Über die Verallgemeinerungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

Von CLAUS MÜLLER und PETER HERMANN

Nachdem der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sehr lange in unveränderter Form und in fast kanonischer Beweisanordnung in der Lehrbuch-Literatur zu finden war, sind in den letzten Jahrzehnten durch eine andere Beweismethode interessante Erweiterungen, und zwar in Form einer Ungleichung, bekanntgeworden. Beispielsweise gilt für eine in $[a, b]$ stetige und in (a, b) differenzierbare Funktion f mit Werten in einem normierten linearen Raum endlicher oder unendlicher Dimension

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b - a)\|f'(x_0)\| \tag{1}$$

für (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ ([2], Theorem 5.20), wobei der übliche Mittelwertsatz, der ja bekanntlich für vektorwertige Funktionen nicht gilt, hierin enthalten ist, wenn man noch hinzufügt, daß im Fall reellwertiger Funktionen hier sogar das Gleichheitszeichen unter Fortlassen der Normstriche steht.

In der vorliegenden Note möchten wir den klassischen Mittelwertsatz sowie seine obige Verallgemeinerung zu einer Aussage über Differentialformen erweitern. Dazu betrachten wir $(n-1)$-Differentialformen im $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$

$$\omega := \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} v_l \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{l-1} \wedge dx_{l+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

mit Koeffizientenfunktionen v_l, die Werte in einem normierten linearen Raum endlicher oder unendlicher Dimension besitzen. Die Cartansche Ableitung $d\omega$ von ω ist dann

$$d\omega = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

wobei wir

$$\omega' := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{2}$$

setzen. Weiter bezeichnen wir mit W offene, n-dimensionale achsenparallele Würfel des $\mathbb{R}^n$, für deren Inhalt wir $|W|$ schreiben. Unser Resultat lautet dann

Satz. *Es sei ω eine im Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare und in $\bar{W}$ stetige $(n-1)$-Differentialform. Dann gibt es ein solches $x_0 \in W$, daß*

$$\left\| \int_{\partial W} \omega \right\| \leqslant \|\omega'(x_0)\| \, |W|$$

gilt. Ist ω reellwertig, so steht hier sogar das Gleichheitszeichen unter Fortlassen der Norm.

Es ist unmittelbar zu sehen, daß die eindimensionalen Fassungen (1) des Mittelwertsatzes hier als Aussagen über 0-Differentialformen erscheinen. Für reellwertige Differentialformen stellt unser Satz eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Version des klassischen Mittelwertsatzes dar, aus ihm lassen sich—wie im Eindimensionalen—der Rolleschen und der Cauchyschen Version entsprechende Aussagen leicht herleiten.

Beweis. Wir werden zunächst zeigen, daß es einen Würfel $W_1 \subset W$ gibt, dessen Kantenlänge $\frac{1}{3}$ der Kantenlänge von W beträgt und für den

$$\left\| \int_{\partial W_1} \omega \right\| \geqslant \frac{1}{3^n} \left\| \int_{\partial W} \omega \right\| \tag{3}$$

gilt, wobei im Fall reellwertiger Koeffizientenfunktionen von ω das Gleichheitszeichen unter Fortlassen der Norm steht.

Zum Nachweis dieser Behauptung zerlegen wir W, dessen Kantenlänge mit c bezeichnet sein möge, in seine 3^n Teilwürfel W^i $(i = 1, \ldots, 3^n)$ der Kantenlänge $\frac{1}{3}c$, wobei der Teilwürfel im Zentrum von W etwa W^1 sei $(\bar{W}^1 \subset W)$. Entsprechend der geometrischen Vorstellung, daß wir jeden Teilwürfel W^i innerhalb W nach W^1 verschieben können, existiert eine stetige Schar von Translationen $T_i(t)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, mit den Eigenschaften

$$T_i(0)\, W^i = W^i, \qquad T_i(1)\, W^i = W^1 \quad \text{und} \quad T_i(t)\, \bar{W}^i \subset \bar{W} \quad \text{für alle } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

wobei sich überdies

$$T_i(t)\, \bar{W}^i \subset W \quad \text{für alle } 0 < t \leqslant 1$$

erreichen läßt. Mit einer solchen Schar von Translationen bilden wir die stetigen Funktionen

$$g_i(t) := \int_{\partial(T_i(t)\, W^i)} \omega, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Dann gilt, wenn wir noch

$$M := \int_{\partial W} \omega \quad \text{und} \quad M_i := \int_{\partial W^i} \omega$$

setzen,

$$g_i(0) = M_i \quad \text{und} \quad g_i(1) = M_1;$$

weiter ist

$$M = \sum_{i=1}^{3^n} M_i, \tag{4}$$

woraus sich

$$(5) \qquad \|M\| \leqslant \sum_{l=1}^{3^n} \|M_l\|$$

ergibt. Wäre nun

$$\|g_i(t)\| < \frac{\|M\|}{3^n} \quad \text{für alle } 0 < t \leqslant 1 \text{ und alle } i,$$

dann hätten wir

$$\|M_i\| = \|g_i(0)\| \leqslant \frac{\|M\|}{3^n} \quad \text{aber} \quad \|M_1\| = \|g_i(1)\| < \frac{\|M\|}{3^n}.$$

Damit ergäbe sich aus (5) der Widerspruch $\|M\| < \|M\|$. Also muß

$$(6) \qquad \|g_{i_1}(t_1)\| \geqslant \frac{\|M\|}{3^n}$$

für mindestens ein $0 < t_1 \leqslant 1$ und mindestens ein $i_1 \in \{1, \dots, 3^n\}$ sein. Für den Würfel $W_1 := T_{i_1}(t_1)\, W^{i_1}$ gilt nun $W_1 \subset W$, seine Kantenlänge beträgt ein Drittel der Kantenlänge von W, und wegen (6) ist auch die Ungleichung (3) erfüllt, so daß das zunächst gesteckte Beweisziel, jedenfalls im Fall vektorwertiger Differentialformen, erreicht ist.

Sei nun ω reellwertig. Um den Zusatz, daß dann in (3) sogar das Gleichheitszeichen unter Fortlassen der Norm steht, zu beweisen, unterscheiden wir jetzt, ob $M_1 = M/3^n$ oder $M_1 \neq M/3^n$ gilt. Im ersten Fall ist mit $W_1 := W^1$ der behauptete Zusatz bewiesen. Im zweiten Fall gehen wir etwa von $M_1 < M/3^n$ aus, wegen (4) muß es dann mindestens einen Index $i_1 \neq 1$ mit $M_{i_1} > M/3^n$ geben. Daher ist

$$\left(g_{i_1}(0) - \frac{M}{3^n}\right)\left(g_{i_1}(1) - \frac{M}{3^n}\right) = \left(M_{i_1} - \frac{M}{3^n}\right)\left(M_1 - \frac{M}{3^n}\right) < 0,$$

so daß nach dem Zwischenwertsatz mindestens ein $0 < t_1 < 1$ mit

$$g_{i_1}(t_1) - \frac{M}{3^n} = 0$$

existiert. Also ist auch im zweiten Fall mit $W_1 := T_{i_1}(t_1)\, W^{i_1}$ der behauptete Zusatz bewiesen.

Wenden wir nun das bisher auf W mit dem Ergebnis (3) angewandte Verfahren auf W_1 an und fahren wir so sukzessive fort, dann ergibt sich eine Folge von echt ineinandergeschachtelten Würfeln W_k mit gegen Null konvergierender Kantenlänge, die also gegen einen Punkt $x_0 \in W_k \subset W$ konvergiert, mit

$$\left\|\int_{\partial W} \omega\right\| \leqslant 3^n \left\|\int_{\partial W_1} \omega\right\| \leqslant \cdots \leqslant 3^{kn} \left\|\int_{\partial W_k} \omega\right\| \leqslant \cdots.$$

Demnach gilt, nach Beachtung von $|W| = 3^{kn}|W_k|$,

$$\left\| \int_{\partial W} \omega \right\| \leqslant \frac{\left\| \int_{\partial W_k} \omega \right\|}{|W_k|} |W|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, für reellwertiges ω steht hier wieder das Gleichheitszeichen unter Fortlassen der Norm. Daher ist unser Satz bewiesen, wenn wir zeigen können, daß die Folge der Quotienten rechts unter der Norm gegen $\omega'(x_0)$ konvergiert. Diese letzte Aussage, die übrigens eine Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft differenzierbarer Funktionen (man vgl. z.B. [2], Theorem 5.19) auf $(n-1)$-Differentialformen darstellt, formulieren wir als

Lemma. *Die $(n-1)$-Differentialform ω sei in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig und in x_0 differenzierbar. Dann gilt*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\int_{\partial W_k} \omega}{|W_k|} = \omega'(x_0)$$

für jede Folge (W_k) von Würfeln mit $x_0 \in \bar{W}_k \subset U(x_0)$ und $\lim_{k \to \infty} |W_k| = 0$.

Beweis. Wir betrachten etwa das erste Monom von ω. Nach den Voraussetzungen ist der Koeffizient v_1 in x_0 differenzierbar, und dies bedeutet, daß für alle $x \in U(x_0)$

$$v_1(x) = v_1(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1}{\partial x_i}(x_0)(x - x_0)_i + |x - x_0| \, r(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0 \tag{7}$$

gilt; weil überdies v_1 in $U(x_0)$ stetig ist, bildet hier das Restglied $r(x)$ eine in ganz $U(x_0)$ stetige Funktion. Daher gilt für eine Folge (W_k) mit den in unserem Lemma genannten Eigenschaften

$$\begin{aligned} \int_{\partial W_k} v_1 \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = v_1(x_0) \int_{\partial W_k} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_1}{\partial x_i}(x_0) \int_{\partial W_k} (x - x_0)_i \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ + \int_{\partial W_k} |x - x_0| \, r(x) \, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

wobei nach Auswertung der ersten beiden Integrale auf der rechten Seite

$$\int_{\partial W_k} v_1\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_0)\, |W_k| + \int_{\partial W_k} |x - x_0|\, r(x)\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

verbleibt. Nun folgt mit der Kantenlänge l_k von W_k aus $x_0 \in \bar{W}_k$ die Abschätzung $|x - x_0| \leqslant \sqrt{n}\, l_k$ für alle $x \in \bar{W}_k$, so daß wir für das letzte Integral I_k

$$\|I_k\| \leqslant 2\sqrt{n}\, l_k \sup_{x \in \bar{W}_k} \|r(x)\|\, l_k^{n-1} = 2\sqrt{n}\, |W_k| \sup_{x \in \bar{W}_k} \|r(x)\|$$

erhalten. Hierbei ist auf Grund von (7)

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in \bar{W}_k} \|r(x)\| = 0,$$

denn (W_k) konvergiert ja gegen x_0. Die Berechnung der Randintegrale über die restlichen Monome von ω verläuft entsprechend, und es ergibt sich schließlich

$$\int_{\partial W_k} \omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x_0) \right) |W_k| + |W_k|\, a_k$$

mit einer Nullfolge (a_k). Damit ist das Lemma bewiesen (man vgl. (2)).

Wir haben unser Resultat, die Übertragung des Mittelwertsatzes (1) auf Differentialformen, der Einfachheit halber zwar nur für Würfel formuliert, möchten jedoch bemerken, daß unser Satz auch für allgemeinere Punktmengen gültig bleibt. Aber schon aus dieser einfacheren Version für Würfel lassen sich eine Reihe wichtiger Sätze der mehrdimensionalen Analysis unter abgeschwächten Voraussetzungen herleiten. Beispielsweise folgt der für stetig differenzierbare 1-Differentialformen wohlbekannte Satz über die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg aus unserem Mittelwertsatz schon für nur differenzierbare 1-Differentialformen. Ist nämlich ω eine in einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbare 1-Differentialform mit $d\omega = 0$ und sind C_1, C_2 zwei Kurven aus G mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt, die mit der Homotopie $\Phi\colon \bar{W} \to G$, $\bar{W} := [0, 1] \times [0, 1]$ homotop sind, dann wird

$$\int_{C_1} \omega - \int_{C_2} \omega = \int_{\partial W} \Phi^* \omega, \tag{8}$$

wobei $\Phi^* \omega$ in $\bar{W}$ differenzierbar[1]) ist und $d(\Phi^* \omega) = \Phi^* d\omega = 0$ gilt. Daher ergibt sich die Behauptung, das Verschwinden von Gleichung (8), unmittelbar durch Anwendung unseres Mittelwertsatzes (Satz) auf die 1-Differentialform $\Phi^* \omega$.

Auf weitere Möglichkeiten zur Abschwächung der Voraussetzungen dieses Satzes über die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg wollen wir hier nicht eingehen.

---

[1]) Wir haben hier stillschweigend vorausgesetzt, daß Φ zweimal differenzierbar ist. Diese Einschränkung kann jedoch mit einer weiter ausholenden Beweismethode umgangen werden; unter Zuhilfenahme von [1], 3.7.1 läßt sich die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals sogar für (C^0-)homotope C^0-Kurven zeigen.

Literatur

[1] H. CARTAN, Formes différentielles. Cours de mathématiques II, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1967.

[2] W. RUDIN, Principles of Mathematical Analysis. Second edition, McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1964.

Eingegangen am 31.8.77—in veränderter Fassung am 21.5.79

Anschrift der Autoren: P. Hermann u. C. Müller, Inst. f. Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen, Templergraben 55, D-5100 Aachen.