Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie.

Von ERICH PODEHL und KURT REIDEMEISTER in Königsberg.

Im folgenden wollen wir, anknüpfend an den „Geometria proiettiva non euclidea" betitelten Vortrag[1]), eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie entwickeln, welche die Anordnung nicht benutzt und neben den üblichen Schnittpunktsaxiomen das Senkrechtstehen und die Streckenkongruenz als Grundbegriffe einführt. Mittels dieser Begriffe werden die Bewegungen, insbesondere die Spiegelungen erklärt. Die Sätze von DESARGUES und PASCAL ergeben sich auf dem früher[1]) angedeuteten Wege durch den Nachweis, daß die Bewegungen einen dreidimensionalen projektiven Raum bilden, dessen Geraden den Drehungsgruppen und ihren Restklassen entsprechen. Den Angelpunkt in der Konstruktion dieses kinematischen Raumes bildet die Inzidenzrelation zwischen Punkten und Ebenen, die mit Hilfe der Spiegelungen erklärt wird. Das Resultat ist die denkbar allgemeinste elliptische Geometrie im großen: ihre Punkte und Geraden erfüllen eine projektive Ebene, in welcher ein nullteiliger Maßkegelschnitt

$$Q(x) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2, \qquad k_1 k_2 k_3 \neq 0$$

ausgezeichnet ist; $Q(x) = 0$ hat also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ zur Folge. Im übrigen ist der Körper der Koordinaten beliebig. Erst wenn die Kongruenzaxiome dahin verschärft werden, daß sich jede Strecke von jedem Punkt aus auf jeder Geraden abtragen läßt, folgt, daß der Koordinatenkörper reell ist und sich daher ordnen läßt. Die analoge Begründung der hyperbolischen und euklidischen Geometrie bleibt einer zweiten Arbeit vorbehalten. Dort werden wir auch die engen Beziehungen zu den schönen Abhandlungen von HJELMSLEV und von THOMSEN über die Begründung der elementaren Geometrie genau darstellen können, Abhandlungen, in denen die entscheidende Rolle der Spiegelungen schon in so eindrucksvoller Weise herausgearbeitet ist.

§ 1. Axiome für Inzidieren und Senkrechtstehen.

Wir denken zwei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, $\cdots$,

[1]) K. REIDEMEISTER, Rendiconti d. Sem. Mat. d. R. Università di Roma, 1933.

die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit $a, b, c, \cdots$. Zwischen den Punkten und Geraden sollen folgende Beziehungen gelten:

I. Projektive Axiome.

1. *Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine und nur eine Gerade.*
2. *Eine Gerade enthält (zwei) drei verschiedene Punkte.*
3. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

II. Axiome über das Senkrechtstehen.

1. *Ist a eine Gerade, so gibt es durch jeden Punkt eine Gerade b, die von a verschieden ist und auf a senkrecht steht, in Zeichen $b \perp a$.*

2. *Durch einen Punkt einer Geraden a gibt es nur eine zu a senkrechte Gerade.*

3. *Aus $b \perp a$ folgt $a \perp b$.*

4. *Gehen durch einen Punkt P zwei Senkrechte zu einer Geraden g, so stehen alle Geraden durch P auf g senkrecht.*

Erklärung. Ein solcher Punkt P heißt „*Pol*“ der Geraden g. Die Gerade g heißt „*Polare*“ des Punktes P.

5. *Zwei zueinander senkrechte Geraden haben einen Punkt gemeinsam.*

Satz 1. Eine Gerade besitzt höchstens einen Pol.

Beweis. P, P' seien zwei verschiedene Pole der Geraden g. Ist A ein Punkt von g, so müssen die Geraden (AP), (AP') miteinander identisch sein, da es nur eine Senkrechte auf g im Punkte A gibt. Der Punkt A liegt also auf der Geraden (PP'). Ist B ein von A verschiedener Punkt der Geraden g, so muß für ihn dasselbe gelten. Die Punkte P, P' liegen also auf der Geraden g. Das ist aber ein Widerspruch zu Axiom II, 1.

Satz 2. Ist a die Senkrechte auf der Geraden (AB) im Punkte A und b die Senkrechte auf (AB) im Punkte B und ist B der Pol der Geraden a, so ist A der Pol der Geraden b.

Beweis. b steht senkrecht auf a. Nach Axiom II, 3 steht dann auch a senkrecht auf b. Durch den Punkt A gehen demnach zwei Geraden senkrecht zu b; folglich ist A Pol der Geraden b.

Erklärung. Zwei Punkte A und B, die in dieser Beziehung zueinander stehen, nennen wir polar zueinander. Das System beider Punkte nennen wir „polares Punktepaar“. Das System zweier verschiedener, zueinander nichtpolarer Punkte nennen wir ein „nichtpolares Punktepaar“.

Satz 3. Besitzt eine Gerade einen Pol, so besitzt jede Gerade einen Pol, jeder Punkt eine Polare, und je zwei verschiedene Geraden haben einen Punkt gemeinsam.

Beweis. Die Gerade g besitze den Pol P. Ist a eine Gerade durch P, b die Senkrechte auf a im Punkte P, Q der Schnittpunkt von b und g, so ist Q Pol von a, da zwei Geraden durch Q auf a senkrecht stehen.

Ist nun A irgendein von P verschiedener Punkt, B der Pol von (AP) und p die Senkrechte auf (AB) im Punkte B, so ist p Polare des Punktes A. Also besitzt jeder Punkt eine Polare.

Ist weiterhin a irgendeine Gerade, A ein Punkt auf ihr, p eine Polare des Punktes A, b die Senkrechte auf a im Punkte A, Q der Schnittpunkt von b und p, so ist Q Pol von a. Also besitzt jede Gerade einen Pol.

Sind nun g_1 und g_2 zwei Geraden, sind P_1 und P_2 ihre Pole und ist P_3 Pol einer Geraden g_3 durch P_1 und P_2, so ist P_3 gemeinsamer Punkt von g_1 und g_2; denn g_1 und g_2 stehen senkrecht auf g_3, müssen also durch den Pol dieser Geraden gehen. Also haben je zwei Geraden mindestens einen Punkt gemeinsam.

In dieser Arbeit soll allein folgender Fall betrachtet werden:

Es gibt eine Gerade, die einen Pol besitzt.

Nach Satz 3 besitzt dann jede Gerade einen Pol, jeder Punkt eine Polare, und je zwei Geraden haben einen Schnittpunkt.

Satz 4. Ein Punkt besitzt höchstens eine Polare.

Beweis. Der Punkt P besitze die Polaren p_1 und p_2. S sei gemeinsamer Punkt von p_1 und p_2. p_1 und p_2 müssen auf (PS) senkrecht stehen, nach Axiom II, 2 also miteinander identisch sein.

Satz 5. Enthält eine Gerade nur zwei Punkte, so sind beide Punkte polar zueinander, und alle übrigen Punkte liegen auf der Polaren einer der beiden Punkte.

Beweis. Die Gerade g enthalte allein die Punkte A und B. Die Polare des Punktes A hat einen von A verschiedenen Punkt mit g gemeinsam, und dieser Punkt muß B sein. Also sind A und B polar zueinander.

Ist P der Pol von g, so kann es keinen Punkt Q außerhalb der Geraden (PA) und (PB) geben; denn sonst würde die Gerade (PQ) einen Punkt mit g gemeinsam haben, der von A und B verschieden ist. Ist auf einer der Geraden (PA) und (PB) ein dritter Punkt vorhanden, so kann ein solcher auf der anderen Geraden nicht vorhanden sein. Wäre nämlich Q ein von P und A verschiedener Punkt auf (PA), R ein von P und B verschiedener Punkt auf (PB), so würde die Gerade (QR) einen Punkt mit g gemeinsam haben, der von A und B verschieden wäre.

Im folgenden wollen wir voraussetzen, daß es keine Gerade gibt, die nur zwei Punkte enthält.

§ 2. Kongruenzaxiome.

Erklärung. Das System zweier verschiedener Punkte A, B nennen wir eine Strecke. Wir bezeichnen sie mit AB. Eine Strecke AB kann zu einer Strecke $A'B'$ „kongruent" sein, in Zeichen:

$$AB \cong A'B'.$$

III. Kongruenzaxiome.

1. *Aus* $AB \cong A'B'$ *folgt* $A'B' \cong AB$.

2. *Aus* $AB \cong A'B'$, $A'B' \cong A''B''$ *folgt* $AB \cong A''B''$.

Satz 6. Gibt es zu einer Strecke AB eine kongruente Strecke $A'B'$, so ist $AB \cong AB$.

3. *Ist* A, B *ein nichtpolares Punktepaar, so gibt es auf der Geraden* (AB) *einen und nur einen von* B *verschiedenen Punkt* B', *so daß*

$$AB \cong AB'$$

ist.

4. *Ist* A, B *ein polares Punktepaar, so gibt es auf der Geraden* (AB) *keinen von* B *verschiedenen Punkt* B', *so daß* $AB \sim AB'$ *ist.*

5. *Sind* M_1, M_2, M_3 *drei verschiedene Punkte einer Geraden* g, *sind* $A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3'$ *sechs weitere Punkte, von denen keiner Pol der Geraden* g *ist, ist* $A_\nu = A_\nu'$, *falls* A_ν *auf* g *liegt, ist* $A_\nu \neq A_\nu'$, $M_\nu A_\nu \cong M_\nu A_\nu'$, $(M_\nu A_\nu) \perp g$, $(M_\nu A_\nu') \perp g$, *falls* A_ν *außerhalb von* g *liegt, und liegen die Punkte* A_ν *auf ein und derselben Geraden, so liegen auch die Punkte* A_ν' *auf ein und derselben Geraden* $(\nu = 1, 2, 3)$.

6. *Sind* M_1, M_2, M_3 *drei Punkte einer Geraden* g, *sind* A_1, A_2, A_3 *drei verschiedene Punkte und ebenso* A_1', A_2', A_3', *ist* $A_\nu = A_\nu'$, *falls* A_ν *auf* g *liegt oder Pol von* g *ist, ist* $A_\nu \neq A_\nu'$, $M_\nu A_\nu \cong M_\nu A_\nu'$, $(M_\nu A_\nu) \perp g$, $(M_\nu A_\nu') \perp g$, *falls* A_ν *außerhalb von* g *liegt und nicht Pol von* g *ist, und ist*

$$(A_1 A_2) \perp (A_2 A_3),$$

so ist

$$(A_1' A_2') \perp (A_2' A_3').$$

7. *Sind* M_1, M_2 *zwei Punkte einer Geraden* g *und sind* A_1, A_1', A_2, A_2' *vier weitere Punkte, ist* $A_\nu = A_\nu'$, *falls* A_ν *auf* g *liegt oder Pol von* g *ist, ist* $A_\nu \neq A_\nu'$, $(M_\nu A_\nu) \perp g$, $(M_\nu A_\nu') \perp g$, $M_\nu A_\nu \cong M_\nu A_\nu'$, *falls* A_ν *außerhalb* g *liegt und nicht Pol von* g *ist, so ist*

$$A_1 A_2 \cong A_1' A_2'.$$

8. *Sind* A_1, A_2 *verschiedene Punkte, ist* A_1 *zu* A_2 *nicht polar, und sind* Q *und* Q' *zwei weitere Punkte der Geraden durch* A_1, A_2, *so daß*

$$A_\nu Q \cong A_\nu Q' \qquad . \qquad (\nu = 1, 2)$$

ist, so ist

$$Q = Q'.$$

9. *Sind OA und OA' zwei verschiedene kongruente Strecken, die nicht auf derselben Geraden liegen, ist O nicht Pol von (AA') und ist M der Fußpunkt des Lotes von O auf (AA'), so ist*

$$MA \cong MA'.$$

Erklärung. Sind M, A, A' drei verschiedene Punkte einer Geraden und ist $MA \cong MA'$, so heißt M *Mittelpunkt* der Strecke AA'.

Satz 7. Ist M Mittelpunkt der Strecke AA' und ist M' der zu M polare Punkt auf der Geraden (AA'), so ist auch M' Mittelpunkt der Strecke AA'.

Beweis. Ist g die Senkrechte auf (AA') im Punkte M, so erfüllen die Punkte M, M, M', M', A, A' und die Gerade g die Bedingungen der Punkte $M_1, M_2, A_1, A_1', A_2, A_2'$ und der Geraden g in Axiom III, 7. Daraus folgt:

$$M'A \cong M'A'.$$

Satz 8. Sind M und M' Mittelpunkte einer Strecke AA', so sind M und M' polar zueinander.

Beweis. M und M' seien Mittelpunkte einer Strecke AA' und nicht polar zueinander.

Nach Voraussetzung ist

$$MA \cong MA' \quad \text{und} \quad MA \cong M'A';$$

hieraus folgt nach Axiom III, 8

$$A = A',$$

womit die Annahme, daß M und M' nicht polar zueinander sind, zu einem Widerspruch geführt worden ist.

Erklärung. Eine Abbildung, die jeden Punkt und jede Gerade auf sich selbst abbildet, nennen wir „identische Abbildung".

Erklärung. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte aufeinander und der Geraden aufeinander, derart, daß ein Bildpunkt mit einer Bildgeraden dann und nur dann zusammengehört, wenn der Originalpunkt mit der Originalgeraden zusammengehört, daß zwei Bildgeraden dann und nur dann aufeinander senkrecht stehen, wenn die beiden Originalgeraden zueinander senkrecht sind, und daß jede Strecke ihrer Bildstrecke kongruent ist, heißt eine *Bewegung*. Bewegungen werden mit großen deutschen Buchstaben bezeichnet.

Aus Satz 6 folgt

Satz 9. Die identische Abbildung ist eine Bewegung.

Aus den Eigenschaften einer Bewegung und aus dem Axiom III, 1 folgt

Satz 10. Die zu einer Bewegung $\mathfrak{B}$ inverse Abbildung $\mathfrak{B}^{-1}$ ist eine Bewegung.

Aus dem Axiom III, 2 folgt

Satz 11. Die Abbildung, die durch zwei aufeinander folgende Bewegungen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ entsteht, ist eine Bewegung $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$.

Satz 12. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Erklärung. Eine von der Identität verschiedene Bewegung, die je zwei Punkte miteinander vertauscht, nennen wir „involutorisch".

Satz 13. Sind A, B, C drei verschiedene Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen, ist A nicht zu B und C polar und ist $\mathfrak{B}$ eine Bewegung, die die drei Punkte A, B, C stehen läßt, so ist $\mathfrak{B}$ die Identität.

Beweis. Ist Q ein beliebiger Punkt und führt $\mathfrak{B}$ diesen Punkt in den Punkt Q' über, ist M_b bzw. M_c der Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade (AB) bzw. (AC) und sind M_b' bzw. M_c' die entsprechenden Punkte für Q', so ist nach Axiom III, 8 $M_b = M_b'$, $M_c = M_c'$, also nach Axiom II, 2 und I, 1 auch $Q = Q'$.

Erklärung. Drei Punkte A, B, C, die den Bedingungen des Satzes 13 genügen, nennen wir ein Bezugssystem.

§ 3. Spiegelungen.

Satz 14. Zu jeder Geraden gibt es eine von der Identität verschiedene Bewegung, welche die Punkte dieser Geraden stehen läßt.

Beweis. Ist g eine Gerade, so bilden wir jeden Punkt von g und den Pol P von g auf sich selbst ab. Ist Q ein Punkt außerhalb von g und von P verschieden, ist M der Fußpunkt des Lotes von Q auf g und Q' der von Q verschiedene Punkt auf (MQ), für den $MQ \simeq MQ'$ ist, so bilden wir den Punkt Q auf den Punkt Q' ab. Q' ist nach Axiom III, 4 vom Pol P verschieden. Nach Axiom III, 3 gehört dann zu jedem Punkt ein und nur ein Bildpunkt. Umgekehrt ist auch jeder Punkt Bildpunkt eines und nur eines Punktes. Das braucht nur für einen Punkt Q gezeigt zu werden, der nicht auf g liegt und von P verschieden ist. Ist Q' der Bildpunkt von Q, M der Schnittpunkt von (QQ') mit g, so ist $MQ \simeq MQ'$. Hieraus geht aber hervor, daß Q der Bildpunkt von Q' ist. Aus dem Axiom III, 3 folgt, daß Q' der einzige Originalpunkt von Q ist. Die definierte Punktabbildung ist also umkehrbar eindeutig. Darüber hinaus folgt, daß sie involutorisch ist.

Ist a irgendeine Gerade, sind Q, R zwei Punkte auf ihr und Q', R' die Bildpunkte von Q, R, so bilden wir die Gerade a auf die

Gerade $(Q' R')$ ab. Ist S ein weiterer Punkt der Geraden a, so ist sein Bildpunkt S' ein Punkt der Geraden $(Q' R')$. Ist nämlich einer der drei Punkte Q, R, S der Pol P, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß jeder Punkt mit seinem Bildpunkt auf einer Senkrechten zu g liegt. Ist keiner der drei Punkte Pol von g, so folgt die Behauptung aus dem Axiom III, 5. Damit ist gezeigt, daß, wenn ein Punkt und eine Gerade zusammengehören, auch der Bildpunkt und die Bildgerade zusammengehören. Aus der Involutionseigenschaft der Punktabbildung folgt umgekehrt, daß, wenn ein Bildpunkt und eine Bildgerade zusammengehören, dasselbe auch für den Originalpunkt und die Originalgerade zutrifft.

Es folgt weiter: Sind S und T irgend zwei Punkte der Geraden g, so ist die Bildgerade $(S' T')$ identisch mit der Bildgeraden $(Q' R')$. Zu jeder Geraden gehört also genau eine Bildgerade. Aus der Involutionseigenschaft der Punktabbildung folgt umgekehrt, daß jede Gerade Bildgerade einer und nur einer Geraden ist.

Sind Q, R zwei beliebige Punkte und sind Q', R' ihre Bildpunkte, so ist nach Axiom III, 7 $QR \cong Q' R'$. Also ist jede Strecke ihrer Bildstrecke kongruent.

Sind a, b zwei Geraden, ist S ihr Schnittpunkt, A ein von S verschiedener Punkt auf a, B ein von S verschiedener Punkt auf b und sind S', A', B' die Bildpunkte von S, A, B, so ist $(S' A')$ die Bildgerade von a, $(S'B')$ die Bildgerade von b. Ist nun $a \perp b$, so folgt aus Axiom III, 6

$$(S' A') \perp (S' B').$$

Aus der Involutionseigenschaft der Punktabbildung folgt umgekehrt, daß, wenn zwei Bildgeraden aufeinander senkrecht stehen, dieses auch für die beiden Originalgeraden zutrifft.

Damit ist gezeigt, daß die so definierte Abbildung eine Bewegung ist. Sie ist von der Identität verschieden; denn auf jeder Geraden durch den Pol P gibt es nach der Voraussetzung auf S. 233 (unten) einen von P verschiedenen Punkt Q, der nicht auf g liegt. Jeder solche Punkt Q wird auf einen Punkt Q' abgebildet, der von Q verschieden ist.

Erklärung. Die so definierte Bewegung nennen wir *„Spiegelung an der Geraden g“*. Wir bezeichnen sie mit g oder auch, wie die Bewegungen, mit einem großen deutschen Buchstaben. Die Gerade g nennen wir die „Achse der Spiegelung g“.

Satz 15. Ist A, B ein nichtpolares Punktepaar, so gibt es nur eine von der Identität verschiedene Bewegung, welche die Punkte A, B stehen läßt, nämlich die Spiegelung an der Geraden (AB).

Beweis. Ist P der Pol der Geraden (AB) und C ein von P und A verschiedener Punkt auf der Geraden (PA), so ist C zu A nicht polar.

Die Punkte A, B, C bilden also ein Bezugssystem. $\mathfrak{B}$ sei eine Bewegung, die die Punkte A, B stehen läßt. Ist sie nicht die Identität, so führt sie nach Satz 13 den Punkt C in einen von C verschiedenen Punkt C' über, also die Gerade (AC) in die Gerade (AC'). Da Bewegungen aufeinander senkrecht stehende Geraden in Geraden überführen, die wieder aufeinander senkrecht stehen, ist $(AC') \perp (AB)$. C' liegt also auf (AC). Außerdem ist $AC \simeq AC'$. Nach Axiom III, 3 gibt es nur einen Punkt C', der diesen beiden Bedingungen genügt. Es ist der Punkt, in den die Spiegelung $\mathfrak{S}$ an der Geraden (AB) den Punkt C überführt.

Die Bewegung $\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{B}^{-1}$ läßt demnach die Punkte A, B, C stehen, ist also nach Satz 13 die Identität, d. h. es ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}.$$

Satz 16. Eine Spiegelung läßt eine von der Spiegelungsachse verschiedene Gerade dann und nur dann stehen, wenn sie senkrecht zur Spiegelungsachse ist.

Beweis. Daß zur Spiegelungsachse senkrechte Geraden stehen bleiben, folgt aus der Definition der Spiegelung. Ist umgekehrt a eine Gerade, die bei der Spiegelung an einer Geraden s stehen bleibt und ist Q ein Punkt auf a außerhalb s und vom Pol von s verschieden, so muß der Bildpunkt Q' von Q auch auf a liegen. Die Gerade $a = (QQ')$ steht aber nach der Erklärung der Spiegelung senkrecht auf der Spiegelungsachse s.

§ 4. Drehungen.

Erklärung. Sind a und b zwei Spiegelungen und ist O der Schnittpunkt ihrer Achsen, so nennen wir die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung $a \cdot b$ eine *„Drehung um den Punkt O“*. O heißt der „Drehpunkt“ der Drehung. Drehungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$.

Satz 17. Eine Drehung um einen Punkt O ist keine Spiegelung, deren Achse durch diesen Punkt geht.

Beweis. Die Drehung $\mathfrak{d}$ sei das Produkt der Spiegelungen an den Geraden a und b mit dem gemeinsamen Punkt O. Angenommen, $\mathfrak{d}$ sei die Spiegelung an einer Geraden c, die durch den Punkt O geht. P sei ein von O verschiedener Punkt auf c, der zu O nicht polar ist. P ist also weder Pol von a noch von b. Vertauscht die Spiegelung a den Punkt P mit dem Punkt P', so gilt dasselbe für die Spiegelung b, da die Bewegung $a \cdot b = c$ den Punkt P stehen läßt. Ist $P = P'$, so muß P auf den Spiegelungsachsen a und b liegen, a und b wären miteinander identisch, $\mathfrak{d}$ wäre also im Widerspruch zur Annahme die Identität. Ist P von P' verschieden, so müssen a und b nach Satz 16 senkrecht auf (PP') stehen. Da O nicht Pol von (PP') ist, müßten a und b miteinander identisch sein, was wieder zum Widerspruch zur Annahme führt.

Satz 18. Sind OA und OA' zwei verschiedene kongruente Strecken und ist O nicht Pol von (AA'), so gibt es genau zwei Bewegungen, welche OA nach OA' überführen, nämlich eine Spiegelung, deren Achse durch O geht, und eine Drehung um O.

Beweis. Ist m die eindeutig bestimmte Senkrechte auf (AA') durch O, so vertauscht die Spiegelung m die Strecken OA und OA' miteinander. Liegt O nicht auf (AA'), so folgt diese Behauptung aus dem Axiom III, 9. Ist $\mathfrak{d}$ eine zweite Bewegung, die OA nach OA' überführt, so läßt die Bewegung $\mathfrak{d} \cdot m$ die Strecke OA stehen, ist also entweder die Identität oder die Spiegelung a an der Geraden (OA). Im ersten Fall ist

$$\mathfrak{d} = m.$$

Im zweiten Fall ist

$$\mathfrak{d} \cdot m = a,$$

also

$$\mathfrak{d} = a \cdot m,$$

d. h. eine Drehung um den Punkt O.

Aus Satz 18 folgt unmittelbar

Satz 19. Eine Bewegung, die einen Punkt O festläßt, ist entweder eine Spiegelung, deren Achse durch den Punkt O geht, oder eine Drehung um den Punkt O.

Satz 20. Das Produkt dreier Spiegelungen, deren Achsen einen Punkt gemeinsam haben, ist eine Spiegelung, deren Achse durch diesen Punkt geht.

Beweis. a, b, c seien die Achsen dreier Spiegelungen, O ihr gemeinsamer Punkt. A sei ein von O verschiedener Punkt auf a, der zu O nicht polar ist. Die Drehung $b \cdot c$ führe die Strecke OA in die Strecke OA' über. Das gleiche gilt dann auch für die Bewegung $a \cdot b \cdot c$. Da beide Bewegungen voneinander verschieden sind, muß $a \cdot b \cdot c$ nach Satz 19 eine Spiegelung sein, deren Achse durch O geht.

Satz 21. Sind a, b, a' drei Spiegelungen, deren Achsen einen Punkt O gemeinsam haben, so gibt es eine Spiegelung b', so daß

$$a \cdot b = a' \cdot b'$$

ist, und eine Spiegelung b'', so daß

$$a \cdot b = b'' \cdot a'$$

ist.

Beweis. Die Spiegelungen $b' = a' \cdot a \cdot b$ und $b'' = a \cdot b \cdot a'$ erfüllen die Bedingungen des Satzes.

Aus Satz 20 folgt weiter

Satz 22. Das Produkt zweier Drehungen um denselben Punkt ist eine Drehung um diesen Punkt;

und

Satz 23. Die zu einer Drehung inverse Bewegung ist eine Drehung um denselben Punkt.

Aus den Sätzen 22 und 23 folgt

Satz 24. Die Gesamtheit der Drehungen um denselben Punkt bildet eine Gruppe.

Die Gruppe der Drehungen um einen Punkt A bezeichnen wir mit A, die Gruppe der Drehungen, die durch eine Drehung $\mathfrak{d}$ bestimmt ist, mit $\{\mathfrak{d}\}$.

Hilfssatz 1. Ist s eine Spiegelung und $\mathfrak{d}$ eine Drehung um einen Punkt von s, so ist

$$s \cdot \mathfrak{d} \cdot s = \mathfrak{d}^{-1}.$$

Beweis. Die Bewegung $s \cdot \mathfrak{d}$ ist nach Satz 20 eine Spiegelung, also ist

$$s \cdot \mathfrak{d} \cdot s \cdot \mathfrak{d} = 1,$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt.

Satz 25. Die Gruppe der Drehungen um denselben Punkt ist kommutativ.

Beweis. $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ seien zwei Drehungen um einen Punkt O, s sei eine Spiegelung, deren Achse durch O geht. Nach Hilfssatz 1 ist

$$s \cdot \mathfrak{d}_1^{-1} \cdot s = \mathfrak{d}_1, \quad s \cdot \mathfrak{d}_2^{-1} \cdot s = \mathfrak{d}_2.$$

Daraus folgt:

$$(s \cdot \mathfrak{d}_1^{-1} \cdot s) \cdot (s \cdot \mathfrak{d}_2^{-1} \cdot s) = \mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2.$$

Andererseits ist die linke Seite dieser Gleichung

$$s \cdot \mathfrak{d}_1^{-1} \cdot \mathfrak{d}_2^{-1} \cdot s = s \cdot (\mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_1)^{-1} \cdot s = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_1;$$

also ist

$$\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_1.$$

Satz 26. Ist $\mathfrak{d}$ eine Drehung und a eine Spiegelung, so ist die Bewegung $a \cdot \mathfrak{d}$ dann und nur dann eine Spiegelung, wenn der Drehpunkt von $\mathfrak{d}$ auf der Spiegelungsachse a liegt.

Beweis. Daß diese Bedingung hinreichend ist, folgt aus Satz 20. Die Notwendigkeit der Bedingung sieht man folgendermaßen: Die

Bewegung $a \cdot \mathfrak{d}$ sei eine Spiegelung b. O sei der Schnittpunkt der Spiegelungsachsen a und b. Da O Fixpunkt der Spiegelungen a und b ist und $b = a \cdot \mathfrak{d}$ ist, muß O auch Fixpunkt der Bewegung $\mathfrak{d}$ sein. Nun ist $\mathfrak{d}$ bestimmt keine Spiegelung, deren Achse durch O geht, denn dann wäre $a \cdot \mathfrak{d}$ eine Drehung um O, und das wäre nach Satz 19 ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \cdot \mathfrak{d} = b$. Also ist $\mathfrak{d}$ nach diesem Satz eine Drehung um O.

Satz 27. Wird eine Drehung $\mathfrak{a}$ durch die Spiegelungsprodukte $a_1 \cdot a_2$ und $a_1' \cdot a_2'$ dargestellt, so sind die Schnittpunkte der Geradenpaare a_1, a_2 und a_1', a_2' miteinander identisch.

Beweis. Aus $a_1 \cdot a_2 = a_1' \cdot a_2'$ folgt

$$a_1' \cdot a_1 \cdot a_2 = a_2'$$

und hieraus nach Satz 26, daß die Spiegelungsachse a_1' den Schnittpunkt der Geraden a_1, a_2 enthält. Ebenso folgert man, daß auch die Spiegelungsachse a_2' durch diesen Punkt geht, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 28. Das Produkt zweier Drehungen ist eine Drehung.

Beweis. $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ seien zwei Drehungen mit den Drehpunkten O_1 und O_2. g sei die Gerade $(O_1 O_2)$. Nach Satz 21 gibt es dann eine Gerade g_1, so daß $\mathfrak{d}_1 = g_1 \cdot g$ ist, und eine Gerade g_2, so daß $\mathfrak{d}_2 = g g_2$ ist. Dann ist

$$\mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2 = g_1 \cdot g \cdot g \cdot g_2 = g_1 \cdot g_2 .$$

Hieraus folgt

Satz 29. Die Drehungen bilden eine Gruppe.

Satz 30. Sind a und b zwei Spiegelungen, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, und ist O der Schnittpunkt beider Achsen, p die Polare von O, so ist die Drehung $a \cdot b$ die Spiegelung p.

Beweis. p möge die Geraden a und b in den Punkten A und B schneiden. P und P' seien zwei von A und B verschiedene Punkte auf p, so daß

$$AP \cong AP'$$

ist. Da B polar zu A ist, gilt nach Satz 7 auch

$$BP \cong BP'.$$

P und P' werden danach bei den Spiegelungen a und b miteinander vertauscht, bleiben also bei der Bewegung $a \cdot b$ stehen. Da das für sämtliche Punkte von p gilt, und $a \cdot b$ nicht die Identität sein kann, folgt, daß $a \cdot b$ die Spiegelung p ist.

Umgekehrt ist eine Spiegelung s gleich dem Produkt der Spiegelungen an zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden, die durch den Pol der Spiegelungsachse s gehen. Daraus folgt:

Satz 31. Jede Spiegelung läßt sich als Drehung auffassen.

Satz 32. Eine involutorische Drehung ist eine Spiegelung.

Beweis. Die Drehung $\mathfrak{d} = a \cdot b$ sei involutorisch, d. h., es sei

$$\mathfrak{d}^2 = a \cdot b \cdot a \cdot b = 1.$$

Daraus folgt

$$a \cdot b \cdot a = b.$$

Vertauscht die Spiegelung a die Gerade b mit der Geraden b', so läßt die Bewegung $a \cdot b \cdot a$ die Punkte der Geraden b' stehen. Nach der letzten Gleichung muß dann $b' = b$ sein, und hieraus folgt nach Satz 16, daß die Geraden a und b aufeinander senkrecht stehen. $\mathfrak{d}$ ist also nach Satz 30 eine Spiegelung.

§ 5. Definition des kinematischen Raumes.

Mit Hilfe der Drehungen erklären wir die Elemente eines Raumes. Wir nennen ihn den „kinematischen Raum". Seine Elemente nennen wir R-Punkte, R-Ebenen und R-Geraden.

Erklärung der R-Punkte und R-Ebenen. Jede Drehung $\mathfrak{a}$ erklären wir als einen R-Punkt und als eine R-Ebene. Die R-Punkte und R-Ebenen bezeichnen wir wie die entsprechenden Drehungen mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \cdots$. Stellen die Drehungen Spiegelungen dar, so verwenden wir deren Bezeichnungen: $a, b, c, \cdots$. Die Identität nennen wir den Einheitspunkt bzw. die Einheitsebene und bezeichnen sie mit $\mathfrak{e}$. Zwei R-Punkte bzw. R-Ebenen sollen dann und nur dann voneinander verschieden sein, wenn die entsprechenden Drehungen voneinander verschieden sind.

Erklärung der Inzidenz zwischen einem R-Punkt und einer R-Ebene. Wir sagen: *Ein R-Punkt $\mathfrak{a}$ inzidiert mit einer R-Ebene $\mathfrak{b}$, wenn die Drehung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ eine Spiegelung ist.*

Satz 33. Eine R-Ebene $\mathfrak{a}$ inzidiert mit dem Einheitspunkt $\mathfrak{e}$ dann und nur dann, wenn die Drehung $\mathfrak{a}$ eine Spiegelung ist.

Erklärung. Eine R-Ebene, die mit dem Einheitspunkt inzidiert nennen wir „$R_{\mathfrak{e}}$-Ebene".

Erklärung der R-Geraden. *Eine Gruppe von Drehungen mit demselben Drehpunkt erklären wir als R-Gerade, desgleichen eine Restklasse nach einer solchen Gruppe von Drehungen.* Die R-Geraden bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots$ oder wie die entsprechenden Gruppen mit $A, B, C, \cdots, \{\mathfrak{a}\}, \{\mathfrak{b}\}, \cdots$ bzw. wie die entsprechenden Restklassen mit $\mathfrak{a} \cdot \{\mathfrak{b}\}, \{\mathfrak{c}\} \cdot \mathfrak{d}, \cdots$.

Erklärung der Inzidenz zwischen R-Gerade, R-Punkt und R-Ebene. Wir sagen: *Eine R-Gerade $\mathfrak{A}$ inzidiert mit einem R-Punkt $\mathfrak{a}$, wenn die Gruppe oder Restklasse $\mathfrak{A}$ die Drehung $\mathfrak{a}$ enthält; eine R-Gerade $\mathfrak{A}$*

inzidiert mit einer R-Ebene $\mathfrak{b}$, *wenn alle R-Punkte, die mit* $\mathfrak{A}$ *inzidieren, auch mit* $\mathfrak{b}$ *inzidieren; zwei R-Geraden schneiden sich, wenn sie mit demselben R-Punkt inzidieren.*

Satz 34. Eine R-Gerade $\mathfrak{A}$ inzidiert dann und nur dann mit dem Einheitspunkt, wenn $\mathfrak{A}$ eine Gruppe von Drehungen darstellt.

Erklärung. Eine R-Gerade $\mathfrak{A}$, die mit dem Einheitspunkt inzidiert, nennen wir „R_e-Gerade".

Satz 35. Eine R-Ebene $\mathfrak{s}$ inzidiert dann und nur dann mit einer R_e-Geraden A, wenn $\mathfrak{s}$ eine R_e-Ebene s ist und die Spiegelungsachse s mit dem Punkt A inzidiert.

Beweis. $\mathfrak{s}$ muß eine R_e-Ebene s sein, weil sie mit dem Einheitspunkt $\mathfrak{e}$ inzidieren soll. Ist $\mathfrak{a}$ ein von $\mathfrak{e}$ verschiedener R-Punkt auf der R_e-Geraden A, so ist die Bewegung $\mathfrak{a} \cdot s$ nach Satz 26 dann und nur dann eine Spiegelung, wenn die Spiegelungsachse s mit dem Drehpunkt A von $\mathfrak{a}$ inzidiert. Daraus folgt, daß die im vorstehenden Satz ausgesprochene Bedingung sowohl notwendig als auch hinreichend dafür ist, daß die R-Ebene $\mathfrak{s}$ mit der R_e-Geraden A inzidiert.

Jede R_e-Gerade G bilden wir auf den Drehpunkt G der entsprechenden Drehungsgruppe ab, jede R_e-Ebene s auf die Achse s der entsprechenden Spiegelung.

Satz 36. Die so definierte Abbildung der R_e-Geraden und R_e-Ebenen auf die Punkte und Geraden ist umkehrbar eindeutig.

Aus Satz 35 folgt

Satz 37. Eine R_e-Gerade G inzidiert dann und nur dann mit einer R_e-Ebene s, wenn der Punkt G mit der Geraden s inzidiert.

Hieraus folgt, daß jeder Schnittpunktsatz für R_e-Geraden und R_e-Ebenen sich als Schnittpunktsatz für Punkte und Geraden in der zugrunde liegenden Geometrie aussprechen läßt.

§ 6. Inzidenzsätze im kinematischen Raum.

Hilfssatz 2. Ist A eine R_e-Gerade, so gibt es drei verschiedene R-Punkte, die mit A inzidieren.

Beweis. Nach Axiom I, 3 gibt es eine Gerade g, die den Punkt A nicht enthält, und nach der Voraussetzung S. 233 unten gibt es drei verschiedene Punkte G_1, G_2, G_3 auf g. Sind a_1, a_2, a_3 die Geraden (AG_1), (AG_2), (AG_3), so stellen die Drehungen $a_1 \cdot a_2$, $a_1 \cdot a_3$ zwei verschiedene R-Punkte dar, die mit der R_e-Geraden A inzidieren. Der Einheitspunkt $\mathfrak{e}$ ist ein dritter R-Punkt auf A. Er ist von den R-Punkten $a_1 \cdot a_2$ und $a_1 \cdot a_3$ verschieden.

Satz 38. Ist $\mathfrak{A}$ eine R-Gerade, so gibt es drei verschiedene R-Punkte, die mit $\mathfrak{A}$ inzidieren.

Beweis. Es darf vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{A}$ einen R-Punkt $\mathfrak{a}$ enthält. Sind $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ drei verschiedene R-Punkte der R_e-Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{a}^{-1}$, so sind $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_3'\mathfrak{a}$ drei verschiedene R-Punkte auf $\mathfrak{A}$.

Satz 39. Zu zwei R-Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gibt es immer eine R-Gerade, die mit jedem der beiden R-Punkte inzidiert.

Beweis. Mit den R-Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ inzidieren die R-Geraden $\mathfrak{G} = \mathfrak{a}\{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\}$ und $\mathfrak{G}' = \{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\}\mathfrak{b}$.

Aus Satz 27 folgt

Hilfssatz 3. Zu einem vom Einheitspunkt verschiedenen R-Punkt gibt es nicht mehr als eine R_e-Gerade, die mit ihm inzidiert.

Satz 40. Zu zwei verschiedenen R-Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gibt es nicht mehr als eine R-Gerade, die mit jedem der beiden R-Punkte inzidiert.

Beweis. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ seien zwei R-Geraden, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ inzidieren. $\mathfrak{G}\mathfrak{a}^{-1}$ und $\mathfrak{G}'\mathfrak{a}^{-1}$ sind dann zwei R_e-Geraden, die mit dem vom Einheitspunkt verschiedenen R-Punkt $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$ inzidieren. Nach Hilfssatz 3 sind sie miteinander identisch. Folglich sind auch die R-Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ miteinander identisch.

Hilfssatz 4. Ist a eine R_e-Ebene, so gibt es zwei voneinander und vom Einheitspunkt verschiedene R-Punkte auf a, die nicht auf derselben R_e-Geraden liegen.

Beweis. Sind A_1 und A_2 zwei verschiedene Punkte der Geraden a, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ von der Identität verschiedene Drehungen um A_1 bzw. A_2, so stellen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zwei von $\mathfrak{e}$ verschiedene R-Punkte dar, die nicht auf derselben R_e-Geraden liegen, aber mit der R-Ebene a inzidieren.

Hilfssatz 5. Zu zwei R-Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gibt es immer eine R_e-Ebene, die mit jedem der beiden R-Punkte inzidiert.

Beweis. A_1 und A_2 seien die Drehpunkte der Drehungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Ist a eine Gerade durch A_1 und A_2, so stellt die Spiegelung a eine R_e-Ebene dar, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ inzidiert.

Hilfssatz 6. Zu irgend zwei R-Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, die vom Einheitspunkt und voneinander verschieden sind und die nicht auf derselben R_e-Geraden liegen, gibt es nicht mehr als eine R_e-Ebene, die mit jedem der beiden R-Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ inzidiert.

Beweis. A_1 und A_2 seien die Drehpunkte der Drehungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Sind a und a' zwei R_e-Ebenen, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ inzidieren, so gehen nach Satz 26 die Spiegelungsachsen a und a' durch die Punkte A_1 und A_2. Da nach Voraussetzung diese beiden Punkte voneinander verschieden sind, müssen die Achsen und damit auch die R_e-Ebenen a und a' miteinander identisch sein.

Satz 41. Zu drei R-Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gibt es immer eine R-Ebene, die mit jedem dieser drei R-Punkte inzidiert.

Beweis. Nach Hilfssatz 5 gibt es eine R_e-Ebene a, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1^{-1}$ und $\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{a}_1^{-1}$ inzidiert. Die R-Ebene $\mathfrak{a}_1^{-1} \cdot a$ inzidiert dann mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$.

Satz 42. Zu irgend drei verschiedenen nicht auf derselben R-Geraden liegenden R-Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ gibt es nicht mehr als eine R-Ebene, die mit jedem der drei R-Punkte inzidiert.

Beweis. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ seien zwei R-Ebenen, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ inzidieren. Dann sind $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{f}'$ zwei R_e-Ebenen, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_1^{-1}$ und $\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{a}_1^{-1}$ inzidieren. Da diese beiden R-Punkte vom Einheitspunkt und voneinander verschieden sind, müssen nach Hilfssatz 6 die R_e-Ebenen $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{f}'$ und folglich auch die R-Ebenen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ miteinander identisch sein.

§ 7. Polarität im kinematischen Raum.

Erklärung. Einen R-Punkt $\mathfrak{a}$ und eine R-Ebene $\mathfrak{b}$ nennen wir polar zueinander, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dieselbe Drehung darstellen. $\mathfrak{a}$ heißt Pol von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ heißt Polarebene von $\mathfrak{a}$.

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar

Satz 43. Zu jedem R-Punkt gibt es eine und nur eine Polarebene; zu jeder R-Ebene gibt es einen und nur einen Pol.

Satz 44. Der Pol einer R-Ebene $\mathfrak{b}$ und die Polarebene eines R-Punktes $\mathfrak{a}$ inzidieren dann und nur dann miteinander, wenn $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ inzidiert.

Beweis. Ist die Drehung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ eine Spiegelung, so ist auch die Drehung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$ eine Spiegelung; denn aus

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = s$$

folgt

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1} \cdot s \cdot \mathfrak{a};$$

die Drehung $\mathfrak{a}^{-1} \cdot s \cdot \mathfrak{a}$ ist involutorisch, also nach Satz 32 eine Spiegelung. Umgekehrt folgt daraus, daß $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$ eine Spiegelung ist, die Tatsache, daß auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ eine Spiegelung ist.

Erklärung. Eine R-Gerade $\mathfrak{B}$ nennen wir Polare einer R-Geraden $\mathfrak{A}$, wenn die Pole der R-Ebenen, die mit $\mathfrak{A}$ inzidieren, die Gesamtheit der R-Punkte darstellen, die mit $\mathfrak{B}$ inzidieren.

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar

Satz 45. Eine R-Gerade besitzt höchstens eine Polare.

Hilfssatz 7. Jede R_e-Gerade besitzt eine Polare.

Beweis. Ist A eine R_e-Gerade und a eine Gerade durch den Punkt A, so ist die R-Gerade $A \cdot a$ eine Polare von A.

Um diese Behauptung zu beweisen, muß zunächst gezeigt werden, daß der Pol jeder R-Ebene, die mit A inzidiert, ein R-Punkt von $A \cdot a$ ist.

Nach Satz 35 werden die R-Ebenen, die mit A inzidieren, dargestellt durch die Gesamtheit der Spiegelungen, deren Achsen durch den Punkt A gehen. Ist a' eine solche Spiegelung, so ist die Drehung $a' \cdot a = \mathfrak{a}$ eine Drehung um A; also ist $a' = \mathfrak{a} \cdot a$ eine Drehung aus der Restklasse $A \cdot a$, d. h. der R-Punkt a', Pol der R-Ebene a', inzidiert mit der R-Geraden $A \cdot a$.

Zweitens muß gezeigt werden: Ist $\mathfrak{a} \cdot a$ ein R-Punkt der R-Geraden $A \cdot a$, so inzidiert die R-Ebene $\mathfrak{a} \cdot a$ mit der $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden A. Ist $\mathfrak{a}'$ irgendeine Drehung um A, so ist die Drehung

$$\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{a} \cdot a = \mathfrak{a}'' \cdot a$$

nach Satz 26 eine Spiegelung. Die R-Ebene $\mathfrak{a} \cdot a$ inzidiert also mit jedem R-Punkt $\mathfrak{a}'$ der $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden A, folglich auch mit der $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden A selbst.

Satz 46. Jede R-Gerade $\mathfrak{A}$ besitzt eine Polare $\mathfrak{B}$.

Beweis. $\mathfrak{a}$ sei ein R-Punkt von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{B}'$ die Polare der $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\mathfrak{a}^{-1}$, so ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{B}'$ die Polare von $\mathfrak{A}$.

Zunächst muß gezeigt werden: Ist $\bar{\mathfrak{a}}$ eine R-Ebene, die mit $\mathfrak{A}$ inzidiert, so liegt der R-Punkt $\bar{\mathfrak{a}}$ auf $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}$ ist eine R-Ebene, die mit $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$ inzidiert. Nach Voraussetzung ist dann $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{B}'$. Daraus folgt, daß $\bar{\mathfrak{a}}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ ist.

Zweitens muß gezeigt werden: Ist $\mathfrak{b}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{B}$, so inzidiert die R-Ebene $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{b}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$. Nach Voraussetzung inzidiert dann die R-Ebene $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}^{-1}$. Daraus folgt, daß die R-Ebene $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{A}$ inzidiert.

Satz 47. Ist $\mathfrak{B}$ die Polare der R-Geraden $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{A}$ die Polare von $\mathfrak{B}$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß der Pol jeder R-Ebene, die mit $\mathfrak{B}$ inzidiert, ein R-Punkt von $\mathfrak{A}$ ist. Ist $\mathfrak{b}$ eine R-Ebene, die mit $\mathfrak{B}$ inzidiert, so heißt das, daß $\mathfrak{b}$ mit jedem R-Punkt von $\mathfrak{B}$ inzidiert. Nach Satz 44 muß dann der R-Punkt $\mathfrak{b}$ als Pol der R-Ebene $\mathfrak{b}$ mit den Polarebenen sämtlicher R-Punkte von $\mathfrak{B}$ inzidieren. Läge nun der R-Punkt $\mathfrak{b}$ nicht auf $\mathfrak{A}$, so müßten diese Polarebenen nach Satz 42 miteinander identisch sein im Widerspruch zu Satz 43.

Zweitens ist zu zeigen, daß die Polarebene jedes R-Punktes von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ inzidiert. Ist $\mathfrak{a}$ ein R-Punkt von $\mathfrak{A}$, so inzidiert dieser mit sämtlichen R-Ebenen, die $\mathfrak{A}$ enthalten. Nach Satz 44 muß dann die R-Ebene $\mathfrak{a}$ als Polarebene des R-Punktes $\mathfrak{a}$ die Pole sämtlicher R-Ebenen enthalten, die mit $\mathfrak{A}$ inzidieren, d. h. sie muß sämtliche R-Punkte von $\mathfrak{B}$ enthalten, also mit $\mathfrak{B}$ inzidieren.

Erklärung. Diejenige Abbildung, die jeden R-Punkt auf seine Polarebene, jede R-Ebene auf ihren Pol, jede R-Gerade auf ihre Polare abbildet, nennen wir die polare Abbildung des kinematischen Raumes auf sich.

Satz 48. Die polare Abbildung ist umkehrbar eindeutig

Satz 49. Bei der polaren Abbildung inzidieren zwei Bildelemente dann und nur dann miteinander, wenn die beiden entsprechenden Originalelemente miteinander inzidieren.

§ 8. Das Dualitätsprinzip im kinematischen Raum.

Aus der polaren Abbildung folgt die Gültigkeit des Dualitätsprinzips im kinematischen Raum, d. h. es gilt

Satz 50. Ein Inzidenzsatz bleibt richtig, wenn man in ihm jedesmal das Wort „R-Punkt" durch das Wort „R-Ebene" und das Wort „R-Ebene" durch das Wort „R-Punkt" ersetzt.

Durch die Anwendung des Dualitätsprinzips erhält man aus den Sätzen 38—42 folgende Sätze:

Satz 51. Ist $\mathfrak{A}$ eine R-Gerade, so gibt es drei verschiedene R-Ebenen, die mit $\mathfrak{A}$ inzidieren.

Satz 52. Zu zwei R-Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gibt es immer eine R-Gerade, die mit jeder der beiden R-Ebenen inzidiert.

Satz 53. Zu zwei verschiedenen R-Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gibt es nicht mehr als eine R-Gerade, die mit jeder der beiden R-Ebenen inzidiert.

Satz 54. Zu drei R-Ebenen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gibt es immer einen R-Punkt, der mit jeder dieser drei R-Ebenen inzidiert.

Satz 55. Zu irgend drei verschiedenen, nicht mit derselben R-Geraden inzidierenden R-Ebenen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gibt es nicht mehr als einen R-Punkt, der mit jeder der drei R-Ebenen inzidiert.

Mit Hilfe der Sätze 38—42, 51—55 lassen sich folgende weitere Inzidenzsätze beweisen:

Satz 56. Eine R-Gerade $\mathfrak{A}$ inzidiert mit einer R-Ebene $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ mit zwei verschiedenen R-Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ inzidieren.

Beweis. Nach Satz 51 gibt es zwei verschiedene R-Ebenen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die mit $\mathfrak{A}$ inzidieren. Wir haben nur den Fall zu betrachten, wo $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ verschieden ist. Die R-Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ inzidieren mit den beiden R-Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Nach Satz 55 müssen sie also mit einer R-Geraden inzidieren. Nach Satz 53 muß diese mit $\mathfrak{A}$ identisch sein.

Satz 57. Zu einem R-Punkt $\mathfrak{a}$ und einer R-Geraden $\mathfrak{G}$, die nicht mit $\mathfrak{a}$ inzidiert, gibt es eine und nur eine R-Ebene, die mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a}$ inzidiert.

Beweis. Sind $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei verschiedene R-Punkte auf $\mathfrak{G}$, so gibt es nach den Sätzen 41 und 42 eine und nur eine R-Ebene, die mit den R-Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ inzidiert. Nach Satz 56 inzidiert diese R-Ebene auch mit der R-Geraden $\mathfrak{G}$.

Satz 58. Zu zwei verschiedenen R-Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, die mit einem R-Punkt $\mathfrak{s}$ inzidieren, gibt es eine und nur eine R-Ebene, die mit jeder der beiden R-Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ inzidiert.

Beweis. Ist $\mathfrak{a}$ ein von $\mathfrak{s}$ verschiedener R-Punkt auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$ ein von $\mathfrak{s}$ verschiedener R-Punkt auf $\mathfrak{B}$, so gibt es nach den Sätzen 41 und 42 eine und nur eine R-Ebene, die mit den R-Punkten $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ inzidiert. Nach Satz 56 inzidiert diese R-Ebene auch mit den R-Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Auf Grund des Dualitätsprinzips folgen aus den Sätzen 57 und 58 folgende Sätze:

Satz 59. Zu einer R-Ebene $\mathfrak{a}$ und einer R-Geraden $\mathfrak{G}$, die nicht mit $\mathfrak{a}$ inzidiert, gibt es einen und nur einen R-Punkt, der mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a}$ inzidiert.

Satz 60. Zu zwei verschiedenen R-Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, die mit einer R-Ebene $\mathfrak{s}$ inzidieren, gibt es einen und nur einen R-Punkt, der mit jeder der beiden R-Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ inzidiert.

Die Ergebnisse von §§ 6, 7 und 8 können wir kurz in der Feststellung zusammenfassen, daß der *kinematische Raum ein projektiver Raum* ist.

§ 9. Die Sätze von DESARGUES und PASCAL.

Jede R-Gerade der Einheitsebene inzidiert mit einer und nur einer $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene, jeder R-Punkt der Einheitsebene mit einer und nur einer $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden. Umgekehrt inzidiert jede $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene mit einer und nur einer R-Geraden der Einheitsebene, jede $R_{\mathfrak{e}}$-Gerade mit einem und nur einem R-Punkt der Einheitsebene.

Bilden wir nun jede R-Gerade der Einheitsebene auf die mit ihr inzidierende $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene, jeden R-Punkt der Einheitsebene auf die mit ihm inzidierende $R_{\mathfrak{e}}$-Gerade ab, so ist diese Abbildung der Einheitsebene auf die $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden und die $R_{\mathfrak{e}}$-Ebenen umkehrbar eindeutig; außerdem gilt folgender Satz: Eine R-Gerade der Einheitsebene inzidiert dann und nur dann mit einem R-Punkt der Einheitsebene, wenn die entsprechende $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene mit der entsprechenden $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden inzidiert.

Mit Hilfe der auf S. 243 dargestellten Abbildung erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Einheitsebene auf die Ebene der zugrunde liegenden Geometrie, welche Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden abbildet derart, daß ein Bildpunkt dann und nur dann mit einer Bildgeraden inzidiert, wenn der Original-R-Punkt mit der Original-R-Geraden inzidiert.

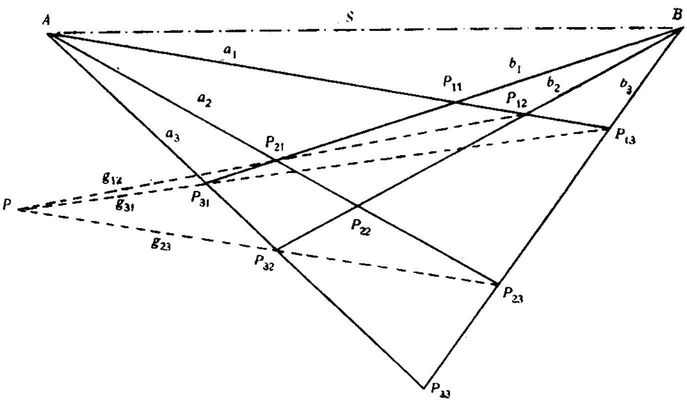
Jeder Inzidenzsatz der Einheitsebene läßt sich somit auch als Inzidenzsatz in der zugrunde liegenden Geometrie aussprechen. Da in jeder Ebene eines projektiven Raumes der Satz von DESARGUES erfüllt ist, so gilt derselbe in jeder R-Ebene und daher auch in unserer ebenen Geometrie.

Schließlich wenden wir uns dem Beweise des Satzes von PASCAL zu[1]).

Satz 61. Sind $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sechs verschiedene $R_{\mathfrak{e}}$-Ebenen, inzidieren a_1, a_2, a_3 mit einer $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden A; b_1, b_2, b_3 mit einer von A verschiedenen $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden B, ist P_{kl} die Schnittgerade von a_k und b_l $(k = 1, 2, 3,\ l = 1, 2, 3)$, g_{kl} diejenige $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene, die durch P_{kl} und P_{lk} $(k \neq l)$ bestimmt ist, so schneiden sich die $R_{\mathfrak{e}}$-Ebenen g_{12}, g_{23}, g_{31} in ein und derselben $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden.

Beweis. s sei die $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene, die durch die $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden A und B bestimmt ist; $\mathfrak{b}_k$ sei die durch die Spiegelungen s und b_k bestimmte Drehung:

$$\mathfrak{b}_k = s \cdot b_k .$$



Daraus, daß die $R_{\mathfrak{e}}$-Gerade A mit der $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene s inzidiert, folgt, daß die R-Gerade $A \cdot \mathfrak{b}_k$ mit der $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene $\mathfrak{b}_k^{-1} \cdot s = b_k \cdot s \cdot s = b_k$ inzidiert. Entsprechend folgt, daß die R-Gerade $\mathfrak{a}_k \cdot B$ mit der $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene a_k inzidiert, wenn

$$\mathfrak{a}_k = a_k \cdot s$$

gesetzt wird.

Die R-Gerade $\mathfrak{a}_k \cdot B$ hat mit der R-Geraden $A \cdot \mathfrak{b}_l$ den R-Punkt $\mathfrak{p}_{kl} = \mathfrak{a}_k \cdot \mathfrak{b}_l$ gemeinsam. Der R-Punkt $\mathfrak{p}_{kl}$ liegt auf der $R_{\mathfrak{e}}$-Geraden P_{kl}.

$\mathfrak{f}_k$ sei die R-Ebene, die durch die R-Geraden $\mathfrak{a}_k \cdot B$ und $A \cdot \mathfrak{b}_k$ bestimmt ist. Die R-Ebenen $\mathfrak{f}_k$ und $\mathfrak{f}_l$ haben dann die R-Punkte $\mathfrak{p}_{kl}$ und $\mathfrak{p}_{lk}$ gemeinsam und damit deren Verbindungsgerade $\mathfrak{G}_{kl}$, die in der $R_{\mathfrak{e}}$-Ebene g_{kl} liegt. Die R-Ebenen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$ sind verschieden voneinander. Denn wäre

[1]) Vgl. a. a. O. S. 10. Dem Beweis liegt die Tatsache zugrunde, daß im kinematischen Raum sich durch zwei sich schneidende R-Gerade stets eine nicht entartete Regelfläche zweiter Ordnung legen läßt.

etwa $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$, so müßten die R-Geraden $\mathfrak{a}_1 \cdot B$ und $\mathfrak{a}_2 \cdot B$ in derselben R-Ebene liegen, also einen R-Punkt $\mathfrak{c}$ gemeinsam haben,

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1' = \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2'.$$

Hieraus würde folgen

$$\mathfrak{a}_2^{-1} \cdot \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_2' \cdot \mathfrak{b}_1'^{-1}$$

und, da die Drehungen $\mathfrak{a}_2^{-1} \cdot \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_2' \cdot \mathfrak{b}_1'^{-1}$ nach Voraussetzung zu verschiedenen Gruppen gehören,

$$\mathfrak{a}_2^{-1} \cdot \mathfrak{a}_1 = 1,$$

woraus im Widerspruch zur Voraussetzung $a_1 = a_2$ folgen würde. Die R-Ebenen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$ können nicht mit derselben R-Geraden inzidieren; denn dann müßten z. B. die R-Punkte $\mathfrak{p}_{12}, \mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{13}$ auf dieser R-Geraden liegen, d. h. $\mathfrak{p}_{21}$ müßte auf der R-Geraden $\mathfrak{a}_1 \cdot B$ liegen, a_2 also mit a_1 zusammenfallen. Die R-Ebenen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$ haben also genau einen R-Punkt $\mathfrak{p}$ gemeinsam. Dasselbe gilt dann auch für die Schnittgeraden $\mathfrak{G}_{kl}$. Ist P die $R_\mathfrak{e}$-Gerade durch den R-Punkt $\mathfrak{p}$, so folgt, daß die $R_\mathfrak{e}$-Ebenen g_{12}, g_{23}, g_{31} mit P inzidieren, w. z. b. w.

Die Anwendung des Dualitätsprinzips auf Satz 61 ergibt

Satz 62. Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei R-Geraden der Einheitsebene, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf derselben R-Geraden.

Auf Grund der auf S. 248 dargestellten Abbildung bedeutet dieser Satz in der zugrunde liegenden Geometrie den Satz von Pascal (für ein Geradenpaar als Kegelschnitt). Der Satz 61 bedeutet auf Grund der auf S. 243 dargestellten Abbildung die Umkehrung des Pascalschen Satzes.

§ 10. Der Maßkegelschnitt.

Aus dem Pascalschen Satz folgt bekanntlich, daß sich projektive Koordinaten, die Elemente eines Körpers K sind, für Punkte und Geraden erklären lassen. Jedem Punkt entspricht ein Tripel von Zahlen ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3 (ϱ beliebig $\neq 0$), ebenso jeder Geraden ein Tripel σu_1, σu_2, σu_3, und die Inzidenz von Punkten und Geraden drückt sich in der Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

aus. Das projektive Bezugssystem besteht aus einem Dreieck und einem Einheitspunkt. Die Kollineationen der Ebene, d. h. die Abbildungen, welche die Punkte eineindeutig transformieren und je drei Punkte einer Geraden wieder in Punkte einer Geraden überführen, lassen sich so darstellen:

$$x_i' = a_{i1} J(x_1) + a_{i2} J(x_2) + a_{i3} J(x_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Hierin sei die Determinante der Koeffizienten $\| a_{ik} \| \neq 0$, und $J(a) = a'$ bedeute einen Automorphismus des Körpers K. Die Korrelationen, d.h. die Transformationen, welche Punkte in Gerade und Gerade in Punkte eineindeutig überführen und die Inzidenz erhalten, werden durch

$$u_i' = a_{i1} J(x_1) + a_{i2} J(x_2) + a_{i3} J(x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

geliefert.

Wir müssen nun in dieser Ebene die metrischen Formeln zu gewinnen suchen. Die Zuordnung der Punkte zu ihren Polargeraden ist eine Korrelation. Nehmen wir ein Polardreieck als Bezugssystem, so muß die Korrelation die Gestalt

$$u_i' = a_{ii} J(x_i), \qquad a_{ii} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

haben. Die hiermit verbundene Zuordnung von Geraden zu Punkten hat die Gestalt

$$x_i' = a_{ii}^{-1} J(u_i),$$

und da der Pol einer Polargeraden wieder der ursprüngliche Punkt ist, so muß

$$\varrho x_i = a_{ii}^{-1} J(a_{ii} J(x_i))$$

sein. Für $x_i = 1$ folgt hieraus

$$a_{ii}^{-1} J(a_{ii}) = \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und für drei beliebige b_i

$$\varrho_2 b_i = J^2(b_i), \qquad \varrho_2 = \varrho \varrho_1^{-1}$$

und daher für alle Elemente a des Körpers $J^2(a) = \varrho_2 a$; da $a' = \varrho_2 a$ ein Automorphismus des Körpers ist, folgt $\varrho_2 = 1$, d. h.

$$J^2(a) = a.$$

Offenbar ist für $k_i = a_{ii} a_{11}^{-1}$

$$J(k_i) = k_i;$$

wir können also erreichen, daß die Polarität durch

$$u_i' = k_i J(x_i) \quad \text{mit} \quad k_i \neq 0, \quad k_1 = 1, \quad J(k_i) = k_i$$

vermittelt wird.

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß $J(a) = a$ sein muß, indem wir nachweisen, daß sonst mehr als zwei kongruente Strecken mit demselben Anfangspunkt auf derselben Geraden liegen würden. Zunächst stellen wir einige einfache Folgerungen aus der involutorischen Eigenschaft des Isomorphismus zusammen. Die Elemente a mit $J(a) = a$ bilden einen Körper Λ. Ist $J(a) \neq a$, so genügt a der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x(a + J(a)) + a J(a) = 0,$$

deren Koeffizienten zu Δ gehören. $a - J(a)$ gehört alsdann nicht zu Δ, und ist b eine zweite Zahl mit $b \neq J(b)$, so gehört $(a - J(a))\,(b - J(b))^{-1}$ zu Δ, und folglich ist K quadratisch über Δ. K entsteht aus Δ durch Adjunktion eines Elementes $\tau = a - J(a)$ mit $J(\tau) = -\tau$; alle Elemente von K erhält man in $x + y\tau$, wenn x, y unabhängig voneinander Δ durchlaufen, und es ist $J(x + \tau y) = x - \tau y$.

Wir fragen nun nach den projektiven Abbildungen der Ebene, welche die Pol-Polarenzuordnung erhalten. Die Form

$$Q(x) = k_1 x_1 J(x_1) + k_2 x_2 J(x_2) + k_3 x_3 J(x_3) \tag{1}$$

darf sich bei diesen Transformationen höchstens mit einem Faktor multiplizieren, es muß also

$$Q(x') = \lambda Q(x)$$

sein. Diese Transformationen bilden eine Gruppe $\mathfrak{R}$, welche die Bewegungen unserer Geometrie gewiß enthält. Es gibt nur eine Transformation aus $\mathfrak{R}$, die alle Punkte einer Geraden festläßt und involutorisch ist. Wir können nämlich die Gerade als die Gerade $x_3 = 0$ in das Bezugsdreieck nehmen, alsdann hat die Transformation die Gestalt

$$x_1' = a x_1, \quad x_2' = b x_2, \quad x_3' = c x_3, \tag{2}$$

und es muß $a^2 = b^2 = c^2$, also $a = b = -c$ sein. Eine solche Transformation ist daher eine Spiegelung. Damit die Transformation (2) zu $\mathfrak{R}$ gehört, ist aber nicht erforderlich, daß sie involutorisch ist, es genügt vielmehr, daß

$$a J(a) = b J(b) = c J(c)$$

ist; solche Transformationen lassen sich leicht angeben, z. B. indem wir

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{J(f)}, \quad \frac{c}{b} = \frac{g}{J(g)}$$

mit $J(f) \neq f$, $J(g) \neq g$ setzen. Diese Abbildungen führen die Geraden und Punkte des Bezugsdreiecks in sich über, und sobald wir zeigen können, daß eine solche Transformation, die weder die Identität noch eine Spiegelung ist, durch drei Spiegelungen bewirkt werden kann, ist der angekündigte Beweis erbracht.

Zu diesem Zweck untersuchen wir die Transformationen mit der Fixgeraden $x_3 = 0$ und dem Fixpunkt 0, 0, 1 etwas genauer. Führt eine solche Transformation $a_1, a_2, 0$ in 0, 1, 0 über, so muß sie gleichzeitig die beiden zu diesen polaren Punkte vertauschen, und sie läßt sich daher in die Gestalt

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha k_2 a_2 x_1 - \alpha k_2 a_1 x_2 \\ x_2' &= a_1 x_1 + k_2 \bar{a}_2 x_2 \\ x_3' &= \alpha k_2 x_3 \end{aligned}$$

setzen; dabei ist zur Abkürzung $J(a) = \overline{a}$ gesetzt. Die Bedingung, daß die polare Zuordnung auf der Geraden $x_3 = 0$ erhalten bleibt, ist erfüllt, wenn $\alpha\overline{\alpha} = 1$ ist. Die Bedingung, daß in der ganzen Ebene die polare Zuordnung erhalten bleiben soll, ergibt

$$a_1\overline{a}_1 + k_2 a_2 \overline{a}_2 = k_2 a \overline{a}; \tag{3}$$

damit sich also ein Punkt a_1, a_2, 0 in 0, 1, 0 überführen läßt, muß

$$Q(a_1, a_2, 0) = \lambda\, Q(0, 1, 0) \text{ mit } \lambda = a\overline{a} \tag{4}$$

sein. Damit die auf $x_3 = 0$ induzierte Transformation involutorisch ist, muß

$$\alpha = -\frac{\overline{a}_2}{a_2} \tag{5}$$

sein, und damit sie einen Fixpunkt mit $x_1' = \varrho x_1$, $x_2' = \varrho x_2$ hat, muß

$$(-k_2\overline{a}_2 - \varrho)(k_2\overline{a}_2 - \varrho) + \alpha k_2 a_1 \overline{a}_1 = 0,$$

also unter Beachtung von (3) und (5)

$$\varrho^2 = -\alpha k_2^2 a\overline{a}$$

sein. Die Spiegelung an der Geraden durch diesen Punkt und 0, 0, 1 erhalten wir, wenn $\varrho = a k_2$, also

$$\frac{a^2}{a\overline{a}} = \frac{\overline{a}_2}{a_2} \tag{6}$$

gesetzt wird. Es lassen sich leicht Elemente angeben, welche (5) und (6) erfüllen, z. B.

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{\eta}{2}\cdot\frac{1-\lambda^2 k_2}{2k_2};\ a = \frac{\eta^{-1}}{2}\cdot\frac{1+\lambda^2 k_2}{\lambda k_2} \text{ mit } \overline{\lambda} = \lambda,\ \overline{\eta} = \eta^{-1}.$$

Führen wir zwei zu diesen Parametern gehörige Spiegelungen mit gleichen Werten λ und einmal $\eta_1 = 1$, einmal $\eta \neq \pm 1$ hintereinander aus, so erhält man

$$\begin{aligned} x_1'' &= \eta^{-2} k_2 [a_1^2 + \eta k_2 a_2^2] x_1 - \eta^{-2} k_2 [k_2 a_1 a_2 (1+\eta)] x_2 \\ x_2'' &= [k_2 a_1 a_2 (1+\overline{\eta})] x_1 + k_2 [a_1^2 + k_2 \overline{\eta} a_2^2] x_2 \\ x_3'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta^{-1} a^2 k_2^2 x_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzen wir

$$k_2 a_1 a_2 (1+\eta) = b_1, \qquad a_1^2 + \eta k_2 a_2^2 = b_2, \qquad \beta = -\frac{\overline{b}_2}{b_2},$$

bilden die Spiegelung, die b_1, b_2, 0 in 0, 1, 0 überführt, und setzen sie mit (7) zusammen, so erhalten wir eine Abbildung

$$x_1''' = \eta^{-2}\beta^{-1} x_1,\quad x_2''' = x_2,\quad x_3''' = \varepsilon x_3 \quad (\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1). \tag{8}$$

Durch Wahl von λ kann hierin $\eta^{-2}\beta^{-1} \neq \pm 1$ gemacht werden. Und wir haben also in (8) eine Transformation, welche 1, 0, 0 und die Gerade $x_3 = 0$ festläßt und weder die Identität noch eine Spiegelung ist.

Der Isomorphismus $J(a)$ muß also die Identität sein, und *die Polarität wird* mithin *durch eine quadratische Form*

$$(9) \qquad Q(x) = x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2, \qquad k_2 k_3 \neq 0$$

vermittelt.

§ 11. Die Anordnung.

Die Bedingung, daß zwei Gerade verschieden sind und der Pol daher nicht mit seiner Polaren inzidieren darf, besagt, daß (9) niemals zu 0 gemacht werden kann, d. h. daß stets

$$(10) \qquad -1 \neq k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 \quad \text{und} \quad -\frac{k_2}{k_3} \neq x^2$$

ist. Die projektiven Transformationen der Gruppe $\mathfrak{R}$, welche die polare Zuordnung erhalten, sind sämtlich Bewegungen. Aus den Formeln (4) erkennt man nämlich, daß zwei Punkte x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 sich nur dann ineinander überführen lassen, wenn $Q(x) = Q(y)\lambda^2$ ist. Dann sind aber nach (3), (5) und (6) die Punkte stets durch eine Spiegelung ineinander transformierbar, welche die Geraden durch die beiden Punkte in sich überführt. Liegen zwei Strecken $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ vor, welche sich durch eine Transformation aus $\mathfrak{R}$ ineinander überführen lassen, so läßt sich P_1' durch eine Spiegelung nach P_1 überführen, P_2 gehe dabei nach P_2'' über. Alsdann läßt sich, wie man unschwer durch zur obigen duale Überlegung sieht, die Gerade $(P_1 P_2'')$ in die Gerade $(P_1 P_2)$ durch eine Transformation aus $\mathfrak{R}$ und also auch durch eine Spiegelung, welche P_1 festläßt, überführen. Geht dabei P_2'' in P_2^* über, so sind die Punkte P_2 und P_2^* entweder identisch, oder sie gehen durch eine Spiegelung, die P_1 festläßt, ineinander über. Mithin ist die Strecke $P_1 P_2$ zu der Strecke $P_1' P_2'$ kongruent, die Transformationen aus $\mathfrak{R}$ erhalten also auch die Kongruenz und sind daher Bewegungen. Umgekehrt ist unschwer zu sehen, daß zu jedem Körper und Maßkegelschnitt (9) mit (10) eine elliptische Geometrie gehört, die unseren Axiomen genügt.

Da

$$Q(0, 1, 0) = k_2, \qquad Q(0, 0, 1) = k_3$$

ist, so hat *Halbierbarkeit des rechten Winkels* oder die Möglichkeit, 0, 1, 0 in 1, 0, 0 und 0, 0, 1 in 1, 0, 0 durch eine Spiegelung überzuführen, zur Folge, daß $k_2 = \lambda^2$, $k_3 = \mu^2$ gesetzt werden und die metrische Grundform zu

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

normiert werden kann. Es kann ferner *jeder Punkt* in einen zu ihm polaren und daher *in jeden anderen* hineinbewegt werden; deshalb muß sich aus jeder Summe von zwei (und drei) Quadraten die Wurzel ziehen lassen. Alsdann lassen sich auch alle Geraden durch einen Punkt durch Drehung um diesen Punkt ineinander überführen, und daher läßt sich jede Strecke von jedem Punkt aus auf jeder Geraden abtragen. Der zugehörige Körper muß reell sein; denn jede Zahl, die sich als Summe von n Quadraten darstellen läßt, läßt sich in ihm als Quadrat schreiben. Die Zahl -1 darf sich also nicht als Summe von Quadraten schreiben lassen, weil sonst ein Widerspruch zu (10) entstände.

Ein reeller Körper läßt sich bekanntlich nach Artin und Schreier ordnen; er enthält als Unterkörper zunächst die rationalen Zahlen bzw. einen zu diesen isomorphen Zahlkörper; der Koordinatenkörper enthält ferner den euklidischen Körper, der aus dem rationalen durch sukzessive Adjunktion von Quadratwurzeln aus den Elementen $1 + a^2$ entsteht. Dieser euklidische Körper läßt sich zwar auf verschiedene Weise ordnen, aber alle so entstehenden geordneten Körper sind zueinander isomorph. Dasselbe gilt daher auch von zwei elliptischen Geometrien, die zu einem euklidischen Körper gehören.

Schließlich fordern wir noch: Sind M_1 und M_2 ein polares Punktepaar, P ein Punkt auf der Geraden g durch M_1 und M_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die beiden Kreise mit dem Mittelpunkt M_1 bzw. M_2 und dem Radius $M_1 P$ bzw. $M_2 P$, so haben $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und g noch einen Punkt Q gemeinsam, und jede Senkrechte auf g, die nicht durch P oder Q geht, trifft entweder den Kreis $\varkappa_1$ oder den Kreis $\varkappa_2$ in genau zwei Punkten. Alsdann läßt sich jede Zahl $a = x^2$ oder $a = -x^2$ setzen. Ein solcher Körper läßt sich nur auf eine Weise ordnen. — Auf die Frage nach den Konstruktionen mit Eichmaß in der elliptischen Geometrie sei zum Schluß nur hingewiesen.