Démonstration d'une hypothèse de M. Artin.

Par C. CHEVALLEY à Paris.

Il est bien connu qu'il n'existe pas de corps non commutatif dont le centre soit un corps algébriquement fermé. D'autre part, M. TSEN[1]) a démontré récemment qu'il n'existe pas non plus de corps gauche dont le centre soit un corps déduit d'un corps algébriquement fermé par adjonction d'un élément transcendant. M. ARTIN a remarqué que la source de cette dernière proposition est le théorème suivant:

Si k est un corps algébriquement fermé, et x un élément transcendant par rapport à k, une équation de la forme

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$$

où F est un polynome homogène de degré $< n$ par rapport aux variables $y_1, y_2, \cdots, y_n$ à coefficients dans $k(x)$ possède au moins une solution non-triviale dans $k(x)$.

Ce qui l'a amené à poser la définition suivante :

Si un corps k est tel que toute équation de la forme

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$$

où F est un polynome homogène de degré $< n$ à coefficients dans k ait une solution non-triviale dans k, on dit que k est quasi-algébriquement fermé.

On a alors la propriété suivante :

Si k est quasi-algébriquement fermé, il n'existe aucun corps non-commutatif fini sur k, de centre k.

En effet, supposons qu'il existe un corps K non commutatif fini par rapport à k. Soit $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ une k-base minima de K. Introduisons n variables : $y_1, y_2, \cdots, y_n$. L'élément général $\sum_1^n \omega_i y_i$ de K satisfait comme on sait à une équation irréductible dans $k(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ de degré $< n$, dont le dernier terme (la norme réduite de l'élément) est une forme homogène de degré $< n$ en $y_1, y_2, \cdots, y_n$. On peut donc trouver dans k un système de valeurs $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ non toutes nulles des variables qui annulent cette norme réduite, ce qui nous conduit à une contradiction, car la norme réduite d'un élément de K n'est nulle que si cet élément est nul.

De plus, il convient de remarquer que la condition de quasi-fermeture algébrique est en quelque sorte la généralisation immédiate de celle de

[1]) CHIUNGTZE C. TSEN, Divisionsalgebren über Funktionenkorpern, Gott. Nachr. (1933), p. 335.

fermeture algébrique. En effet, le même raisonnement que nous venons de faire, mais appliqué à un sur-corps commutatif de k, en remplaçant partout «de degré $< n$» par «de degré n», démontre que:

Si un corps k est tel que toute équation de la forme

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$$

où F est un polynome homogène et de degré n à coefficients dans k ait une solution non triviale dans k, k est algébriquement fermé.

Ceci posé, le théorème de MACLAGAN-WEDDERBURN d'après lequel il n'existe pas de corps non-commutatif fini par rapport à un champ de Galois conduit à se demander si les champs de Galois ne sont pas quasi-algébriquement fermés. La question a été résolue affirmativement par M. VÖLSCH pour les corps de caractéristique 2. Nous allons donner ici une démonstration générale du fait en question.

Qu'il me soit permis de remercier ici M. ARTIN, qui m'a communiqué l'hypothèse et les remarques dont je viens de parler.

I.

Nous désignerons dans ce qui va suivre par k un champ de Galois, par p le nombre des éléments de k; par R_n l'espace cartésien à n dimensions où les coordonnées d'un point sont des éléments de k, par O l'origine des coordonnées de R_n, c'est-à-dire le point $(0, 0, \cdots, 0)$.

Nous dirons qu'un polynome F^* à coefficients dans k est une forme réduite du polynome $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, également à coefficients dans k, quand

1. Aucune variable ne figure dans F^* avec un exposant $> p-1$;
2. F^* est congru à F modulo l'idéal $(x_1^p - x_1, x_2^p - x_2, \cdots, x_n^p - x_n) = \mathfrak{a}$.

Tout polynome F possède au moins une forme réduite, qu'on obtient en répétant un certain nombre de fois à partir de F l'opération qui consiste à remplacer un facteur x_i^p par x_i, opération qui ne modifie pas F modulo $\mathfrak{a}$, et qui abaisse la somme de tous les exposants de toutes les variables dans le polynome (ce qui prouve qu'elle ne peut être pratiquée qu'un nombre borné de fois). De plus le degré de cette forme réduite de F est au plus égal au degré de F.

On remarquera que tout élément a de k est racine de l'équation $x^p - x = 0$; donc les polynomes de $\mathfrak{a}$ prennent la valeur 0 en tous les points de R_n. La réciproque est vraie. Pour la démontrer, il suffit evidemment de démontrer le

LEMME 1. *Si un polynome $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mis sous forme réduite prend la valeur 0 en tout point de R_n, il est identiquement nul.*

Nous démontrerons ce lemme par recurrence sur n. Pour $n = 0$, il est trivial. Supposons le démontré pour les polynomes à $n-1$ variables. Ordonnons F par rapport à x_n:

$$F = x_n^{p-1}A_1 + x_n^{p-2}A_2 + \cdots + A_p$$

où $A_1, A_2, \cdots, A_p$ sont des polynomes en $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ mis sous forme réduite. Donnons à $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ des valeurs particulières quelconques de k. L'équation $F = 0$ devient une équation de degré $p-1$ en x_n qui doit admettre comme solutions tous les éléments de k. Il faut donc que tous les coefficients soient nuls. Ceci étant vrai quelles que soient les valeurs particulières choisies, et la proposition étant démontrée pour $n-1$ variables, les coefficients A_i sont tous identiquement nuls, ce qui prouve le lemme.

Il résulte de là en particulier qu'un polynome ne peut avoir qu'une forme réduite : car la différence de deux formes réduites est un polynome réduit qui s'annulle en tous les points de R_n.

D'autre part, nous tirerons la conséquence suivante :

LEMME 2. *Si un polynome $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ mis sous forme réduite prend la valeur* 0 *en tout point de R_n sauf en O où il prend la valeur* 1, *on a*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^n (x_1^{p-1}-1)(x_2^{p-1}-1) \cdots (x_n^{p-1}-1).$$

Désignons en effet par G le polynome du second membre. Il est sous forme réduite. Il en est donc de même de $F-G$. Or ce dernier polynome prend la valeur 0 en tous les points de R_n : il est donc identiquement nul.

II.

Nous allons démontrer une propriété qui généralise celle qui sert de définition à la quasi-fermeture algébrique, et dont l'énoncé m'a été également donné par M. ARTIN :

THÉORÈME. *Soient $F_1, F_2, \cdots, F_h$ des polynomes par rapport à n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui s'annulent tous au point O et dont la somme des degrés soit $< n$. Les polynomes $F_1, F_2, \cdots, F_h$ s'annulent encore en un point $\neq O$.*

Formons en effet le polynome

$$F = (-1)^h (F_1^{p-1}-1)(F_2^{p-1}-1) \cdots (F_h^{p-1}-1)$$

et supposons que $F_1, F_2, \cdots, F_h$ ne s'annulent simultanément en aucun point $P \neq O$. Alors le polynome F prend la valeur 1 en O, la valeur 0 en tout autre point. Donc la forme réduite de F est le polynome $(-1)^n (x_1^{p-1}-1)(x_2^{p-1}-1) \cdots (x_n^{p-1}-1)$ qui est de degré $n(p-1)$. Donc le degré de F est au moins $n(p-1)$; mais ce degré est le produit par $p-1$ de la somme des degrés des polynomes F_i. Cette dernière somme est donc au moins égale à n, ce qui démontre le théorème.