Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen.

Von WERNER BURAU in Hamburg.

Bekanntlich läßt sich jede Verkettung auf Zopfgestalt bringen[1]). Eine ausgezeichnete Klasse von Verkettungen bilden nun offenbar diejenigen, die sich als sog. gleichsinnig verdrillte Zöpfe legen lassen, d. h. denen man ein Artinsches Zopfwort mit lauter positiven (bzw. negativen) Exponenten zuordnen kann. Wir nennen außerdem eine Verkettung irreduzibel, wenn sie nicht zerfällt, d. h. wenn sich ihr kein Zopfwort $\prod \sigma_{\beta_i}^{n_i} \prod \sigma_{\alpha_i}^{m_i}$ zuordnen läßt, wobei alle Differenzen $\beta - \alpha \geqq 2$ sind. Dann beweisen wir folgenden zuerst von Herrn BANKWITZ vermuteten Satz:

Läßt sich eine Verkettung als gleichsinnig verdrillter irreduzibler Zopf von n Fäden mit m Überkreuzungen legen, so ist sie irreduzibel, und die Zahl $m - n + 1$ erweist sich als Verkettungsinvariante.

Wir geben im § 1 zunächst eine Darstellung der Zopfgruppe $\mathfrak{Z}_n$ durch n-reihige Matrizen, deren Elemente Polynome in einer Variablen sind. Im § 2 werde dann hieraus eine Verkettungsinvariante $\mathfrak{P}(x)$ gebildet, die im Knotenfalle mit dem L-Polynom übereinstimmt und auch sonst eng damit zusammenhängt. § 3 enthält dann den Nachweis dafür, daß bei irreduziblen gleichsinnig verdrillten Verkettungen $\mathfrak{P}(x)$ den Grad $m - n + 1$ hat, womit der Satz bewiesen ist. $\mathfrak{P}(x)$ hat dabei ein absolutes Glied ± 1, ist also in den Koeffizienten spezialisiert; nach dem Ergebnis von Herrn SEIFERT[2]) bilden die gleichsinnig verdrillten Knoten daher nur eine recht spezielle Klasse.

§ 1. Eine Darstellung der Zopfgruppen.

Nach ARTIN läßt sich die Zopfgruppe $\mathfrak{Z}_n$ durch Elemente $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ erzeugen, zwischen denen die Relationen

$$(1) \qquad \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} = 1 \qquad (|k - i| \geqq 2);$$

$$(2) \qquad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad (i = 1, \cdots, n-2)$$

bestehen. Dann behaupten wir:

[1]) Vgl. ARTIN, Zur Theorie der Zöpfe, Hbg. Abh. **4**, S. 47.

[2]) Vgl. SEIFERT, Hbg. Abh. **11**, S. 84.

Satz 1. *Ordnet man σ_i die n-reihige Matrix*

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1-x, & x & & & \\ & & 1 & ,0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

und M_i^{-1} entsprechend σ_i^{-1} zu, so definiert das eine Darstellung von $\mathfrak{Z}_n$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß die M_i auch die Relationen (1), (2) befriedigen. (1) folgt unmittelbar aus

$$M_i M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1-x & x & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1-x & x & & \\ & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = M_k M_i;$$

für (2) genügt es, $n = 3$ anzunehmen, da stets nur eine 3-reihige Diagonalmatrix bei der Produktbildung verändert wird:

$$M_1 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1-x, & x, & 0 \\ 1 \;, & 0, & 0 \\ 0 \;, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x, & x-x^2, & x^2 \\ 1-x, & x \;, & 0 \\ 1 \;, & 0 \;, & 0 \end{pmatrix} = M_2 M_1 M_2 .$$

Die durch Produktbildung aus den M_i, M_i^{-1} erzeugten Matrizen haben nun folgende speziellen Eigenschaften:

Satz 2. *Sei $M = ((m_{ik}))$ eine von den M_i, M_i^{-1} erzeugte Matrix; so gilt:*

$$m_{i1} + \cdots + m_{in} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

und

$$m_{1i} + x m_{2i} + \cdots + x^{n-1} m_{ni} = x^{i-1} \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Beweis. Die Behauptung ist für die M_i selbst klar; angenommen, sie wäre bereits für $M = ((m_{ik}))$ bewiesen, so gilt sie auch für

$$M_i M = \begin{pmatrix} m_{11} & , \cdots, & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (1-x)\, m_{i1} + x m_{i+1\,1}, & \cdots, & (1-x)\, m_{in} + x m_{i+1\,n} \\ m_{i1} & , \cdots, & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & , \cdots, & m_{nn} \end{pmatrix},$$

da

$$(1-x)\, m_{1i} + x m_{i+1\,1} + \cdots + (1-x)\, m_{in} + x m_{i+1\,n} = 1 - x + x = 1,$$

$$m_{1j} + x m_{2j} + \cdots + x^{i-1} (1-x)\, m_{ij} + x^i m_{i+1\,j} + x^i m_{ij} + \cdots + x^{n-1} m_{nj}$$
$$= m_{1j} + x m_{2j} + \cdots + x^{n-1} m_{nj} = x^{i-1}$$

ist. Sei nun bei dieser Darstellung die Matrix M dem Element Z aus $\mathfrak{Z}_n$ zugeordnet, so sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \det |M - \lambda E| \\ &= (-1)\, \lambda^n + (-1)^{n-1} f_1(x)\, \lambda^{n-1} + \cdots + f_n(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Invarianten der Transformationsklasse von M oder Z, d. h. des zu Z gehörigen geschlossenen Zopfes, wegen der bekannten Invarianz von $F(\lambda)$ beim Übergang von M zu $M' M M'^{-1}$.

§ 2. Zusammenhang der Zopfdarstellung mit Verkettungsinvarianten.

Nach Artin läßt sich die Wegegruppe einer jeden Verkettung, die als geschlossener Zopf von n Fäden vorliegt, aus n einmal umschlingenden Elementen $A_1, \cdots, A_n$ erzeugen, zwischen denen Relationen der Gestalt

$$q_i (A_1, \cdots, A_n)\, A_{\varrho_i}\, q_i^{-1} A_i^{-1} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

bestehen. Nach Reidemeister-Schumann[3]) läßt sich aus den Relationen (4), von denen eine noch Folge der übrigen ist, leicht eine verkettungsinvariante Matrix L-Matrix bilden. Man setze dazu $A_i = E_i S_\varrho$, wo ϱ die Nummer derjenigen von den r Kurven der Verkettung bezeichne, die von A_i umschlungen wird, und schreibe die Relationen (4) in den kommutativ gemachten $S_\varrho^p E_i S_\varrho^{-p} \equiv E_i^{x_\varrho^p}$ {die S sind dabei auch als vertauschbar zu betrachten}. Geht dann (4) in

$$E_1^{\varepsilon_{i1}(x_1, \cdots, x_r)} \cdots E_n^{\varepsilon_{in}(x_1, \cdots, x_r)} = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{5}$$

über, so errechnet sich als g. g. Teiler aller $n-1$-reihigen Determinanten der Matrix $W = ((\varepsilon_{ik}(x_1, \cdots, x_r)))$ das bis auf einen Faktor der Gestalt

[3]) Reidemeister-Schumann, L-Polynome von Verk., Hambg. Abh. **10** (1934), S. 256.

$\pm x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$ invariant mit der orientierten Verkettung verbundene L-Polynom $P(x_1, \cdots, x_r)$. Nach den Untersuchungen in der vorhergehenden Arbeit[4]) haben alle $(n-1)$-reihigen Determinanten, die aus $n-1$-Zeilen von W gebildet werden, die Gestalt $\pm(1-x_i)P(x_1, \cdots, x_r)$ und $\pm P(x)$ bei $r=1$, d. h. sie stimmen alle, wenn $x_1 = \cdots = x_r$ gesetzt ist, mit der bis auf einen Faktor $\pm x^k$ bestimmten Verkettungsinvariante $\mathfrak{P}(x) = (1-x)P(x, \cdots, x)$ überein. Die gewünschte Beziehung zu den Darstellungsmatrizen des vorigen Paragraphen liefert nun:

Satz 3. *Ist M die einem Zopf zugeordnete Darstellungsmatrix und $W = ((\varepsilon_{ik}(x_1, \cdots, x_r)))$ die soeben betrachtete L-Matrix der zugehörigen Verkettung, so gilt*

$$((\varepsilon_{ik}(x, \cdots, x))) = M - E \qquad (E = \text{Einheitsmatrix}).$$

Beweis. Für die dem Elementarzopf σ_i zugehörige Verkettung lautet die L-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -x, & x & \\ & & 1\;, & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = M_i - E.$$

Nach Artin sind nun die $\begin{pmatrix} A_i \\ q_i A_{\varrho_i} q_i^{-1} \end{pmatrix}$ eine Darstellung von $\mathfrak{Z}_n$ durch Substitutionen, so daß man, wenn $\begin{pmatrix} A_i \\ p_i A_{\tau_i} p_i^{-1} \end{pmatrix}$ die einem andern Zopfwort Z' zugeordnete Substitution ist, d. h. $p_i(A) A_{\tau_i} p_i^{-1}(A) A_i^{-1} = 1$ die Gruppenrelationen der zugehörigen Verkettung, in

$$(6) \qquad \begin{aligned} & r_i(A) A_{\lambda_i} r_i^{-1}(A) A_i^{-1} \\ \equiv\; & p_i(q A_\varrho q^{-1}) q_{\tau_i} A_{\lambda_i} q_{\tau_i}^{-1} p_i^{-1} (q A_\varrho q^{-1}) A_i^{-1} = 1 \qquad (\lambda_i = \varrho_{\tau_i}) \end{aligned}$$

die Relationen der zu $Z'' = Z'Z$ gehörigen Verkettung erhält. Statt hinterher $x_1 = \cdots = x_r = x$ zu setzen, werde gleich bei der Berechnung von W $S_1 = \cdots = S_r = S$ und $S^p E_i S^{-p} = E_i^{x^p}$ eingeführt. Ist dann aus den Relationen $q_i A_{\varrho_i} q_i^{-1} A_i^{-1} = 1$ von Z die Matrix $W = ((\varepsilon_{ik}(x)))$ errechnet worden, desgl. $W' = ((\varepsilon'_{ik}(x)))$ aus denen von Z', so beachte man, daß beim Umrechnen auf die Operatorrelation $q_i A_{\varrho_i} q_i^{-1} A_i^{-1}$ in $E_1^{\varepsilon_{i1}} \cdots, E_i^{\varepsilon_{ii}+1} \cdots E_n^{\varepsilon_{in}} S S^{-1} E_i^{-1}$ übergeht und $p_i A_{\tau_i} p_i^{-1} A_i^{-1}$ in $E_1^{\varepsilon'_{i1}} \cdots$ $\cdots E_i^{\varepsilon'_{ii}+1} \cdots E_n^{\varepsilon'_{in}} S S^{-1} E_i^{-1}$; dann berechnet sich aber nach (6) $((\varepsilon''_{ik}(x)))$ dadurch, daß man in $E_1^{\varepsilon_{i1}} \cdots E_i^{\varepsilon_{ii}+1} \cdots E_n^{\varepsilon_{in}}$ die E_j durch

[4]) Burau, Über Verkettungsgruppen, dieser Band S. 178.

$E_1^{\varepsilon'_{j1}} \cdots E_j^{\varepsilon'_{jj}+1} \cdots E_n^{\varepsilon'_{jn}}$ $(j = 1, \cdots, n)$ ersetzt, d. h. es gilt

$$((\varepsilon_{ik} + \delta_{ik}))\,((\varepsilon'_{ik} + \delta_{ik})) = ((\varepsilon''_{ik} + \delta_{ik})).$$

Da für die Elementarzöpfe die Übereinstimmung oben gezeigt ist, gilt mithin allgemein:

$$((\varepsilon_{ik}(x, \cdots, x))) \equiv M - E.$$

Die im Satz 1 für M abgeleiteten Relationen zwischen den Elementen m_{ik} ziehen dann nach sich

$$\varepsilon_{i1} + \cdots + \varepsilon_{in} = 0; \qquad \varepsilon_{1i} + x\varepsilon_{2i} + \cdots + x^{n-1}\varepsilon_{ni} = 0. \tag{7}$$

Nennt man die nach Streichen der i-ten Zeile und Spalte in W entstehende Determinante Δ_{ii}, so ist $\Delta_{ii} = x^{i-1}\Delta_{11}$ nach (7), da

$$\Delta_{ii} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1i-1} & \varepsilon_{1i+1} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ \varepsilon_{i-11} & \cdots & \varepsilon_{i-1\,i-1} & \varepsilon_{i-1\,i+1} & \cdots & \varepsilon_{i-1n} \\ \varepsilon_{i+11} & \cdots & \varepsilon_{i+1\,i-1} & \varepsilon_{i+1\,i+1} & \cdots & \varepsilon_{i+1n} \\ \vdots & & & & & \\ \varepsilon_{n1} & \cdots & \varepsilon_{n\,i-1} & \varepsilon_{n\,i+1} & \cdots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2i-1} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{2i+1} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ \varepsilon_{i-12} & \cdots & & & & & \\ \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1i-1} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{1i+1} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{i+12} & \cdots & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{ni-1} & \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{ni+1} & \cdots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} = x^{i-1}\Delta_{11}.$$

Daher ist $\Delta_{11} + \cdots + \Delta_{nn} = (1 + x + \cdots + x^{n-1})\Delta_{11}$; anderseits ist wegen $W = M - E$ und $F(\lambda) = |M - \lambda E|$ $\sum \Delta_{ii} = -F'(1)$; nach (3) hat man also die Verkettungsinvariante $\Delta_{11}(x) = \mathfrak{P}(x)$ in

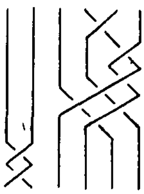
$$(1 + x + \cdots + x^{n-1})\mathfrak{P}(x)$$
$$= f_{n-1}(x) - 2f_{n-2}(x) - \cdots - (-1)^{n-1}(n-1)f_1 - n(-1)^n$$

durch die Zopfinvarianten $f_i(x)$ dargestellt oder nach Addition von $F(1) = 0$ in

$$(1 + x + \cdots + x^{n-1})\mathfrak{P}(x)$$
$$= f_n(x) - f_{n-2}(x) - \cdots - (-1)^{n-1}(n-2)f_1(x) - (-1)^n(n-1). \tag{8}$$

§ 3. Satz über gleichsinnig verdrillte Verkettungen.

Einer gleichsinnig verdrillten Verkettung, worauf wir uns jetzt beschränken, möge ein Zopfwort $Z = \prod \sigma^l$ mit $l \geqq 1$ zugeordnet sein.



Besteht dann der zugehörige offene Zopf aus 2 oder mehreren nebeneinander liegenden Stücken nach Art nebenstehender Figur, so kann offenbar durch bloße Anwendung der Relationen (1) erreicht werden, daß $Z = Z_1 Z_2 \cdots$ lautet, wo $Z_1, Z_2, \cdots$ sich auf die einzelnen Teile beziehen. In diesem Falle ist die Matrix W in Diagonalkästchen reduziert, die wieder W-Matrizen sind, d. h. deren Determinanten zufolge (7) $= 0$ sind. Da aber Δ_{11} mindestens eine dieser zum Faktor hat, ist dann auch $\mathfrak{P}(x) = 0$ wie stets bei auflösbaren Verkettungen. Wir beschränken uns daher auf irreduzible gleichsinnig verdrillte Zöpfe und ordnen einem solchen einen besonders präparierten offenen Zopf zu durch bloße Anwendung der Relationen (1) und zyklische Abänderung des zuerst vorliegenden Wortes Z: Lautet nämlich $Z = \sigma_i^{m_i} \sigma_{i+k}^{m_{i+k}}$ ($|k| \geqq 2$), so verändere man dies in $\sigma_{i+k}^{m_{i+k}} \sigma_i^{m_i} \cdots$ und weiter in $\sigma_i^{m_i} \cdots \sigma_{i+k}^{m_{i+k}}$ usw., bis auf $\sigma_i^{m_i}$ ein Faktor $\sigma_{i\pm1}^{m_{i\pm1}}$ folgt. In Fortsetzung dieses Verfahrens werde schließlich erreicht, daß man beim Durchlaufen des Zopfes erst einen Zweierzopf des i-ten und $i+1$-ten Fadens vor sich hat dann einen Dreierzopf nach Hinzunahme eines der beiden angrenzenden Fäden usf. (siehe Figur links). Liegen insgesamt m Überkreuzungen bei n Fäden vor, so soll gezeigt werden, daß aus der zugehörigen Matrix W sich $\Delta_{11} = \mathfrak{P}(x)$ zu $(-1)^m x^{m-n+1} + \cdots \pm 1$ ergibt, womit $m - n + 1$ sich in der Tat als Verkettungsinvariante erweist. Diese Behauptung werde induktiv nach der Zahl m bewiesen und führt somit auf folgende rein algebraische Aufgabe:

Gegeben sei eine Menge von Matrizen, die aus der einfachsten $\begin{pmatrix} 1-x, & x \\ 1 & , 0 \end{pmatrix}$, wie folgt, hervorgehe: Gehört $((a_{ik}))$ bereits zur Menge, so soll auch

$$(9) \qquad \hat{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & , \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}(1-x) + x a_{i+1\,1}, & \cdots, & (1-x) a_{in} + x a_{i+1\,n} \\ a_{i1} & , \cdots, & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{in} & , \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(10a) \qquad \bar{M} = \begin{vmatrix} 1-x, & x a_{11}, & \cdots, & x a_{1n} \\ 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & a_{21}, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0, & a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\text{(10b) und } \tilde{M} = \begin{vmatrix} a_{11} & , & \cdots, & a_{1n} & , & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n-11} & , & \cdots, & a_{n-1n} & , & 0 \\ (1-x)a_{n1}, & & \cdots, & (1-x)a_{nn}, & & x \\ a_{n1} & , & \cdots, & a_{nn} & , & 0 \end{vmatrix}
$$

dazugehören. Dann werde bewiesen:

Satz 4. *Sind m Faktoren bei der Bildung von M verwandt, und ist n die Reihenzahl von M, so hat die rechte untere Eckdeterminante Δ_{11} von $M-E$ in x den Grad $m-n+1$ und ein absolutes Glied ± 1.*

Beweis. Man erkennt sofort induktiv aus (9) und (10), daß bei Δ_{11} ein absolutes Glied $(-1)^{n-1}$ auftritt. Die Behauptung über den Grad ist ebenfalls für $m=1$ klar, da dann $M-E = \begin{pmatrix} -x, & x \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$, worin $\Delta_{11} = -1$ den Grad $m-n+1=0$ hat. Infolge der Darstellung (8) für Δ_{11} ist die Behauptung allgemein bewiesen, wenn gezeigt wird, daß $f_{n-2}, f_{n-3}, \cdots$ in x kleineren Grad als m haben, da $f_n(x) = |M| = (-1)^m x^m$ ist. Die f sind aber Summen von Hauptminoren: daher folgt der Satz aus folgendem Hilfssatz, zu dessen Formulierung wir zuerst definieren:

Ein einer Matrix $((a_{ik}))$ aus den i_1-, $\cdots$, i_s-ten Reihen und den j_1-, $\cdots$, j_s-ten Kolonnen entnommener Minor heiße unterhalb des zu denselben Kolonnen gehörigen s-reihigen Hauptminors stehend, wenn $i_1 \geqq j_1, \cdots, i_s \geqq j_s$ ist, sonst oberhalb. Dann gilt der

Hilfssatz. *In einer n-reihigen Matrix unserer obigen Klasse, bei deren Bildung m Faktoren verwandt sind, haben alle 1-, $\cdots$, $n-1$-reihigen Minoren keinen höheren Grad in x als $m-1$, wenn sie unterhalb ihres Hauptminors stehen, während diese Schranke sonst m beträgt; die $n-1$-reihige linke obere Eckdeterminante hat jedoch ebenfalls den Grad m.*

Beweis. Für $n=2$ stimmt die Behauptung. Angenommen sie wäre bereits für alle Matrizen bewiesen, die aus $\leqq m$ Faktoren entstanden sind. Aus einer solchen n-reihigen $M = ((a_{ik}))$ von m Faktoren entstehe eine zur Zahl $m+1$ gehörige, wobei M eine der Gestalten $\hat{M}$, $\bar{M}$, $\tilde{M}$ (9), (10) annimmt. $\hat{M}$ unterscheidet sich nur in der i-ten und $i+1$-ten Zeile von M; daher ist in der obigen Bezeichnungsweise für Minoren $\hat{M}_{i_1 \cdot}^{j_1 \cdots} = M_{i_1}^{j_1 \cdot\cdot}$, wenn kein $i_\varrho = i$ oder $i+1$ ist, dagegen

$$
\hat{M}_{i_1 \cdots i\, i+1}^{j_1 \cdot\cdot} = -x\, M_{i_1 \cdot\, i+1 \cdot\cdot}^{j_1 \cdot\cdot}
$$

und

$$
\hat{M}_{i_1 \; i \cdot\cdot}^{j_1 \cdot} = (1-x)\, M_{i_1 \cdot\, i \cdot}^{j_1 \cdot} + x\, M_{i_1 \cdot\, i+1 \cdot}^{j_1 \cdot} \; . \qquad \cdot\, \hat{M}_{i_1 \; i+1 \cdot}^{j_1 \cdot} = M_{i_1 \cdot\, i \cdot}^{j_1 \cdot} \; .
$$

wobei jeweilig in der i-Reihe nur einer der Indizes i, $i+1$ vorkommen mag. Dies zeigt die Gültigkeit der um 1 erhöhten Schranke für $\hat{M}$, da $M_{i_1 \ldots i+1 \ldots}^{j_1 \ldots}$ mit $M_{i_1 \ldots i \ldots}^{j_1 \ldots}$ zugleich unterhalb des Hauptminors liegt.

Ist M in $\bar{M}$ übergegangen, so ist nur etwas zu beweisen für die Minoren, an denen die 1. und 2. Zeile nicht beteiligt ist. Für die andern sieht man leicht, daß

$$\bar{M}_{1 i_2 \ldots}^{1 j_2 \ldots} = (1-x)\, M_{i_2-1, \ldots}^{j_2-1, \ldots},$$

wenn $i_2 > 2$, bzw. $\bar{M}_{12 i_3 \ldots}^{12 j_3 \ldots} = x M_{1 i_3-1 \ldots}^{1 j_3-1 \ldots}$, d. h. auch für $\bar{M}$ gelten die richtigen Schranken. Ebenso sieht man, daß in $\tilde{M}$ in den kritischen Fällen

$$\tilde{M}_{i_1 \ldots n}^{j_1 \ldots j_s} = (1-x)\, M_{i_1 \ldots n}^{j_1 \ldots j_s},$$

wenn $j_s < n+1$, sowie

$$\tilde{M}_{i_1 \ldots n}^{j_1 \ldots n+1} = x\, M_{i_1 \ldots i_{s-1}}^{j_1 \ldots j_{s-1}}$$

und

$$\tilde{M}_{j_1 \ldots n\, n+1}^{j_1 \ldots j_{s-1} n+1} = x\, M_{i_1 \ldots n}^{j_1 \ldots j_{s-1}}$$

ist, womit der Satz allgemein bewiesen ist.

Da definitionsgemäß die Hauptminoren auch unterhalb von sich stehen, ist auch für sie die Gradschranke $m-1$ erwiesen.