 (1975).
[29] R. P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope Adv. in Math. 35, 236-238 (1980).

Eingegangen am 12. 6. 1986

Anschrift des Autors: Udo Pachner, Fakultät und Institut für Mathematik, Universitätsstraße 150, 4630 Bochum 1.