

Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexer Veränderlicher.

II. Das Verhalten der Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen.¹⁾

Von KARL BRAUNER in Wien.

Um die Schwierigkeiten, welche sich bei der Bestimmung der Verzweigung analytischer Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher in der Umgebung gewisser Stellen ergeben, recht deutlich vor Augen zu bringen, wird zuerst untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich die Methoden, welche bei einer Veränderlichen zum Ziele führten, verallgemeinern lassen auf mehrere Variable. Wir erhalten auf diese Weise ungewollt eine Einteilung der Verzweigungsstellen in solche I. und II. Art, je nachdem die Methoden zum Ziele führen oder nicht. Gleichzeitig werden wir für die Umgebung der Verzweigungsstellen I. Art eine Potenzreihenentwicklung erhalten. Sodann wird uns ein einfaches Beispiel für die Verzweigungsstellen II. Art das Verhalten der Funktionen in der Umgebung dieser Stellen zeigen und uns Anhaltspunkte für die Zergliederung dieses Problems geben. Diese Zergliederung sowie die Idee der Lösung stammt von meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. WIRTINGER in Wien. Herr WIRTINGER entwickelte zunächst dieses Problem an Hand eben jenes einfachen Beispiels, welches auch in dieser Arbeit besprochen wird. auf der Tagung der Mathematikervereinigung²⁾ in Meran im Jahre 1905, sodann in der Mathematischen Gesellschaft in Wien und in einem von ihm abgehaltenen Seminar über algebraische Funktionen, wo ich die Bekanntschaft mit diesen Problemen machte.

WEIERSTRASZ' Vorbereitungssatz zeigt, daß die Untersuchung analytischer Funktionen in der Umgebung ihrer Verzweigungspunkte zurückgeführt werden kann auf die Untersuchung einer algebraischen Gleichung, die wir in folgender Gestalt

$$(1) \quad z^n + g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) z^{n-1} + \dots + g_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

¹⁾ Im gleichen Bande erschien der erste Teil dieser Arbeit von W. BLASCHKE, mit dem Untertitel: „Die Gruppen der Kreiskörper.“

²⁾ Jahresber. 14, p. 517.

annehmen können und wo die $g_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ in der Umgebung der Stelle $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ konvergente Potenzreihen sind, die für die Werte $x_i = 0$ verschwinden. Ferner sei $D(x_1, x_2, \dots, x_k)$ die Diskriminante von (1) und es verschwinde diese nicht identisch in der Umgebung unserer Stelle $x_i = 0$.

Wir setzen zunächst $D(x_1, x_2, \dots, x_k)$ von folgender Gestalt voraus:

$$(1b) \quad D(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left(\sum_i a_i x_i + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots \right)^d \cdot L(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

wo wenigstens eines der $a_i \neq 0$, etwa a_1 und $L(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq 0$ bleibt in einer von Null verschiedenen Umgebung unseres Punktes $x_i = 0$.

Führen wir dann folgende neue Veränderliche ein:

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \sum_i a_i x_i + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots, \\ x'_2 = x_2, \dots, x'_k = x_k, \end{cases}$$

so geht (1) vermöge (3) über in

$$(1a) \quad z^n + f_1(\xi, x'_2, \dots, x'_k) z^{n-1} + \dots + f_n(\xi, x'_2, \dots, x'_k) = 0$$

und jedem k -Tupel von (x_1, x_2, \dots, x_k) entspricht genau ein k -Tupel der Veränderlichen (ξ, x'_2, \dots, x'_k) , was man aus der Voraussetzung $a_1 \neq 0$ unmittelbar folgert. Die Diskriminante von (1a) hat dann die Gestalt:

$$\xi^d k(\xi, x'_2, \dots, x'_k),$$

und es gibt sicher eine von Null verschiedene Umgebung der Stelle $\xi = x'_2 = \dots = x'_k = 0$, wo k verschieden von Null bleibt. Kennt man die Verzweigung der durch (1a) definierten Funktion z in der Umgebung der Stelle $\xi = x_i = 0$, so ist auch die der Funktion z , definiert durch (1), in einer dieser Stelle entsprechenden Stelle bestimmt.

Wir denken uns zunächst in (1a) die Veränderlichen x'_i festgehalten, sodann definiert (1a) z als algebraoide Funktion von ξ , und wir können etwa mit Hilfe des PUISSEUXSchen Verfahrens z durch eine oder mehrere Potenzreihen von ξ darstellen, die eventuell nach gebrochenen Exponenten von ξ fortschreiten werden. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen werden zunächst, wie leicht ersichtlich, analytische Funktionen der x'_i sein; wir werden zunächst zeigen, daß sie auch in einer von Null verschiedenen Umgebung unserer Stelle eindeutige analytische Funktionen sind. Zu diesem Zwecke denken wir uns das zu (1a) gehörige PUISSEUXSche Polygon in bezug auf z und ξ gezeichnet.

Die etwa der λ -ten Seite entsprechende Entwicklung von z sei:

$$(2) \quad z^{(\lambda)} = \xi^{\nu_\lambda} \left(\alpha_{0\lambda} + \alpha_{1\lambda} \xi^{\nu_{1\lambda}} + \dots \right),$$

$$\alpha_{i\lambda} = \alpha_{i\lambda}(x'_2, \dots, x'_k).$$

Es bestimmen sich dann bekannterweise die Koeffizienten $\alpha_{0\lambda}$ durch algebroid Gleichungen von der Gestalt:

$$(3) \quad \alpha_{0\lambda}^s + (x'_2, \dots, x'_n)_1 \alpha_{0\lambda}^{s-1} + \dots + (x'_2, \dots, x'_n)_s = 0,$$

wo die $(x'_2, \dots, x'_n)_i$ in der Umgebung der Stelle $x'_i = 0$ konvergente Potenzreihen sind, da sie sich ja rational aus den Koeffizienten der ξ in den f_i von (1a) berechnen lassen, daraus folgt zunächst, daß sich die Koeffizienten $\alpha_{0\lambda}^s$ algebroid in der Umgebung unserer Stelle verhalten und wir haben nur zu zeigen, daß sie in einer von Null verschiedenen Umgebung unverzweigt bleiben, zumal man sie in einer solchen Umgebung als beschränkt voraussetzen kann. Bilden wir die Differenzprodukte aller Zweige, welche sich von einer Seite des PUISSEUXSchen Polygones ableiten lassen, also etwa diejenigen Zweige, welche durch (2) dargestellt werden, so erkennt man, daß das Differenzprodukt der $\alpha_{0\lambda}$, also die Diskriminante der Gleichung (3) Beitrag liefert zum Koeffizienten der niedrigsten wirklich auftretenden Potenz von ξ in der Diskriminante von (1a), dieser ist aber $k(0, x'_2 \dots x'_n)$ und bleibt daher nach Voraussetzung in einer von Null verschiedenen Umgebung unserer Stelle verschieden von Null, daher auch die Diskriminante von (3), was gerade gezeigt werden sollte. *Alle Stellen, wo die Diskriminante sich auf die geforderte Form (1b) bringen läßt, wollen wir als Verzweigungsstellen I. Art, wo dies hingegen nicht der Fall ist, als Verzweigungsstellen II. Art bezeichnen. Alle regulären Punkte der Diskriminante, d. h. falls diese keine Verzweigungspunkte noch Schnittpunkte mit anderen Teilen der Diskriminante sind, sind Verzweigungsstellen I. Art. Für die Umgebung solcher Stellen lassen sich eine oder mehrere Entwicklungen für z von folgender Gestalt angeben:*

$$z = \sum_k \xi^{\nu_k} p_k(x_2, \dots, x_n),$$

woraus man unmittelbar schließt, daß die Verzweigungsgruppe für die Umgebung dieser Stellen zyklisch ist¹⁾, also die Funktionen sich dort

¹⁾ Man vergleiche diesbezüglich mit der Arbeit von W. E. JUNG, „Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers usw.“, Journal für reine u. angew. Math., Bd. 133 (1908).

ganz ähnlich, wie die einer unabhängigen Variablen in der Umgebung ihrer Verzweigungspunkte verhalten.

Wir werden aber andererseits an einem einfachen Beispiele sofort erkennen, daß das Verhalten in der Umgebung der Verzweigungsstellen II. Art ein durchaus verschiedenes ist. Im folgenden werden unsere Untersuchungen sich auf zwei unabhängige Veränderliche beschränken.

Wir untersuchen zunächst diejenige analytische Funktion z der beiden komplexen Variablen x und y , welche durch folgende algebraische Gleichung bestimmt ist:

$$(4) \quad f(z, x, y) = z^3 - 3zx + 2y = 0.$$

Die zu (4) gehörige Diskriminante hat die Form:

$$(4a) \quad D(x, y) = x^3 - y^2.$$

Den beiden unabhängigen komplexen Variablen

$$x = x_1 + ix_2 \quad \text{und} \quad y = y_1 + iy_2$$

entspricht ein vierdimensionaler linearer Raum der vier reellen Variablen x_1, x_2, y_1 und y_2 , den wir im folgenden kurz mit $R_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$ bezeichnen wollen und bilden mit Hilfe der x_i und y_i in ihm ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen Ursprung der Punkt $x_i = y_i = 0$ sei. Dann werden eben nur die Punkte unseres R_4 für z Verzweigungspunkte sein, welche der zweiparametrischen Mannigfaltigkeit

$$D(x, y) = 0$$

entsprechen, diese Mannigfaltigkeit, die im allgemeinen auch aus mehreren nicht zusammenhängenden Teilen bestehen kann, bezeichnet man als *Diskriminantenmannigfaltigkeit von z* .

Wendet man nun auf (4) das eben beschriebene Verfahren an, so findet man, daß dieses offenbar nur im Punkte $x = y = 0$ versagt, sonst aber eine Potenzreihe für z liefert, welche nach Potenzen von ξ^2 fortschreitet. Wir erkennen also, daß längs (4a) zwei Zweige von z zusammenhängen, nun ist die Gleichung (4) irreduzibel, d. h. aber die Monodromiegruppe von (4) muß transitiv sein, dies ist aber nach obigem nur so möglich, daß *in der Umgebung der Stelle $x = y = 0$ sämtliche drei Zweige von z zusammenhängen*. Wir werden daher im folgenden die Umgebung dieser Stelle etwas näher ins Auge fassen. Zu diesem Zwecke denken wir uns um die kritische Stelle $x = y = 0$ eine Kugel vom

Radius r geschlagen, diese wird unsere Diskriminantenmannigfaltigkeit nach einer Kurve schneiden. Projiziert man nun die Kugeloberfläche stereographisch in einen geeigneten dreidimensionalen Raum, so projiziert sich unsere Schnittkurve als eine Kleeblattschlinge¹⁾ Γ (vgl. Figur 1). Wir wollen zunächst die Verzweigung unserer Funktion z in diesem Raume, oder was auf das gleiche hinauskommt, auf obiger Kugelmannigfaltigkeit ins Auge fassen. Es ist also unser Raum längs der Verzweigungskurve Γ so aufzuschneiden, daß eine Umlaufung der Γ in dem so aufgeschnittenen Raume unmöglich wird. Dies kann erreicht werden, indem wir durch Γ eine zweiseitige Fläche hindurchlegen und längs dieser aufschneiden, jede zweiseitige Fläche aber, welche durch unseren Knoten Γ gelegt wird, muß Selbstdurchschneidungen aufweisen. Wählt man als Aufschneidungsfläche einen Zylinder, so bietet sich uns ein Bild dar, wie es die Figur 1 wiedergibt. In dem so aufgeschnittenen Raume ist nun z eindeutig und wir wollen ein solches Gebiet unserer Variablen als *ein Blatt* bezeichnen, wir erhalten also für unseren speziellen Fall drei Blätter, welche in geeigneter Weise längs unseres Zylinders zusammenzuheften sind. Aus dem Früheren ist zunächst klar, daß die Verzweigung längs der Kurvenbögen $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$ unserer Kurve Γ abteilungsweise die gleiche sein muß, aber sehr wohl können sich diese Verzweigungen beim Übergang von einem Kurvenbogen zum anderen ändern. Es wurden daher die einzelnen Verzweigungen verschieden bezeichnet, und zwar mit A_0 , A_1 und A_2 , die in der Figur eingezeichneten orientierten Kreise geben den Umlaufungssinn an, in welchen die Kurve Γ umlaufen werden muß, damit sich gerade A_0 , A_1 und A_2 als Verzweigungen ergeben. Um den Zusammenhang zwischen den

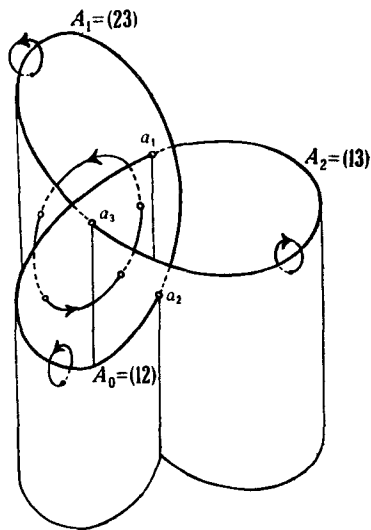


Fig. 1.

Blätter zusammenzuheften sind. Aus dem Früheren ist zunächst klar, daß die Verzweigung längs der Kurvenbögen $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$ unserer Kurve Γ abteilungsweise die gleiche sein muß, aber sehr wohl können sich diese Verzweigungen beim Übergang von einem Kurvenbogen zum anderen ändern. Es wurden daher die einzelnen Verzweigungen verschieden bezeichnet, und zwar mit A_0 , A_1 und A_2 , die in der Figur eingezeichneten orientierten Kreise geben den Umlaufungssinn an, in welchen die Kurve Γ umlaufen werden muß, damit sich gerade A_0 , A_1 und A_2 als Verzweigungen ergeben. Um den Zusammenhang zwischen den

¹⁾ Die hierzu erforderlichen Rechnungen sollen an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden, da sie sich aus den in den Abschnitten III und IV gewonnenen allgemeinen Resultaten unmittelbar ergeben.

Verzweigungen A_0 , A_1 , A_2 festzustellen, umlaufen wir die Doppelerzeugenden unseres Zylinders. In unserer Figur wurde die Umlaufung der durch den Punkt a_3 hindurchgehenden Doppelerzeugenden eingezeichnet. Diese Umlaufungen lassen sich aber auf einen Punkt zusammenziehen, daher muß notwendigerweise die längs eines solchen Weges erhaltene Verzweigungssubstitution gleich der Identität sein und wir erhalten Relationen von folgender Bauart:

$$(5) \quad A_0^{-1} A_1 A_0 A_2^{-1} = 1.$$

Auf diese Weise erkennt man leicht, daß wir für unseren speziellen Fall $A_0 = (12)$, $A_1 = (23)$, $A_2 = (13)$ wählen können, womit uns auch gelungen ist, die Verzweigung in der Umgebung der kritischen Stelle $x = y = 0$ zu ermitteln. Es zeigt also bereits unser einfaches Beispiel, daß die Verzweigungsgruppe in der Umgebung der singulären Stellen II. Art durchaus nicht zyklisch sein muß, sondern wie im obigen Falle bereits die entsprechende symmetrische Gruppe ist. Die Relationen (5) wollen wir im folgenden als WIRTINGERSCHE Relationen bezeichnen.

Wir haben aus obigem erkannt, daß es die topologischen Verhältnisse der Kurve Γ sind, welche dieses merkwürdige Verhalten der Funktionen in der Umgebung der Verzweigungsstellen II. Art bedingen.

Während wir im obigen Beispiele nur eine einzige Diskriminantenmannigfaltigkeit hatten, welche auch in der Umgebung der kritischen Stelle zusammenhängend blieb und die Kurve Γ verknötet war, wollen wir im folgenden ein Beispiel geben, wo die Diskriminante in zwei irreduzible Teile zerfällt. Unser kritischer Punkt liegt dann in den Schnittpunkten dieser beiden Mannigfaltigkeiten, die im übrigen so gewählt wurden, daß sie keine singulären Punkte besitzen, daß sich also außer obigem Punkt keine weiteren Verzweigungspunkte II. Art für z ergeben. Wir definieren diese Funktion z durch folgende Gleichung:

$$(6) \quad f(z, x, y) = 2z^3 - 3z^2x + y = 0.$$

$$(6a) \quad D(x, y) = (x^3 - y)y.$$

Wir erkennen sofort, daß die einzige kritische Stelle, welche für uns in Betracht kommt, die Stelle $x = y = 0$ ist. Führen wir nun in ganz analoger Weise wie früher die stereographische Projektion ein so erhalten wir, entsprechend der Mannigfaltigkeit $x^3 - y = 0$, eine Bildkurve Γ und entsprechend $y = 0$ eine Kurve P (vgl. Figur 2). Sowohl Γ als auch P sind topologische Kreise, die sich aber, wie unsere Figur angibt, verketteten. Deshalb durchsetzen sich unsere Aufschneidungszylinder und wir können längs dieser Schnitterzeugenden die WIRTINGERISCHEN Relationen bilden und finden dann leicht die zu den

einzelnen Teilen von Γ und P gehörigen Verzweigungen, die auch in der Figur eingetragen wurden. Im übrigen erhalten wir für die Umgebung unserer Stelle $x = y = 0$ die gleiche Gruppe wie im vorhergehenden Beispiele.

Diese beiden Beispiele zeigten uns, daß es gerade die topologischen Verhältnisse der Diskriminantenmannigfaltigkeit sind oder genauer die der stereographischen Bildkurven Γ , d. h. deren Verkettungen und Verknotungen, die das abweichende Verhalten der Funktion z in der Umgebung der Verzweigungsstellen II. Art bedingen, und diese liefern wieder ihrerseits mit Hilfe der WIRTINGERSchen Relationen definierende Relation für die möglichen Gruppen.

Es drängen sich einem zunächst folgende zwei Fragen auf. Erste Frage: Welche topologische Verhältnisse liefern Diskriminantenmannigfaltigkeiten in der Umgebung ihrer Punkte, wo sich diese algebroid verhalten? Zweite Frage: Wenn die topologischen Verhältnisse von Diskriminantenmannigfaltigkeiten vorgegeben sind, welche Gruppen ergeben sich dann mit Hilfe der WIRTINGERSchen Relationen?

Diese beiden Fragen werden eingehend untersucht in den folgenden Teilen III und IV. Sind erst diese beiden Fragen gelöst, dann kann man sich den weiteren Fragen zuwenden, die sich hier ergeben. So sind es vor allen die Bestimmung der Verzweigungsgruppe, ferner das Verhalten solcher Funktionen nicht nur in der Umgebung einer Stelle, sondern auch im großen und endlich die Frage, gibt es zu vorgelegten möglichen topologischen Verhältnissen und einer dazugehörigen Gruppe immer analytische Funktionen, welche in der Umgebung, etwa der Stelle $x = y = 0$, eine Diskriminantenmannigfaltigkeit besitzen, die gerade obige vorgegebenen topologischen Verhältnisse zeigt und die vorgegebene Gruppe zur Verzweigungsgruppe hat? Diese Fragen sollen in zwei weiteren Abschnitten, die demnächst erscheinen werden, behandelt werden.

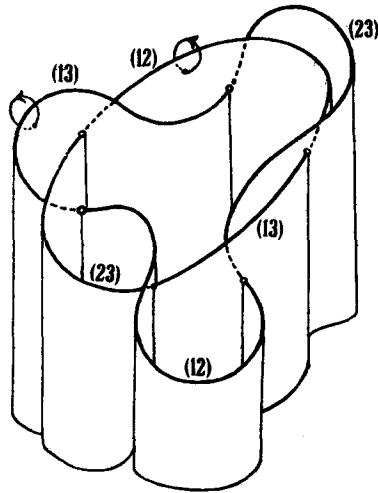


Fig. 2.

Inzwischen können wir alle diese Fragen ein klein wenig verallgemeinern, wenn wir anstatt der Verzweigung von z allgemeiner eine Monodromiegruppe annehmen, d. h. die n -Zweige z_1, z_2, \dots, z_n unserer Funktion sollen beim Umlauf um die auch jetzt als algebroid vorausgesetzte Diskriminantenmannigfaltigkeit, in linear Kombinationen ihrer selbst übergehen. Die folgenden Abschnitte wurden auch auf diese allgemeinere Frage eingestellt.

III. Klassifikation der Singularitäten algebroider Kurven.

Der Abschnitt II dieser Arbeit hatte uns gezeigt, daß die Bestimmung der Verzweigung algebroider Funktionen oder Kurven von zwei komplexen Variablen in der Umgebung ihrer Verzweigungsstellen II. Art notwendigerweise auf die Klassifikation ihrer algebraischen Singularitäten führt.

Wie bereits im vorhergehenden angedeutet wurde, können wir jeder sich algebroid verhaltenden Kurve von der Gleichung $d(x, y) = 0$ eine Raumkurve oder mehrere solche zuordnen, die singularitätenfrei sind und deren topologische Invarianten zur Klassifikation der algebraischen Singularitäten verwendet werden.

Diese Einteilung der algebroiden Singularitäten besitzt nicht nur den großen Vorteil, daß sie sämtliche Fälle, auch die reduziblen Kurven, in sich einschließt, sondern daß sie auch rein geometrischer Natur ist und in gleicher Weise die reellen als auch die imaginären Singularitäten erfaßt.

1. Die Umgebung einer Stelle.

Ist $f(x, y)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen

$$x = x_1 + ix_2 \quad \text{und} \quad y = y_1 + iy_2,$$

so läßt sich

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

als die Gleichung einer zweiparametrischen reellen Mannigfaltigkeit M im vierdimensionalen Raume $R_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$ auffassen.

Wir stellen uns die Aufgabe, die topologischen Verhältnisse in der Umgebung eines Punktes, der durch (1) dargestellten Mannigfaltigkeit im R_4 , zu untersuchen, insofern dieser keine wesentlich singuläre Stelle (1) ist.

Faßt man zunächst die regulären Stellen von (1) ins Auge, so gilt bekannterweise für jede solche Stelle eine Entwicklung folgender Art:

$$(2a) \quad y - b = (x - a)^p \mathfrak{B}_1(x - a)$$

oder

$$(2b) \quad x - a = (y - b)^q \mathfrak{P}_2(x - \bar{b}),$$

wo p und q ganze positive Zahlen und $\mathfrak{P}_i(u)$ Potenzreihen in der komplexen Veränderlichen u , die für $u = 0$ nicht verschwinden, mit einem von Null verschiedenen Konvergenzkreise r_i . Falls $p = q = 1$, erkennt man unmittelbar, daß in hinreichend kleiner Umgebung der Stelle (a, b) die Mannigfaltigkeit M den topologischen Charakter einer Elementarmannigfaltigkeit, d. h. auf eine Ebene, bei gleichzeitiger Transformation des sie umgebenden Raumes in sich, eindeutig und stetig abbildbar ist.

Es ist deshalb nur notwendig, die Umgebung der Verzweigungsstellen von $y(x)$ bzw. $x(y)$ entsprechend der Gleichung (1) sowie die der Schnittpunkte einzelner irreduzibler Teile oder Zweige von M zu untersuchen, denn die Pole von (1) können durch die Transformation $x' = 1/x$ bzw. $y' = 1/y$ unter obige Stellen eingeordnet werden.

Die Mitteln zu obigen Untersuchungen liegen, wie bereits erwähnt, in der stereographischen Projektion, indem die so erhaltenen Bilder von M sich als Kurven im dreidimensionalen Raume darbieten, die auf Verknotungen und eventuell vorhandenen Verkettungen zu untersuchen sind. Der Fall der Verkettung kann offenbar nur im Falle mehrerer Kurven bzw. Zweige eintreten.

2. Die stereographische Projektion.

Die Koordinaten seien mit x_1, x_2, y_1 und y_2 entsprechend den komplexen Veränderlichen

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2$$

bezeichnet. Man wähle um den Ursprung obigen orthogonalen Koordinatensystemes eine vierdimensionale Kugel:

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2$$

und projiziere auf einen sie im Punkte

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0, \quad y_2 = -r$$

tangierenden linearen Raum

$$y_2 = -r.$$

Als Projektionszentrum ist daher der Punkt:

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0, \quad y_2 = r$$

zu wählen.

Als Koordinatenachsen ξ , η , ζ unseres tangierenden Projektionsraumes wählen wir parallel zu den Achsen x_1, x_2, y_1 des oben erwähnten R_4 .

Die Koordinaten des Bildes eines Punktes $x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0$, der auf obiger Kugel liegt, sind:

$$(1) \quad \boxed{\xi = \frac{2r x_1^0}{r - y_2^0}}, \quad \boxed{\eta = \frac{2r x_2^0}{r - y_2^0}}, \quad \boxed{\zeta = \frac{2r y_1^0}{r - y_2^0}},$$

$$x_1^{02} + x_2^{02} + y_1^{02} + y_2^{02} = r^2.$$

Wir bestimmen zunächst die Gleichungen der Bilder der (x_1, x_2) - und (y_1, y_2) -Ebene, also Ebenen, denen in unseren R_4 Gleichungen von folgender Gestalt zukommen:

$$y_1 = k_1, \quad y_2 = k_2$$

bzw.

$$x_1 = l_1, \quad x_2 = l_2.$$

Es sei die (x_1, x_2) -Ebene gegeben durch die erste Zeile der obigen Gleichungen. Als Schnitt mit unserer Kugel, die wir im folgenden kurz mit κ bezeichnen werden, erhalten wir die Kurve:

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 = -(k_1^2 + k_2^2) + r^2 = a^2, \quad y_1 = k_1, \quad y_2 = k_2,$$

daher für das stereographische Bild:

$$(2a) \quad \xi = \frac{-2r x_1}{k_2 - r}, \quad \eta = -\sqrt{a^2 - x_1^2} \frac{2r}{k_2 - r}, \quad \zeta = \frac{-2r k_1}{k_2 - r}.$$

Führt man für:

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = a \sin \varphi$$

ein, so ergibt sich aus (2a):

$$(2b) \quad \xi = \frac{2ra \cos \varphi}{r - k_2}, \quad \eta = \frac{2ra \sin \varphi}{r - k_2}, \quad \zeta = \frac{2r k_1}{r - k_2}.$$

Die Abbildung der (x_1, x_2) -Ebene liefert daher Kreise in Ebenen senkrecht zur ζ -Achse, deren Mittelpunkte auf der ζ -Achse liegen.

Ziehen wir nun in den Kreis unserer Betrachtungen eine (y_1, y_2) -Ebene, so erhalten wir als Schnittkurve mit der Kugel κ :

$$(3) \quad y_2^2 = r^2 - l_1^2 - l_2^2 - y_1^2 = b^2 - y_1^2, \quad x_1 = l_1, \quad x_2 = l_2$$

und daher für das stereographische Bild:

$$(3a) \quad \xi = \frac{2r l_1}{r - y_2}, \quad \eta = \frac{2r l_2}{r - y_2}, \quad \zeta = \frac{2r \sqrt{b^2 - y_2^2}}{r - y_2}.$$

Durch einfache Umformung von (3a) erhält man:

$$(3b) \quad \zeta^2 + \left(\mu - \frac{2r^2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right)^2 = \left(\frac{2r b}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right)^2, \\ \mu = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}.$$

Das stereographische Bild einer (y_1, y_2) -Ebene ist daher ein in einer die ζ -Achse enthaltenden Ebene gelegener Kreis. Wir wollen im folgenden alle die ζ -Achse enthaltenden Ebenen kurz als *Meridianebenen*, die auf die ζ -Achse normalstehenden Ebenen hingegen als *Äquatorebenen* bezeichnen.

Die Bilder derjenigen (y_1, y_2) -Ebenen, für die $x_1 : x_2 = l_1 : l_2 = \text{konstant}$, liegen, wie man aus (3a) oder (3b) unmittelbar erkennt, in der gleichen Meridianebene. Sie bilden ein Kreisbüschel mit den imaginären Grundpunkten $u = 0$, $\zeta = \pm 2ri$. Die Bilder der anderen (y_1, y_2) -Ebenen ergeben sich durch Rotation dieses Kreisbüschels um die ζ -Achse.

Man erkennt daraus, daß sich die stereographischen Bilder der (x_1, x_2) - und (y_1, y_2) -Ebenen, wie die Parallel- bzw. Meridiankreise von Tori mit ζ als Achse, anordnen.

Dem Punkte

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0, \quad y_2 = r$$

entsprechen die uneigentlichen Elemente unseres (ξ, η, ζ) -Raumes. Da wir im folgenden aus den Meridianschnitten der Bilder unserer Mannigfaltigkeiten, fast immer vollkommen Aufschluß über das Wesen des Gesamtbildes erhalten, macht sich in einzelnen Fällen die zuletzt erwähnte Tatsache unangenehm bemerkbar. Diesem Umstande Rechnung tragend, transformieren wir das in unserer Ebene gelegene Kreisbüschel mit Grundpunkten $u = 0$ $\zeta = \pm 2ri$ in ein konzentrisches.

Wir greifen also eine feste Meridianebene heraus und nehmen für die Ebene ζ , μ als Koordinatenachse. Das oben erwähnte Kreisbüschel können wir etwa durch die beiden Gleichungen

$$k_1(\zeta, \mu) = \zeta^2 + (\mu - 2r)^2 = 0$$

und

$$k_2(\zeta, \mu) = \mu = 0$$

als $k_1 + \lambda k_2$ festlegen. Übt man nun auf dieses Kreisbüschel eine Inversion mit dem Kreis:

$$\zeta^2 + (\mu - 2r)^2 = 8r^2$$

als Fixkreis aus, so geht obiges Büschel in ein konzentrisches über, dessen Mittelpunkt der Ursprung

$$\zeta = 0, \quad \mu = 0$$

ist. Man erkennt auch sofort, daß die Kreise, deren Mittelpunkte auf der negativen μ -Achse liegen, vollständig vom Kreise

$$\zeta^2 + \mu^2 = 4r^2$$

eingeschlossen werden. Dies ist aber der große Vorteil, den uns das konzentrische Kreisbüschel gegenüber dem früheren darbietet. Bezeichnen wir die inversen Koordinaten mit ζ^* und μ^* , so ergeben sich in einfachster Weise

$$(4) \quad \boxed{\chi^* = \frac{2r y_2}{r \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}, \quad \boxed{\mu^* = \frac{2r y_1}{r \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}},$$

wo $\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ zunehmen, je nachdem es sich um Punkte mit negativem bzw. positivem μ handelt.

Mit diesen einfachen Ergebnissen ausgerüstet, können wir zur Bestimmung der topologischen Verhältnisse unserer Mannigfaltigkeiten übergehen.

3. Die irreduziblen Mannigfaltigkeiten $ax^n + by^m = 0$.

Es müssen infolge der Irreduzibilität unserer Mannigfaltigkeit $(n, m) = 1$, d. h. relativ prim sein.

Für die durch obige Gleichung festgelegte Mannigfaltigkeit „ M “ können wir für die Umgebung des Punktes

$$x = 0, \quad y = 0$$

folgende Parameterdarstellung nach dem komplexen Parameter t angeben:

$$(5) \quad x = \alpha t^m, \quad y = \beta t^n,$$

wo α und β Konstante, die in bekannter Weise nur von a und b abhängen.

Wir können für

$$\alpha = a e^{ic} \quad \text{und} \quad \beta = b e^{id}$$

in (5) einführen, gleichzeitig ersetzen wir den komplexen Parameter t durch die beiden reellen ϱ und φ derart, daß

$$t = \varrho e^{i\varphi}$$

wird. Unsere reelle zweiparametrische Mannigfaltigkeit M besitzt somit im $R_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$ folgende Parameterdarstellung:

$$(5a) \quad \begin{cases} x_1 = a \varrho^m \cos(m\varphi + c), \\ x_2 = a \varrho^m \sin(m\varphi + c), \\ y_1 = b \varrho^n \cos(n\varphi + d), \\ y_2 = b \varrho^n \sin(n\varphi + d). \end{cases}$$

Schneiden wir nun unsere Mannigfaltigkeit M mit der Projektionskugel \varkappa , so wird der Parameter ϱ der Bedingung:

$$(6) \quad b^2 \varrho^{2n} + a^2 \varrho^{2m} = r^2$$

unterworfen, während φ vollständig freibleibt.

Man kann zunächst für (6) zeigen, daß für reelles r stets nur eine positive Wurzel ϱ^2 vorhanden¹⁾, für ϱ also zwei reelle Wurzeln, die sich nur um ihr Vorzeichen unterscheiden, also wie eine einfache Überlegung zeigt, stets die gleiche Schnittkurve darstellen werden.

Man findet somit für die Schnittkurve Γ unserer Mannigfaltigkeit M mit der Kugel \varkappa :

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sigma^m \cos(m\varphi + c), \\ x_2 &= a \sigma^m \sin(m\varphi + c), \\ y_1 &= b \sigma^n \cos(n\varphi + d), \\ y_2 &= b \sigma^n \sin(n\varphi + d), \end{aligned}$$

wo σ etwa die positivreelle Wurzel der Gleichung (6) ist.

Bezeichnen wir mit Γ das stereographische Bild unserer Raumkurve Γ , so erkennen wir, daß Γ' auf einer Fläche von folgender Gleichung liegt:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2ra\sigma^m \cos \varphi}{r - \sigma^n b \sin \psi}, \\ \eta = \frac{2ra\sigma^m \sin \varphi}{r - \sigma^n b \sin \psi}, \\ \zeta = \frac{2ra\sigma^n \cos \psi}{r - \sigma^n b \sin \psi}, \end{cases}$$

wo φ und ψ die beiden voneinander unabhängigen Parameter sind.

¹⁾ Die linke Seite von (6) ist ja eine monoton wachsende Funktion von ϱ .

Die durch (7) dargestellte Fläche gibt sich als eine Rotationsfläche mit der ζ -Achse als Drehachse zu erkennen. Für den Meridian obiger Fläche erhalten wir die Gleichung:

$$(7a) \quad \zeta^2 + \left(\mu - \frac{2r^2}{a\sigma^m} \right)^2 = \left(\frac{2rb\sigma^{n-m}}{a} \right)^2,$$

woraus unmittelbar folgt, daß unsere Fläche ein Torus ist.

Berücksichtigt man, daß unsere Raumkurve Γ' aus (7) hervorgeht, wenn wir für φ und ψ , $m\varphi + c$ bzw. $n\varphi + d$ setzen, so ergibt sich für Γ' eine auf der Fläche (7) gelegene geschlossene Kurve, die sich n -mal im Meridiane und gleichzeitig m -mal im Äquator herum windet.

Deutet man den Parameter φ in der Parameterdarstellung unserer Kurve Γ' als Zeit, so erkennen wir, daß die Kurve Γ' den Meridian nicht gleichmäßig durchläuft, es ist aber auch evident, daß Γ' durch eine solche Kurve, die wir etwa mit Γ^0 bezeichnen wollen, ersetzt werden kann, die sich gleichförmig im Meridiane als auch im Äquator windet, da es ja nur auf die topologischen Verhältnisse ankommt. Letztere Kurve Γ^0 können wir aber in einfachster Weise konstruieren.

Die Kurve Γ' oder die Kurve Γ^0 schneidet den höchsten Parallelkreis ihres Toruses in gerade n -Punkte, die wir als die n -Höchststellungen unserer Kurve Γ' oder Γ^0 bezeichnen wollen. Verbindet man zwei in der Reihenfolge der Durchlaufung der Kurve aufeinander folgende Höchststellungen durch die Punkte dieser Kurve, so wird dieses Kurvenstück durch $(m-1)$ -Kurvenstücke überkreuzt. Wir wollen den Begriff der Höchststellung noch etwas erweitern, indem wir unter diesem Worte alle Punkte unserer Kurve Γ' oder Γ^0 verstehen, die in der Umgebung eines der oben definierten Punkte liegen, die aber durch keine Überkreuzung voneinander getrennt werden. Man kann dann aber sagen: *Zwei in der Reihenfolge der Durchlaufung der Kurve aufeinander folgende Höchststellungen werden durch ein Kurvenstück miteinander verbunden, das von $(m-1)$ untereinander verschiedenen Höchststellungen überkreuzt wird.* Anstatt von einem höchsten Punkt der Kurve, bei der Definition der Höchststellung, auszugehen, kann man augenscheinlich auch von irgendeinem Punkte unserer Kurve Γ' oder Γ^0 ausgehen, ohne daß die wesentliche Eigenschaft des Verbindungsstückes zweier aufeinander folgender Höchststellungen verlorengeht.

Entspricht daher dem Parameterwerte $t = t_0$ in (5) ein Punkt der Höchststellung, so können wir die eingangs erwähnte Aufschneidung unseres vierdimensionalen Bereiches der Variablen x_1, x_2, y_1 und y_2 stets so wählen, daß die übrigen $(n-1)$ Höchststellungen durch die Parameterwerte

$$\varepsilon_i \text{ to} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

bestimmt werden, wenn die ε_i die n -ten Einheitswurzeln sind.

Die Einführung des Begriffes der Höchststellung wird uns, namentlich in gruppentheoretischer Hinsicht, ganz wesentliche Vereinfachungen gestatten.

Endlich sei noch bemerkt, daß alle obigen Ergebnisse zeigen, daß unsere topologischen Verhältnisse in dem einfachsten Falle, durch die Charakteristiken des lokaluniformisierenden Parameters in (5) bestimmt sind. Diese einfache Tatsache drängt uns die Frage auf, wie sich die topologischen Verhältnisse zu den Charakteristiken des jeweiligen lokaluniformisierenden Parameters verhalten. Die Beantwortung dieser Frage ist eines der vornehmsten Ziele dieses Abschnittes der vorliegenden Arbeit.

4. Die Verkettung von Mannigfaltigkeiten

$$a_i x^{n_i} + b_i y^{m_i} = 0.$$

Wir setzen zunächst nur zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 voraus mit den Gleichungen

$$(8) \quad a_i x^{n_i} + b_i y^{m_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

und wo $(n_i, m_i) = 1$, d. h. relativ prim sind.

Die beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 besitzen im Punkte $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ einen Schnittpunkt, außerdem kann dieser Punkt für jede der beiden Mannigfaltigkeiten ein Verzweigungspunkt sein. Es läßt sich zunächst um den Nullpunkt eine Umgebung angeben, die außer diesem Punkte, frei von weiteren Schnittpunkten bzw. singulären Punkten der Mannigfaltigkeiten ist. Nur diese Umgebung des Nullpunktes wollen wir in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

Aus dem vorhergehenden können wir sofort folgern, daß die stereographischen Bilder Γ'_1 und Γ'_2 unserer Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 zwei ganz bestimmte Torusknoten sind, und zwar gehören die Meridiankreise der beiden Torusflächen, dem eingangs erwähnten Kreisbüschel der Meridianebenen des Bildraumes $R(\zeta, \eta, \xi)$ an. Hiermit ist aber schon, abgesehen von dem speziellen Falle gleicher Torusknoten, die Trennung der Bildknoten erreicht, somit auch deren Verkettung festgelegt.

Wir haben daher im folgenden unser Augenmerk nur auf den Fall gleicher Tori zu legen und des weiteren zu bestimmen, welcher der beiden Toruse der innere bzw. äußere ist.

Um die Reihenfolge obiger Torusflächen zu bestimmen ist nur notwendig, die Radien der zugehörigen Meridiankreise abzuschätzen.

Für die durch (8) definierte Mannigfaltigkeit M_1 wählen wir die Parameterdarstellung:

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = a \varrho^m \cos(m\varphi + \alpha), \\ x_2 = a \varrho^m \sin(m\varphi + \alpha), \\ y_1 = \varrho^n \cos n\varphi, \\ y_2 = \varrho^n \sin n\varphi. \end{cases}$$

Für die Schnittkurve von M_1 mit der Projektionskugel α ergibt sich dann die Bedingung:

$$(10) \quad a^2 \varrho^{2m} + \varrho^{2n} = r^2,$$

da ϱ reell und positiv, geht ϱ mit r gegen Null.

Wir unterscheiden die drei Fälle:

$$m < n, \quad m > n \quad \text{und} \quad m = n = 1.$$

Für den ersten Fall, wo also $m < n$, bestimmt sich die reelle Wurzel ϱ aus (10) wie folgt:

$$\varrho = r^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{m}} \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{r^2} \right)^{\frac{1}{2m}}$$

$$\varrho = a^{-\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}} \left(1 - a^{-\frac{2n}{m}} r^{\frac{2n}{m}-2} + \dots \right)^{\frac{1}{2m}}$$

und somit

$$(11) \quad \varrho = a^{-\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{2ma^{\frac{1}{m}}} r^{\frac{2(n-m)+1}{m}} + \dots,$$

$$(11a) \quad a\varrho^m = r - \frac{1}{2a^{\frac{n}{m}}} r^{\frac{2n}{m}-1} + \dots$$

Aus (7a) ergibt sich aber die Koordinate für den Mittelpunkt des Parallelkreises mit

$$\mu_0 = \frac{2r^2}{a\varrho^m},$$

es ist daher, die Ordnung von μ_0 und mit ihr die des Radius um so größer als es der Bruch $\frac{n}{m}$ ist.

Im zweiten Falle, wo $m > n$, ergibt sich aus (10) analog wie oben für:

$$\varrho = r^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{a^2}{2n} a^2 r^{\frac{(m-n)}{n}} + \dots \right)$$

und für

$$(11b) \quad a\varrho^m = ar^{\frac{m}{n}} - \frac{m}{2n} a^3 r^{\frac{3m-2n}{n}} + \dots,$$

daher wird die Ordnung von μ_0 und mit ihr die vom Radius unseres Parallelkreises um so größer, je größer $\frac{n}{m}$ ist.

Endlich erhält man für den dritten Fall

$$(11c) \quad \begin{aligned} m &= n = 1, \\ \varrho &= \frac{r}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Ordnung des Radius in r für den i -ten Fall obiger Einteilung mit w_i , so gilt

$$w_1 > w_3 > w_2,$$

dies entspricht aber gerade den Brüchen:

$$\left(\frac{n_1}{m_1}\right) > \left(\frac{n_3}{m_3}\right) > \left(\frac{n_2}{m_2}\right).$$

Da wir aber das r hinreichend klein wählen können, so wird die Größe des Radius R unseres Parallelkreises einzig und allein durch das Verhältnis der Charakteristiken des lokaluniformisierenden Parameters bestimmt.

Sind somit zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 mit den Charakteristikenpaaren (m_1, n_1) bzw. (m_2, n_2) gegeben und ist

$$(12) \quad \frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2}, \quad \text{so gilt} \quad R_1 > R_2,$$

sofern R_i der Radius des Parallelkreises vom Torus der Mannigfaltigkeit M_i ist.

Wenn hingegen

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$

also $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$, so erkennt man aus (11a), (11b) bzw. (11c) unmittelbar, daß $a\varrho^m$ um so größer wird, je größer a wird.

Somit wird der Radius des Parallelkreises um so kleiner, je größer a wird, es besteht daher:

$$(12a) \quad a_1 < a_2 \quad R_1 > R_2,$$

wenn nur

$$m_1 = m_2 \quad \text{und} \quad n_1 = n_2.$$

Sind außer gleichen Charakteristikenpaaren auch die a_i einander gleich und die Mannigfaltigkeiten M_i voneinander verschieden, so ist dies nur so möglich, daß

$$\alpha_1 \neq \alpha_2,$$

wie ein Blick auf (9) uns lehrt. *Dann und nur dann liegen die Bildkurven Γ_i auf dem gleichen Toruse und gehen auseinander durch Verdrehung hervor.*

Die Gültigkeit der Relationen (12) und (12a) wurde zunächst für eine hinreichend kleine Umgebung des Nullpunktes nachgewiesen, es läßt sich aber in einfachster Weise zeigen, daß sie für jede Umgebung des Nullpunktes bestehen, die außer diesem Punkt keine weiteren Schnittpunkte noch singuläre Punkte unserer Mannigfaltigkeiten enthält; denn angenommen, es würde dies nicht der Fall sein, dann müßten für ein bestimmtes r Schnittpunkte der Bildkurven auftreten, denen aber Schnittpunkte der Mannigfaltigkeiten entsprechen, was ein Widerspruch ist.

Sind endlich mehr als zwei Mannigfaltigkeiten M_i gegeben, so können wir deren Charakteristikenpaare ohne Einschränkung der Allgemeinheit als relativ prim voraussetzen und die Verkettung der Bildkurven wird analog wie früher durch (12) bzw. (12a) bestimmt.

Während wir für den Fall einer einzigen irreduziblen Mannigfaltigkeit zur Bestimmung der topologischen Verhältnisse nur die Charakteristiken benötigten, müssen wir im Falle mehrerer Mannigfaltigkeit zur restlosen Bestimmung der topologischen Verhältnisse noch die a unter Umständen berücksichtigen. Die Größen a_i wollen wir im folgenden als die *Indizes* unserer Mannigfaltigkeit M_i bzw. der Bildkurven Γ_i bezeichnen.

5. Der allgemeine Fall relativ primer Charakteristiken.

Wir wählen eine in der Umgebung der Stelle

$$x = y = 0$$

analytische Mannigfaltigkeit M , der wir die einzige weitere Beschränkung auferlegen, daß das Charakteristikenpaar (m, n) für diese Stelle relativ prim ist. Wir haben somit für die Umgebung dieser Stelle eine konvergente Parameterdarstellung:

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= t^m (a_m + t a_{m+1} + \dots), \\ y &= t^n, \end{aligned}$$

wo

$$(m, n) = 1 \quad \text{und} \quad a_m \neq 0.$$

Dieser Mannigfaltigkeit stellen wir eine andere M_0 gegenüber, welche die gleichen Charakteristiken für obige Stelle wie M besitzt, aber vom Typus der bereits behandelten Mannigfaltigkeiten ist.

Die Parameterdarstellung von M_0 sei:

$$(13a) \quad \begin{aligned} x &= t^m a_m, \\ y &= t^n, \end{aligned}$$

Wir wählen eine (x_1, x_2) -Ebene, für die also

$$y = \text{konst.}$$

wird und schneiden mit ihr sowohl die Mannigfaltigkeit M als auch die M_0 .

Die so erhaltenen Schnittpunkte von M bezeichnen wir mit:

$$(14) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

bzw. die von M_0 mit:

$$(14a) \quad x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \dots, x_{0,n},$$

Ist t_0 ein Parameterwert, der einen Schnittpunkt (14) liefert, den wir mit x_1 bezeichnen, so liefert derselbe Wert t_0 auch einen Punkt der Reihe (14a), den wir mit $x_{0,1}$ bezeichnen werden. Alle weiteren Schnittpunkte sowohl der Reihe (14) als auch der (14a) ergeben sich aus den $(n-1)$ weiteren Parameterwerten $\varepsilon_i t_0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), wenn ε_i die n -ten Einheitswurzeln sind.

Dies ermöglicht uns, die Punkte der Reihe (14) eindeutig auf die Punkte der Reihe (14a) zu beziehen und umgekehrt, indem man dem Parameterwert $\varepsilon_i t_0$ die Punkte x_i bzw. x_{0i} zuweist.

Berücksichtigt man (13) und (13a) so erhält man für den Abstand zweier Punkte aus (14) und (14a):

$$|x_i - x_{0i}| = |t^{m+1}| \cdot |a_{m+1} + t a_{m+2} + \dots|$$

bzw.

$$|x_j - x_{0j}| = |(\varepsilon_j^m - \varepsilon_i^m) a_m t^m + (\varepsilon_j t)^{m+1} a_{m+1} + \dots|.$$

Da wir im Konvergenzbereiche von (13) verbleiben, so gilt:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} t + \dots| \leq A$$

für:

$$(15b) \quad |t| < k > 0$$

daher:

$$\begin{aligned} |x_i - x_{0i}| &\leq |t^{m+1}| A \\ |x_j - x_{0j}| &\geq |t^m| |a_m (\varepsilon_j^m - \varepsilon_i^m)| - |t^{m+1}| A > 0 \end{aligned}$$

wählen wir t so daß:

$$(15a) \quad |t| < \frac{|a_m (\varepsilon_j^m - \varepsilon_i^m)|}{2A} > 0$$

so gilt sicher

$$(15) \quad |x_j - x_{0j}| > |x_r - x_{0r}|, \quad i \neq j, \quad (i, j, r = 1, 2, \dots, n).$$

(15) bleibt somit für jeden durch (15a) und (15b) beschränkten Wert bestehen, also für alle jene Punkte (14) bzw. (14a), die in (x_1, x_2) -Ebenen liegen, die einen hinreichend kleinen Abstand vom Punkte $x = y = 0$ besitzen.

Verbinden wir nun die Punkte

$$x_i \text{ und } x_{0i}$$

durch Gerade in jeder Ebene hinreichend nahe dem Nullpunkt zu gelegen, so geben die Geradenstücke zunächst eine Transformation von M auf M_0 an, wenn wir nur jene Teile unserer beiden Mannigfaltigkeiten in Betracht ziehen, die in hinreichend kleiner Umgebung des Nullpunktes liegen. Diese Transformation ist zunächst in jeder (x_1, x_2) -Ebene, obiger Eigenschaft eindeutig bestimmt und stetig, ohne das Durchsetzungen der Mannigfaltigkeit auftreten können. *Man folgert daraus unmittelbar, daß sich die topologischen Verhältnisse der Mannigfaltigkeit M , in hinreichend kleiner Umgebung des Nullpunktes durch jene von M_0 ersetzen lassen.*

Sollte die Umgebung (15a) kleiner als die von (15b) sein, so können wir durch den bereits im vorhergehenden ausgeführten Weg, die Ersetzung von M durch M_0 auf einen ganzen Bereich (15b) erstrecken.

Es läßt sich also speziell das stereographische Bild Γ' der Mannigfaltigkeit M durch jenes Γ'_0 von M_0 ersetzen.

Entspricht daher einem Parameterwerte t_0 ein Punkt einer Höchststellung von M bzw. Γ' , so ergeben sich die $(n-1)$ weiteren Höchststellungen durch die Parameterwerte $\varepsilon_i t_0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) und das aufeinander folgende Höchststellungen verbindende Kurvenstück wird von $(m-1)$ Höchststellungen überkreuzt.

Also auch in unserem allgemeinen Falle werden die topologischen Verhältnisse durch die Charakteristiken restlos festgelegt. Wir können endlich zu dem Fall übergehen, wo die Charakteristiken einen gemeinsamen Teiler besitzen, man erkennt auch sofort, daß in diesem Falle obiges Verfahren versagt, da wir in (13a) m und n unbedingt relativ prim voraussetzen müssen.

6. Der Fall eines nicht relativ primen Charakteristikenpaares.

Wir verstehen nun unter M eine ganz beliebige, in der Umgebung der Stelle $x = y = 0$ analytische Mannigfaltigkeit, für die wir dort die Parameterdarstellung:

$$(16) \quad \begin{cases} x_1 = \varrho^m \cos m\varphi, \\ x_2 = \varrho^m \sin m\varphi, \\ y_1 = \sum_1^k a_i \varrho^{n_i} \cos (n_i\varphi + \alpha_i), \\ y_2 = \sum_1^k a_i \varrho^{n_i} \sin (n_i\varphi + \alpha_i) \end{cases}$$

voraussetzen, und zwar bestehe für die ganzen Zahlen n_i :

$$n_1 < n_2 < n_3 \dots < n_k$$

und ferner sei $t = \varrho e^{i\varphi}$ ein lokaluniformisierender Parameter unserer Mannigfaltigkeit M für die Stelle $x = y = 0$.

Aus den Formeln (1) erhält man für das stereographische Bild Γ' unserer Mannigfaltigkeit M :

$$(17) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2r \varrho^m \cos m\varphi}{r - \sum_i a_i \varrho^{n_i} \sin (n_i\varphi + \alpha_i)}, \\ \eta = \frac{2r \varrho^m \sin m\varphi}{r - \sum_i a_i \varrho^{n_i} \sin (n_i\varphi + \alpha_i)}, \\ \zeta = \frac{2r \sum_i a_i \varrho^{n_i} \cos (n_i\varphi + \alpha_i)}{r - \sum_i a_i \varrho^{n_i} \sin (n_i\varphi + \alpha_i)}. \end{cases}$$

Zwischen den Parametern ϱ und φ besteht die Relation:

$$(17a) \quad \varrho^{2m} + \sum_i a_i^2 \varrho^{2n_i} + \sum_{i < j}^{i,j} a_i a_j \varrho^{n_i+n_j} \cos [(n_i - n_j)\varphi + (\alpha_i - \alpha_j)] = r^2.$$

Wir untersuchen zunächst ϱ als Funktion von φ .

Es sind analog wie früher die drei Fälle $m < n_1$, $m > n_2$ und $m = n_1$ zu unterscheiden.

Wir können den ersten und dritten Fall mit einem Schlage erledigen.

Es ist also $m \leq n_1$ vorauszusetzen. Aus (17a) erhält man analog wie im vorhergehenden:

$$\varrho = r^{\frac{1}{m}} \left[1 + 2 \sum_{i < j}^{i,j} a_i a_j \varrho^{n_i+n_j-2m} \cos [(n_i - n_j)\varphi + (\alpha_i - \alpha_j)] + \dots \right]^{\frac{1}{2m}}$$

und endlich

$$(18) \varrho = r^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i+n_1}{m}-2} \left[\frac{a_i a_1}{m} \cos [(n_i-n_j)\varphi + (\alpha_i-\alpha_1)] + \dots \right] + \dots \right\}$$

ferner:

$$(18a) \varrho^m = r \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i+n_1}{m}-2} [a_i a_1 \cos [(n_i-n_1)\varphi + (\alpha_i-\alpha_1)] + \dots] + \dots \right\},$$

$$(18b) \varrho^{n_1} = r^{\frac{n_1}{m}} \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i+n_1}{m}-2} \left[\frac{n_1}{m} a_i a_1 \cos [(n_i-n_1)\varphi + (\alpha_i-\alpha_j)] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\}.$$

wobei nur jene Glieder ausgeschrieben wurden, deren Koeffizienten zum erstenmal die Größen a_i enthalten. Analog findet man für den Fall $n_1 < m$:

$$\varrho = \left(\frac{r}{a_1} \right)^{\frac{1}{n_1}} \left\{ 1 + \right. \\ \left. 2 \sum_{i < j} \frac{a_i}{a_1} \frac{a_j}{a_1} \varrho^{n_i+n_j-2n_1} \cos [(n_i-n_j)\varphi + (\alpha_i-\alpha_j)] + \dots \right\}^{-\frac{1}{2n_1}}$$

und weiter

$$(19) \varrho = \left(\frac{r}{a_1} \right)^{\frac{1}{n_1}} \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i}{n_1}-1} \left[\frac{a_i}{n_1 a_1^{\frac{n_i}{n_1}}} \cos [(n_i-n_1)\varphi + (\alpha_i-\alpha_1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\}$$

$$(19a) \varrho^m = \left(\frac{r}{a_1} \right)^{\frac{m}{n_1}} \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i}{n_1}-1} \left[\frac{m}{n_1} a_i a_1^{\frac{-n_i}{n_1}} \cos [(n_i-n_1)\varphi + (\alpha_i-\alpha_1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\}.$$

$$(19b) \varrho^{n_1} = \left(\frac{r}{a_1} \right)^{\frac{n_1}{n_1}} \left\{ 1 - \sum_i' r^{\frac{n_i}{n_1}-1} \left[\frac{a_i}{a_1^{\frac{n_i}{n_1}}} \cos [(n_i-n_1)\varphi + (\alpha_i-\alpha_1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\}.$$

Zur Untersuchung unserer Bildkurve I' verwenden wir die eingangs erwähnten Meridianebenen. Schneiden wir I' mit einer der erwähnten Meridianebenen

$$\xi = \omega \eta,$$

so ergibt sich aus (17) für diese Schnittpunkte:

$$(20) \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} m\varphi = \frac{1}{w}, \quad \mu = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

und weiter

$$(21) \quad \begin{cases} \mu = 2\varrho^m \left[1 - \sum^i a_i \frac{\varrho^{n_i}}{r} \sin(n_i \varphi + \alpha_i) \right]^{-1}, \\ \zeta = \left[\sum^i a_i \varrho^{n_i} \cos(n_i \varphi + \alpha_i) \right] \left[1 - \sum^i a_i \frac{\varrho^{n_i}}{r} \sin(n_i \varphi + \alpha_i) \right]^{-1}, \end{cases}$$

worin ϱ entsprechend den Relationen (18) bzw. (19) als Funktion von φ aufzufassen ist und für φ einer durch (20) bestimmten Werte zu nehmen ist.

Die Gleichung (20) liefert für jeden Wert w , $2m$ Werte von φ , die wir in zwei Gruppen zu je m -Werten zusammenfassen können, je nachdem $\sin \varphi$ bzw. $\cos \varphi$ für die Werte φ aus (20) ihr Vorzeichen beibehalten oder nicht, gehören sie der gleichen Gruppe an oder nicht. Diese Gruppen ergeben sich daher aus den Parameterwerten:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi}{m} i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

bzw.:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(2i+1)\pi}{m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Da nach (18) oder (19) $\varrho \neq 0$, bleibt es auch μ für die Parameterwerte aus (20) und wir können entsprechend (17) der einen Gruppe von φ -Werten ein positives μ , der anderen hingegen ein negatives μ zuordnen.

Da die ζ -Achse die Schnittpunkte einer Meridianebene mit Γ' gerade in die zwei obigen Gruppen zertrennt, ist es nur notwendig, die Punkte der einen Hälfte zu untersuchen.

Wir wenden nun auf die Schnittpunkte von Γ' die eingangs erwähnte Inversion an und erhalten nach (4):

$$(22) \quad \begin{cases} \mu^* = \frac{2 \sum^i a_i \varrho^{n_i} \cos(n_i \varphi + \alpha_i)}{1 + \frac{\varrho^m}{r}}, \\ \zeta^* = \frac{2 \sum^i a_i \varrho^{n_i} \sin(n_i \varphi + \alpha_i)}{1 + \frac{\varrho^m}{r}}. \end{cases}$$

Ferner definieren wir mit Hilfe der Wurzeln von (17a) $\varrho = \varrho(\varphi_1, a_1, a_2, \dots, a_k)$ die Größen:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k$$

wie folgt:

$$(23) \quad \sigma_i = \varrho(\varphi_1, a_1, a_2, \dots, a_i, 0, \dots, 0).$$

Es sind somit die σ_i die Wurzeln der Gleichung (17 a), wenn man die $a_{i+1} = a_{i+2} = \dots = a_k = 0$ wählt. Die für ϱ gegebenen Entwicklungen übertragen sich daher sinngemäß auf die Größen σ_i .

Wir ergänzen die Formeln (18) und (19) durch die beiden Relationen:

$$(18c) \quad \left[1 + \frac{\varrho^m}{r}\right]^{-1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_i^v r^{\frac{n_i+n_1}{m}-2} \left[\frac{a_1 a_i}{2} \cos [(n_i - n_1) \varphi + (\alpha_i - \alpha_1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + \dots \right\},$$

bzw.

$$(19c) \quad \left[1 + \frac{\varrho^m}{r}\right]^{-1} = 1 - \left(\frac{r}{a_1}\right)^{\frac{m}{n_1}-1} \left\{ 1 - \right. \\ \left. - \sum_i^v r^{\frac{n_i}{n_1}-1} \left[\frac{m}{n_1} \frac{a_i}{a_1^{\frac{n_i}{n_1}}} \cos [(n_i - n_1) \varphi + (\alpha_i - \alpha_1)] + \dots \right] + \dots \right\}.$$

Wir stellen zunächst der Bildkurve I' , die Kurve I'' gegenüber, für die, unter Beibehaltung der Relation (20), der transformierte Meridian-schnitt durch:

$$(24) \quad \begin{cases} \mu^* = 2 \sum_1^k a_i \frac{\sigma_i^{n_i}}{1 + \frac{\sigma_i^m}{r}} \cos (n_i \varphi + \alpha_i), \\ \xi^* = 2 \sum_1^k a_i \frac{\sigma_i^{n_i}}{1 + \frac{\sigma_i^m}{r}} \sin (n_i \varphi + \alpha_i) \end{cases}$$

bestimmt ist.

Über die in (16) auftretenden Exponenten müssen wir außer der festgelegten Reihenfolge noch folgende Voraussetzungen machen:

$$(25) \quad \begin{cases} m = \mu_1 m_1, & m = \mu_1 \mu_2 m_2, \dots \\ n_1 = \nu_1 m_1, & n_2 = \nu_2 m_2, \dots \\ \dots, m = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1} m_{k-1}, & m = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k m_k, \\ \dots, n_{k-1} = \nu_{k-1} m_{k-1}, & n_k = \nu_k m_k, \end{cases}$$

und zwar soll m_1 der größte gemeinsame Teiler der Zahlen (m, n_1) sein, m_{i+1} hingegen der größte gemeinsame Teiler von (m_i, n_{i+1}) , da der Parameter $t = \varrho e^{i\varphi}$ in (16) als ein lokaluniformisierender vorausgesetzt wurde

und sicher $m_k = 1$ sein muß, falls sich nicht schon ein früheres m_i dieser Eigenschaft bestimmen läßt. Selbstverständlich können unter den m_i auch gleiche vorkommen.

Wir untersuchen zunächst die Kurven \bar{I}'_i , die sich aus den ersten i -Gliedern der Entwicklung (24) von \bar{I}' ergeben, somit ist \bar{I}'_k identisch mit \bar{I}' .

Speziell erhalten wir für \bar{I}'_1 einen Torusknoten entsprechend der Mannigfaltigkeit M_1 von folgender Parameterdarstellung:

$$(26) \quad \begin{cases} x_1 = \sigma^{\mu_1} \cos \mu_1 \varphi, \\ x_2 = \sigma^{\mu_1} \sin \mu_1 \varphi, \\ y_1 = a_1 \sigma^{\nu_1} \cos (\nu_1 \varphi + \alpha_1), \\ y_2 = a_1 \sigma^{\nu_1} \sin (\nu_1 \varphi + \alpha_1). \end{cases}$$

Auf ebenso einfache Weise können wir den transformierten Meridianschnitt einer Fläche angeben, auf der \bar{I}'_2 liegt. Er besitzt die Parameterdarstellung:

$$(27) \quad \begin{cases} \mu^* = 2 \left[a_1 \frac{\sigma_1^{\nu_1 \mu_2}}{1 + \frac{\sigma_1^{\mu_1 \mu_2}}{r}} \cos (\nu_1 \mu_2 \varphi + \alpha_1) + a_2 \frac{\sigma_2^{\nu_2}}{1 + \frac{\sigma_2^{\mu_1 \mu_2}}{r}} \cos \psi \right], \\ \zeta^* = 2 \left[a_1 \frac{\sigma_1^{\nu_1 \mu_2}}{1 + \frac{\sigma_1^{\mu_1 \mu_2}}{r}} \sin (\nu_1 \mu_2 \varphi + \alpha_1) + a_2 \frac{\sigma_2^{\nu_2}}{1 + \frac{\sigma_2^{\mu_1 \mu_2}}{r}} \sin \psi \right]. \end{cases}$$

Die durch (27) dargestellte Fläche ist aber, wie man leicht erkennt, eine Schlauchfläche mit der Kurve \bar{I}'_1 als Achse. Da die Entwicklung für den transformierten Radius des Torus von \bar{I}'_1 nach (18) bzw. (19)

und (27) mit $r^{\frac{n_1}{m}}$ bzw. mit $\frac{r}{a_1}$ beginnt, der Ausdruck

$$\frac{\sigma_2^{\nu_2}}{1 + \frac{\sigma_2^{\mu_1 \mu_2}}{r}}$$

hingegen mit $r^{\frac{n_2}{m}}$ bzw. mit $r^{\frac{n_2}{\mu_1}} (a_1)^{-\frac{n_2}{\mu_1}}$, so folgert man daraus, daß für ein genügend kleines r unsere Schlauchfläche sich nirgends selbst schneiden wird. Nun entnimmt man aber unmittelbar (24), daß die Kurve \bar{I}'_2 eine auf dem Schlauche (27) liegende Kurve ist, die sich ν_2 -mal im erzeugenden Querschnitt des Schlauches und μ_2 -mal in der Richtung der Achse sich windet. Da aber $(\mu_2 \nu_2) = 1$, so erhalten wir eine nicht zerfallende Kurve.

In analoger Weise findet man für den allgemeinen Fall $\bar{\Gamma}_i^1$ eine auf einem Schlauche liegende nicht zerfallende Kurve, die sich ν_i -mal im erzeugenden Querschnitt des Schlauches und μ_i -mal in der Richtung der Achse windet, wo letztere eine Kurve $\bar{\Gamma}_{i-1}^1$ ist.

Auf diese Weise ist also auch $\bar{\Gamma}'$ als Schlauchkurve eindeutig festgelegt.

Wir haben jetzt nur mehr zu zeigen, daß unsere Kurve Γ' sich auf $\bar{\Gamma}'$ stetig mit ihren sie umgebenden Raume deformieren läßt. Wir bezeichnen die durch (26) und (20) dargestellten Meridianschnittpunkte unserer Kurve $\bar{\Gamma}'_1$, deren es μ_1 gibt mit:

$$(26a) \quad p_1, p_2, \dots, p_{\mu_1}.$$

Die Punkte hingegen, welche durch

$$(28) \quad \begin{cases} \mu^* = 2 \frac{a_1 \varrho^{n_1}}{1 + \frac{\varrho^{n_1}}{r}} \cos(n_1 \varphi + \alpha_1), \\ \zeta^* = 2 \frac{a_1 \varrho^{n_1}}{1 + \frac{\varrho^{n_1}}{r}} \sin(n_1 \varphi + \alpha_1) \end{cases}$$

dargestellt werden und wo ϱ durch (18) bzw. (19) zu ersetzen ist mit

$$(28a) \quad \begin{cases} p_{11}, & p_{12}, & \dots, & p_{1m_1}, \\ p_{21}, & p_{22}, & \dots, & p_{2m_1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\mu_1 1}, & p_{\mu_1 2}, & \dots, & p_{\mu_1 m_1}, \end{cases}$$

deren es m voneinander verschiedene gibt. Die Bezeichnung in (28a) wurde so gewählt, daß alle Werte p_{i1} dem gleichen Werte φ entsprechen wie p_1 usw. Die durch (28) bestimmte Kurve wollen wir mit Γ'_1 bezeichnen.

Unsere Kurve Γ' deren transformierte Meridianschnittpunkte durch (22) bestimmt sind, transformieren wir in eine Kurve B_1 , deren transformierte Meridianschnittpunkte die Darstellung:

$$(29) \quad \begin{cases} \mu^* = \frac{a_1 \sigma_1^{n_1}}{1 + \frac{\sigma_1^{n_1}}{r}} \cos(n_1 \varphi + \alpha_1) + \sum_{i=2}^i \frac{a_i \varrho^{n_i}}{1 + \frac{\varrho^{n_i}}{r}} \cos(n_i \varphi + \alpha_i), \\ \zeta^* = \frac{a_1 \sigma_1^{n_1}}{1 + \frac{\sigma_1^{n_1}}{r}} \sin(n_1 \varphi + \alpha_1) + \sum_{i=2}^i \frac{a_i \varrho^{n_i}}{1 + \frac{\varrho^{n_i}}{r}} \sin(n_i \varphi + \alpha_i) \end{cases}$$

haben.

Diese Transformation läßt sich durch folgende Deformation von Γ' erreichen. Man deformiere einfach die Kurve Γ'_1 auf $\bar{\Gamma}'_1$, was etwa durch Zusammenschieben der Punkte $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i, m_i}$ in den Punkt p_i erreicht werden kann. Berücksichtigt man nun wie sich Γ' aus Γ'_1 bzw. B_1 aus $\bar{\Gamma}'_1$ aufbaut, so erkennt man, daß man auf obigem Wege eine Deformation von Γ' in B_1 erreicht. Nun können wir aber von letzterer Transformation leicht zeigen, daß sie sich ohne Selbstdurchsetzung der Kurve Γ' ausführen läßt, mit anderen Worten also Γ' und B_1 sind topologisch äquivalent. Außer unseren Punkten p_i und p_{ij} wollen wir entsprechend den Gleichungen (22) die Punkte q_{ij} und entsprechend (29) die Punkte \bar{q}_{ij} einführen. Die Bezeichnung der Punkte q bzw. \bar{q} wurde entsprechend den der Punkte p_{ij} gewählt.

Wir bezeichnen also die Punkte, welche zu Γ' gehören mit q_{ij} , die von B_1 mit \bar{q}_{ij} : Um zu zeigen, daß die Deformation von Γ' auf B_1 ohne Selbstdurchsetzungen möglich ist, müssen wir noch eine Reihe weiterer Hilfskurven einschalten. Wir bezeichnen mit B_{1i} jene Kurve, deren transformierter Meridianquerschnitt folgende Gestalt besitzt:

$$(29a) \quad \begin{cases} \mu^* = (\sigma_i)_1 \cos (n_i \varphi + \alpha_1) + \sum_{i=2}^k (\varrho)_i \cos (n_i \varphi + \alpha_i), \\ \zeta^* = (\sigma_i)_1 \sin (n_i \varphi + \alpha_1) + \sum_{i=2}^k (\varrho)_i \sin (n_i \varphi + \alpha_i), \end{cases}$$

wo entsprechend dem früheren unter

$$(\varrho)_i = \frac{\alpha_i \varrho^{n_i}}{1 + \frac{\varrho^m}{r}}$$

zu verstehen ist.

Die durch obige Gleichung dargestellten Meridianschnittpunkte sollen die Punkte $q_{\alpha\beta}^{(i)}$ sein und sie mögen den gleichen Parameterwerten, wie die Punkte $q_{\alpha\beta}$ entsprechen. Die durch

$$\begin{aligned} \mu^* &= (\sigma_i)_1 \cos (n_i \varphi + \alpha_1), \\ \zeta^* &= (\sigma_i)_1 \sin (n_i \varphi + \alpha_1) \end{aligned}$$

bestimmten $\frac{m}{m_i}$ Punkte seien die Punkte $q_{\alpha\beta}^{*(i)}$. Um jeden dieser Punkte $q_{\alpha\beta}^{*(i)}$ werden sich μ_{i+1} Punkte $q_{\alpha\beta\varrho}^{*(i+1)}$ $\varrho = 1, 2, \dots, \mu_{i+1}$ anordnen (vgl. Figur 1a). Andererseits werden sich zu dem Punkte $q_{\alpha\beta\varrho}^{*(i+1)}$ bzw. $q_{\alpha\beta}^{*(i)}$ m_{i+1} bzw. m_i Punkte $q_{\alpha\beta}^{(i+1)}$ bzw. $q_{\alpha\beta}^{(i)}$ angeben lassen, die sich entsprechend den Relationen (29a) direkt aus den ersten Punkten aufbauen lassen. Diese m_{i+1} Punkte $q_{\alpha\beta}^{(i+1)}$ sowie die den gleichen Parameterwerten φ ent-

sprechenden m_{i+1} Punkte $q_{\alpha\beta}^{(i)}$, letztere kommen also sicher unter den oben erwähnten m_i Punkten $q_{\alpha\beta}^{(i)}$ vor, lassen sich in zwei Kreise einschließen, deren ersten Mittelpunkt wir mit a_φ und den Radius mit A_φ , diese Bestimmungsstücke vom zweiten Kreise hingegen mit \bar{a}_φ und \bar{A}_φ bezeichnen werden. Als Mittelpunkt \bar{a}_φ kann man einen der Punkte wählen der sich aus (29a) ergibt, wenn nur die ersten $(i+1)$ Glieder berücksichtigt werden und als Parameterwert φ einer der Werte gewählt wird, dem der Punkt $q_{\alpha\beta\varphi}^{*(i+1)}$ entspricht, ganz analog und durch den gleichen Parameterwert φ bestimmt wollen wir den Punkt a_φ wählen. Entwickelt man nun die Radien A_φ und \bar{A}_φ unter Zuhilfenahme von (18) bzw. (19), so ergibt sich für die Anfangsexponenten von r , $\frac{n_{i+2}}{m}$

bzw. $\frac{n_{i+2}}{n_1}$. Ebenso erhält man für den Anfangsexponenten der Entwicklung nach r von der Länge der Strecke $a_\varphi \bar{a}_\varphi = q_{\alpha\beta\varphi}^{*(i+1)} q_{\alpha\beta}^{*(i)}$ mindestens die Zahlen $\frac{n_{i+1} + 2n_1}{m} - 2$ bzw. $\frac{n_{i+1}}{n_1}$, hingegen für die Länge der

Strecke $\bar{a}_\sigma \bar{a}_\varphi \varphi \pm \sigma$ höchstens $\frac{n_{i+1}}{m}$ bzw. $\frac{n_{i+1}}{n_1}$. Für den ersten Fall ist es sofort klar, daß die Verschiebung von a_φ nach \bar{a}_φ und aller in obigen Kreise enthaltener Punkte möglich ist, ohne, daß hierbei Schnittpunkte dieser Verschiebungsstrecken auftreten, für den zweiten Fall ist dies aber auch möglich, da der Koeffizient des Anfangsgliedes von $a_\varphi \bar{a}_\varphi$ kleiner als der von $a_\sigma a_\varphi$ ist und nur für eine endliche Anzahl von Werten φ mit diesen gleich werden kann.

Es kann somit die fragliche Deformation der Kurve I' in B_1 , ohne Selbstdurchsetzungen fürchten zu müssen, ausgeführt werden. *Womit zunächst bewiesen, daß B_{1i} topologisch-äquivalent mit B_{1i+1} und daher I' äquivalent mit \bar{B}_1 ist.*

So können wir stufenweise weitergehen, indem wir die Kurven B_α definieren, deren transformierter Meridianquerschnitt die Entwicklung:

$$\begin{aligned} \mu^* &= \sum_{i=1}^{\alpha} (\sigma_i)_i \cos(n_i \varphi + \alpha_i) + \sum_{i=\alpha+1}^k (\varrho_i)_i \cos(n_i \varphi + \alpha_i), \\ \zeta^* &= \sum_{i=1}^{\alpha} (\sigma_i)_i \sin(n_i \varphi + \alpha_i) + \sum_{i=\alpha+1}^k (\varrho_i)_i \sin(n_i \varphi + \alpha_i) \end{aligned}$$

zukommt. Definiert man nun analog wie oben die Kurven $B_{\alpha\varphi}$ $\alpha \leq \varrho$, so findet man für die Anfangsexponenten der Entwicklungen nach r für $a_\varphi \bar{a}_\varphi$ mindestens $\frac{n_{i+1} + n_\alpha + n_1}{m} - 2$ bzw. $\frac{n_i + n_\alpha}{n_1} - 1$ für $a_\sigma a_\varphi$

dagegen $\frac{n_{i+1}}{m}$ bzw. $\frac{n_{i+1}}{n_1}$, womit sofort klar ist, daß die Deformation von $B_{\alpha+1}$ auf B_α ohne Selbstdurchsetzungen fürchten zu müssen möglich ist.

Man erkennt somit aus obigen, daß die Bildkurve I' ein Schlauchknoten ist, dessen Achse selbst wieder im allgemeinen ein Schlauchknoten sein wird, alle diese Knoten sind festgelegt durch die Zahlen:

$$m; n_1, \dots, n_k.$$

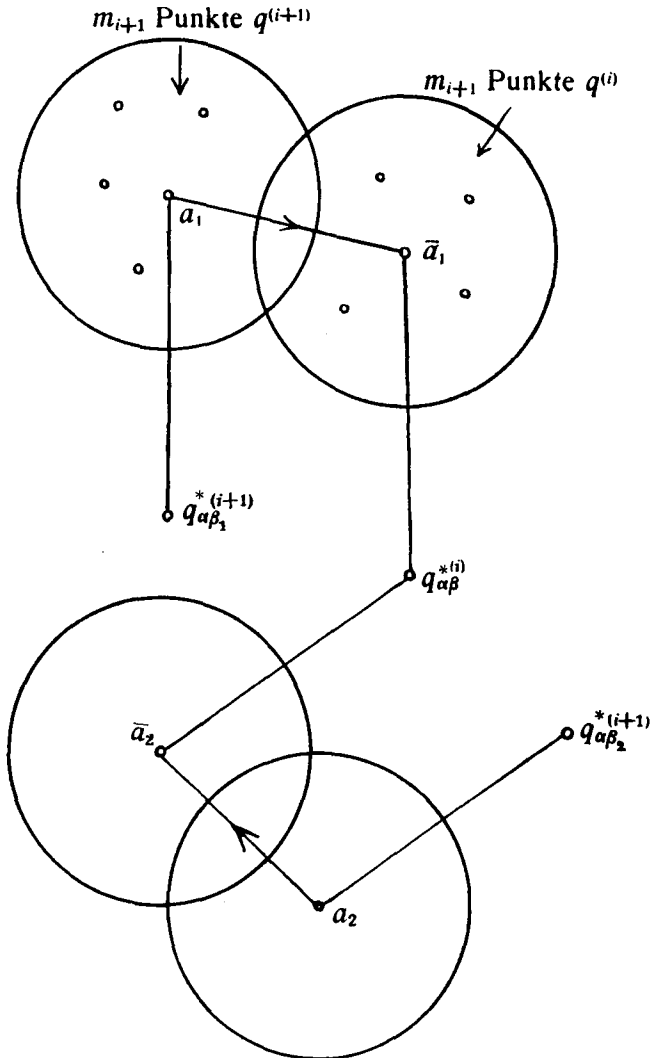


Fig. 1 a.

Wenn aber auch umgekehrt ein solcher Schlauchknoten gegeben ist, so läßt sich aus den Zahlenpaaren (μ_i, ν_i) stets eine Mannigfaltigkeit M konstruieren, deren Bildkurve I' topologisch äquivalent mit dem vorgegebenen

Schlauchknoten ist und deren Parameterdarstellung die Form (16) besitzt, wenn nur die entsprechend den Gleichungen (25) konstruierten Werte m und n_i von folgender Art sind:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k.$$

Da durch die Zahlenpaare (μ_i, ν_i) die topologischen Verhältnisse vollkommen bestimmt sind, wollen wir sie analog wie im Falle relativ-primer Charakteristiken, als die *Charakteristikenpaare unserer Mannigfaltigkeit M* bezeichnen, um so mehr als wir sofort zeigen werden, daß sie auch vollkommen für allgemeine Mannigfaltigkeiten ausreichen. Inzwischen ist man aber gezwungen, bei Verkettungen von Mannigfaltigkeiten noch die Zahlen a_j in Betracht zu ziehen.

Wir bezeichnen daher als *Charakteristikenpaar bzw. den Index i -ter Ordnung*, das Zahlenpaar (μ_i, ν_i) bzw. die Zahl a_i .

Hat man endlich eine allgemeine Mannigfaltigkeit M , d. h. bricht die Entwicklung (22) nicht bei einem endlichen k ab, so sieht man nach dem früheren leicht ein, daß die Deformation der Kurve Γ' auf die B_i aus den gleichen Gründen wie früher ohne Selbstdurchsetzung realisiert werden kann. Ist dann der Parameter $t = \rho e^{i\varphi}$ ein lokaluniformisierender unserer Mannigfaltigkeit M , so muß es ein angebbares j geben, für den $m_j = 1$ zum erstenmal wird, entsprechend den Relationen (25). Die Charakteristikenpaare, von der $j+1$ -Ordnung angefangen, werden dann folgende Gestalt haben $(1, \nu_{j+1}), (1, \nu_{j+2}), \dots$, also werden alle diese Schlauchkurven topologisch äquivalent mit Γ'_j sein. Wir sehen also, daß zur Bestimmung der topologischen Verhältnisse tatsächlich nur so viele Anfangsglieder der Parameterdarstellung notwendig sind als sie notwendig sind, damit t lokaluniformisierend bleibt.

Schließlich können wir den Begriff der *Höchststellungen*, den wir bei den gewöhnlichen Torusknoten eingeführt hatten, unverändert übertragen, wenn wir nur berücksichtigen, daß die Schlauchkurven, ganz analog wie die Torusknoten am Kreisringe, auf einer Schlauchfläche liegen. So erhalten wir für einen Schlauchknoten Γ_i , der entsprechend dem vorhergehenden bezeichnet ist, ν_k Höchststellungen, wenn nur $\mu_k > 1$ ist.

7. Höhere Verkettungen.

Wir nehmen zunächst an, daß sich in der Umgebung der Stelle $x = y = 0$ nur zwei Mannigfaltigkeiten schneiden, deren Parameterdarstellungen die folgende Gestalt besitzen:

$$(30) \quad \begin{aligned} x &= t^m, \\ y &= \sum_{i=1}^k a_i e^{\sqrt{-1}\alpha_i} t^{n_i} \end{aligned}$$

und

$$(31) \quad \begin{aligned} x &= t^r \\ y &= \sum_{i=1}^l b_i e^{\sqrt{-1}\beta_i} t^{r_i}, \end{aligned}$$

die wir mit M_1 bzw. M_2 bezeichnen wollen und wo:

$$\begin{aligned} n_1 &< n_2 < \dots < n_k, \\ v_1 &< v_2 < \dots < v_l; \end{aligned}$$

ferner sollen zwischen den Exponenten n_i bzw. v_i folgende Relationen bestehen:

$$(30a) \quad \begin{aligned} m &= \mu_1 m_1, \quad m = \mu_1 \mu_2 m_2, \quad \dots, \quad m = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k m_k, \\ n &= \nu_1 m_1, \quad n_2 = \nu_2 m_2, \quad \dots, \quad n_k = \nu_k m_k, \end{aligned}$$

$$(31a) \quad \begin{aligned} w &= \omega_1 w_1, \quad w = \omega_1 \omega_2 w_2, \quad \dots, \quad w = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_l w_l, \\ v &= \pi_1 v_1, \quad v = \pi_2 v_2, \quad \dots, \quad v = \pi_l v_l, \end{aligned}$$

worin m_i bzw. w_i der größte gemeinsame Teiler von (m_i, n_{i+1}) bzw. von (w_i, v_{i+1}) ist. Des weiteren sei unser Parameter t sowohl in (30) als auch in (31) lokaluniformisierend. Die zu den beiden Mannigfaltigkeiten M_1 bzw. M_2 gehörigen stereographischen Bildkurven wollen wir mit I' bzw. P' bezeichnen. Unter I'_i, \bar{I}'_i bzw. B_i wollen wir die gleichen Kurven wie im vorigen verstehen, ebenso unter P'_i, \bar{P}'_i bzw. Δ_i die entsprechenden Kurven hergeleitet von P_i .

Zwischen den Größen von (30) und (31) wollen wir zunächst folgende Beziehungen annehmen:

$$(32) \quad \begin{cases} \mu_s = \omega_s, & \nu_s = \pi_s, & a_s = b_s, & \alpha_s = \beta_s, \\ s = 1, 2, \dots, i-1, & i-1 \leq k, & i-1 \leq l. \end{cases}$$

Aus (32) folgert man sofort

$$(32a) \quad \frac{n_e}{n_j} = \frac{v_e}{v_j}, \quad \frac{n_e}{m} = \frac{v_e}{w}, \quad e, j < i.$$

Wir denken uns nun wie früher zu den Kurven B_α bzw. Δ_α die Kurven $B_{\alpha\beta}$ bzw. $\Delta_{\alpha\beta}$ gebildet und übernehmen für a, A, q die Bedeutung aus dem früheren für die Kurven I bzw. B , und wollen unter b, B, p das gleiche für die Kurven P bzw. Δ verstehen. Entwerfen wir nun wie in Figur 1a ein Bild des Meridianschnittes für die Kurven $B_{1j}, B_{1j+1}, \Delta_{1j}$ und Δ_{1j+1} für $j \leq i-2$, so ist ersichtlich, daß die Verhältnisse genau wie bei einer einzigen Mannigfaltigkeit sind, denn die Punkte $a_q, \bar{a}_q,$

also auch die Punkte $q_{\alpha\beta}^{(j)}$ und $q_{\alpha\beta}^{(j+1)}$ sind gleich mit den entsprechenden b bzw. p . Also kann man die Verschiebung von \bar{a}_ρ und \bar{b}_ρ gleichzeitig vornehmen. Etwas anders ist das Bild (vgl. Figur 2a), wenn $j \geq i$ ist. Wir verschieben zunächst um $a_\rho \bar{a}_\rho$ alle entsprechenden Punkte $q^{(j+1)}$ aber auch gleichzeitig die Punkte $p^{(j+1)}$ um den gleichen Vektor, die ersteren gehen dann in die Punkte $q^{(j)}$ über, die letzteren in Punkte, die wir mit $p^{0(j+1)}$ bezeichnen wollen, ebenso wird der dem Punkte b_ρ entsprechende Punkt in b_ρ^0 übergehen, es werden aber im allgemeinen die Punkte $p^{0(j+1)}$ bzw. b_ρ^0 von den Punkten $p^{(j+1)}$, \bar{b}_ρ verschieden sein.

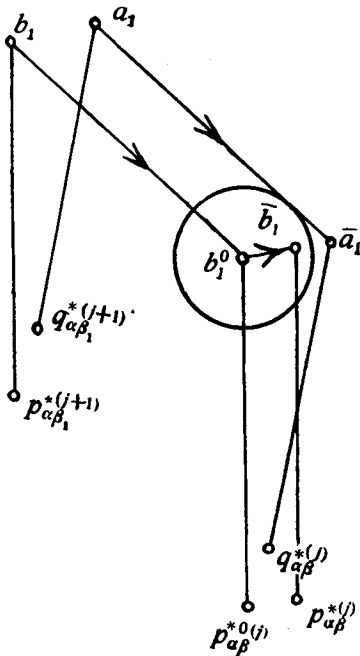


Fig. 2a.

Nun ergibt sich für den Anfangsexponenten von r der Entwicklung für die Länge der Strecke $p^{*(j)} p^{*0(j)}$

$$\text{mindestens } \frac{n_i + 2n_1}{m} - 2 \text{ bzw. } \frac{n_i}{n_1},$$

wenn wir etwa annehmen $\frac{n_i}{m} < \frac{v_i}{w}$,

andererseits kann man um jeden Punkt $p^{(j)}$ einen Kreis schlagen, dessen Radius einen Anfangsexponenten von r

besitzt, der höchstens gleich $\frac{n_i}{m}$ bzw.

$\frac{n_i}{n_1}$ ist und in dem kein Punkt $q^{(j)}$ zu

liegen kommt, daher kann man die Punkte $p^{0(j)}$ in die Punkte $p^{(j)}$ hineinschieben, ohne bei der entsprechenden Deformation der Kurve irgend-

welche unerlaubte Schnitte fürchten zu müssen. Diese Überlegung gilt ganz allgemein für die Kurven $B_{\alpha\beta}$

und $\Delta_{\alpha\beta}$, solange nur $\alpha < i$ bleibt.

Es zeigt sich also, daß die Kurven $\bar{\Gamma}'_s = \bar{P}'_s$ sind für $s < i$. Es ist aber auch ersichtlich, daß obiges Verfahren sich auf mehrere Mannigfaltigkeiten anwenden läßt, solange nur die Charakteristikenpaare als auch die Koeffizienten dieser drei Mannigfaltigkeiten die gleichen sind. Findet endlich vom i -ten Gliede eine Trennung durch die Koeffizienten oder Exponenten statt, so liegen die Dinge genau wie bei den Torusknoten, was man aus den Relationen für die transformierten Meridianschnitte unmittelbar ersieht, wenn wir nur den Torusmeridian ersetzen durch den Schlauchquerschnitt der betreffenden Kurven.

Wir sehen also, daß die möglichen allgemeinen Verkettungen den früher besprochenen einfachen Verkettungen gestaltlich sehr ähnlich sind,

während diese auf *konzentrische Tori* führen, führen jene auf *konzentrische Schlauchflächen*.

Zum Schlusse wollen wir noch kurz den Fall besprechen, wo sowohl $\nu_i = \pi_i$, $\mu_i = \omega_i$, $a_i = b_i$ aber $\alpha_i \neq \beta_i$; in diesem Fall erhalten wir für die beiden Kurven $\bar{\Gamma}'_i$ und \bar{P}'_i den gleichen Trägerschlauch, dann gehen aber diese beiden Kurven durch eine entsprechende Schraubung des Schlauches in sich, ineinander über, damit ist aber auch die Trennung eventueller weiterer Schläuche, die sich auf diese Kurve aufbauen, erreicht.

8. Rückblick.

In diesem Abschnitte wurde vor allem gezeigt, daß sich die topologischen Verhältnisse einer Mannigfaltigkeit, als auch die mehrerer solcher, im allgemeinsten Falle aus den Charakteristikenpaaren und Indizespaaren höherer Ordnung, eventuell unter Berücksichtigung der zur Mannigfaltigkeit gehörigen Winkel, vollständig eindeutig auf die einfachste Art und Weise bestimmen lassen. Zunächst hatten wir dies immer für eine hinlänglich kleine von Null verschiedene Umgebung der betreffenden Stellen nachgewiesen, d. h. daß der Radius r unserer eingangs erwähnten Projektionskugel κ hinreichend klein gewählt wird. Da die Bildkurven stetige Funktionen des Radius r sind, solange es die Kurven der Mannigfaltigkeit M sind, d. h. solange unsere Kugel κ in der Umgebung des Punktes bleibt in der M außer in diesem Punkte regulär bleibt, sind noch weitere Mannigfaltigkeiten vorhanden, so ist von der obigen Umgebung noch zu verlangen, daß sie keine Schnittpunkte der Mannigfaltigkeit enthält, so bleiben auch unsere topologischen Verhältnisse in der soeben definierten Umgebung erhalten.

Wir können nun auch restlos die Frage beantworten, welche topologische Formen eine analytische Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines ihrer Punkte, in der sie sich algebraisch verhält, bzw. mehrerer solcher Mannigfaltigkeiten, auftreten können. *Es können, falls wir nur eine einzige Mannigfaltigkeit haben, sämtliche Torusknoten aber auch alle Schlauchknoten als stereographische Bildkurven auftreten, doch müssen für letztere die aus den Charakteristikenpaaren (μ_i, ν_i) sich bestimmenden Zahlen n_i der Bedingung $n_i < n_{i+1}$ genügen. Sind hingegen mehrere analytische Mannigfaltigkeiten gegeben, so sind die topologischen Verhältnisse dadurch charakterisiert, daß die Trennung je zweier Bildkurven so stattfindet, daß die Schlauchflächen, auf welchen die Knoten selbst oder solche Knoten, die nach dem früheren zu seinem Aufbau verwendet wurden, konzentrisch, bezüglich ihrer gemeinsamen Achse liegen. Aber auch umgekehrt lassen sich aus dem Vorhergehenden, leicht zu jeder solchen Verkettung und Verknötung alle möglichen analytischen Mannigfaltigkeiten angeben.*

Von besonderem Interesse ist noch die Frage, ob die im obigen erwähnten topologischen Verhältnisse der stereographischen Bilder alle denkbaren erschöpfen oder nicht; *daß aber eine Erschöpfung nicht vorliegt*, können wir leicht aus folgendem ersehen. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß der auf einer Fläche vom Geschlechte zwei liegende Viererknoten nicht vorkommen kann. Wie bekannt, ist dieser Knoten mit keinem Torusknoten identisch, und müßte, falls er unter den möglichen Kurven vorkommt, frühestens sich mit einem Knoten identifizieren, dessen Träger ein Torusschlauch ist. Nehmen wir an, wir hätten einen solchen Schlauchknoten gefunden, dann muß, da dieser von einem Torusknoten verschieden, $\mu_2 \geq 2$ sein. Wie immer ich daher meinen Schlauchknoten deformiere, müssen mindestens $4 \cdot 3 = 12$ Überkreuzungen auftreten, da ja bei allen diesen Deformationen der Torusschlauch in einen solchen übergeht und sich demnach mindestens dreimal überkreuzen muß.

IV. Die Verzweigungsgruppen.

1. Gruppe für einen einzelnen Knoten auf einem Toruse.

Der Knoten auf einem Torus erscheint nach dem früheren charakterisiert durch die Zahl seiner Meridianumläufe, diese sei m und durch die Zahl seiner Äquatorumläufe, diese sei n . Es ist notwendig anzunehmen, daß n, m relativ prim sind, also $(n, m) = 1$.

Durch die Aufschneidungen von WIRTINGER zerfällt der Knoten in einzelne Teile, längs denen eine gleiche Verzweigung der Funktion gesichert ist. Wir betrachten inzwischen nur die Höchststellung dieser Kurve, dies sind also m Punkte. Die Verzweigungen in diesen Punkten sind $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ in einer Reihenfolge, die einer bestimmten Durchlaufung der Kurve entsprechen möge.

Diese m Verzweigungen $A_i (i = 0, 1, \dots, m-1)$ erzeugen bereits die Gruppe vollständig, denn jede andere Verzweigung, die längs dieser Kurve stattfindet, geht gemäß den WIRTINGERSCHEN Relationen aus einer der A_i durch Transformation mit einem geeigneten Produkt der A_i hervor.

Die Indizes der A_i können selbst wieder mod m genommen werden, da man nach einer Durchlaufung der Kurve an die gleiche Stelle zurückkehrt und die Verzweigung in den einzelnen Punkten der Kurve bei gleicher Aufschneidung des sie umgebenden Raumes eindeutig ist.

Zwecks Aufstellung der WIRTINGERSCHEN Relationen ist es notwendig, die Verzweigung jener Höchststellungen zu kennen, unter welche

der Kurventeil hindurchgeht, welcher zwei aufeinanderfolgende Höchststellungen miteinander verbindet. Es sind dies die zu einer Höchststellung benachbarten Punkte von höchster Stellung in einer Reihenfolge die dem Durchlaufungssinn der Kurve korrespondiert.

Gemäß der Erzeugungsweise unserer Kurve entspricht einer Meridiandrehung $\frac{n}{m}$ Äquatordrehungen. Bezeichnet man die Anzahl der Meridiandrehungen, welche von einer Höchststellung zur anderen führen, mit x , ist also die zu A_i benachbarte Verzweigung A_{i+x} , so führt derjenige Kurventeil, der diese beiden Punkte miteinander verbindet, $\lambda + \frac{1}{m}$ Äquatordrehungen aus, wenn λ eine noch unbekannte ganze positive Zahl bedeutet. Entsprechend der obigen Beziehung zwischen Äquator- und Meridianumläufen erhält man

$$x = \frac{m}{n} \left(\lambda + \frac{1}{m} \right).$$

somit

$$(1) \quad nx = m\lambda + 1 \dots (x, \lambda) = 1.$$

Die WIRTINGERSchen Relationen lassen sich nun sofort hinschreiben:

$$(2) \quad A_{(n-1)x+i}^{-1} A_{(n-2)x+i}^{-1} \dots A_{x+i}^{-1} A_i A_{x+i} \dots A_{(n-1)x+i} = A_{i+1} \\ (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Die Relationen (2) lassen sich noch in der Form:

$$(2a) \quad A_i A_{x+i} \dots A_{(n-1)x+i} = A_{x+i} A_{2x+i} \dots A_{(n-1)x+i} A_{i+1} \\ (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

schreiben.

Aus (2a) erkennt man aber sofort, daß sämtliche m linke und rechte Seiten einander gleich sind, wenn man nur berücksichtigt, daß $A_{rx} = A_r$ und $(m, x) = 1$ entsprechend (1) ist.

Somit besteht:

$$(3) \quad A_i A_{x+i} \dots A_{(n-2)x+i} A_{(n-1)x+i} = P \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Die durch (2) und (3) definierte Gruppe ist mit der durch (2) definierten Gruppe isomorph, denn (2) und (3) gehen durch eine Erweiterung¹⁾ zweiter Art aus (2) hervor. Aber auch die durch die Relation von (3) definierte Gruppe ist mit der durch (2) definierten identisch. Bezeichnet man die Relation (2a) der Kürze halber mit

¹⁾ Vgl. H. TIETZE: „Über topologische Invarianten usw.“, Monatsh. f. Math. u. Phys. 19 (1908), § 11.

$$f_i(A) = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

und die von (3) mit

$$g_i(A) \cdot P^{-1} = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, m-1),$$

so geht aus (3) und (2) was folgt hervor:

$$g_i(A) = g_{x+i}^{-1}(A) \equiv f_i(A).$$

also durch eine Erweiterung erster und eine Reduktion zweiter Art.

Wir können daher (3) als definierende Relationen unserer Gruppe wählen.

Aus (3) folgert man folgende Relationen:

$$(4) \quad P^{-k} A_i P^k = A_{i+k} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1, k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Vermöge (4) läßt sich (3) in einfacher Form

$$(5) \quad (A_0 P^{-x})^n P^{\lambda m} = 1, \quad P^{-m} A_0 P^m A_0^{-1} = 1$$

schreiben.

Die Relationen (3) und (4) ergeben sich aber aus (5) durch Erweiterungen der ersten und zweiten Art. Somit ist unsere Gruppe durch die einzige definierende Relation (5) mit den beiden Erzeugenden A_0 und P bestimmt.

Durch Einführung einer neuen Erzeugenden kann die definierende Relation unserer Gruppe noch wesentlich vereinfacht werden.

Diese neue Erzeugende Q sei durch

$$(6) \quad Q = A_0 A_x A_{2x} \cdots A_{(m-1)x}$$

bestimmt.

Aus (1), (6) und (3) ergibt sich

$$P^x = Q^\lambda A_0$$

oder

$$(6a) \quad Q^{-\lambda} = A_0 P^{-x},$$

aus (6) und (4) folgert man andererseits auch die Relation:

$$(7) \quad (A_0 P^{-x})^m P^{mx} = Q$$

bzw. mit Hilfe von (6a)

$$(7a) \quad Q^{-xm} P^{xm} = 1.$$

Setzt man nun (6a) in (5) ein, so erhält man

$$(7b) \quad Q^{-\lambda n} P^{\lambda m} = 1.$$

Eine Reduktion erster Art ergibt aus den beiden Relationen (7a) und (7b) die einzige Relation:

$$(8) \quad \boxed{Q^{-n} P^m = 1.}$$

Unsere Gruppe kann daher durch eine einzige definierende Relation (8) mit zwei Erzeugenden P und Q bestimmt werden. (8) läßt sich aber, wie sofort ersichtlich, unmittelbar aus dem Charakteristikenpaar bestimmen.

Die Relation (8) besitzt nicht nur den Vorzug der Einfachheit, sondern auch die beiden Erzeugenden P und Q haben für unser Problem eine einfache Bedeutung. So bedeutet P jene Verzweigung, welche sich bei Umläufen um den Torus unserer Kurve ergeben, während Q die Verzweigung eines Umlaufes um den Torus im Innern bedeutet.

2. Gruppe für die Verkettung eines Torusknotens mit einem Kreise.

Der Knoten sei wieder durch die Anzahl seiner Meridianumläufe m und seiner Äquatorumläufe n gegeben.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Kreis im Innern des Torus bzw. im äußeren Teile liegt.

Wir betrachten zuerst den ersteren Fall.

I. Die Bezeichnung für die Verzweigungen des Knotens behalten wir im folgenden bei. Für die m Höchststellungen haben wir somit die Verzweigungen A_0, A_1, \dots, A_{m-1} in der Reihenfolge der Durchlaufung der Kurve in einem bestimmten Sinne.

Durch den Knoten wird der mit ihm verkettete Kreis in m Teile geteilt, längs denen im allgemeinen verschiedene Verzweigungen auftreten. Wir bezeichnen sie in der Reihenfolge, wie sie sich bei der Durchlaufung des Kreises, im selben Sinne wie die des Knotens, ergeben mit $R_0, R_x, R_{2x}, \dots, R_{x(m-1)}$, wo die Indizes aus demselben Grunde wie früher mod m genommen werden können und x der Relation (1) genügt. Die Verzweigung R_0 finde in jenem Teile des Kreises statt, der von den beiden Höchststellungen mit den Verzweigungen $A_{(m-1)x}$ und A_0 begrenzt wird.

Es ist leicht einzusehen, daß der Kreis im Innern des Torus so verschoben werden kann, daß ein zwei Höchststellungen verbindender Knotenteil vorerst unter den Knoten hindurchgeht und dann unter den Kreis. Es ergeben sich sodann folgende WIRTINGERSche Relationen:

$$(9) \quad R_{nx+i}^{-1} A_{(n-1)x+i}^{-1} \cdots A_{z+i}^{-1} A_{0+i} A_{x+i} A_{2x+i} \cdots A_{(n-1)x+i} R_{nx+i} = A_{i+1} \\ (i = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

zu denen noch die folgenden

$$(10) \quad A_k^{-1} R_k A_k = R_{k+x} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

von der Verkettung des Kreises mit dem Knoten herrührend, hinzukommen.

Unter Berücksichtigung von (1) erhält man aus (10) folgende Relationen:

$$(10a) \quad A_{(n-1)x+k}^{-1} \cdots A_{x+k}^{-1} A_k^{-1} R_k A_{x+k} A_{2x+k} \cdots A_{(n-1)x+k} = R_{k+1} \\ (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Die durch (9) und (10) definierte Gruppe ist unsere Verzweigungsgruppe und als topologische Invariante der Verkettung zugeordnet.

Die definierenden Relationen dieser Gruppe lassen sich auf ähnliche Weise, wie früher, wesentlich vereinfachen.

Die Relation (9) läßt sich noch wie folgt schreiben:

$$(9a) \quad A_i A_{x+i} A_{2x+i} \cdots A_{(n-1)x+i} R_{nx+i} \\ = A_{x+i} A_{2x+i} \cdots A_{(n-1)x+i} R_{nx+i} A_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Da $A_{i+1} = A_{nx+i}$ und aus (10) $A_{nx+i}^{-1} R_{nx+i} A_{nx+i} = R_{(n+1)x+i} = R_{x+i+1}$ folgt, können wir (9a) durch:

$$(9b) \quad A_i A_{x+1} \cdots A_{(n-1)x+i} R_{i+1} = A_{x+i} A_{2x+i} \cdots A_{i+1} R_{x+i+1} \\ (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

ersetzen.

Man erkennt unmittelbar, daß sämtliche rechten und linken Seiten der m -Relationen (9b) einander gleich sind und wir für diese:

$$(9c) \quad A_i A_{x+i} A_{2x+i} \cdots A_{(n-1)x+i} R_{i+1} = P \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

schreiben können.

Aus (9c) schöpft man leicht die Beziehungen:

$$(11) \quad P^{-k} A_i P^k = A_{i+k} \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Unter Berücksichtigung von (10a) und (11) können die m -Relationen (9c) in folgende zusammengefaßt werden:

$$(12) \quad (A_0 P^{-x})^n R_0 P^{\lambda m} = 1,$$

da die Beziehungen (10a) durch

$$(10b) \quad P^{-1} R_k P = R_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

ersetzt werden kann.

Es lassen sich somit die Relationen (9) durch die Relation (12), verbunden mit der folgenden:

$$(12a) \quad P^{-m} A_0 P^m A_0^{-1} = 1$$

ersetzen.

Wir definieren eine neue Erzeugende Q durch:

$$(13) \quad Q = A_0 A_x A_{2x} \cdots A_{(m-1)x}.$$

Aus (13) und (11) folgert man

$$(13a) \quad (A_0 P^{-x})^m P^{mx} = Q.$$

Die Beziehungen (1), (9c), (10b) und (13) liefern:

$$Q^\lambda A_0 = R^{-x} P^x$$

oder

$$(14) \quad A_0 P^{-x} = Q^{-\lambda} R_0^{-x}.$$

zufolge (13) und (10) erhält man:

$$(15) \quad Q^{-1} R_0 Q R_0^{-1} = 1.$$

Führt man (14) in die Relationen (12) und (13a) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (15) und (1):

$$(16) \quad \begin{cases} Q^{-\lambda n} R_0^{-\lambda m} P^{\lambda m} = 1 \\ \text{bzw.} \\ Q^{-x n} R_0^{-x m} P^{x m} = 1. \end{cases}$$

Da $(x, \lambda) = 1$ sind, so läßt sich unsere Gruppe durch folgende 2 definierende Relationen mit den 3 Erzeugenden P, Q, R_0 bestimmen:

$$(17) \quad \boxed{\begin{array}{l} R_0^{-m} Q^{-n} P^m = 1, \\ R_0^{-1} Q R_0 Q^{-1} = 1. \end{array}}$$

Die Bedeutung der Operationen P und Q ist die gleiche einfache wie im ersten Falle, die von R_0 wurde bereits eingangs auseinandergesetzt.

II. Wir können uns nun dem Falle zuwenden, wo der Kreis den Torusknoten von außen umschließt.

Die Bezeichnung für die Verzweigungen des Knotens behalten wir bei. Hingegen soll sich bei einem Umlauf um den den Torus von außen umschließenden Kreis an seiner höchsten Stelle eine Substitution S ergeben. Dieser Umlauf besitze den gleichen positiven Sinn, wie der Durchlaufungssinn unseres Knotens.

Den mit unseren Knoten verketteten Kreis können wir in eine geeignete Meridianebene hineinlegen und ihn dort, etwa als konzentrischen Kreis zum Meridiane unseres Torus wählen. Durch diese Meridianebene werden

gerade n Höchststellungen unseres Knotens getroffen, diese seien etwa $A_k, A_{k+x}, A_{k+2x} \dots$ und $A_{k+(n-1)x}$. Wir treffen nun folgende Bezeichnung:

$$(18) \quad S^{-1} A'_r S = A_r,$$

d. h. wir bezeichnen mit A_r erst die Verzweigung längs jener Kurvenpunkte, die bereits die Meridianebene passiert haben. Es kann beispielsweise vorkommen, daß unter den A_k bis $A_{k+(n-1)x}$ gleiche vorkommen, d. h. diese Höchststellung passiert öfters die Meridianebene. Sind die zugehörigen Indizes: $k + x_1 x, k + x_2 x, \dots, k + x_q x$, sie sind also mod m genommen alle einander gleich.

Es bestehen dann zwischen diesen $A_{k+x_j x}$ folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} S^{-1} A_{k+x_1 x} S &= A_{k+x_1 x}, \\ S^{-1} A_{k+x_2 x} S &= A_{k+x_2 x}, \\ &\dots \\ S^{-1} A_{k+x_q x} S &= A_{k+x_q x}, \end{aligned}$$

wir können daher diese S Verzweigungen gemäß 18 durch folgende ersetzen:

$$(19) \quad \begin{cases} A'_{k+x_1 x} = A_{k+x_1 x}, \\ A'_{k+x_2 x} = A_{k+x_2 x}, \\ \dots \\ A'_{k+x_q x} = A_{k+x_q x}, \end{cases}$$

oder

$$(19a) \quad A_{k+x_1 x}^{(q-1)} = A_{k+x_2 x}^{(q-2)} = \dots = A'_{k+x_{q-1} x} = A_{k+x_q x}.$$

Wir bezeichnen die unmittelbar nach der Meridianebene unseres Kreises auftretenden Verzweigungen benachbarter Höchststellungen in einer Reihenfolge, die dem Durchlaufungssinne unserer Kurve entspricht, mit:

$$(20) \quad A_0, A_x, A_{2x}, \dots, A_{(m-2)x}, A_{(m-1)x}.$$

Da $(x, m) = 1$, werden $0, x, 2x, \dots, (m-1)x$, mod m voneinander verschieden sein, es können daher unter (20) nur mod m verschiedene Indizes vorkommen.

n Höchststellungen werden durch unsere Kreise in zwei Teile geteilt, man hat daher $m+n$ Verzweigungen in Betracht zu ziehen, diese sind:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_0, A_x, \dots, A_{(m-1)x}, A'_0, A'_x, \dots, A'_{(m-1)x}, A''_0, A''_x, \dots, A''_{(m-1)x}, \dots \\ &\dots, A_0^{(q-1)}, A_x^{(q-1)}, \dots, A_{(m-1)x}^{(q-1)}, A_0^{(q)}, A_x^{(q)}, \dots, A_{(m-1)x}^{(q)}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$n = m - \sigma \quad \text{für} \quad m > \sigma \geq 0$$

in einer Reihenfolge, daß zwei in (21) aufeinanderfolgende Operationen, benachbarte sind.

Wir können in einfachster Weise die WIRTINGERSCHEN Relationen ansetzen:

$$(22a) \left\{ \begin{array}{l} [A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)}]^{-1} [A_{(m-\sigma-2)x}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} \cdots A_x^{-1} A_0 \\ A_x \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-\sigma-2)x}^{(g-1)} A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} = A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)}; \\ [A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)}]^{-1} [A_{(m-\sigma+1)x}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} \cdots A_{2x}^{-1} A_x \\ A_{2x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)} = A_{(m-\sigma+1)x}^{(g-1)}; \\ \dots \\ [A_{m-2}^{(g-1)}]^{-1} [A_{m-3}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} A_{(\sigma+1)x}^{-1} A_{\sigma x}^{-1} A_{(\sigma-1)x}^{-1} \\ A_{\sigma x} A_{(\sigma+1)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-3)}^{(g-1)} A_{(m-2)}^{(g-1)} = A_{(m-1)x}^{(g-1)} \end{array} \right.$$

$$(22b) \left\{ \begin{array}{l} [A_{(m-1)x}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} \cdots A_{(\sigma+1)x}^{-1} A_{\sigma x} \\ A_{(\sigma+1)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-1)x}^{(g-1)} = A_0^{(g)}, \\ [A_0^{(g)}]^{-1} \cdot [A_{(m-1)x}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} \cdots A_{(\sigma+2)x}^{-1} A_{(\sigma+1)x}^{-1} \\ A_{(\sigma+2)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots [A_{(m-1)x}^{(g-1)}] [A_0^{(g)}] = A_x^{(g)}, \\ \dots \\ [A_{(m-\sigma-2)x}^{(g)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_x{}^{-1} A_0^{-1} \cdot A_{(m-1)x} \\ A'_0 A'_x \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-\sigma-2)x}^{(g)} = A_{(m-\sigma-1)x}^{(g)}. \end{array} \right.$$

Dann kommt noch folgende Relation hinzu

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} [A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)}]^{-1} [A_{(m-\sigma-2)x}^{(g-1)}]^{-1} \cdots A'_{(m-1)x}{}^{-1} \cdots A_0^{-1} A_{(m-1)x}^{-1} \cdots A_x^{-1} A_0^{-1} S \\ A_0 A_x \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A'_{(m-1)x} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} = S. \end{array} \right.$$

Hierzu kommen noch die Relationen (19a).

Die Gleichungen (22a) und (22b) lassen sich in ähnlicher Weise, wie dies bereits früher gemacht wurde, durch folgende ersetzen:

$$(24a) \left\{ \begin{array}{l} A_0 A_x \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} = P, \\ A_x A_{2x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)} = P, \\ \dots \\ A_{\sigma x} A_{(\sigma+1)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A_{(m-2)}^{(g-1)} A_{(m-1)x}^{(g-1)} = P. \end{array} \right.$$

$$(24b) \left\{ \begin{array}{l} A_{(\sigma+1)x} A_{(\sigma+2)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A_{m-1}^{(g-1)} A_0^{(g)} = P, \\ A_{(\sigma+2)x} A_{(\sigma+3)x} \cdots A_{(m-1)x} A'_0 \cdots A_0^{(g)} A_x^{(g)} = P, \\ \dots \\ A_{(m-1)x} A'_0 A'_x \cdots A_{(m-\sigma-3)}^{(g)} A_{(m-\sigma-1)}^{(g)} = P. \end{array} \right.$$

Daher geht die Relation (23) in

$$(25) \quad P^{-1} S P = S$$

über.

Führt man in den Gleichungen (22) die Operation P aus (24) ein, so erhält man:

$$(26a) \quad \begin{cases} P^{-1} A_0 & P = S^{\varrho-1} A_{(m-\sigma)x} & S^{-\varrho+1}, \\ P^{-1} A_x & P = S^{\varrho-1} A_{(m-\sigma+1)x} & S^{-\varrho+1}, \\ \dots & \dots & \dots \\ P^{-1} A_{(\sigma-1)x} & P = S^{\varrho-1} A_{(m-1)x} & S^{-\varrho+1}. \end{cases}$$

$$(26b) \quad \begin{cases} P^{-1} A_{\sigma x} & P = S^{\varrho} A_0 & S^{-\varrho}, \\ P^{-1} A_{(\sigma+1)x} & P = S^{\varrho} A_x & S^{-\varrho}, \\ \dots & \dots & \dots \\ P^{-1} A_{(m-1)x} & P = S^{\varrho} A_{(m-\sigma-1)x} & S^{-\varrho}. \end{cases}$$

Diese letzteren Relationen ermöglichen es uns, sämtliche A_i aus A_0 durch Transformation mit Aggregaten von P und S zu gewinnen.

Um obige Transformationen von A_0 zu erhalten, gehen wir schrittweise vor, indem wir die Operation $A_{(i+1)x}$ in A_{ix} transformieren. Bei einem solchen Schritte wird der Exponent des transformierenden Aggregates von P , x sein, um den von S zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor. Vorerst können wir gemäß den Relationen (26a) oder (26b) $A_{(i+1)x}$ in $A_{(\sigma-i-1)x}$ transformieren durch $P^{-1} S^{-\varrho+1}$ oder durch $P^{-1} S^{-\varrho}$; da dies gerade einer Verminderung um Eins des Index von A entspricht, hat man offenbar x solche Schritte auszuführen, um von $A_{(i+1)x}$ zu A_x zu gelangen. Jeder solcher Schritt liefert entweder die Zahl $\varrho-1$ oder ϱ als Exponent von S , je nachdem diese Relation unter (26a) oder unter (26b) zu suchen ist. Jedem solchen Schritte entspricht aber auch eine Änderung des Index von A um die Zahl $(m-\sigma)$, also x solchen Schritten die Änderung um

$$(m-\sigma)x = mx - \sigma x,$$

andererseits ist nach (1) und (21)

$$nx = m\varrho x - \sigma x = \lambda m + 1,$$

so daß:

$$(27) \quad (m-\sigma)x = m(x + \lambda - \varrho x) + 1,$$

d. h. die Relationen (26a) und (26b) werden bei unseren x -Schritten gerade $(x + \lambda - \varrho x)$ mal durchlaufen. Es werden daher im allgemeinen $(x + \lambda - \varrho x)$ Schritte unserer obigen x -Schritte in (26b) stattfinden.

Für den Exponenten von S hat man daher im allgemeinen den Ansatz:

$$(x + \lambda - \rho x)\rho + (\rho x - \lambda)(\rho - 1) = \lambda.$$

Dieser Exponent wird offenbar für jedes obiges $(i+1)$ auftreten, mit Ausnahme des Falles $i+1 = m-1$, wo er, wie leicht ersichtlich, $\lambda+1$ sein wird.

Man hat daher die Beziehungen:

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0, \\ S^{-\lambda} P^{-x} A_0 P^x S^\lambda &= A_x, \\ S^{-\lambda} P^{-x} A_x P^x S^\lambda &= A_{2x}, \\ &\dots \\ S^{-\lambda} P^{-x} A_{(m-2)x} P^x S^\lambda &= A_{(m-1)x}, \\ S^{-\lambda-1} P^x A_{(m-1)x} P^x S^{\lambda+1} &= A_0 \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} A_0 &= A_0, \\ S^{-\lambda} P^{-x} A_0 P^x S^\lambda &= A_x, \\ S^{-2\lambda} P^{-2x} A_0 P^{2x} S^{2\lambda} &= A_{2x}, \\ &\dots \\ S^{-i\lambda} P^{-ix} A_0 P^{ix} S^{i\lambda} &= A_{ix}, \\ &\dots \\ S^{-(m-1)\lambda} P^{-(m-1)x} A_0 P^{(m-1)x} S^{(m-1)\lambda} &= A_{(m-1)x}, \\ S^{-m\lambda-1} P^{-mx} A_0 P^{mx} S^{m\lambda+1} &= A_0. \end{aligned} \right.$$

Wir führen nun das Ergebnis (28) in eine der Relation (24) ein, etwa in

$$A_0 A_x \cdots A_{(m-1)x} A_0' \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(\rho-1)} = P,$$

und erhalten so:

$$(A_0 S^{-\lambda} P^{-x})^n P^{(\rho-1)m x + (m-\sigma)x} S^{(\rho-1)m\lambda + (m-\sigma)\lambda} = P.$$

Es ist aber:

$$(\rho-1)m + m - \sigma = \rho m - \sigma = n$$

und daher

$$(A_0 S^{-\lambda} P^{-x})^n P^{nx} S^{n\lambda} = P$$

oder

$$(29) \quad (A_0 S^{-\lambda} P^{-x})^n P^{m\lambda} S^{n\lambda} = 1.$$

Ersichtlicherweise würden wir das gleiche Ergebnis (29) erhalten, von was für einer Relation (24) wir auch ausgehen würden, denn sämt-

liche Zeilen von (24) gehen durch Transformation mit Aggregaten (28) aus einer hervor.

Wir definieren nun eine neue Operation Q durch:

$$(30) \quad Q = A_0 A_z A_{2z} \cdots A_{(m-2)z} A_{(m-1)z} S.$$

Zufolge (18) können wir die λ -te Potenz von Q in folgender Form schreiben:

$$Q^\lambda = A_0 A_z \cdots A_{(m-1)z} A'_0 A'_z \cdots A'_{(m-1)z} A''_0 \cdots A_{(m-1)z}^{(\lambda-1)} \cdot S^\lambda$$

oder

$$Q^\lambda = A_0 A_z \cdots A_{(m-1)z}^{(\lambda-1)} \cdot A_0^{(\lambda)} S^\lambda A_0^{-1}$$

unter Berücksichtigung von (24) und (25) erhält man aus obigen

$$(31) \quad Q^\lambda = P^z S^\lambda A_0^{-1}.$$

Die Relationen (30) lassen sich mit Hilfe (28) in die Form:

$$(32) \quad (A_0 P^{-z} S^{-\lambda})^m S^{m\lambda+1} P^{mz} = Q$$

bringen.

Berücksichtigt man (31), so kann man für (29) und (32) auch schreiben:

$$Q^{-\lambda n} P^{m\lambda} S^{n\lambda} = 1,$$

$$Q^{-zn} P^{mz} S^{nz} = 1.$$

Man schließt hieraus in ganz analoger Weise wie früher, daß unsere Gruppe durch folgende beiden Relationen:

$$(33) \quad \boxed{\begin{array}{l} Q^{-n} P^m S^n = 1, \\ P^{-1} S P S^{-1} = 1, \end{array}}$$

bestimmt ist.

Vergleichen wir die Relation (33) mit (17), so erkennen wir die Gleichheit dieser beiden definierenden Relation, entsprechend dem Umstande, daß das eine topologische Verhältnis in das andere durch eine bloße Vertauschung des Innenraumes mit dem Außenraume unseres Toruses hervorgeht. Inzwischen benötigen wir die Ableitung dieses Punktes für das Kommende, dies der Grund für obige Rechnungen.

In Anlehnung an das Vorangehende bezeichnen wir *einen unseren Torus von außen umschließenden Kreis als einen „S-Kreis“, einen ihn von innen umschließenden mit „R-Kreis“.*

3. Gruppe für die Verkettung eines S- und R-Kreises mit einem Torusknoten.

Wir bezeichnen in bekannter Reihenfolge die Verzweigungen längs des Torusknotens, analog wie früher mit:

$$A_0, A_x, \dots, A_{(m-1)x}, A'_0, \dots, A_{(m-1)x}^{(g)}.$$

Dann sind die Verzweigungen unseres R -Kreises:

$$(34) \quad \begin{cases} R_{(m-\sigma)x}; A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)}, R_{(m-\sigma+1)x}; A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)}, \dots; A_{(m-1)x}^{(g-1)}; \\ R_0; A_0^{(g)}, \dots, R_{(m-\sigma-2)x}; A_{(m-\sigma-2)x}^{(g)}, R'_{(m-\sigma-1)x}; \\ S; R_{(m-\sigma-1)x}; A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)}, R_{(m-\sigma)x}, \end{cases}$$

wobei die von den R_i verschiedenen Operationen die Verzweigungen jenes Kurventeiles sind, der die zwei aufeinanderfolgenden R_i überkreuzt.

Die WIRTINGERSchen Relationen lassen sich, insofern sie sich auf den Torusknoten beziehen, durch den gleichen Schluß, wie man (24) aus (22) folgert, durch folgende ersetzen:

$$(35) \quad \begin{cases} A_0 & A_x & \dots & A_{(m-1)x} & A'_0 & \dots & A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} & R_{(m-\sigma)x} & = & P, \\ A_x & A_{2x} & \dots & A_{(m-1)x} & A'_0 & \dots & A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)} & R_{(m-\sigma+1)x} & = & P, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\sigma x} & A_{(\sigma+1)x} & \dots & A_{(m-1)x} & A'_0 & \dots & A_{(m-1)x}^{(g-1)} & R_0 & = & P, \\ A_{(\sigma+1)x} & A_{(\sigma+2)x} & \dots & A_{(m-1)x} & A'_0 & \dots & A_0^{(g)} & R_x & = & P, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & A_{(m-1)x} & A'_0 & \dots & A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} & R_{(m-\sigma-1)x} & = & P. \end{cases}$$

Für die Verkettung mit den beiden Kreisen ergeben sich folgende Gleichungen,

$$(36) \quad P^{-1}SP = S$$

und mit Berücksichtigung von (34):

$$(37) \quad \begin{cases} [A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)}]^{-1} & R_{(m-\sigma)x} & A_{(m-\sigma)x}^{(g-1)} & = & R_{(m-\sigma+1)x}, \\ [A_{(m-\sigma+1)x}^{(g-1)}]^{-1} & R_{(m-\sigma+1)x} & A_{(m-\sigma+1)x}^{(g-1)} & = & R_{(m-\sigma+2)x}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [A_{(m-1)x}^{(g-1)}]^{-1} & R_{(m-1)x} & A_{(m-1)x}^{(g-1)} & = & R_0, \\ [A_0^{(g)}]^{-1} & R_0 & A_0^{(g)} & = & R_x, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)}]^{-1} & S^{-1} R_{(m-\sigma-1)x} S & A_{(m-\sigma-1)x}^{(g-1)} & = & R_{(m-\sigma)x}. \end{cases}$$

Zwecks Vereinfachung der Schreibweise führen wir folgende neue Elemente unserer Gruppe ein:

$$(38a) \quad \left\{ \begin{aligned} T_0 &= A_0^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho)} S A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots A_{(m-1)x}^{(\varrho-1)} \\ &= A_0^{(\varrho)} \cdots A_{(m-1)x}^{(\varrho)} S, \\ T_x &= A_x^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} S A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots A_{(m-1)x}^{(\varrho-1)} A_0^{(\varrho)} \\ &= A_x^{(\varrho)} \cdots A_{(m-1)x}^{(\varrho)} A_0^{(\varrho+1)} S, \\ &\dots \\ T_{(m-\sigma-1)x} &= A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} S A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots A_0^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma-2)x}^{(\varrho)} \\ &= A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} \cdots A_0^{(\varrho+1)} \cdots A_{(m-\sigma-2)x}^{(\varrho+1)} S, \end{aligned} \right.$$

$$(38b) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{(m-\sigma)x} &= A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots A_0^{(\varrho-1)} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} S, \\ &\dots \\ T_{(m-1)x} &= A_{(m-1)x}^{(\varrho-1)} A_0^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} S A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots A_{(m-2)x}^{(\varrho-1)} \\ &= A_{(m-1)x}^{(\varrho-1)} A_0^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho)} \cdots A_{(m-2)x}^{(\varrho)} S. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man obige Relationen (38a) und (38b) mit den Relationen (37), so gewinnt man aus letzteren:

$$(39) \quad T_k^{-1} R_k T_k = R_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Führt man in den linken Seiten von (35) unsere Elemente T_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m-1$), jeweils entsprechend der zweiten Definition in den Relationen (38a) und (38b), ein, so gehen diese über in:

$$(40a) \quad \left\{ \begin{aligned} T_0^{\varrho-1} A_0^{(\varrho)} A_x^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} S &= PS^\varrho R_{(m-\sigma)x}^{-1}, \\ T_x^{\varrho-1} A_x^{(\varrho)} A_{2x}^{(\varrho)} \cdots A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho)} S &= PS^\varrho R_{(m-\sigma+1)x}^{-1}, \\ &\dots \\ T_{(m-\sigma-2)x}^{\varrho-1} A_{(m-\sigma-2)x}^{(\varrho)} \cdots S &= PS^\varrho R_{(2m-2\sigma-2)x}^{-1}, \\ T_{(m-\sigma-1)x}^{\varrho-1} A_{(m-\sigma-1)x}^{(\varrho)} \cdots S &= PS^\varrho R_{(2m-2\sigma-1)x}^{-1}. \end{aligned} \right.$$

Analog ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$(40b) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{(m-\sigma)x}^{\varrho-1} A_{(m-\sigma)x}^{(\varrho-1)} \cdots &= PS^{\varrho-1} R_{(m-\sigma+1)x+1}^{-1}, \\ &\dots \\ T_{(m-1)x}^{\varrho-1} A_{(m-1)x}^{(\varrho-1)} \cdots R_{(m-\sigma-2)x}^{(\varrho)} &= PS^{\varrho-1} R_{(m-\sigma-1)x}^{-1}. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Die linken Seiten schließen mit einer Operation A , deren unterer Index um Eins kleiner als der des R der rechten Seite ist, und dessen oberer von σ abhängt, nämlich $\varrho-1$ oder ϱ ist.

Wendet man die Transformationen von (37) auf ein bestimmtes R_{ix} ($m - \sigma$) mal an, so verschiebt sich der Index der Operation R_1 um $(m - \sigma)x \equiv 1 (m)$ und mit Hilfe von (40a) und (40b) findet man für diese Transformationen:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^{-\sigma} P^{-1} R_0 P S^\sigma = R_{0+(m-\sigma)x} = R_1, \\ S^{-\sigma} P^{-1} R_x P S^\sigma = R_{x+1}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\sigma} P^{-1} R_{(m-\sigma-1)x} P S^\sigma = R_{(m-\sigma-1)x+1}, \\ S^{-\sigma+1} P^{-1} R_{(m-\sigma)x} P S^{\sigma-1} = R_{(m-\sigma)x+1}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\sigma+1} P^{-1} R_{(m-1)x} P S^{\sigma-1} = R_{(m-1)x+1}. \end{array} \right.$$

Die Beziehungen (41) ermöglichen es uns, die gesamten R_i aus R_0 durch Transformation mit Aggregaten, bestehend aus P und S , zu ermitteln.

Ein Vergleich der Relationen (41) mit (26a) und (26b) liefert unmittelbar:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 = R_0, \\ S^{-\lambda} P^{-x} R_0 P^x S^\lambda = R_x, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\lambda} P^{-x} R_{(m-\sigma-2)x} P^x S^\lambda = R_{(m-\sigma-1)x}, \\ S^{-\lambda-1} P^{-x} R_{(m-\sigma-1)x} P^x S^{\lambda+1} = R_{(m-\sigma)x}, \\ S^{-\lambda} P^{-x} R_{(m-\sigma)x} P^x S^\lambda = R_{(m-\sigma+1)x}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\lambda} P^{-x} R_{(m-1)x} P^x S^\lambda = R_0. \end{array} \right.$$

Die auftretenden Indizes sind durch (1) und (21) bestimmt. Endlich erhält man die gesuchten Relationen:

$$(42a) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 = R_0, \\ S^{-\lambda} P^{-x} R_0 P^x S^\lambda = R_x, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\lambda(m-\sigma-2)} P^{-x(m-\sigma-2)} R_0 P^{x(m-\sigma-2)} S^{\lambda(m-\sigma-2)} = R_{(m-\sigma-2)x}, \\ S^{-\lambda(m-\sigma-1)} P^{-x(m-\sigma-1)} R_0 P^{x(m-\sigma-1)} S^{\lambda(m-\sigma-1)} = R_{(m-\sigma-1)x}, \\ S^{-\lambda(m-\sigma-1)} P^{-x(m-\sigma)} R_0 P^{x(m-\sigma)} S^{\lambda(m-\sigma)+1} = R_{(m-\sigma)x}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S^{-\lambda m-1} P^{-x m} R_0 P^{x m} S^{\lambda m+1} = R_0. \end{array} \right.$$

Zunächst können wir die Beziehungen (28) vollständig unverändert übernehmen, denn die R_i in unserem Falle stören die Ableitung von (28) nicht im geringsten.

Führen wir zunächst die Relationen (28) in (35) ein, so ergibt sich:

$$(A_0 S^{-\lambda} P^{-z})^n P^{(q-1)mz+(m-\sigma)z} S^{(q-1)m\lambda+(m-\sigma)\lambda} R_{(m-\sigma)\lambda} = P,$$

und mit Berücksichtigung von (42a), namentlich der letzten Zeile, erhält man weiter:

$$(A_0 S^{-\lambda} P^{-z})^n S^{-q} R_0 S^q P^{m\lambda} S^{n\lambda} = 1.$$

Setzen wir für:

$$(43) \quad S^{-q} R_0 S^q = R,$$

so erhalten wir:

$$(44) \quad (A_0 S^{-\lambda} P^{-z})^n R P^{m\lambda} S^{n\lambda} = 1.$$

Zur weiteren Vereinfachung der definierenden Relationen unserer Gruppe bilden wir die neue Erzeugende:

$$Q = A_0 A_z \cdots A_{(m-1)z} S = S^{-q} T_0 S^q.$$

Aus (38) und (39) erhält man zunächst:

$$(45) \quad Q^{-1} R Q = R.$$

Für Q^λ können wir schreiben:

$$\begin{aligned} Q^\lambda A_0 &= A_0 A_z \cdots A_{(m-1)z} A'_0 A'_z \cdots A'_{(m-1)z} A''_0 \cdots A_0^{(\lambda-1)} \cdots A_{(m-1)z}^{(\lambda-1)} A_0^{(\lambda)} S^\lambda \\ &= P R_{(m-\sigma)z}^{-1} P S^{+q-1} R_{(m-\sigma)z+1}^{-1} S^{-q+1} P S^{2q} R_{(m-\sigma)z+2}^{-1} \\ &\quad S^{-2q} \cdots P S^{2q} R_{(m-\sigma+1)z} S^{-2q} S^\lambda. \end{aligned}$$

Man hat zu beachten, daß eventuell das im Exponenten der Elemente S auftretende q durch $q-1$ zu ersetzen ist, jedenfalls bleibt dieser Exponent mit den Formeln (41) im Einklange, wie man aus den Relationen (40a) und (40b) leicht erkennt.

Es läßt sich unter Berücksichtigung von (41) für $Q^\lambda A_0$ folgender Ausdruck schreiben:

$$Q^\lambda A_0 = P R_{(m-\sigma)z}^{-z} P^{z-1} S^\lambda.$$

Aus der ersten Zeile der Beziehungen (41) ergibt sich aber:

$$P R_{(m-\sigma)z}^{-z} = S^{-q} R_0^{-z} S^q P^{+1} = R^{-z} P.$$

Somit

$$(46) \quad Q^\lambda = R^{-z} P^z S^\lambda A_0^{-1}.$$

Aus: $Q = A_0 A_z \cdots A_{(m-1)z} S$ erhält man unter Berücksichtigung von (28):

$$Q = (A_0 S^{-k} P^{-z})^m S^{mk+1} P^{mz}$$

und mit Hilfe (46)

$$Q = (Q^{-k} R^{-z})^m S^{mk+1} P^{mz}.$$

Nach (45) ist aber Q mit R vertauschbar, so daß aus (1) unmittelbar die Relation:

$$(47a) \quad Q^{-zn} R^{-zm} S^{zn} P^{zm} = 1$$

folgt.

Die Relation (44) läßt sich aber mit (46) auf die einfache Form:

$$(47b) \quad Q^{-kn} R^{-kn} S^{kn} P^{kn} = 1$$

bringen.

Aus (47a) und (47b) sowie unter Berücksichtigung von (36) und (45) erhält man für die definierenden Relationen unserer Gruppe die einfache Gestalt:

$$(48) \quad \boxed{\begin{array}{l} R^{-m} Q^{-n} P^m S^n = 1, \\ Q^{-1} R Q R^{-1} = 1, \\ P^{-1} S P S^{-1} = 1. \end{array}}$$

denn (48) wurde aus den WIRTINGERSCHEN Relationen, nur durch Erweiterungen bzw. Reduktionen erster und zweiter Art erhalten.

Die Erzeugenden R, Q, P, S haben wieder die denkbar einfachste geometrische und funktionentheoretische Bedeutung.

Unser eben besprochene Fall enthält aber, wie im folgenden in einfachster Art und Weise gezeigt wird, den allgemeinsten Fall, den die eingangs erwähnten funktionentheoretischen Verhältnisse gestatten. Es fließen somit aus den definierenden Relationen (48) für jeden topologisch möglichen Fall die zugehörigen definierenden Relationen, wenn man nur R und S die entsprechende Deutung zukommen läßt.

4. Gruppe der Schlauchknoten.

Wir legen unseren Knoten T , entsprechend dem Vorhergehenden durch k -Zahlenpaare:

$$(49) \quad (\nu_i \mu_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

fest. Als T_j wollen wir jenen Knoten bezeichnen, der durch die ersten j -Zahlenpaare aus (49) bestimmt ist.

Die Kurve I_j liegt daher auf einem j -ten Schlauch, dessen Bildungsweise restlos festgelegt ist. Wir können nun durch Deformation von I_j stets erreichen, daß sämtliche Meridianwindungen unserer Kurve I_j derart auf einen Teil obigen Schlauches zu liegen kommen, der von keinen weiteren Teilen der Kurve überkreuzt wird. Die obigen Verhältnisse sind daher ähnlich, wie die bei der Verkettung eines Torusknotens mit einem S -Kreise. Entsprechend den ν_i -Höchststellungen unserer Kurve I_i können wir als Erzeugende unserer Gruppe die Operationen:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0, A_x, \dots, A_{(\nu_i-1)x}; \quad A'_0, A'_x, \dots, A'_{(\nu_i-1)x}, S \\ \text{wählen und wo} \\ \mu_i x_i = \nu_i \lambda_i + 1; \quad \mu_i = \nu_i q_i - \sigma_i. \end{array} \right.$$

Ohne zunächst zu berücksichtigen, daß die Substitution S noch weiter aufgelöst werden kann, erhält man mit Hilfe der WIRTINGERSCHEN Relationen:

$$(50a) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_i^{-\mu_i} P_i^{\nu_i} S_i^{\mu_i} = 1, \\ P_i^{-1} S_i P_i S_i^{-1} = 1 \end{array} \right.$$

als definierende Relationen unserer Gruppe und wo Q_i und P_i ihre bekannte Bedeutung beibehalten haben.

In analoger Weise bestimmen sich die (50a) äquivalenten Relationen für den Knoten I_i als:

$$(50b) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{i-1}^{-\mu_{i-1}} P_{i-1}^{\nu_{i-1}} S_{i-1}^{\mu_{i-1}} = 1, \\ P_{i-1}^{-1} S_{i-1} P_{i-1} S_{i-1}^{-1} = 1. \end{array} \right.$$

Dabei bestehen zwischen den Relationen (50a) und (50b) folgende sehr einfache Beziehungen, die sich leicht ergeben, wenn man berücksichtigt, daß die Relationen (50b) auch als definierende Relationen des Trägerschlauches der Kurve I_i angesehen werden können.

Das Element P_i hat somit für den Knoten I_{i-1} die gleiche Bedeutung, die der Operation A_0 in den Relationen (50b) zusteht. Somit bestehen zunächst die Beziehungen

$$(51a) \quad P_i = Q_{i-1}^{-\lambda_{i-1}} P_{i-1}^{\lambda_{i-1}} S_{i-1}^{\lambda_{i-1}}.$$

Für die Substitution S_i findet man jene, durch welche das Element P_i transformiert wird, bei einer vollständigen Durchlaufung des Trägerschlauches von I_i . Unter Berücksichtigung der Äquivalenz der Gruppe

des Trägerschlauches von Γ_i und der der Kurve Γ_{i-1} findet man für S_i leicht folgende Beziehung:

$$(51b) \quad S_i = P_i^{-\nu_{i-1}} P_{i-1}^{\nu_{i-1}} S_{i-1}^{\mu_{i-1}}.$$

Zufolge (51b) erkennt man, daß die zweite Zeile von (50a) bereits erfüllt ist und daher aus dem System der definierenden Relationen gestrichen werden kann. Die Relation (51b) läßt sich mit Hilfe von (50b) in die Form

$$(52) \quad S_i = P_i^{-\nu_{i-1}} Q_i^{\mu_{i-1}}$$

bringen. Setzt man in obiger Relation (52) für i $i-1$ und führt dieses so erhaltene Element in (51a) ein, so erhält man:

$$(52a) \quad P_i = Q_{i-1}^{-\lambda_{i-1}} P_{i-1}^{\lambda_{i-1} - \nu_{i-2} \lambda_{i-1}} Q_{i-2}^{\mu_{i-2} \lambda_{i-1}}.$$

Man findet nun unter Berücksichtigung von (50a), (50b), (52) und (52a) leicht das vollständige System von definierenden Relationen unseres Knotens Γ :

$$(53) \quad \begin{array}{l} Q_i^{-\mu_i} P_i^{\nu_i - \nu_{i-1} \mu_i} Q_{i-1}^{\mu_{i-1} \mu_i} = 1, \\ P_i = Q_{i-1}^{-\lambda_{i-1}} P_{i-1}^{\lambda_{i-1} - \nu_{i-2} \lambda_{i-1}} Q_{i-2}^{\mu_{i-2} \lambda_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, k), \\ Q_1^{-\mu_1} P_1^{\nu_1} = 1 \end{array}$$

Es ist zunächst ersichtlich, daß in den definierenden Relationen (53) die Erzeugenden:

$$P_2, P_3, \dots, P_k$$

ohne Schwierigkeiten eliminiert werden können; es geschah dies nicht, um den Aufbau dieser Relationen deutlicher hervortreten zu lassen.

In den definierenden Relationen unserer Gruppe kommen daher nur die $k+1$ wesentlichen Erzeugenden

$$P_1, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$$

vor, zwischen denen k coneinander unabhängige Relationen bestehen. Sämtliche dieser $k+1$ Erzeugenden haben wieder eine einfache geometrische als auch funktionentheoretische Bedeutung. So ist das Element P_1 die Verzweigung, die man erhält auf jenem geschlossenen Wege, der in der Meridianebene liegt und alle Schnittpunkte der Kurve einschließt, während man Q_i als Verzweigung erhält, wenn man die Kurve Γ_{i-1} durchläuft.

5. Gruppe für die Verkettung von Torusknoten.

Wir nehmen vorerst drei Mannigfaltigkeiten M_1 , M_2 und M_3 an, die sich sämtliche in den Punkt $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ schneiden und in der Umgebung dieser Stelle analytische Funktionen von den Variablen $x_1 + ix_2$ und $y_1 + iy_2$ sind. Jede dieser einzelnen Mannigfaltigkeiten entspricht nach dem Früheren nach Wahl der Projektionskugel \ast ein ganz bestimmtes stereographisches Bild, welches wir in obiger Reihenfolge mit I_1 , I_2 bzw. I_3 bezeichnen werden. Von jedem dieser Knoten I_i wollen wir annehmen, daß er ein Torusknoten sei, also durch die Zahlenpaare (m_i, n_i) ($i = 1, 2, 3$) alles eindeutig festgelegt ist.

Bezüglich der gegenseitigen Lage obiger Torusknoten wollen wir annehmen, daß der Trägertorus von I_3 den von I_2 und dieser wieder den von I_1 vollständig umschließt.

Wir können die definierenden Relationen der Gruppe obiger Verkettung in einfachster Weise auf bereits im früheren behandelte Fälle zurückführen, indem wir zunächst jene Gruppen aufstellen, die einzig und allein von den Elementen des Knotens I_1 bzw. I_3 erzeugt werden. Deformiert man die Knoten auf den Kreisringflächen so, daß eine von den drei Kurven I_i nur dort überkreuzt wird von einer anderen, wo sie keine Selbstüberkreuzungen mehr aufweist, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die letzteren Gruppen definierende Relationen haben werden, welche die Gestalt der Gruppe einer R - bzw. S -Kreisverkettung aufweisen.

So wird die von den Elementen des Torusknotens I_1 erzeugte Gruppe die Gestalt der Gruppe einer S -Verkettung besitzen, während die von I_2 die Form der Gruppe einer R - und S -Verkettung hat und endlich die des Knotens I_3 die Gestalt einer R -Kreis-Verkettung.

Auf Grund obiger Überlegung können wir unmittelbar die definierenden Relationen obiger Gruppe ansetzen und aus ihnen die des Gesamtbildes leicht ableiten. So erhalten wir drei Typen von definierenden Relationen.

Für den Knoten I_i :

$$(54a) \quad S_1^{n_1} P_1^{m_1} Q_1^{-n_1} = 1, \quad S_1 P_1 S_1^{-1} P_1^{-1} = 1.$$

für I_2

$$(54b) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2^{n_2} P_2^{m_2} Q_2^{-n_2} R_2^{-n_2} = 1. \\ S_2 P_2 S_2^{-1} P_2^{-1} = 1, \quad R_2 Q_2 R_2^{-1} Q_2^{-1} = 1. \end{array} \right.$$

für I_3

$$(54c) \quad P_3^{m_3} Q_3^{-n_3} R_3^{-m_3} = 1, \quad R_3 Q_3 R_3^{-1} Q_3^{-1} = 1,$$

worin die Elemente S_i , P_i , Q_i und R_i , sowie die Exponenten n_i und m_i , die gleiche Bedeutung wie im vorhergehenden besitzen.

Wir erhalten aus den Relationen (54) unmittelbar die Gruppe der Verkettung I_1, I_2, I_3 , wenn wir die Beziehungen der S_i und R_i untereinander als auch in bezug auf die Elemente P_i und Q_i festlegen.

Bezeichnen wir in Übereinstimmung mit dem Früheren die Verzweigung in den Punkten der Höchststellungen der Kurven I_1, I_2 bzw. I_3 mit A_i, B_j bzw. C_i , so findet man:

$$(55) \quad \begin{cases} S_1 = B_0 B_{z_2} \cdots B_{(m_2-1)z_2} C_0 C_{z_3} \cdots C_{(m_3-1)z_3}, \\ S_2 = C_0 C_{z_3} \cdots C_{(m_3-1)z_3}, \\ R_2 = A_0 A_{z_1} \cdots A_{(n_1-1)z_1}, \\ R_3 = B_0 B_{z_2} \cdots B_{(n_2-1)z_2} A_0 A_{z_1} \cdots A_{(n_1-1)z_1}. \end{cases}$$

Aus den Relationen (55) ergeben sich mit Hilfe von (54a, b) und (54c) die folgenden:

$$(55a) \quad S_2 = Q_3, \quad S_1 = Q_2, \quad R_2 = P_1, \quad R_3 = P_2.$$

Aus (55a) und (54) schöpft man aber unmittelbar die *definierenden Relationen* der eingangs erwähnten Gruppen:

$$(56) \quad \begin{cases} Q_2^{n_1} P_1^{m_1} Q_1^{-n_1} = 1, \\ Q_3^{n_2} P_2^{m_2} Q_2^{-n_2} P_1^{-m_2} = 1, \\ P_3^{m_3} Q_3^{-n_3} P_2^{-m_3} = 1, \\ P_1 Q_2 P_1^{-1} Q_2^{-1} = 1, \\ P_2 Q_3 P_2^{-1} Q_3^{-1} = 1. \end{cases}$$

Für den Fall, daß mehrere Mannigfaltigkeiten M_1, M_2, \dots, M_p , die sich sämtliche im Punkte $x = y = 0$ schneiden, vorhanden sind und deren stereographische Bilder Torusknoten sind, die eine gegenseitige Verkettung aufweisen wie die eingangs erwähnten, lassen sich die zugehörigen Gruppen in gleicher Weise auf R - und S -Verkettungen zurückführen, und man findet:

$$(56a) \quad \begin{cases} Q_2^{n_1} P_1^{m_1} Q_1^{-n_1} = 1, \\ Q_{i+1}^{n_i} P_i^{m_i} Q_i^{-n_i} P_{i-1}^{-m_i} = 1, \quad (i = 2, 3, \dots, k), \\ P_k^{m_k} Q_k^{-n_k} P_{k-1}^{-m_k} = 1, \\ P_i Q_{i+1} P_i^{-1} Q_{i+1}^{-1} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, k-1) \end{cases}$$

als *definierende Relationen*, wenn zur Kurve I_i die Charakteristiken (m_i, n_i) ($i = 1, 2, \dots, k$) gehören und der Trägertorus von I_{i+1} den von I_i vollständig umschließt.

Zu erwähnen ist noch der Fall, daß die Trennung der Torusknoten durch den Winkel φ für alle oder einzelne unserer Kurven stattfindet, dann können wir aber die Kurven, welche auf einem gleichen Torus liegen, sofort auf verschiedene konzentrische Tori legen.

Wir können nun zu den höheren Verkettungen übergehen.

6. Höhere Verkettungen.

Wir nehmen vorerst zwei Kurven Γ und \mathcal{A} an, die entsprechend dem früheren als Schlauchkurven gegeben sind. $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k \equiv \Gamma$ und $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_l \equiv \mathcal{A}$ seien die einzelnen Schlauchknoten, aus welchen unsere Knoten Γ und \mathcal{A} aufgebaut werden können. Mit $(\mu_i \nu_i)$ bzw. $(\omega_i \pi_i)$ wollen wir die zugehörigen Charakteristiken bezeichnen.

Nehmen wir an $\Gamma_\alpha \equiv \mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, i$) und $\Gamma_{i+1} \nabla \mathcal{A}_{i+1}$, d. h. es liegen die Trägerschläuche der Kurven Γ_{i+1} bzw. \mathcal{A}_{i+1} konzentrisch bzw. können so gewählt werden. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir etwa an, der Schlauch von \mathcal{A}_{i+1} umfasse den von Γ_{i+1} vollständig, dann ist aber sofort ersichtlich, daß die Knoten Γ_r bzw. \mathcal{A}_r so auf ihre Trägerschläuche gelegt werden können, daß zunächst die den Relationen (53) entsprechend verändert für Γ_r als auch für \mathcal{A}_r , wo $r = k, \dots, i+2$, bzw. $r = l, \dots, i+2$, übernommen werden können. Für die restlichen Kurven Γ bzw. \mathcal{A} tritt nur insofern eine Änderung ein, als die entsprechenden Relationen (51b) bzw. (52) für die S abgeändert werden müssen. Wir wollen die erzeugenden Substitutionen für die Knoten Γ mit P, Q, S, R bezeichnen und deren Bedeutung aus dem Früheren übernehmen, die des Knoten \mathcal{A} entsprechend mit $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}$ und \tilde{R} .

Es ergeben sich, wie bereits oben erwähnt, als definierende Relation die Gleichungen (53) für die Indizes $i = k, k-1, \dots, i+2$ bzw. $i = l, l-1, \dots, i+2$, entsprechend dem Knoten Γ bzw. \mathcal{A} . Für die weiteren Relationen findet man leicht:

$$(57) \quad \begin{array}{l} Q_{i+1}^{-\mu_{i+1}} P_{i+1}^{\nu_{i+1}} S_{i+1}^{\nu_{i+1}} = 1, \\ \tilde{Q}_{i+1}^{-\omega_{i+1}} \tilde{P}_{i+1}^{\nu_{i+1}} \tilde{S}_{i+1}^{\pi_{i+1}} = 1, \\ \tilde{P}_{i+1} = \tilde{Q}_i^{-\sigma_i} \tilde{R}_i^{-\varrho_i} \tilde{P}_i^{-\varrho_i} \tilde{S}_i^{\lambda_i}, \\ \tilde{S}_{i+1} = \tilde{P}_{i+1}^{-\omega_i} \tilde{P}_i^{\pi_i} \tilde{S}_i^{\pi_i}, \\ \tilde{R}_i = P_i, \\ P_{i+1} = Q_i^{-\lambda_i} P_i^{-\kappa_i} S_i^{\lambda_i}, \\ \tilde{Q}_i^{-1} S_{i+1} = P_{i+1}^{-\mu_i} P_i^{\mu_i} S_i^{\nu_i}, \end{array}$$

wo $\kappa\nu = \lambda\mu + 1$ und $q\pi = \sigma\omega + 1$.

Die weiteren Relationen ergeben sich aus denen von (53), wenn wir Q, P, S durch $\hat{Q}, \hat{P}, \hat{S}$ sowie für $i = 2, 3, \dots, i$ setzen und diese sind mit den Gleichungen (57) durch folgende Beziehungen verbunden:

$$(57a) \quad \boxed{P_{i+1} \tilde{P}_{i+1} = \hat{Q}_i^{-\lambda_i} \hat{P}_i^{\alpha_i} \hat{S}_i^{\lambda_i} .}$$

Ganz analog findet man aber die definierenden Relationen für den Fall, daß sich vom Index i mehr als zwei verschiedene Reihen von Charakteristikenpaaren ergeben, aber auch für den Fall, daß an anderen Stellen sich die Reihen der Charakteristikenpaare verzweigen, kann man nach dem Früheren leicht die Relationen (57) und (57a) ergänzen.

Hiermit sind aber auch die definierenden Relationen aller möglichen Fälle erschöpft, und es wurden zu ihrem Aufbau nur solche Erzeugende verwendet, denen eine mehr oder weniger ausgezeichnete funktionentheoretische Bedeutung zukommt. Wie in einer weiteren Arbeit gezeigt werden soll, ermöglichen uns diese Relationen eine einfache Bestimmung der Verzweigungsgruppe.
