Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten II

Von Ernst Kunz

Herrn Erich Kähler zum 70. Geburtstag gewidmet

In [6] hat der Verfasser gezeigt, daß es auf einer d-dimensionalen reduzierten, irreduziblen projektiven algebraischen Varietät X über $\mathbb{C}$ eine ausgezeichnete Garbe Ω_X von Differentialformen d-ten Grades gibt, die — analog wie im singularitätenfreien Fall — als dualisierende Garbe im Serreschen Dualitätssatz verwendet werden kann. In der vorliegenden Arbeit soll dies nun auch für Varietäten über beliebigem Grundkörper k gezeigt werden. Der Gedankengang ist hier ganz ähnlich wie in [6], doch ist die Durchführung technisch komplizierter, weil z.B. der Körper der rationalen Funktionen von X über k auch inseparabel sein kann. Wie schon für singularitätenfreies X bekannt, ist es notwendig, um die dualisierende Garbe zu erhalten, statt der Differentialformen über k solche über einem geeigneten Teilkörper $k_0 \subset k$ zu verwenden („Differentialkonstantenkörper", vgl. [4]). In der Definition von Ω_X in [6] wurde Gebrauch gemacht von der kanonischen Spurabbildung in separablen Algebren über Körpern. Diese Spur ist hier zu ersetzen durch die in [5] eingeführte Spurabbildung in Differentialalgebren, die auch für inseparable Körpererweiterungen definiert ist. Es ist notwendig, diese Spur zu verallgemeinern auf den Fall von Differentialalgebren endlichdimensionaler Algebren über Körpern. Dies wird in § 1 durchgeführt.

In § 2 verallgemeinern wir den klassischen Dedekindschen Komplementärmodul. Dieser wird aus Differentialformen bestehen und auch für inseparable Erweiterungen definiert sein. In § 3 wird schließlich die [6], Satz 4.1 entsprechende Invarianzeigenschaft des Komplementärmoduls bewiesen und dann die Garbe Ω_X der regulären Differentialformen höchsten Grades auf X definiert. Von hier ab kann man wie in [6] fortfahren: Ω_X ist isomorph zur kanonischen Garbe $\mathfrak{K}_X$ und kann also $\mathfrak{K}_X$ im Serreschen Dualitätssatz ersetzen.

Diese Arbeit enthält noch einmal einen Beweis des Hauptergebnisses von [6], wobei hier nur rein algebraische Hilfsmittel verwendet werden. Dem mehr technischen Charakter dieser Arbeit entsprechend ist die Darstellung an manchen Stellen ausführlicher als in [6], wo der Nachdruck darauf lag, das Wesentliche des Gedankengangs rasch zu skizzieren.

§ 1. Eine kanonische Spurabbildung in Differentialalgebren

Wir setzen ein für allemal voraus, daß Ringe eine Eins besitzen und daß bei Ringhomomorphismen die Eins in die Eins abgebildet wird. Moduln und Algebren sollen stets unitär sein, d.h. die Eins operiert als Identität.

a) Differentialalgebren

Sei R_0 ein kommutativer Ring, R eine kommutative R_0-Algebra. Unter einer *Differentialalgebra von R über R_0* verstehen wir im folgenden eine (nicht notwendig kommutative) graduierte R-Algebra $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$ mit $A^0 = R$, wobei R im Zentrum von A enthalten ist, und wobei überdies die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Es existiert eine R_0-lineare Abbildung $d: A \to A$ vom Grad 1 mit den Eigenschaften:

a) A wird als R-Algebra von den Elementen dr ($r \in R$) erzeugt.
b) Für alle $r, r' \in R$ gilt $d(rr') = rdr' + r'dr$.
c) Für $r, r_1, \ldots, r_m \in R$ gilt stets $d(rdr_1 \ldots dr_m) = drdr_1 \ldots dr_m$.
d) Für alle $r \in R$ ist $drdr = 0$.

d heißt die *Differentiation* in A.

Das wichtigste Beispiel einer Differentialalgebra wird für uns die *universelle Differentialalgebra* (Differentialformen-Algebra) von R über R_0 sein: Sie entsteht, wenn man aus dem universellen Differentialmodul $D_{R_0}(R)$ die äußere Algebra A bildet und die universelle Derivation $d: R \to D_{R_0}(R)$ in bekannter Weise auf ganz A fortsetzt. Daneben haben wir manchmal (z.B. für komplette lokale Ringe) die Differentialalgebra zu betrachten, die man erhält, wenn man statt von der universellen Derivation ausgeht von der universell endlichen Derivation (sofern diese existiert).

Ist S eine weitere kommutative R_0-Algebra und B eine Differentialalgebra von S über R_0, so heißt ein R_0-Algebrenhomomorphismus $\varphi: A \to B$ *Homomorphismus von Differentialalgebren*, wenn φ mit der Graduierung und der Differentiation verträglich ist. φ ist dann durch $\varphi | A^0$ schon eindeutig bestimmt. Ist ein R_0-Algebrenhomomorphismus $\varrho: R \to S$ vorgegeben, so heißt $\varphi: A \to B$ ein ϱ-Homomorphismus, wenn $\varphi | A^0 = \varrho$ ist. Wenn $S = R$ und $\varrho = \mathrm{id}_R$ ist, spricht man auch von einem R-Homomorphismus.

Ist eine Differentialalgebra A von R über R_0 und ein R_0-Algebren-Homomorphismus $\varrho: R \to S$ gegeben, so existiert die *universelle ϱ-Ausdehnung* $(A_\varrho, \varphi_\varrho)$ von A: Es ist dies eine Differentialalgebra A_ϱ von S über R_0 zusammen mit einem ϱ-Homomorphismus $\varphi_\varrho: A \to A_\varrho$, so daß gilt:

Ist $\psi : A \to B$ ein beliebiger ϱ-Homomorphismus von A in eine Differentialalgebra B von S über R_0, so existiert ein S-Homomorphismus $h : A_\varrho \to B$ mit $\psi = h \cdot \varphi_\varrho$ (dieser ist notwendigerweise eindeutig).

Man spricht auch von der universellen S-Ausdehnung und schreibt A_S für A_ϱ, wenn klar ist, welcher Homomorphismus $\varrho : R \to S$ gemeint ist. Die grundlegenden Eigenschaften der universellen Ausdehnung einer Differentialalgebra sind in [5], § 1 zusammengestellt. Wir benötigen noch eine Regel für die universelle Ausdehnung auf ein direktes Produkt:

Satz 1.1. R sei eine kommutative R_0-Algebra und $S = S_1 \times \ldots \times S_t$ ein direktes Produkt von kommutativen R-Algebren S_i $(i = 1, \ldots, t)$. A sei eine Differentialalgebra von R über R_0 und $\varphi_i : A \to A_{S_i}$ die universelle S_i-Ausdehnung von A. Wir setzen $B := A_{S_1} \times \ldots \times A_{S_t}$, wobei B als graduierte S-Algebra mit $B^n = A^n_{S_1} \times \ldots \times A^n_{S_t}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aufzufassen ist. Ferner sei $d := (d_1, \ldots, d_t)$, wobei d_i die Differentiation in A_{S_i} ist. $\varphi : A \to B$ sei definiert durch $\varphi(w) = (\varphi_1(w), \ldots, \varphi_t(w))$ für alle $w \in A$. Dann gilt:

a) B (mit der Differentiation d) ist eine Differentialalgebra von S über R_0.
b) $\varphi : A \to B$ ist die universelle S-Ausdehnung von A.

Beweis: Man verifiziert unmittelbar, daß B die definierenden Eigenschaften einer Differentialalgebra von S über R_0 erfüllt und daß φ ein ϱ-Homomorphismus von Differentialalgebren ist, wenn $\varrho : R \to S$ der kanonische Homomorphismus ist.

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft betrachten wir einen beliebigen ϱ-Homomorphismus $\psi : A \to C$ von A in eine Differentialalgebra C von S über R_0. Die Differentiation in C werde mit δ bezeichnet. $1 = e_1 + \ldots + e_t$ sei die Idempotentzerlegung der Eins, die durch die Produktzerlegung $S = S_1 \times \ldots \times S_t$ gegeben wird. Für $i \neq j$ ist dann $e_i e_j = 0$, folglich $e_i de_j + e_j de_i = 0$ und (nach Multiplikation mit e_i) $e_i de_j = 0$. Ferner ist $\sum_{j=1}^{t} de_j = d(1) = 0$ und daher (wieder nach Multiplikation mit e_i) $e_i de_i = 0$ für $i = 1, \ldots, t$. Es ergibt sich $de_i = 1 \cdot de_i = \sum_{i=1}^{t} e_j de_i = 0$. Für jedes $w \in C$ folgt nun $\delta(we_i) = \delta w \cdot e_i$ $(i = 1, \ldots, t)$.

Wir setzen $C_i := Ce_i$ $(i = 1, \ldots, t)$. C_i ist dann auf natürliche Weise eine graduierte S_i-Algebra und δ induziert eine Abbildung $\delta_i : C_i \to C_i$ $(\delta_i(we_i) = \delta w \cdot e_i)$ für $i = 1, \ldots, t$. Man stellt leicht fest, daß C_i eine Differentialalgebra von S_i über R_0 ist mit der Differentiation δ_i und daß die Zusammensetzung von $\psi : A \to C$ mit der kanonischen Projektion $C \to C_i$ ein ϱ_i-Homomorphismus ψ_i von Differentialalgebren ist, wenn $\varrho_i : R \to S_i$ der Strukturhomomorphismus ist. Auf Grund der universellen Eigenschaft von A_{S_i} existiert ein S_i-Homomorphismus $h_i : A_{S_i} \to C_i$ mit

$\psi_i = h_i \circ \varphi_i$. $h := (h_1, \ldots, h_t)$ ist dann ein S-Homomorphismus von B in C mit $\psi = h \circ \varphi$.

b) Endlichdimensionale reduzierte Algebren über Körpern

K sei ein Körper, ε_K die Kategorie der kommutativen endlichdimensionalen reduzierten K-Algebren. Jedes $L \in \varepsilon_K$ besitzt eine kanonische Zerlegung

$$L = L_1 \times \ldots \times L_t$$

wobei $L_i \cong L/\mathfrak{m}_i$, wenn $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$ die Menge der maximalen Ideale von L ist.

Ist auch $L' \in \varepsilon_K$ und $L \subset L'$, dann liegen über jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_i$ von L endlich viele maximale Ideale

$$\mathfrak{m}_{i1}, \ldots, \mathfrak{m}_{it_i} \quad (t_i \geq 1)$$

von L' ($\mathfrak{m}_{ij} \cap L = \mathfrak{m}_i$) und $\{\mathfrak{m}_{ij}\}_{\substack{j=1,\ldots,t_i \\ i=1,\ldots,t}}$ ist die Menge aller maximalen Ideale von L'. L' besitzt die kanonische Zerlegung

$$L' = L'_1 \times \ldots \times L'_t$$

mit $L'_i = L'_{i1} \times \ldots \times L'_{it_i}$, wobei $L'_{ij} \cong L'/\mathfrak{m}'_{ij}$. Die kanonische Injektion $L \to L'$ läßt sich folgendermaßen beschreiben: Wir fassen L_i als Teilkörper von L'_{ij} auf ($j = 1, \ldots, t_i$) vermöge des kanonischen Homomorphismus $L/\mathfrak{m}_i \to L'/\mathfrak{m}'_{ij}$. Ein Element $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in L$ mit $\lambda_i \in L_i$ wird dann bei $L \to L'$ abgebildet auf $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) \in L$, wobei $\lambda'_i \in L'_i$ gegeben ist durch $\lambda'_i = \underbrace{(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)}_{t_i\text{-mal}} \in L'_{i1} \times \ldots \times L'_{it_i}$. L'_i ist eine endlichdimensionale L_i-Algebra bzgl. des Strukturhomomorphismus $L_i \to L'_i$, der durch $\lambda_i \mapsto \underbrace{(\lambda_i, \ldots, \lambda_i)}_{t_i\text{-mal}}$ gegeben wird. Die Zerlegung $L = L_1 \times \ldots \times L_t$ bestimmt eine Idempotentzerlegung der Eins: $1 = \sum_{i=1}^{t} e_i$; analog definiert die Zerlegung von L' eine Idempotentzerlegung $1 = \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{t_i} e_{ij} \right)$. Dabei ist $e_i = \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}$ die Idempotentzerlegung des Einselements e_i von L_i in $L'_i = L'_{i1} \times \ldots \times L'_{it_i}$.

L' ist als L-Modul projektiv: Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}_i$ von L ist $L_{\mathfrak{m}_i} \cong L_i$ ein Körper, folglich ist L' als L-Modul lokal frei und daher projektiv.

Somit ist die kanonische Spur $\sigma_{L'/L}: L' \to L$ und die kanonische Norm $n_{L'/L}: L' \to L$ definiert: Für $\lambda' \in L'$ ist $\sigma_{L'/L}(\lambda')$ bzw. $n_{L'/L}(\lambda')$ die Spur bzw. Norm des Endomorphismus von L' der durch die Multiplikation mit λ' gegeben wird. Dabei sind allgemein Spur und Norm eines Endomorphismus $\varphi : P \to P$ eines endlich erzeugten projektiven Moduls P über einem kommutativen noetherschen Ring R wie folgt definiert:

α) Spur: Schreibe $P \oplus P' = F$ mit einem freien R-Modul F endlichen Ranges und definiere den Endomorphismus $\Phi : F \to F$ durch $\Phi|_P = \varphi$, $\Phi|_{P'} = 0$. Setze Spur $(\varphi) := \text{Spur}\ (\Phi)$. Diese hängt nicht ab von der speziellen Wahl von F, denn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist Spur $(\Phi_\mathfrak{m}) = \text{Spur}\ (\varphi_\mathfrak{m})$ und Spur $(\Phi_\mathfrak{m})$ ist das kanonische Bild von Spur (Φ) in $R_\mathfrak{m}$. (Man beachte, daß $P_\mathfrak{m}$ ein freier $R_\mathfrak{m}$-Modul ist).

β) Norm: Definiere $\Psi : F \to F$ durch $\Psi|_P = \varphi$, $\Psi|_{P'} = \mathrm{id}_{P'}$ und setze Norm $(\varphi) := \text{Norm}\ (\Psi)$. Ähnlich wie in α) ergibt sich die Unabhängigkeit von der speziellen Wahl von F.

Ist mit den obigen Bezeichnungen $\mathfrak{m}_i$ ein maximales Ideal von L, also $L_{\mathfrak{m}_i} \cong L_i$, so ist $L' \otimes_L L_{\mathfrak{m}_i} \cong L'_i$. Das Element $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) \in L'_1 \times \ldots \times L'_t$ geht bei der Lokalisation an der Stelle $\mathfrak{m}_i$ in $\lambda'_i \in L'_i$ über. Hieraus ergeben sich nun sofort die folgenden Formeln:

1.2. $$\sigma_{L'/L}(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) = \left(\sigma_{L'_1/L_1}(\lambda'_1), \ldots, \sigma_{L'_t/L_t}(\lambda'_t)\right),$$

1.2'. $$n_{L'/L}(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) = \left(n_{L'_1/L_1}(\lambda'_1), \ldots, n_{L'_t/L_t}(\lambda'_t)\right).$$

Ist ferner L ein Körper, $L' = L'_1 \times \ldots \times L'_t$ mit Körpern L_i $(i = 1, \ldots, t)$, so gilt für $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) \in L'$.

1.3. $$\sigma_{L'/L}(\lambda') = \sum_{j=1}^{t} \sigma_{L'_j/L}(\lambda'_j)$$

1.3'. $$n_{L'/L}(\lambda') = \prod_{j=1}^{t} n_{L'_j/L}(\lambda'_j).$$

Sind $L \subset L' \subset L''$ beliebige Algebren aus ε_K, so gelten die Schachtelungsformeln

1.4. $$\sigma_{L''/L} = \sigma_{L'/L} \circ \sigma_{L''/L'}$$

1.4'. $$n_{L''/L} = n_{L'/L} \circ n_{L''/L'},$$

wie man unmittelbar mit Hilfe der obigen Formeln 1.2—1.3' und den entsprechenden klassischen Formeln für Spur und Norm endlicher Körpererweiterungen nachrechnet.

Sei jetzt A ein Differentialalgebra von K über einem Teilkörper $K_0 \subset K$ und $L \subset L'$ seien wie oben. Dann gilt in dem in Satz 1.1 präzisierten Sinne

1.5. $$A_L = A_{L_1} \times \ldots \times A_{L_t}$$

und

1.6.
$$A_{L'} = A_{L'_1} \times \ldots \times A_{L'_t},$$
$$A_{L'_i} = A_{L'_{i1}} \times \ldots \times A_{L'_{it_i}}.$$

Ferner ist $A_{L'_i} = (A_{L_i})_{L'_i}$ auf Grund der Transitivität der universellen Ausdehnung ([5], 1.4.3) und analog $A_{L'_{ij}} = (A_{L_i})_{L'_{ij}} (j = 1, \ldots, t_i, i = 1, \ldots, t)$.

c) Die Spur in Differentialalgebren

Wie bisher sei K ein Körper und A eine Differentialalgebra von K über einen Teilkörper $K_0 \subset K$.

Satz 1.7. Jeder Erweiterung $L \subset L'$ aus ε_K kann eine Abbildung

$$\sigma^A_{L'/L} : A_{L'} \to A_L$$

zugeordnet werden, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\sigma^A_{L'/L}$ ist eine A_L-lineare Abbildung, wenn $A_{L'}$ als A_L-Modul bzgl. der kanonischen Abbildung $A_L \to A_{L'}$ aufgefaßt wird.
2. $\sigma^A_{L'/L}$ ist mit der Differentiation vertauschbar.
3. Es gilt
$$\sigma^A_{L''/L} = \sigma^A_{L'/L} \circ \sigma^A_{L''/L}$$
für alle Erweiterungen $L \subset L' \subset L''$ aus ε_K.
4. Für alle $\lambda' \in L'$ ist $\sigma^A_{L'/L}(\lambda') = \sigma_{L'/L}(\lambda')$, wobei $\sigma_{L'/L} : L' \to L$ die Spurabbildung aus Abschnitt b) ist.
5. Ist $\lambda' \in L'$ eine Einheit, dann gilt
$$\sigma^A_{L'/L}\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right) = \frac{dn_{L'/L}(\lambda')}{n_{L'/L}(\lambda')}$$
mit der in Abschnitt b) angegebenen Norm $n_{L'/L} : L' \to L$.
6. Sind $L = L_1 \times \ldots \times L_t$, $L' = L'_1 \times \ldots \times L'_t$ mit $L'_i = L'_{i1} \times \ldots \times L'_{it_i}$ $(i = 1, \ldots, t)$ die Produktzerlegungen für $L \subset L'$ gemäß Abschnitt b), dann gilt für $w = (w_1, \ldots, w_t) \in A_{L'} = A_{L'_1} \times \ldots \times A_{L'_t}$ mit $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{it_i})$, $w_{ij} \in A_{L'_{ij}}$ die Formel
$$\sigma^A_{L'/L}(w) = \left(\sigma^{A_1}_{L'_1/L_1}(w_1), \ldots, \sigma^{A_t}_{L'_t/L_t}(w_t)\right).$$
wobei
$$\sigma^{A_i}_{L'_i/L_i}(w_i) = \sum_{j=1}^{t_i} \sigma^A_{L'_{ij}/L_i}(w_{ij}) \quad (i = \;\;, \ldots, t).$$

Die Familie von Abbildungen $\{\sigma^A_{L'/L}: A_{L'} \to A_L\}$, wenn $L \subset L'$ alle Erweiterungen von ε_K durchläuft, ist durch die obigen Forderungen 1.—6. eindeutig bestimmt.

Beweis: In [5], § 2 wurden für Erweiterungen $L \subset L'$, wobei L und L' endliche Erweiterungskörper von K sind, Spurabbildungen $\sigma^A_{L'/L}: A_{L'} \to A_L$ konstruiert, welche den obigen Bedingungen 1.—4. genügen. An Stelle von 5. wurde die folgende schwächere Bedingung bewiesen:

5'. Ist Char. $K =: p > 0$ und $L' = L[y]$ mit $y^p =: \eta \in L$, $y \notin L$, dann gilt

$$\sigma^A_{L'/L}(y^{p-1}dy) = \delta\eta,$$

wenn d die Differentiation in $A_{L'}$, δ die in A_L bezeichnet.

Ferner wurde gezeigt, daß die Familie $\{\sigma^A_{L'/L}: A_{L'} \to A_L\}$, wenn $L \subset L'$ alle Körpererweiterungen aus ε_K durchläuft, durch die Forderungen 1.—4. und 5'. eindeutig festgelegt ist ([5], 2.3.6). Wir zeigen zunächst, daß die dortige Spurabbildung auch der Bedingung 5. genügt, wenn $L \subset L'$ Körper sind:

Auf Grund der Schachtelungsformeln 3. und 1.4' genügt es, 5. im Fall zu beweisen, daß $L' = L(\lambda')$ ist und λ' über L entweder separabel ist oder rein inseparabel vom Grad p (Char. $K =: p > 0$).

α) λ' sei separabel über L und $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ das Minimalpolynom von λ' über L ($a_i \in L$, $i = 0, \ldots, n-1$). Dann gilt in $A_{L'}$:

$$d\lambda' = -\frac{1}{f'(\lambda')}(\lambda'^{n-1}da_{n-1} + \ldots + \lambda' da_1 + da_0)$$

und

$$\sigma^A_{L'/L}\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right) = \sigma^A_{L'/L}\left(-\frac{da_0}{f'(\lambda')\cdot\lambda'}\right)$$

nach der Formel 2.2.3 in [5]. Ferner ist

$$-\frac{da_0}{f'(\lambda')\cdot\lambda'} = \frac{da_0}{f'(\lambda')\cdot a_0}\cdot(\lambda'^{n-1} + a_{n-1}\lambda'^{n-2} + \ldots + a_1)$$

und somit wiederum nach [5], 2.2.3

$$\sigma^A_{L'/L}\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right) = \frac{da_0}{a_0} = \frac{dn_{L'/L}(\lambda')}{n_{L'/L}(\lambda')}.$$

β) Sei $L' = L(\lambda')$ rein inseparabel vom Grad p über L, $\lambda'^p =: \eta$. Dann ist nach [5], 2.3.6, e)

$$\sigma^A_{L'/L}\left(\frac{d\lambda'}{\lambda'}\right) = \sigma^A_{L'/L}\left(\frac{\lambda'^{p-1}d\lambda'}{\eta}\right) = \frac{d\eta}{\eta} = \frac{dn_{L'/L}(\lambda')}{n_{L'/L}(\lambda')}.$$

Wir definieren jetzt für beliebige Erweiterungen $L \subset L'$ aus ε_K die Spurabbildungen $\sigma^A_{L'/L}$ durch die Formeln in der Bedingung 6. des Satzes, wobei die dort auftretenden Spuren $\sigma^A_{L'_{ij}/L_i}$ die in [5], § 2 konstruierten Spuren sind. Es ist leicht nachzurechnen, daß dann auch die Bedingungen 1.—5. erfüllt sind. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussage für die Spuren $\sigma^A_{L'/L}$ für Körpererweiterungen $L \subset L'$ ergibt sich dann die Eindeutigkeit auch für beliebige Erweiterungen $L \subset L'$ aus ε_K, wenn man zu den Forderungen 1.—5. noch 6. hinzunimmt. Der Satz ist damit bewiesen.

Wir nennen $\sigma^A_{L'/L}: A_{L'} \to A_L$ die bezüglich A gebildete Spur (von L' nach L).

Beispiel 1.8. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Für ein $L \in \varepsilon_K$ betrachten wir eine K-Algebra L' der Form

$$L' = L[y] = L[Y]/(Y^{p^e} - \lambda).$$

Dabei soll λ eine Einheit von L sein; folglich ist auch das Bild y von Y in L' eine Einheit.

Der Kern des kanonischen Homomorphismus $\varphi: A_L \to A_{L'}$ ist das von $d\lambda$ in A_L erzeugte zweiseitige Ideal und $A_{L'}$ läßt sich schreiben in der Form

$$A_{L'} = L' \otimes_L B \oplus L' \otimes_L B \cdot dy,$$

wenn B das Bild von φ ist. Es werde vorausgesetzt, daß $d\lambda \neq 0$ ist.

Schreibt man $w \in A_{L'}$ gemäß dieser Darstellung in der Form

$$w = w_0 + w_1 dy \quad (w_0, w_1 \in L' \otimes_L B)$$

und

$$w_1 = \beta_0 + \beta_1 y + \ldots + \beta_{p^e-1} y^{p^e-1}$$

mit $\beta_i \in B$ ($i = 0, \ldots, p^e - 1$), dann gilt

$$\sigma^A_{L'/L}(w) = a_{p^e-1} d\lambda,$$

wenn $a_{p^e-1} \in A_L$ ein beliebiges Element mit $\varphi(a_{p^e-1}) = \beta_{p^e-1}$ ist.

Beweis: Da die Beschränkung von $\sigma^A_{L'/L}$ auf die Elemente 0-ten Grades die gewöhnliche Spur der L-Algebra L' ist, ist diese Beschränkung die Nullabbildung. Da $\sigma^A_{L'/L}$ linear in bezug auf A_L ist, folgt zunächst $\sigma^A_{L'/L}(w_0) = 0$.

Im Fall $e = 1$ gilt für $i = 0, \ldots, p - 2$ nach 1.7, 2. und 5.

$$\sigma^A_{L'/L}(y^i dy) = \sigma^A_{L'/L}\left(\frac{dy^{i+1}}{i+1}\right) = \frac{1}{i+1} d\sigma^A_{L'/L}(y^{i+1}) = 0$$

und

$$\sigma^A_{L'/L}(y^{p-1} dy) = \sigma^A_{L'/L}\left(\lambda \frac{dy}{y}\right) = \lambda \frac{d\lambda}{\lambda} = d\lambda.$$

Hieraus folgt die Behauptung für $e=1$. Im allgemeinen Fall ergibt sie sich aus der Schachtelungsformel 1.7, 3. für die Spur, angewandt auf die Algebrenkette

$$L \subset L[y^{p^{e-1}}] \subset L[y^{p^{e-2}}] \subset \ldots \subset L[y] = L'.$$

Das Beispiel zeigt, daß $\sigma^A_{L'/L}$ i.a. auch für inseparable Erweiterungen nicht trivial ist. Allgemeiner betrachten wir jetzt eine äußere Differentialalgebra A von K über K_0 (d.h. A ist die äußere Algebra von A^1). Ferner sei $\dim_K A^1 =: d < \infty$. $L \subset L'$ aus ε_K seien wie in Abschnitt b) als direkte Produkte dargestellt. Es werde vorausgesetzt, daß auch

$$(*) \qquad \dim_{L_i} A^1_{L_i} = \dim_{L_{ij}} A^1_{L_{ij}} = d$$

ist für $i=1, \ldots, t$, $j=1, \ldots, t_i$. Beispiele für diese Situation werden später auftreten. A^1_L und $A^1_{L'}$ sind dann freie L- bzw. L'-Moduln vom Rang d, $A^d_{L'}$ und A^d_L sind frei vom Rang 1.

Satz 1.9. Unter den obigen Voraussetzungen (*) ist

$$\sigma^A_{L'/L} : A^d_{L'} \to A^d_L$$

surjektiv.

Beweis: Wegen 1.7, 6. genügt es zu zeigen, daß $\sigma^A_{L'_{ij}/L_i} : A^d_{L'_{ij}} \to A^d_{L_i}$ surjektiv ist, d.h. wir dürfen annehmen, daß $L \subset L'$ Körper sind. Ist L'/L separabel, dann ist $A^d_{L'} = L' \otimes_L A^d_L$ und die Behauptung folgt, weil $\sigma^A_{L'/L}$ eine A_L-lineare Abbildung ist und $\sigma_{L'/L} : L' \to L$ surjektiv ist. Für rein inseparable Erweiterungen L'/L vom Grad p hat man eine Situation wie in Beispiel 1.8 (vgl. auch [5], 2.2.9). Im allgemeinen Fall ergibt sich die Behauptung aus der Schachtelungsformel, wenn man berücksichtigt, daß aus $\dim_L A^1_L = \dim_{L'} A^1_{L'} = d$ auch $\dim_{L^*} A^1_{L^*} = d$ folgt für jeden Zwischenkörper L^* von L und L'.

d) Spurformel für einfache Erweiterungen

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Spurformel 2.2.3 aus [5] gleichzeitig mit der Formel aus Beispiel 1.8 zu verallgemeinern. Wir betrachten dazu K-Algebren L von der Form $L = K[X]/(F)$, wobei $F \in K[X]$ ein reduziertes Polynom mit höchstem Koeffizienten 1 ist, d.h. in der Zerlegung von F in irreduzible Faktoren tritt kein Faktor mehrfach auf. $F = F_1 \cdot \ldots \cdot F_t$ sei diese Zerlegung, wobei auch die F_i den höchsten Koeffizienten 1 besitzen sollen. Es ist

$$L = L_1 \times \ldots \times L_t \quad \text{mit} \quad L_i = K[X]/(F_i) \quad (i = 1, \ldots, t).$$

Ist x_0 die Restklasse von X in L, so ist $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$, wobei ξ_i die Restklasse von X in L_i ist. Ferner ist $\{1, x_0, \ldots, x_0^{n-1}\}$ eine Basis von L über K, wenn $n := \mathrm{Grad}(F)$ ist.

A sei eine Differentialalgebra mit den für Satz 1.9 gemachten Voraussetzungen. $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ sei eine K-Basis von A^1. $A^1_{L_i}$ berechnet sich nach der Formel

$$A^1_{L_i} = L_i \otimes_K A^1 \oplus L_i dX \,/\, \langle \delta F_i(\xi_i) + F_i'(\xi_i) dX \rangle,$$

wobei $\delta F_i(\xi_i)$ dadurch erhalten wird, daß man die Koeffizienten des Polynoms F_i bzgl. der Derivation in A ableitet und dann $X = \xi_i$ setzt. $\delta F_i(\xi_i) \in L_i \otimes_K A^1$ kann in der Form $\delta F_i(\xi_i) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{(i)} dx_k$ mit $\lambda_k^{(i)} \in L_i$ geschrieben werden. Wir setzen noch $\lambda_0^{(i)} := F_i'(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, t)$. In $A^1_{L_i}$ hat man dann die Relation $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k^{(i)} dx_k = 0$. Genau dann ist $\dim_{L_i} A^1_{L_i} = d$, wenn $\lambda_k^{(i)} \neq 0$ ist für mindestens ein $k \in \{0, \ldots, d\}$.

Analog zur obigen Formel gilt auch

$$A^1_L = L \otimes_K A^1 \oplus L dX \,/\, \langle \delta F(x_0) + F'(x_0) dX \rangle.$$

Wir setzen $\varphi_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t} F_j(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, t)$. Beachtet man, daß $L = L_1 \times \ldots \times L_t$ und $A^1_L = A^1_{L_1} \times \ldots \times A^1_{L_t}$ ist, so kann man leicht die folgenden Formeln bestätigen:

$$\delta F(x_0) = \big(\varphi_1 \delta F_1(\xi_1), \ldots, \varphi_t \delta F_t(\xi_t)\big) = \sum_{k=1}^{d} (\varphi_1 \lambda_k^{(1)}, \ldots, \varphi_t \lambda_k^{(t)}) dx_k,$$

$$F'(x_0) = \big(\varphi_1 F_1'(\xi_1), \ldots, \varphi_t F_t'(\xi_t)\big).$$

Setzt man $\lambda_k := (\varphi_1 \lambda_k^{(1)}, \ldots, \varphi_t \lambda_k^{(t)})$ $(k = 0, \ldots, d)$, so bekommt man in A^1_L die Formel

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k dx_k = 0.$$

Genau dann ist λ_k Einheit in L, wenn $\lambda_k^{(i)} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, t$. Ist dies der Fall, so ist $\{dx_0, \ldots, \widehat{dx_k}, \ldots, dx_d\}$ eine Basis des L-Moduls A^1_L.

Satz 1.10. Wir setzen voraus, daß es ein $k \in \{0, \ldots, d\}$ gibt, so daß λ_k Einheit ist. $w \in A^d_L$ werde in der Form

$$w = \lambda dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d \text{ mit } \lambda = \lambda_k^{-1} (\varkappa_0 + \varkappa_1 x_0 + \ldots + \varkappa_{n-1} x_0^{n-1})$$

geschrieben $(\varkappa_i \in K)$. Dann ist

$$\sigma^A_{L/K}(w) = (-1)^k \varkappa_{n-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß

$$\sigma^A_{L/K}(\lambda_k^{-1} x_0^j dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d) = \begin{cases} 0 & \text{für } j < n-1 \\ (-1)^k dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d & \text{für } j = n-1. \end{cases}$$

Dabei ist nach 1.7, 6.

$$\sigma^A_{L/K}(\lambda_0^{-1} x_0^j dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^A_{L_i/K}\left(\frac{\xi_i^j}{F_i'(\xi_i)\,\varphi_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d\right)$$

und für $k = 1, \ldots, d$

$$\sigma^A_{L/K}(\lambda_k^{-1} x_0^j dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_k \wedge \ldots \wedge dx_d) =$$
$$= \sum_{i=1}^{t} \sigma^A_{L_i/K}\left(\frac{\xi_i^j}{\lambda_k^{(i)}\varphi_i} d\xi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_k \wedge \ldots \wedge dx_d\right).$$

Wir betrachten nun für den rationalen Funktionenkörper $R := K(X)$ in A_R die Differentialformen

$$w_j := \frac{X^j}{F} dX \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

In A_R hat man Relationen

$$dF_i = F_i' dX + \sum_{k=1}^{d} \Lambda_k^{(i)} dx_k \quad (i = 1, \ldots, t),$$

wobei die $\Lambda_k^{(i)} \in K[X]$ beim kanonischen Epimorphismus $K[X] \to L_i$ gerade auf die $\lambda_k^{(i)}$ abgebildet werden. Dies gilt auch für $\Lambda_0^{(i)} := F_i'$. Man kann daher schreiben

$$w_j = \frac{X^j}{F_i' \cdot \prod_{l \neq i} F_l} \frac{dF_i}{F_i} \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d \quad \text{im Fall } k = 0$$

und

$$w_j = \frac{(-1)^k X^j}{\Lambda_k^{(i)} \prod_{l \neq i} F_l} \frac{dF_i}{F_i} \wedge dX \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_k \wedge \ldots \wedge dx_d \quad \text{für} \quad k \in \{1, \ldots, d\}.$$

Dabei ist F_i kein Teiler von $F_i' \cdot \prod_{l \neq i} F_l$ bzw. $\Lambda_k^{(i)} \cdot \prod_{l \neq i} F_l$.

V_i sei der zu $F_i \in K[X]$ gehörige diskrete Bewertungsring von R/K. L_i ist gerade der Restklassenkörper von V_i. Da w_j in den V_i nur Pole 1. Ordnung hat, ist das Poincaré-Residuum $\mathrm{Res}_{V_i}(w_j)$ definiert (vgl. [5], Def. 3.1.9) und es gilt

$$\mathrm{Res}_{V_i}(w_j) = \frac{\xi_i^j}{F_i'(\xi_i) \cdot \varphi_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d \quad \text{im Fall } k = 0$$

und

$$\mathrm{Res}_{V_i}(w_j) = \frac{\xi_i^j}{\lambda_k^{(i)} \varphi_i} d\xi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_k \wedge \ldots \wedge dx_d, \quad \text{falls} \quad k \in \{1, \ldots, d\}.$$

Es ergibt sich

$$\sigma^A_{L/K}(\lambda_k^{-1} x_0^j dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^A_{L_i/K}(\mathrm{Res}_{V_i} w_j).$$

Nach dem Satz von der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen kann man schreiben

$$\frac{X^j}{F} = \sum_{i=1}^{t} \frac{P_i}{F_i}, \quad P_i = \sum_{\nu=0}^{n_i-1} c_{i\nu} X^\nu \quad (c_{i\nu} \in K),$$

wobei $n_i := \mathrm{Grad}\, F_i$, und es ist

$$\sum_{i=1}^{t} c_{in_i-1} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } j < n-1 \\ 1, & \text{wenn } j = n-1. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann man $\mathrm{Res}_{V_i}(w_j)$ nun auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathrm{Res}_{V_i}(w_j) = \frac{P_i(\xi_i)}{F_i'(\xi_i)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d \quad \text{im Fall} \quad k = 0,$$

$$\mathrm{Res}_{V_i}(w_j) = \frac{P_i(\xi_i)}{\lambda_k^{(i)}} d\xi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d \quad \text{für} \quad k \in \{1, \ldots, d\}.$$

Im Fall $k = 0$ ergibt sich bereits nach [5], 2.2.3

$$\sum_{i=1}^{t} \sigma^A_{L_i/K}(\mathrm{Res}_{V_i} w_j) = \left(\sum_{i=1}^{t} c_{in_i-1}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d = \begin{cases} 0 & \text{für } j < n-1 \\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d & \text{für } j = n-1 \end{cases}.$$

Im Fall $k \in \{1, \ldots, d\}$ folgt die Behauptung ebenfalls, sobald gezeigt ist, daß

$$\sigma^A_{L_i/K}\left(\frac{P_i(\xi_i)}{\lambda_k^{(i)}} d\xi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d\right) = (-1)^k c_{in_i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d$$

ist für $i = 1, \ldots, t$, d.h. wenn der Satz im Fall bewiesen ist, daß L ein Körper ist.

Sei also L ein Körper. Wenn L/K separabel ist, dann ist $F'(x_0) \neq 0$ und

$$\frac{x_0^j}{\lambda_k} dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d = \frac{(-1)^k x_0^j}{F'(x_0)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Die Behauptung folgt daher aus dem schon bewiesenen Teil des Satzes.

Ist L/K inseparabel und Char. $K =: p$, dann gibt es eine kleinste Zahl e, so daß $y_0 := x_0^{p^e}$ über K separabel ist. $L' := K[y_0]$ ist die separable Hülle von K in L und F ist von der Form $F(X) = G(X^{p^e})$, wobei $G(Y) \in K[Y]$ ein irreduzibles separables Polynom ist. Man hat $n = p^e \cdot m$

mit $p^e = [L : L']$, $m = [L' : K]$. Ferner ist $\delta F(x_0) = \delta G(y_0)$ und daher $\lambda_k \in L'$ ($k = 1, \ldots, d$). Nach der Formel in 1.8 ergibt sich

$$\sigma^A_{L/L'}\left(\frac{x_0^j}{\lambda_k} dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \quad j \not\equiv p^e - 1 \bmod (p^e) \\ \dfrac{y_0^\mu}{\lambda_k} dy_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d, & \text{falls } \quad j = \mu p^e + p^e - 1. \end{cases}$$

Dabei ist $0 \le \mu \le m - 1$.

Es folgt schließlich mit Hilfe der in $A_{L'}$ gültigen Relation

$$G'(y_0)\,dy_0 + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k\, dx_k = 0,$$

daß für $j = \mu p^e + p^e - 1$

$$\sigma^A_{L/K}\left(\frac{x_0^j}{\lambda_k} dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d\right) =$$

$$= \sigma^A_{L'/K}\left(\frac{y_0^\mu}{\lambda_k} dy_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d\right) =$$

$$= \sigma^A_{L'/K}\left(\frac{(-1)^k y_0^\mu}{G'(y_0)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \quad \mu < m-1 \\ (-1)^k dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d & \text{für } \quad \mu = m-1 \end{cases}$$

ist. $\mu = m - 1$ gilt aber nur, wenn $j = n - 1$ ist. Der Satz ist damit bewiesen.

e) Eine Vertauschungsregel für die Spur

$L \subset L'$ seien zwei Körper aus ε_K und $\hat{K}/K$ sei eine beliebige Körpererweiterung. Wir setzen $\hat{L} := L \otimes_K \hat{K}$, $\hat{L}' := L' \otimes_K \hat{K}$. $\hat{L}$ und $\hat{L}'$ sind dann endlichdimensionale $\hat{K}$-Algebren und es gelten die Formeln

1.11. $$\sigma_{\hat{L}'/\hat{L}} \mid L' = \sigma_{L'/L}, \quad n_{\hat{L}'/\hat{L}} \mid L' = n_{L'/L}.$$

Wir wollen zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine entsprechende Formel für die Spur in Differentialalgebren gilt.

Dazu betrachten wir eine Differentialalgebra A von K über einem Teilkörper $K_0 \subset K$ und eine Differentialalgebra $\hat{A}$ von $\hat{K}$ über einem Teilkörper $\hat{K}_0$ mit $K_0 \subset \hat{K}_0$. Es sei ferner ein Homomorphismus $A \to \hat{A}$ von Differentialalgebren gegeben, der für die Elemente 0-ten Grades die Inklusion $K \to \hat{K}$ ist und der einen Isomorphismus von $\hat{K}$-Algebren $\hat{K} \otimes_K A \to \hat{A}$ induziert (Beispiele dieser Art werden später vorkommen).

Lemma 1.12. Sei $\tau : L \to \hat{L}$ die kanonische Injektion. Es gibt genau einen τ-Homomorphismus $\Psi : A_L \to \hat{A}_{\hat{L}}$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_L \arrow[r, "\Psi"] & \hat{A}_{\hat{L}} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & \hat{A} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Ψ ist injektiv und induziert einen Isomorphismus $\hat{K} \otimes_K A_L \to \hat{A}_{\hat{L}}$.

Beweis: Wir schreiben L als Restklassenring eines Polynomrings: $L = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ und setzen $R := K[X_1, \ldots, X_n]$, $\hat{R} := \hat{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\hat{L} = \hat{R}/I\hat{R}$. Für die Polynomringe ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_R \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & \hat{A}_{\hat{L}} \\ A \arrow[u] \arrow[r] & \hat{A} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

mit entsprechenden Eigenschaften wie im Lemma unmittelbar. Ferner ist A_L der Restklassenring von A_R nach dem von I und dI in A_R erzeugten zweiseitigen Ideal ([5], 1.5.1), analoges gilt für $\hat{A}_{\hat{L}}$. Durch die obige Abbildung $\tilde{\psi}$ wird daher ein $\Psi: A_L \to \hat{A}_{\hat{L}}$ mit den gewünschten Eigenschaften induziert.

Satz 1.13. Wir setzen jetzt voraus, daß $\hat{L}'$ reduziert ist (Dann ist auch $\hat{L}$ reduziert und somit $\sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}'/\hat{L}}$ definiert). Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_{L'} \arrow[r, "\Psi'"] & \hat{A}_{\hat{L}'} \\ A_L \arrow[u, "\sigma^A_{L'/L}"] \arrow[r, "\Psi"'] & \hat{A}_{\hat{L}} \arrow[u, "\sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}'/\hat{L}}"'] \end{tikzcd}$$

in dem Ψ und Ψ' die Abbildungen aus 1.12 sind, ist kommutativ.

Beweis: Auf Grund der Schachtelungsformel für die Spur genügt es, separable Erweiterungen L'/L oder rein inseparable Erweiterungen vom Grad p ($p := \text{Char}\, K > 0$) zu betrachten.

a) Sei L'/L separabel. Dann ist $A_{L'} = L' \otimes_L A_L$ und entsprechend $\hat{A}_{\hat{L}'} = \hat{L}' \otimes_{\hat{L}} \hat{A}_{\hat{L}}$. Da die Spuren linear bzgl. A_L und $\hat{A}_{\hat{L}}$ sind, folgt die Behauptung aus der ersten Formel in 1.11.

b) Sei $L' = L[y]$ mit $y^p \in L$, $y \notin L$ ($p := \text{Char. } K > 0$). Dann ist auch $\hat{L}' = \hat{L}[y]$. $A_{L'}$ wird als A_L-Modul von den Elementen $y^i dy$ ($i = 0, \ldots, p-1$) erzeugt; das Gleiche gilt für $\hat{A}_{\hat{L}'}$ als $\hat{A}_{\hat{L}}$-Modul. Es ist

$$\sigma^{A}_{L'/L}(y^i dy) = \sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}'/\hat{L}}(y^i dy) \quad (i = 0, \ldots, p-1).$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt wieder aus der Linearität der Spur.

§ 2. Verallgemeinerung des Dedekindschen Komplementärmoduls

a) Definition und einfache Eigenschaften

P sei ein regulärer lokaler Ring mit dem Quotientenkörper K und Q/P sei eine Ringerweiterung, wobei Q als P-Modul endlich erzeugt ist. Ferner soll Q reduziert sein; sein voller Quotientenring L ist dann ebenfalls reduziert und eine endlichdimensionale K-Algebra.

Es soll eine Differentialalgebra D von P über einem Unterring $P_0 \subset P$ gegeben sein mit folgenden Eigenschaften:

α) D^1 ist ein freier P-Modul endlichen Rangs d.

β) D ist die äußere Algebra des P-Moduls D^1. Es ist dann $D^d \cong P$.

Sei ferner $A := D_K$ die universelle K-Ausdehnung von D. Wir fassen D als Teilring von A auf. Ist $L = L_1 \times \ldots \times L_t$ die kanonische Zerlegung von L in ein direktes Produkt von Körpern L_i ($i = 1, \ldots, t$), so setzen wir noch voraus:

γ) Es ist $\dim_{L_i} A^1_{L_i} = d$ ($i = 1, \ldots, t$).

Definition 2.1. $\mathfrak{C}(Q/P) = \{w \in A^d_L \mid \sigma^A_{L/K}(Qw) \subset D^d\}$ heißt der bzgl. D gebildete *Komplementärmodul* von Q über P.

Wir verzichten darauf, die Abhängigkeit von D in der Notation zum Ausdruck zu bringen, da sich jeweils aus dem Zusammenhang ergeben wird, welches D wir meinen. $\mathfrak{C}(Q/P)$ ist offensichtlich ein Q-Untermodul von A^d_L.

Ist $D^d = Pw_0$ mit einem Basiselement w_0 und ist L über K separabel, so ist

$$\mathfrak{C}(Q/P) = \mathfrak{C}^0(Q/P)\, w_0,$$

wobei $\mathfrak{C}^0(Q/P)$ der übliche bzgl. der Spur $\sigma_{L/K}: L \to K$ gebildete Dedekindsche Komplementärmodul von Q über P ist. Ist noch spezieller $D^1 = 0$, also $D = D^d = P$, dann ist $\mathfrak{C}(Q/P) = \mathfrak{C}^0(Q/P)$.

Satz 2.2. Man hat einen kanonischen Isomorphismus von L-Moduln

$$\Phi : A^d_L \to \operatorname{Hom}_K(L, A^d),$$

durch den $w \in A_L^d$ auf die Abbildung $\Phi_w : L \to A^d$ mit $\Phi_w(\lambda) = \sigma_{L/K}^A(\lambda w)$ für alle $\lambda \in L$ abgebildet wird. Durch Φ wird $\mathfrak{C}(Q/P) \subset A_L^d$ mit dem Q-Untermodul $\mathrm{Hom}_P(Q, D^d)$ von $\mathrm{Hom}_K(L, A^d)$ identifiziert.

Beweis: Wird Φ wie angegeben definiert, dann ist klar, daß Φ_w für alle $w \in A_L^d$ eine K-lineare Abbildung ist und Φ selbst L-linear.

Es ist $A_L^d = A_{L_1}^d \times \ldots \times A_{L_t}^d \cong L_1 \times \ldots \times L_t$ nach 1.1 und der Voraussetzung γ). Analog ist

$$\mathrm{Hom}_K(L, A^d) \cong \mathrm{Hom}_K(L_1, A^d) \times \ldots \times \mathrm{Hom}_K(L_t, A^d)$$

als L-Modul, wenn die rechte Seite in der üblichen Weise als L-Modul aufgefaßt wird. Ist $w = (w_1, \ldots, w_t) \in A_L^d$ mit $w_i \in A_{L_i}^d$, so identifiziert sich Φ_w mit $(\Phi_{w_1}, \ldots, \Phi_{w_t})$, wobei $\Phi_{w_i} \in \mathrm{Hom}_K(L_i, A^d)$ entsprechend wie Φ_w definiert ist. Es genügt daher zu zeigen, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi_i : A_{L_i}^d &\to \mathrm{Hom}_K(L_i, A^d) \\ w_i &\mapsto \Phi_{w_i} \end{aligned}$$

Isomorphismen von L_i-Vektorräumen sind ($i = 1, \ldots, t$). Da beide Seiten die Dimension 1 besitzen, hat man nur zu zeigen, daß Φ_i nicht die Nullabbildung ist. Dies folgt aber aus 1.9, weil $\sigma_{L_i/K}^A : A_{L_i}^d \to A^d$ surjektiv ist.

Da $\mathrm{Hom}_P(Q, D^d)$ torsionsfreier P-Modul ist, ist die durch Tensorierung mit K gegebene Abbildung

$$\mathrm{Hom}_P(Q, D^d) \to \mathrm{Hom}_K(L, A^d)$$

injektiv. Für ein $w \in A_L^d$ ist Φ_w genau dann in $\mathrm{Hom}_P(Q, D^d)$ enthalten, wenn $\Phi_w|_Q$ nur Werte in D^d annimmt, d.h. wenn $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$. Die letzte Aussage des Satzes ist damit auch klar.

Korollar 2.3. $\mathfrak{C}(Q/P)$ ist als Q-Modul endlich erzeugt.

Wir betrachten nun einen beliebigen reduzierten noetherschen lokalen Ring R mit dem vollen Quotientenring L. $L = L_1 \times \ldots \times L_t$ sei die kanonische Zerlegung von L in ein direktes Produkt von Körper. Wir sagen, daß R eine *Noethersche Normalisierung* besitzt, wenn es einen regulären lokalen Ring P mit $\dim P = \dim R$ und einen injektiven lokalen Homomorphismus $\varphi : P \to R$ gibt, so daß $R = Q_{\mathfrak{m}}$ ist, wobei Q ein Zwischenring $\varphi(P) \subset Q \subset R$ ist, der als P-Modul endlich erzeugt ist und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von Q.

Wir identifizieren P mit seinem Bild bei φ. K sei der Quotientenkörper von P. Ferner soll eine Differentialalgebra D von P über einem Unterring $P_0 \subset P$ gegeben sein, so daß die eingangs angegebenen Bedingungen α), β) und γ) erfüllt sind. Dann ist $\mathfrak{C}(Q/P)$ definiert.

Definition 2.4. $\mathfrak{C}(R/P) := R \cdot \mathfrak{C}(Q/P)$ heißt der bzgl. D gebildete *Komplementärmodul* von R über P.

Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{C}(R/P)$ nicht von der Wahl von Q abhängt. Sei Q' ein weiterer Ring mit den entsprechenden Eigenschaften wie Q. Da das Ringkompositum $Q \cdot Q'$ ebenfalls diese Eigenschaften hat, dürfen wir $Q \subset Q'$ annehmen. Dann ist $\mathfrak{C}(Q'/P) \subset \mathfrak{C}(Q/P)$. Da Q' endlich erzeugter Q-Modul ist, gibt es ein $s \in Q$, $s \notin \mathfrak{m}$ mit $sQ' \subset Q$. Für $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$ ist dann $\sigma^A_{L/K}(Q' \cdot sw) \subset \sigma^A_{L/K}(Qw) \subset D^d$, also $sw \in \mathfrak{C}(Q'/P)$.

Es folgt $s\mathfrak{C}(Q/P) \subset \mathfrak{C}(Q'/P) \subset \mathfrak{C}(Q/P)$ und somit $R \cdot \mathfrak{C}(Q/P) = R \cdot \mathfrak{C}(Q'/P)$.

Bemerkung 2.5. Es ist $\mathfrak{C}(R/P) \cong R \otimes_Q \mathfrak{C}(Q/P) \cong R \otimes_Q \operatorname{Hom}_P(Q, D^d)$ und $\mathfrak{C}(R/P)$ ist isomorph zum kanonischen Modul K_R von R (vgl. etwa [3]). Wenn R Gorensteinring ist, so ist $\mathfrak{C}(R/P) \cong R$.

Später wird gezeigt werden, daß $\mathfrak{C}(R/P)$ unter gewissen Voraussetzungen auch nicht von der Wahl der noetherschen Normalisierung P abhängt, also R in invarianter Weise zugeordnet ist.

Um das Verhalten des Komplementärmoduls $\mathfrak{C}(R/P)$ bei Lokalisation zu untersuchen, betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall, daß R Integritätsbereich ist, da wir später nur diesen Fall benötigen.

Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von R, $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap P$. Dann ist auch $P_\mathfrak{p}$ ein regulärer lokaler Ring und eine noethersche Normalisierung von $R_\mathfrak{P}$. Ferner hat die universelle $P_\mathfrak{p}$-Ausdehnung $D_\mathfrak{p}$ von D die entsprechenden Eigenschaften wie D. Für den Quotientenring $Q_\mathfrak{p}$ von Q bzgl. der Nennermenge $P \backslash \mathfrak{p}$ ergibt sich aus der Definition des Komplementärmoduls, daß $\mathfrak{C}(Q_\mathfrak{p}/P_\mathfrak{p}) = Q_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{C}(Q/P)$ ist. Somit ist $\mathfrak{C}(R_\mathfrak{P}/P_\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{C}(Q_\mathfrak{p}/P_\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{P}\mathfrak{C}(Q/P) = R_\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{C}(R/P)$. Wir haben gezeigt:

Lemma 2.6. Ist R Integritätsbereich, $\mathfrak{P}$ Primideal von R, $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap P$' so gilt für den bzgl. der universellen $P_\mathfrak{p}$-Ausdehnung von D gebildeten Komplementärmodul

$$\mathfrak{C}(R_\mathfrak{P}/P_\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{C}(R/P).$$

b) Verhalten des Komplementärmoduls bei Komplettierung

Mit den zu Anfang von Abschnitt a) gemachten Voraussetzungen sei jetzt $\hat{P}$ die Komplettierung von P und $\hat{Q} := \hat{P} \otimes_P Q$ (Komplettierung von Q bzgl. seiner Radikaltopologie). Wir setzen ferner voraus:

δ) Q sei Integritätsbereich, $\hat{Q}$ sei reduziert. (Das letztere ist z.B. erfüllt, wenn wir von einem exzellenten Ring P ausgehen).

Der volle Quotientenring $\hat{L}$ von $\hat{Q}$ ist dann eine endlichdimensionale reduzierte Algebra über dem Quotientenkörper $\hat{K}$ von $\hat{P}$. Wir fordern schließlich

ε) Es sei eine Differentialalgebra $\hat{D}$ von $\hat{P}$ über einem Unterring $\hat{P}_0$ mit $P_0 \subset \hat{P}_0$ gegeben und ein Homomorphismus von Differentialalgebren $D \to \hat{D}$, der für die Elemente vom Grad 0 der kanonische Homomorphismus $P \to \hat{P}$ ist und der einen Isomorphismus

$$\hat{P} \otimes_P D \tilde{\to} \hat{D}$$

induziert.

$\hat{A} = \hat{K} \otimes_{\hat{P}} \hat{D} \cong \hat{K} \otimes_K A$ sei die universelle $\hat{K}$-Ausdehnung von $\hat{D}$. Die Voraussetzungen von 1.11 sind dann erfüllt, der dortige Homomorphismus $\Psi: A_L \to \hat{A}_{\hat{L}}$ induziert einen Isomorphismus

$$\hat{K} \otimes_K A_L \tilde{\to} \hat{A}_{\hat{L}}.$$

Speziell ist $\hat{A}^d_{\hat{L}}$ ein freier $\hat{L}$-Modul vom Rang 1. Bezüglich $\hat{D}$ und der Spur $\sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}/\hat{K}}: \hat{A}_L \to \hat{A}$ ist somit der Komplementärmodul $\mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P})$ definiert.

Lemma 2.7. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A^d_L \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \hat{A}^d_{\hat{L}} \arrow[d, "\hat{\Phi}"] \\
\mathrm{Hom}_K(L, A^d) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{L}, \hat{A}^d),
\end{tikzcd}$$

wobei Φ und $\hat{\Phi}$ wie in 2.2 definiert sind und α der kanonische Homomorphismus in das Tensorprodukt $\hat{K} \otimes_K \mathrm{Hom}_K(L, A^d) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{K} \otimes_K L, \hat{K} \otimes_K A^d) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{L}, \hat{A}^d)$ ist.

B e w e i s: α identifiziert $\mathrm{Hom}_K(L, A^d)$ mit der Menge derjenigen Abbildungen aus $\mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{L}, \hat{A}^d)$, die L in $A^d \subset \hat{A}^d$ abbilden. Wir identifizieren A^d_L mit seinem Bild bei Ψ. Für $w \in A^d_L$ ist nach Definition $\hat{\Phi}_w$ die Abbildung mit $\hat{\Phi}_w(\lambda) = \sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}/\hat{K}}(\lambda w)$ für alle $\lambda \in \hat{L}$. Nach 1.12 ist $\sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}/\hat{K}}|_L = \sigma^A_{L/K}$, so daß für $\lambda \in L$ gilt: $\hat{\Phi}_w(\lambda) = \sigma^A_{L/K}(\lambda w) = \Phi_w(\lambda)$, d.h. $\hat{\Phi}_w$ ist das Bild von Φ_w bei α.

Nach Satz 2.2 läßt sich das Diagramm in 2.7 wie folgt ergänzen:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(Q/P) \arrow[rrr, dashed] \arrow[dr, "\subset"] \arrow[ddd] & & & \mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P}) \arrow[dl, "\supset"'] \arrow[ddd] \\
& A^d_L \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] & \hat{A}^d_{\hat{L}} \arrow[d] & \\
& \mathrm{Hom}_K(L, A^d) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\hat{K}}(\hat{L}, \hat{A}^d) & \\
\mathrm{Hom}_P(Q, D^d) \arrow[rrr] \arrow[uur, "\subset"] & & & \mathrm{Hom}_{\hat{P}}(\hat{Q}, \hat{D}^d) \arrow[uul, "\supset"']
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathrm{Hom}_P(Q, D^d) \to \mathrm{Hom}_P(\hat{Q}, \hat{D}^d)$ die kanonische Abbildung in das Tensorprodukt $\hat{P} \otimes_P \mathrm{Hom}_P(Q, D^d) \cong \hat{Q} \otimes_Q \mathrm{Hom}_P(Q, D^d) \cong \mathrm{Hom}_{\hat{P}}(\hat{Q}, \hat{D}^d)$ ist. Wir haben damit bewiesen:

Satz 2.8. Durch $\Psi: A_L^d \to \hat{A}_{\hat{L}}^d$ wird $\mathfrak{C}(Q/P)$ in $\mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P})$ abgebildet und es wird ein $\hat{Q}$-Modul-Isomorphismus

$$\mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P}) \cong \hat{Q} \otimes_Q \mathfrak{C}(Q/P)$$

induziert.

Sei $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$ die Menge der maximalen Ideale von Q. Bekanntlich gilt dann in kanonischer Weise

$$\hat{Q} \cong \hat{Q}_{\mathfrak{m}_1} \times \ldots \times \hat{Q}_{\mathfrak{m}_t}.$$

Dabei ist die Komplettierung $\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i}$ von $Q_{\mathfrak{m}_i}$ als $\hat{P}$-Modul endlich erzeugt $(i = 1, \ldots, t)$. Ist L_i der volle Quotientenring von $Q_{\mathfrak{m}_i}$, so erhält man auch eine Zerlegung

$$\hat{L} = L_1 \times \ldots \times L_t.$$

(L_i ist jedoch i.a. kein Körper.)

Nach 1.1 ist $\hat{A}_L = \hat{A}_{L_1} \times \ldots \times \hat{A}_{L_t}$. Notwendigerweise ist daher $\hat{A}_{L_i}^d$ ein freier L_i-Modul vom Rang 1 $(i = 1, \ldots, t)$, weil $\hat{A}_{\hat{L}}^d$ die entsprechende Eigenschaft hat. Somit ist $\mathfrak{C}(Q_{\mathfrak{m}_i}/\hat{P})$ definiert $(i = 1, \ldots, t)$.

Lemma 2.9. Durch die Zerlegung $\hat{L} = L_1 \times \ldots \times L_t$ wird eine Zerlegung

$$\mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P}) = \mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_1}/\hat{P}) \times \ldots \times \mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_t}/\hat{P})$$

induziert.

Beweis: Sei $w = (w_1, \ldots, w_t) \in \hat{A}_{\hat{L}}^d$ gegeben mit $w_i \in \hat{A}_{L_i}^d$ $(i = 1, \ldots, t)$. Ist $w_i \in \mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}i}/P)$ für $i = 1, \ldots, t$, so ist

$$\sigma_{\hat{L}/\hat{K}}^{\hat{A}}(\hat{Q}w) \subset \sum_{i=1}^{t} \sigma_{L_i/\hat{K}}^{\hat{A}}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i} w_i) \subset \hat{D}^d,$$

also $w \in \mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P})$. Sei umgekehrt $w \in \mathfrak{C}(\hat{Q}/\hat{P})$. Dann ist $\sigma_{\hat{L}/\hat{K}}^{\hat{A}}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i} w) = \sigma_{L_i/\hat{K}}^{\hat{A}}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i} w_i) \subset \hat{D}^d$ und somit $w_i \in \mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i}/\hat{P})$ $(i = 1, \ldots, t)$.

Korollar 2.10. Sei $\Psi_i: A_L^d \to \hat{A}_{L_i}^d$ die Zusammensetzung von $\Psi: A_L^d \to \hat{A}_{\hat{L}}^d$ mit der Projektion $\hat{A}_{\hat{L}}^d \to \hat{A}_{L_i}^d$. Durch Ψ_i wird $\mathfrak{C}(Q_{\mathfrak{m}i}/P)$ in $\mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}i}/\hat{P})$ abgebildet und es wird ein Isomorphismus

$$\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i} \otimes_{Q\mathfrak{m}_i} \mathfrak{C}(Q_{\mathfrak{m}_i}/P) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(\hat{Q}_{\mathfrak{m}_i}/\hat{P})$$

induziert.

Sei R ein beliebiger noetherscher lokaler Integritätsbereich, der eine Noethersche Normalisierung $P \to R$ besitzt und für den $\hat{R}$ reduziert ist. Dann ist $\hat{P} \to \hat{R}$ eine Noethersche Normalisierung von $\hat{R}$. Wir setzen voraus, daß Differentialalgebren D und $\hat{D}$ für P und $\hat{P}$ gegeben sind, welche die Voraussetzungen in α)—ε) erfüllen. Wir haben dann gezeigt:

Satz 2.11. Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathfrak{C}(\hat{R}/\hat{P}) \cong \hat{R} \otimes_R \mathfrak{C}(R/P).$$

c) Schachtelungsformel

Unter den zu Beginn von Abschnitt a) gemachten Annahmen sei jetzt ein weiterer Ring Q' mit $P \subset Q' \subset Q$ gegeben. K' sei der volle Quotientenring von Q'. Es ist dann auch $A^d_{K'}$ ein freier K'-Modul vom Rang 1 und $\mathfrak{C}(Q'/P)$ ist definiert.

Satz 2.12. $\mathfrak{C}(Q/P) = \{w \in A^d_L \mid \sigma^A_{L/K'}(Qw) \subset \mathfrak{C}(Q'/P)\}$.

Beweis: Für $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$ ist $\sigma^A_{L/K}(Qw) = \sigma^A_{K'/K}(\sigma_{L/K'}(Qw)) \subset D^d$. Folglich ist auch $\sigma^A_{K'/K}(Q' \sigma^A_{L/K'}(Qw)) = \sigma^A_{K'/K}(\sigma^A_{L/K'}(Qw)) \subset D^d$, d.h. $\sigma^A_{L/K'}(Qw) \subset \subset \mathfrak{C}(Q'/P)$. Ist umgekehrt $\sigma^A_{L/K'}(Qw) \subset \mathfrak{C}(Q'/P)$, so ist $\sigma^A_{K'/K}(Q' \sigma^A_{L/K'}(Qw)) = = \sigma^A_{L/K}(Qw) \subset D^d$, also $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$.

Die Formel 2.12 ist ein Analogon zum Schachtelungssatz für den klassischen Dedekindschen Komplementärmodul (die Dedekindsche Differente), in den sie durch Spezialisierung übergeht.

Korollar 2.13. Unter den Voraussetzungen von 2.12 sei Q ein Integritätsbereich, $K' = L$ und Q' sei lokal ein Gorensteinring (d.h. für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von Q' ist $Q'_{\mathfrak{m}}$ Gorensteinring). Dann gilt

$$\mathfrak{C}(Q/P) = \mathfrak{f}_{Q/Q'} \cdot \mathfrak{C}(Q'/P),$$

wobei $\mathfrak{f}_{Q/Q'}$ der Führer von Q nach Q' ist.

Beweis: Nach Lokalisation kann man sich auf den Fall beschränken, daß Q' ein lokaler Ring ist. Da Q' dann Gorensteinring ist, ist $\mathfrak{C}(Q'/P) \cong Q'$ (vgl. Bemerkung 2.5). Es gibt daher ein $w_0 \in \mathfrak{C}(Q'/P)$ mit $\mathfrak{C}(Q'/P) = Q' w_0$. Nach 2.12 ist dann $\mathfrak{C}(Q/P) = \{\lambda w_0 \in A^d_L \mid \lambda \in L,\ \lambda Q w_0 \subset Q' w_0\} = \mathfrak{f}_{Q/Q'} w_0 = = \mathfrak{f}_{Q/Q'} \cdot \mathfrak{C}(Q'/P)$.

d) Berechnung des Komplementärmoduls in Spezialfällen

Wir machen die gleichen Annahmen wie zu Beginn von Abschnitt a). Zusätzlich soll Q von der Form

$$Q = P[X]/(F)$$

sein, wobei $F \in P[X]$ ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1 ist, das in $K[X]$ keinen mehrfachen Primfaktor besitzt. Es sei $\operatorname{Grad}(F) =: n$ und x_0 sei die Restklasse von X in Q. $\{1, x_0, \ldots, x_0^{n-1}\}$ ist dann eine Basis von Q über P.

Ferner sei $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ eine Basis von D^1. Durch Differentiation der Relation $F(x_0) = 0$ erhält man in A^1_L eine Relation

$$F'(x_0)\,dx_0 + \sum_{k=1}^{d} \lambda_k\, dx_k = 0 \quad (\lambda_k \in L).$$

Wir setzen noch $\lambda_0 := F'(x_0)$ und machen die Annahme, daß für mindestens ein $k \in \{0, \ldots, d\}$ der Koeffizient λ_k eine Einheit in L ist. Dann ist $\{dx_0, \ldots, \widehat{dx_k}, \ldots, dx_d\}$ eine Basis von A_L^1.

Satz 2.14. Unter den obigen Annahmen ist

$$\mathfrak{C}(Q/P) = \lambda_k^{-1} Q \cdot dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d$$

für jedes $k \in \{0, \ldots, d\}$, für das λ_k Einheit in L ist. (Dies ist eine Verallgemeinerung der klassischen Formel $\mathfrak{C}^0(Q/P) = F'(x_0)^{-1} \cdot Q$, wenn L/K eine separabel algebraische Körpererweiterung ist).

Beweis: Für alle $j \in \mathbb{N}$ können wir schreiben

$$x_0^j = \varrho_0^{(j)} + \varrho_1^{(j)} x_0 + \ldots + \varrho_{n-1}^{(j)} x_0^{n-1}$$

mit geeigneten $\varrho_i^{(j)} \in P$. Nach 1.10 ist

$$\sigma_{L/K}^A(\lambda_k^{-1} x_0^j dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d) = (-1)^k \varrho_{n-1}^{(j)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Formen

$$w_j := \lambda_k^{-1} x_0^j dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d$$

für $j \in \mathbb{N}$ zu $\mathfrak{C}(Q/P)$ gehören.

Sei umgekehrt $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$, $w = \lambda_k^{-1} \cdot \lambda \cdot dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_d$, wobei λ von der Form $\lambda = \varkappa_0 + \varkappa_1 x_0 + \ldots + \varkappa_{n-1} x_0^{n-1}$ ($\varkappa_i \in K$) ist. Wieder nach 1.10 ist

$$\sigma_{L/K}^A(w) = (-1)^k \varkappa_{n-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d$$

und aus $w \in \mathfrak{C}(Q/P)$ ergibt sich $\varkappa_{n-1} \in P$. Dann ist aber auch $w - \varkappa_{n-1} w_{n-1} \in \mathfrak{C}(Q/P)$. Aus

$$\sigma_{L/K}^A\big(x_0(w - \varkappa_{n-1} w_{n-1})\big) = (-1)^k \varkappa_{n-2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d$$

ergibt sich $\varkappa_{n-2} \in P$ und $w - \varkappa_{n-1} w_{n-1} - \varkappa_{n-2} w_{n-2} \in \mathfrak{C}(Q/P)$. So fortfahrend erhält man, daß $\varkappa_i \in P$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Wir betrachten jetzt folgende Situation: P und R seien zwei reguläre lokale Ringe gleicher Dimension, $P \to R$ sei ein injektiver lokaler Homomorphismus, durch den P mit einem Unterring von R identifiziert wird. Es existiere ein Ring Q, $P \subset Q \subset R$, der als P-Modul endlich erzeugt ist, und ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von Q, so daß $R = Q_{\mathfrak{m}}$. K sei der Quotientenkörper von P, L der von R. Es existiere eine Differentialalgebra D von P über einem Unterring P_0 mit den zu Beginn von Abschnitt a) angegebenen Eigenschaften α)—γ). Dann ist $\mathfrak{C}(R/P)$ definiert.

Satz 2.15. Die universelle R-Ausdehnung D_R von D habe die Eigenschaft: D_R^1 ist ein freier R-Modul vom Rang d ($d :=$ Rang D^1). Dann ist der kanonische Homomorphismus $D_R \to A_L$ injektiv und es gilt

$$\mathfrak{C}(R/P) = \Lambda^d D_R^1 = D_R^d.$$

Beweis: D_R ist als universelle Ausdehnung der äußeren Differentialalgebra selbst eine äußere Differentialalgebra ([5], 1.6.8), also $D_R = \Lambda D_R^1$. Es ist daher klar, daß $D_R \to \Lambda_L$ injektiv ist; ferner ist $D_R^d \cong R$. Sei $w_0 \in D_R^d$ mit $D_R^d = Rw_0$ gewählt. Da $\mathfrak{C}(R/P) \cong R$ nach Bemerkung 2.5, gilt $\mathfrak{C}(R/P) = \lambda \cdot Rw_0$ mit einem $\lambda \in L$. Wir werden zeigen, daß λ eine Einheit in R ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß λ Einheit in $R_{\mathfrak{P}}$ ist für jedes Primideal $\mathfrak{P}$ der Höhe 1 von R. Da $\mathfrak{C}(R/P)$ nach 2.6 mit Lokalisation verträglich ist, hat man die Behauptung des Satzes nur für diskrete Bewertungsringe P und R zu beweisen. Wir setzen daher voraus, daß P und R diskrete Bewertungsringe sind.

a) Sei L/K separabel und $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ eine Basis von D^1 (mit $x_1, \ldots, x_d \in P$). $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$ ist dann auch eine Basis von Λ_L^1 und es gibt ein $\Delta \in L$ mit

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d = \Delta \cdot w_0.$$

Da $D_R^1/R \cdot D^1 = D_R^1/Rdx_1 + \ldots + Rdx_d = D_P(R)$ der universelle Differentialmodul von R über P ist, ist $\Delta \cdot R$ die 0-te Kählersche Differente von R über P, welche in unserer Situation mit der Dedekindschen Differente von R über P übereinstimmt ([1], Satz 2). Diese ist definiert als $\mathfrak{C}^0(R/P)^{-1}$, wobei $\mathfrak{C}^0(R/P)$ der klassische Dedekindsche Komplementärmodul ist. In unserer Situation ist $\mathfrak{C}^0(R/P)$ ein gebrochenes Hauptideal und somit $\mathfrak{C}^0(R/P) = \Delta^{-1}R$. Es folgt

$$\mathfrak{C}(R/P) = \mathfrak{C}^0(R/P) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d = R \cdot \Delta^{-1} \cdot \Delta \cdot w_0 = Rw_0.$$

b) Sei nun Char. $K =: p > 0$ und sei L/K inseparabel. Wir wählen eine Körperkette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_s = L,$$

wobei K_1/K_0 separabel und K_i/K_{i-1} für $i = 2, \ldots, s$ rein inseparabel vom Grad p ist. Dieser Kette entspricht eine Kette von diskreten Bewertungsringen

$$P = R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_s = R,$$

wobei R_i den Quotientenkörper K_i besitzt. Für $i = 2, \ldots, s$ ist dabei $R_i = R_{i-1}[y_i]$ mit einem $y_i \in R_i$, $y_i^p \in R_{i-1}$. Wir zeigen, daß auch $D_{R_i}^1$ ein freier R_i-Modul vom Rang d ist für $i = 1, \ldots, s$.

Sei $K' := K_{s-1}$, $R' := R_{s-1}$, $y := y_s$ und $\eta := y_s^p \in R'$. Ferner sei $D' := D_{R_{s-1}}$. Dann ist D_R^1 von der Form

$$D_R^1 \cong R \otimes_{R'} D'^1 \oplus RdY/R \cdot (1 \otimes d\eta).$$

Da D_R^1 ein freier R-Modul ist, ist $R \cdot (1 \otimes d\eta)$ ein direkter Summand von $R \otimes_{R'} D'^1$ und folglich $R'd\eta$ ein direkter Summand von D'^1. Wäre $d\eta$

ein Torsionselement von D'^1, dann wäre $\dim_{K'} D'^1_{K'} = d-1$. Da aber $D'_{K'} = A_{K'} = A_{K_{s-1}}$ ist und $\dim_K A^1 = d$, kann dies nicht sein.

Da $d\eta$ kein Torsionselement von D'^1 ist und $D'^1/R'd\eta$ frei vom Rang $d-1$ ist, muß D'^1 frei vom Rang d sein. Überdies sieht man, daß es eine Basis $\{d\eta, dx_2, \ldots, dx_d\}$ von D'^1 gibt, so daß $\{dy, dx_2, \ldots, dx_d\}$ Basis von D^1_R ist.

Durch Induktion folgt, daß auch $D^1_{R_i}$ frei vom Rang d ist für $i = 1, \ldots, s$. Auf Grund von a) und dem Schachtelungssatz 2.12 genügt es somit, die Behauptung im Fall zu beweisen, daß L über K rein inseparabel vom Grad p ist.

Dann gibt es ein $y \in R$ mit $y^p \in P$, $R = P[y]$. Ist $\eta := y^p$, so gibt es auch eine Basis $\{d\eta, dx_2, \ldots, dx_d\}$ von D^1, so daß $\{dy, dx_2, \ldots, dx_d\}$ Basis von D^1_R ist. Es ist $d\eta = 0$ in A^1_L. Satz 2.14 ist mit $Q = R$, $x_0 = y$, $x_1 = \eta$ und $\lambda_1 = 1$ anwendbar.

Es ergibt sich

$$\mathfrak{C}(R/P) = R \cdot dy \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_d = D^d_R, \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung: Ist unter den Voraussetzungen des Satzes D die universelle Differentialalgebra von P über einem Unterring $P_0 \subset P$, dann ist D_R die universelle Differentialalgebra von R über P_0. $\mathfrak{C}(R/P)$ hängt in diesem Fall nicht mehr von P, sondern nur noch von P_0 ab.

§ 3. Differentialformen auf algebraischen Varietäten

k sei ein beliebiger Körper, $(X, \mathfrak{O}_X)$ eine algebraische Varietät über k, die reduziert und irreduzibel ist. Ferner sei $\dim X =: d$. X besitzt eine offene Überdeckung durch endlich viele affine k-Varietäten $U = \operatorname{Spec}(C)$ mit nullteilerfreien affinen k-Algebren C der Krulldimension d. $L := k(X)$ sei der Körper der rationalen Funktionen auf X.

Wir wählen einen gemeinsamen „Differentialkonstantenkörper" im Sinne von [4], § 2 für die lokalen Ringe $\mathfrak{O}_x$ der Punkte $x \in X$. Einen solchen nennen wir auch Differentialkonstantenkörper von X. Ist Char. $k = 0$, so soll $k_0 = k$ sein, für Char. $k =: p > 0$ ist k_0 ein gewisser Zwischenkörper von k^p und k mit $[k : k_0] < \infty$. Ist k vollkommen, so ist $k_0 = k$, ist allgemeiner $[k : k^p] < \infty$, so kann man $k_0 = k^p$ wählen. Im allgemeinsten Fall scheint es keine Möglichkeit zu geben, einen Differentialkonstantenkörper k_0 kanonisch auszuzeichnen.

$D_{k_0}(\mathfrak{O}_x)$ sei die universelle Differentialalgebra von $\mathfrak{O}_x$ über k_0. Die Elemente vom Grad 1 bilden den universellen Differentialmodul $D^1_{k_0}(\mathfrak{O}_x)$ von $\mathfrak{O}_x$ über k_0. Genau dann ist $\mathfrak{O}_x$ ein regulärer lokaler Ring, wenn $D^1_{k_0}(\mathfrak{O}_x)$ ein freier $\mathfrak{O}_x$-Modul ist ([4], Satz 2). Dieser besitzt dann den Rang $\delta + d$, wenn $\delta := \dim_k D^1_{k_0}(k)$ ist. Speziell ist $\dim_L D^1_{k_0}(L) = \delta + d$. Sei

$d' := \delta + d$ und $D_{k_0}^{*}(X) := D_{k_0}^{d'}(L)$. Die Elemente $w \in D_{k_0}(X)$ heißen *rationale Differentialformen* (höchster Stufe) auf X über k_0.

Wir wählen jetzt für $x \in X$ eine offene affine Umgebung $U = \operatorname{Spec}(C)$ mit einer affinen k-Algebra C. $B \subset C$ sei eine Noethersche Normalisierung von C, d.h. eine Polynomalgebra $B = k[x_1, \ldots, x_d] \subset C$, so daß C als B-Modul endlich erzeugt ist. Es ist dann $\mathfrak{0}_x = C_{\mathfrak{P}}$ mit einem Primideal $\mathfrak{P}$ von C. Mit $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap B$ ist ferner $B_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring und eine noethersche Normalisierung von $\mathfrak{0}_x$ im Sinne von § 2, a). Der universelle Differentialmodul $D_{k_0}^1(B)$ ist ein freier B-Modul vom Rang d', dasselbe gilt natürlich analog für $B_{\mathfrak{p}}$. Mit $D := D_{k_0}(B_{\mathfrak{p}})$ sind daher die Voraussetzungen aus § 2, a) erfüllt und $\mathfrak{C}(\mathfrak{0}_x/B_{\mathfrak{p}}) \subset D_{k_0}(X)$ ist definiert. Wir werden zeigen, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{0}_x/B_{\mathfrak{p}})$ nur von x und k_0 abhängt:

Satz 3.1. Sind $U = \operatorname{Spec}(C)$, $U' = \operatorname{Spec}(C')$ zwei offene affine Umgebungen von x, sind $B \subset C$, $B' \subset C'$ noethersche Normalisierungen der affinen k-Algebren C und C' und ist $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}_x \cap B$, $\mathfrak{p}' := \mathfrak{m}_x \cap B'$, wobei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathfrak{0}_x$ ist, so gilt für die bzgl. der universellen Differentiation über k_0 gebildeten Komplementärmoduln

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{0}_x/B_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{0}_x/B_{\mathfrak{p}'}).$$

Beweis: Da der Komplementärmodul mit Lokalisation verträglich ist (2.6), dürfen wir annehmen, daß x ein maximaler Punkt von x ist, d.h. daß $\dim \mathfrak{0}_x = d$ ist. Dann sind $\mathfrak{M} := \mathfrak{m}_x \cap C$, $\mathfrak{M}' := \mathfrak{m}_x \cap C'$, $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_x \cap B$ und $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m}_x \cap B'$ maximale Ideale der jeweiligen affinen k-Algebren, deren Restklassenkörper endlich algebraisch über k sind.

Der Unabhängigkeitsbeweis wird durch Übergang zur Komplettierung geführt. Seien $R := \hat{\mathfrak{0}}_x$, $P_0 = \hat{B}_{\mathfrak{m}}$ und $P_0' := \hat{B}'_{\mathfrak{m}'}$ die Komplettierungen der zu betrachtenden lokalen Ringe. Bekanntlich ist R reduziert, äquidimensional und endlich erzeugt sowohl als P_0-Modul als auch als P_0'-Modul. P_0 und P_0' sind reguläre lokale Ringe. $\hat{K}$ sei der Quotientenkörper von P_0, $\hat{K}'$ der von P_0' und $\hat{L}$ sei der volle Quotientenring von R. $\hat{L}$ ist dann ebenfalls reduziert und eine endlichdimensionale Algebra über $\hat{K}$ wie auch über $\hat{K}'$.

Die universell endlichen Differentialmoduln $D_{k_0}^1(P_0)$, $D_{k_0}^1(P_0')$ und $D_{k_0}^1(R)$ über k_0 existieren. Die zugehörigen Derivationen sind die stetigen Fortsetzungen der universellen Derivationen von $B_{\mathfrak{m}}$, $B'_{\mathfrak{m}'}$ bzw. $\mathfrak{0}_x$ über k_0 und man hat die Formeln

$$D_{k_0}^1(P_0) = P_0 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} D_{k_0}^1(B_{\mathfrak{m}}), \quad D_{k_0}^1(P_0') = P_0' \otimes_{B'_{\mathfrak{m}'}} D_{k_0}^1(B'_{\mathfrak{m}'})$$

und

$$D_{k_0}^1(R) = R \otimes_{\mathfrak{0}_x} D_{k_0}^1(\mathfrak{0}_x).$$

Entsprechende Formeln gelten auch für die zugehörigen Differentialalgebren $D_{k_0}(P_0)$, $D_{k_0}(P_0')$ und $D_{k_0}(R)$. Wir setzen $\hat{D} := D_{k_0}(P)$,

$\hat{D}' := D_{k_0}(P')$ und bezeichnen die universelle $\hat{K}$-Ausdehnung bzw. $\hat{K}'$-Ausdehnung mit $\hat{A}$ bzw. $\hat{A}'$. Es ist dann $\hat{A}_{\hat{L}} = \hat{A}'_{\hat{L}}$, denn diese Algebra ist die universelle $\hat{L}$-Ausdehnung von $D_{k_0}(R)$.

Da die Voraussetzungen aus § 2, Abschnitt b) erfüllt sind, wird nach 2.8 durch den kanonischen Homomorphismus $\Psi : D_{k_0}(X) \to \hat{A}^{d'}_{\hat{L}}$ der Komplementärmodul $\mathfrak{C}(0_x/B_{\mathfrak{m}})$ in $\mathfrak{C}(R/P_0)$ abgebildet und ein Isomorphismus

$$R \otimes_{0_x} \mathfrak{C}(0_x/B_{\mathfrak{m}}) \to \mathfrak{C}(R/P_0)$$

induziert. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{C}(0_x/B'_{\mathfrak{m}'})$. Da R über 0_x treuflach ist, genügt es somit zu zeigen, daß $\mathfrak{C}(R/P_0) = \mathfrak{C}(R/P'_0)$ ist.

Sei $t_1, \ldots, t_d$ ein reguläres Parametersystem von P_0 und $P := k[\![t_1, \ldots, t_d]\!]$ die von $\{t_1, \ldots, t_d\}$ analytisch erzeugte k-Unteralgebra von P_0. P_0 ist als P-Modul endlich erzeugt, da der Restklassenkörper von P_0 endlich über k ist. Ferner ist $D^1_{k_0}(P_0)$ die universelle P_0-Ausdehnung des universell endlichen Differentialmoduls $D^1_{k_0}(P)$. Somit ist auch $\mathfrak{C}(R/P)$ definiert. Nach 2.15 gilt $\mathfrak{C}(P_0/P) = D^{d'}_{k_0}(P_0)$ und nach 2.12 ist daher

$$\mathfrak{C}(R/P) = \{w \in \hat{A}^{d'}_{\hat{L}} \mid \sigma^{\hat{A}}_{\hat{L}/\hat{R}}(Rw) \subset \mathfrak{C}(P_0/P)\} = \mathfrak{C}(R/P_0).$$

Entsprechend ist $\mathfrak{C}(R/P'_0) = \mathfrak{C}(R/P')$, wenn $P' := k[\![t'_1, \ldots, t'_d]\!]$ ist mit einem regulären Parametersystem $\{t'_1, \ldots, t'_d\}$ von P'_0. Es genügt daher, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.2. R sei eine reduzierte komplette noethersche lokale k-Algebra, die äquidimensional von Dimension d ist und deren Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ endlich über k ist. L sei der volle Quotientenring von R, $k_0 \subset k$ ein Unterkörper mit $[k : k_0] < \infty$, für den $D^1_{k_0}(L)$ ein freier L-Modul vom Rang $\delta + d$ ist, wobei $\delta = \dim_k D^1_{k_0}(k)$ und $D^1_{k_0}(L)$ die universelle L-Ausdehnung des universell endlichen Differentialmoduls $D^1_{k_0}(R)$ ist. $\{t_1, \ldots, t_d\}$ und $\{t'_1, \ldots, t'_d\}$ seien zwei Parametersysteme von R und $P := k[\![t_1, \ldots, t_d]\!]$, $P' := k[\![t'_1, \ldots, t'_d]\!]$ die von diesen über k analytisch erzeugten Unteralgebren von R. Dann gilt für die bzgl. der universell endlichen Derivation über k_0 gebildeten Komplementärmoduln:

$$\mathfrak{C}(R/P) = \mathfrak{C}(R/P').$$

Der Beweis beruht auf einem Austauschlemma für Parametersysteme:

Lemma 3.3. Sei R wie in Satz 3.2 gegeben und $\{t_1, \ldots, t_d\}$ ein Parametersystem von R. Ferner sei ein injektiver lokaler k-Homomorphismus $P' \to R$ gegeben, wobei P' eine komplette noethersche lokale k-Algebra mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{n}'$ ist und $\dim R/\mathfrak{n}'R = 0$. Dann gibt es ein Element $z_1 \in \mathfrak{n}'$, so daß gilt:

a) $\{z_1, t_2, \ldots, t_d\}$ ist Parametersystem von R.

b) Ist K der Quotientenkörper von $k[\![t_1, \ldots, t_d]\!]$, so ist $K[z_1]$ eine separable K-Algebra.

Beweis: Sei $\dot{R} := R/(t_2, \ldots, t_d)$ und sei $\dot{P}'$ das Bild von P' in $\dot{R}$. Da $\dim \dot{R} = 1$ ist und $\dot{R}$ endlicher $\dot{P}'$-Modul, ist auch $\dim \dot{P}' = 1$. $\dot{\mathfrak{n}}'$ sei das maximale Ideal von $\dot{P}'$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ seien die minimalen Primideale von $\dot{R}$. Es ist $\dot{\mathfrak{n}}' \not\subset \bigcup_{j=1}^{t} \mathfrak{p}_j$, denn andernfalls wäre $\dot{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{p}_j$ für geeignetes j ([2], Chap. II, § 1, Prop. 1) und somit $\dim \dot{R}/\dot{\mathfrak{n}}' \dot{R} = 1$, entgegen der Voraussetzung, daß $\dim R/\mathfrak{n}' R = 0$.

Wir können daher ein Element $\dot{z}_1 \in \dot{\mathfrak{n}}'$ wählen, welches nicht in $\bigcup_{j=1}^{t} \mathfrak{p}_j$ enthalten ist. Ist $z_1' \in \mathfrak{n}'$ ein Repräsentant für $\dot{z}_1$, dann ist $\{z_1'^{\varrho}, t_2, \ldots, t_d\}$ ein Parametersystem von R für alle $\varrho \geq 1$. Falls Char. $k =: p > 0$ ist, so wird für genügend großes e die Algebra $K[z_1'^{p^e}]$ separabel über K Für $z_1 := z_1'^{p^e}$ sind dann die Forderungen a) und b) des Lemmas erfüllt.

Beweis von Satz 3.2. Wir wählen im maximalen Ideal $\mathfrak{n}'$ von P' ein z_1, das den Bedingungen a) und b) des Austauschlemmas genügt, und setzen $R_1 := P[z_1]$. Ferner sei $P_1 := k[\![z_1, t_2, \ldots, t_d]\!]$. Es ist dann R_1 über P und über P_1 als Modul endlich erzeugt. Ferner ist R_1 von der Form

$$R_1 = k[\![Z_1, t_1, \ldots, t_d]\!]/(F),$$

wobei F ein Polynom in Z_1 mit Koeffizienten aus $P = k[\![t_1, \ldots, t_d]\!]$ und höchstem Koeffizienten 1 ist Da z_1 über dem Quotientenkörper K von P separabel ist, ist $\dfrac{\partial F}{\partial z_1}$ Einheit im vollen Quotientenring L_1 von R_1.

Da R_1 auch über P_1 endlich ist, wird das Ideal (F) auch erzeugt von einer Potenzreihe G, die in t_1 ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1 ist. Es ist $G = E \cdot F$ mit einer Einheit $E \in k[\![Z_1, t_1, \ldots, t_d]\!]$ und $\dfrac{\partial G}{\partial z_1} = E(z_1, t_1, \ldots, t_d) \cdot \dfrac{\partial F}{\partial z_1}$, also auch $\dfrac{\partial G}{\partial z_1}$ eine Einheit in L_1. Nach 2.14 ergibt sich jetzt für die bzgl. der universell endlichen Derivation über k_0 gebildeten Komplementärmoduln

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(R_1/P) &= \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^{-1} R_1 \cdot dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_\delta \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial z_1}\right)^{-1} R_1 \cdot dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_d \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_\delta = \mathfrak{C}(R_1/P_1),\end{aligned}$$

wenn $\{dx_1, \ldots, dx_\delta\}$ eine k-Basis von $D^1_{k_0}(k)$ ist. Aus 2.12 folgt $\mathfrak{C}(R/P) = \mathfrak{C}(R/P_1)$.

Wir haben jetzt in dem Parametersystem $\{t_1, \ldots, t_d\}$ ein Element durch eines aus dem maximalen Ideal $\mathfrak{n}'$ von P' ersetzt. Durch Wiederholung des Verfahrens können wir ein Parametersystem $\{z_1, \ldots, z_d\}$ von

R mit $z_1, \ldots, z_d \in \mathfrak{n}'$ konstruieren, so daß $\mathfrak{C}(R/P) = \mathfrak{C}(R/P_d)$ ist mit $P_d := k[\![z_1, \ldots, z_d]\!]$. Da $P_d \subset P'$, ergibt sich nach 2.15 schließlich $\mathfrak{C}(R/P_d) = \mathfrak{C}(R/P')$, q.e.d.

Wir bezeichnen den dem Punkt $x \in X$ nach Satz 3.1 in invarianter Weise zugeordneten 0_x-Modul $\mathfrak{C}(0_x/B_\mathfrak{p}) \subset D_{k_0}(X)$ mit $\Omega_x^{(k_0)}$.

Definition 3.4. Eine rationale Differentialform $w \in D_{k_0}(X)$ heißt *regulär* (oder holomorph) an der Stelle x, wenn $w \in \Omega_x^{(k_0)}$.

Sei $U = \operatorname{Spec}(C)$ eine offene affine Teilmenge von X und $B \subset C$ eine Noethersche Normalisierung, K sei der Quotientenkörper von B und $A := D_{k_0}(K)$. Wir setzen

$$\mathfrak{C}(C/B) := \{w \in D_{k_0}(X) \mid \sigma_{L/K}^{A}(Cw) \subset D_{k_0}^{d'}(B)\}.$$

Dies ist ein endlich erzeugter C-Modul.

Für alle $x \in U$ ist

$$\mathfrak{C}(0_x/B_\mathfrak{p}) = 0_x \cdot \mathfrak{C}(C/B),$$

wenn $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}_x \cap B$ ist. Es ist daher klar, daß die $\Omega_x^{(k_0)}$ eine kohärente 0_X-Modulgarbe auf X definieren, die wir mit $\Omega_X^{(k_0)}$ bezeichnen und die *Garbe der regulären Differentialformen* höchster Stufe von X über k_0 nennen.

Satz 3.5. Ist X eine projektive Varietät, dann ist $\Omega_X^{(k_0)}$ isomorph zur kanonischen Garbe $\mathfrak{K}_X$ von X.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß k unendlich viele Elemente enthält. Den allgemeinen Fall führt man hierauf zurück, indem man zu k eine Unbestimmte t adjungiert und zu $X \otimes_k k(t)$ übergeht.

Wenn k unendlich viele Elemente besitzt, so existiert ein endlicher surjektiver k-Morphismus $\pi: X \to Y$, wobei $Y \cong \mathbb{P}_k^d$ ist, also eine projektive Noethersche Normalisierung. Man führt jetzt den Beweis wie in [6], 2.2 mit Hilfe des obigen Satzes 2.2 zu Ende.

Es sollen nun noch einige Anwendungen der Schachtelungsformel 2.12 gegeben werden. Wir betrachten einen endlichen surjektiven k-Morphismus $\varphi: X \to X'$, wobei $(X, 0_X)$ und $(X', 0_{X'})$ zwei irreduzible, reduzierte algebraische k-Varietäten sind. $L := k(X)$ und $L' := k(X')$ seien die Körper der rationalen Funktionen über k, $L' \subset L$, und k_0 sei ein gemeinsamer Differentialkonstantenkörper für X und X'. Es ist dann die Spur $\sigma_{L/L'}: D_{k_0}(X) \to D_{k_0}(X')$ definiert. Andererseits hat man eine kanonische Abbildung $c: D_{k_0}(X') \to D_{k_0}(X)$. $\Omega_X^{(k_0)}$ und $\Omega_{X'}^{(k_0)}$ seien die Garben der regulären Differentialformen auf X bzw. X'.

Ist $x \in X$, $x' := \varphi(x)$ und $\varphi^{-1}(x') = \{x_1, \ldots, x_s\}$, so setzen wir noch

$$\overline{0_{x'}} = \bigcap_{i=1}^{s} 0_{x_i}.$$

Satz 3.6. a) $w \in D_{k_0}(X)$ ist genau dann regulär in x, wenn es eine Einheit $\varepsilon \in \mathfrak{0}_x$ gibt, so daß εw regulär in $x_1, \ldots, x_s$ ist.

b) Genau dann ist w regulär in $x_1, \ldots, x_s$, wenn $\sigma_{L/L'}(fw)$ regulär in x' ist für alle $f \in \overline{\mathfrak{0}_{x'}}$.

Beweis: Es gibt affine k-Algebren $C' \subset L'$ und $C \subset L$ mit $C' \subset C$, wobei C endlich erzeugter C'-Modul ist, so daß gilt: $\mathfrak{0}_{x'} = C'_{\mathfrak{p}'}$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}'$ von C', $\mathfrak{0}_{x_i} = C_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von C, $\mathfrak{p}_i \cap C = \mathfrak{p}'$. Ferner ist $\overline{\mathfrak{0}_{x'}} = C_{\mathfrak{p}'}$, der Quotientenring von C nach der Nennermenge $C' \backslash \mathfrak{p}'$.

Sei $B \subset C'$ eine noethersche Normalisierung, $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}' \cap A$. $w \in D_{k_0}(X)$ ist genau dann regulär in x, wenn $w \in \mathfrak{0}_x \cdot \mathfrak{C}(C/B)$, d.h. wenn es eine Einheit $\varepsilon \in \mathfrak{0}_x$ gibt, so daß $\varepsilon w \in \mathfrak{C}(C/B)$. Dann ist aber εw regulär in $x_1, \ldots, x_s$.

$w \in D_{k_0}(X)$ ist genau dann regulär in $x_1, \ldots, x_s$, wenn $w \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{0}_{x_i} \cdot \mathfrak{C}(C/B)$.
Dieser Modul stimmt überein mit $\overline{\mathfrak{0}_{x'}}\mathfrak{C}(C/B) = C_{\mathfrak{p}'}\mathfrak{C}(C/B) = C_{\mathfrak{p}'}\mathfrak{C}(C_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{q}})$, wobei $C_{\mathfrak{q}}$ der Quotientenring von C nach der Nennermenge $B \backslash \mathfrak{q}$ ist.

$C'_{\mathfrak{q}}$ sei entsprechend definiert. 2.12 besagt, daß

$$\mathfrak{C}(C_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{q}}) = \{w \in D_{k_0}(X) \mid \sigma_{L/L'}(C_{\mathfrak{q}}w) \subset \mathfrak{C}(C'_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{q}})\}$$

ist. Daher ist $C_{\mathfrak{p}'}\ \mathfrak{C}(C_{\mathfrak{q}}\ /B_{\mathfrak{q}}) =$

$$\{w \in D_{k_0}(X) \mid \sigma_{L/L'}(C_{\mathfrak{q}}w) \subset \mathfrak{C}(C'_{\mathfrak{q}}/B_{\mathfrak{q}})\} = \{w \in D_{k_0}(X) \mid \sigma_{L/L'}(\overline{\mathfrak{0}_{x'}}w) \in \Omega_{x'}^{(k_0)}\}.$$

Es folgt hieraus die Behauptung b).

Korollar 3.7. Ist $w \in D_{k_0}(X)$ regulär auf ganz X, dann ist $\sigma_{L/L'}(w)$ regulär auf ganz X'.

Korollar 3.8. X' sei normal und L/L' separabel. Dann ist $c: D_{k_0}(X') \to D_{k_0}(X)$ injektiv. Wenn $w' \in D_{k_0}(X')$ regulär auf X' ist, dann ist $c(w')$ regulär auf X.

Beweis: $\sigma^0_{L/L'}: L \to L'$ sei die übliche Spur. Es ist $\sigma_{L/L'}(fw') = \sigma^0_{L/L'}(f)w'$ für alle $f \in \overline{\mathfrak{0}_{x'}}$. Da $\mathfrak{0}_{x'}$ ganzabgeschlossen in L' ist und $\overline{\mathfrak{0}_{x'}}$ ganz über $\mathfrak{0}_{x'}$, ist $\sigma^0_{L/L'}(f) \in \mathfrak{0}_{x'}$. Es folgt, daß w' in allen über $x' \in X'$ liegenden Punkten regulär ist, also auf ganz X, da x' beliebig gewählt war.

Satz 3.9. Sei L/L' separabel und x' ein normaler Gorensteinpunkt auf X' (d.h. $\mathfrak{0}_{x'}$ ist ein in L' ganzabgeschlossener Gorensteinring). Dann gilt

$$\Omega_x^{(k_0)} = \mathfrak{C}^0(\mathfrak{0}_x/\mathfrak{0}_{x'}) \cdot \Omega_{x'}^{(k_0)}.$$

Ist auch x Gorensteinpunkt auf X, dann ist

$$\mathfrak{0}_x \cdot \Omega_{x'}^{(k_0)} = \mathfrak{d}(\mathfrak{0}_x/\mathfrak{0}_{x'}) \cdot \Omega_x^{(k_0)},$$

wobei $\mathfrak{d}(\mathfrak{0}_x/\mathfrak{0}_{x'})$ die Dedekindsche Differente von $\mathfrak{0}_x$ über $\mathfrak{0}_{x'}$ ist.

Beweis: Wenn x' Gorensteinpunkt auf X' ist, dann ist $\Omega_{x'}^{(k_0)} = 0_{x'}w_0$ mit einem $w_0 \in D_{k_0}(X')$, $w_0 \neq 0$ (vgl. Bemerkung 2.5). Es folgt

$$(*) \qquad \Omega_x^{(k_0)} = 0_x \cdot \{\lambda w_0 \mid \lambda \in L,\ \sigma^0_{L/L'}(\lambda \overline{0_{x'}}) \cdot w_0 \in 0_{x'} w_0\} =$$

$$= 0_x \cdot \mathfrak{C}^0 (\overline{0_{x'}}/0_{x'})\, w_0 = \mathfrak{C}^0 (0_x/0_{x'})\, \Omega_{x'}^{(k_0)}.$$

Ist auch x Gorensteinpunkt, dann ist $\mathfrak{C}^0(0_x/0_{x'})$ ein gebrochenes 0_x-Hauptideal und $\mathfrak{C}^0(0_x/0_{x'}) \cdot \mathfrak{d}(0_x/0_{x'}) = 0_x$. Die zweite Formel in 3.9 ergibt sich daher aus der ersten.

Korollar 3.10. Ist φ birational (d.h. $L = L'$) und ist x' ein beliebiger Gorensteinpunkt, so ist

$$\Omega_x^{(k_0)} = \mathfrak{f}_{0_x/0_{x'}} \cdot \Omega_{x'}^{(k_0)},$$

wobei $\mathfrak{f}_{0_x/0_{x'}} := 0_x \cdot \mathfrak{f}_{\overline{0_{x'}}/0_{x'}}$ ist mit dem Führer $\mathfrak{f}_{\overline{0_{x'}}/0_{x'}}$ von $\overline{0_{x'}}$ nach $0_{x'}$.

Beweis: (*) besagt hier, daß $\Omega_x^{(k_0)} = 0_x \cdot \{\lambda w_0 \mid \lambda \in L,\ \lambda \overline{0_{x'}} \subset 0_{x'}\}$ ist, also $\Omega_x^{(k_0)} = 0_x \mathfrak{f}_{\overline{0'_x}/0_{x'}} w_0 = \mathfrak{f}_{0_x/0_{x'}} \cdot \Omega_{x'}^{(k_0)}$.

Literatur

[1] R. Berger, Differenten regulärer Ringe. Jour. reine ang. Math. **214/215** (1964), 441—442.

[2] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chap. 1—2. Paris 1961, Hermann.

[3] J. Herzog und E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings. Lecture Notes in Mathematics **238** (1971), Springer-Verlag.

[4] E. Kunz, Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. **76** (1961), 56—74.

[5] E. Kunz, Arithmetische Anwendungen der Differentialalgebren. Jour. reine ang. Math. **214/215** (1964), 276—320.

[6] E. Kunz, Holomorphe Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten I. Manuscripta math. **15** (1975), 91—108.

Eingegangen am 16. 7. 1975

Anschrift des Autors: E. Kunz, Fachbereich Mathematik Univ. Regensburg, Universitätsstr. 31, D-8400 Regensburg