EDOARDO VESENTINI
della Scuola Normale Superiore di Pisa

SU UN TEOREMA DI WOLFF E DENJOY

(*Conferenza tenuta il 24 ottobre 1983*)

SUNTO. — Si illustrano alcune estensioni di un classico teorema di Wolff e Denjoy alle iterazioni di applicazioni olomorfe di domini limitati in spazi di Banach complessi.

Sia D un dominio (insieme aperto e connesso) limitato di uno spazio di Banach $\mathcal{E}$, e sia f un'applicazione olomorfa di D in D.

Si consideri la successione $\{f^n\}$ delle iterate $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (n volte) di f. In questa relazione, dopo aver esaminato nel § 1 il caso in cui Δ è il disco unità del piano complesso, verranno indicate nei §§ 2 e 3 condizioni per la convergenza della successione $\{f^n\}$ ad un'applicazione olomorfa di D in sè, traendo alcune conseguenze relative all'insieme $\operatorname{Fix} f$ dei punti uniti di f.

§ 1. - UN TEOREMA DI WOLFF E DENJOY.

Sia Δ il disco unità aperto di $\mathbb{C}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, e siano $\operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$ e $\operatorname{Aut} \Delta$, rispettivamente, il semigruppo delle applicazioni olomorfe di Δ in Δ ed il gruppo degli automorfismi olomorfi di Δ.

Le considerazioni ed i risultati che verranno indicati nei §§ 2 e 3 trovano la loro origine in un teorema di J. Wolff [8, 9] e A. Denjoy [3] sulla convergenza delle iterate di una $f \in \operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$. Di questo teorema verrà illustrata qui una dimostrazione elementare, nella quale compaiono alcune idee che saranno utilizzate nel caso dei domini limitati di spazi di Banach (1).

(1) Il lettore troverà in [1] un'esposizione ed un'ampia bibliografia sull'iterazione delle applicazioni olomorfe del disco in sè.

TEOREMA 1.1. - *Sia* $\mathrm{f} \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Delta)$ *tale che, se* $\mathrm{f} \in \mathrm{Aut}\,\Delta$, f *non abbia punti fissi in* Δ. *Esiste un punto* $\tau \in \bar{\Delta}$ *tale che la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converga all'applicazione costante* $\mathrm{z} \mapsto \tau$ *uniformemente sui compatti di* Δ.

Se $f \in \mathrm{Aut}\,\Delta$ (e quindi $\mathrm{Fix}\, f = \emptyset$), f è la restrizione a Δ di un'applicazione olomorfa di un intorno della chiusura $\bar{\Delta}$ di Δ in un intorno di $\bar{\Delta}$, la quale ha uno o due punti uniti sulla frontiera $\partial\Delta$ di Δ. Se $e^{i\theta}$ è uno di essi, la trasformazione di Cayley $c : z \mapsto i\,\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$ trasforma Δ nel semipiano superiore $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ e manda il punto $e^{i\theta}$ nel punto all'infinito di Π_+. L'automorfismo olomorfo $\tilde{f} = c \circ f \circ c^{-1}$ di Π_+ ha la forma

$$\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta$$

con $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ costanti. Ne segue che, se $\alpha \geq 1$, per ogni $z \in \Pi_+$ è $\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{f}^n(z) = \infty$, mentre, se $0 < \alpha < 1$, $\tilde{f}^n(z)$ converge (puntualmente, e quindi uniformemente sui compatti di Π_+, per il teorema di Vitali) al punto $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$ (che è punto unito dell'estensione di $\tilde{f}$ a $\bar{\Pi}_+$). Ciò prova l'asserto nel caso in cui sia $f \in \mathrm{Aut}\,\Delta$.

Se l'applicazione f non è un automorfismo di Δ, dal lemma di Schwarz-Pick segue che, denotando con ω la distanza di Poincaré in Δ,

$$\omega(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) < \omega(f^n(x), f^n(y)) \tag{1.1}$$

per tutti gli x e y ($x \neq y$) in Δ e per $n = 0, 1, \dots$. Per il teorema di Montel, esiste una sottosuccessione di $\{f^n\}$ uniformemente convergente sui compatti di Δ ad una funzione olomorfa $h : \Delta \to \mathbb{C}$, per la quale si ha $h(\Delta) \subset \bar{\Delta}$.

Proviamo che, se $h(\Delta) \subset \Delta$, per tutti gli x e y in Δ la successione decrescente $\{\omega(f^n(x), f^n(y))\}$ converge a zero:

$$\lim_{n \to +\infty} \omega(f^n(x), f^n(y)) = 0\,. \tag{1.2}$$

Supponiamo infatti che esistano x e y in $\varDelta$ $(x \neq y)$ tali che

$$\lim_{n \to +\infty} \omega(f^n(x), f^n(y)) = \delta > 0 .$$

Per il lemma di Schwarz-Pick

$$\omega(f \circ h(x), f \circ h(x)) < \omega(h(x), h(y)) = \delta ;$$

il che è assurdo, avendosi

$$\omega(f \circ h(x), f \circ h(y)) = \lim_{n \to +\infty} \omega(f^n(x), f^n(y)) = \delta .$$

Risulta così provato che, se uno dei valori limiti della successione $\{f^n\}$ per la topologia della convergenza uniforme sui compatti di $\varDelta$, applica $\varDelta$ in $\varDelta$, vale la (1.2) per tutti gli x e y in $\varDelta$. Se h è un valore limite siffatto e $\tau = h(y)$ per un $y \in \varDelta$, risulta $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = \tau$ per ogni $x \in \varDelta$, in virtù della (1.2).

Resta da considerare il caso in cui ogni valore limite h sia tale che $h(\varDelta) \cap \partial\varDelta \neq \emptyset$. Dal principio del massimo segue che esiste allora $\tau_h \in \partial\varDelta$ per il quale $h(\varDelta) = \{\tau_h\}$. Proviamo che τ_h non dipende da h, e quindi che, posto $\tau = \tau_h$, $\lim_{n \to +\infty} f^n(z) = \tau$ per ogni $z \in \varDelta$. A tal uopo stabiliamo il

LEMMA 1.2. - *Se ogni valore limite della successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *per la topologia della convergenza uniforme sui compatti applica* $\varDelta$ *in un punto di* $\partial\varDelta$, *esiste un punto* $\mathrm{z} \in \varDelta$ *ed una successione* $1 \le \mathrm{n}_1 < \mathrm{n}_2 < \ldots$ *tale che*

$$|f(f^{n_j}(z))| \ge |f^{n_j}(z)| \quad \textit{per} \quad j = 1, 2, \ldots .$$

DIMOSTRAZIONE. - Ragionando per assurdo, supponiamo dunque che, per ogni $z \in \varDelta$ esista un indice $n_1 = n_1(z)$ tale che

$$|f^{n+1}(z)| < |f^n(z)| \quad \text{per ogni} \quad n \ge n_1(z) .$$

Fissato z_0, per $n \ge n_1(f(z_0))$ si ha

$$|f^{n+2}(z_0)| < |f^{n+1}(z_0)| .$$

Sia $n_2 = n_2(z_0) > \max(n_1(z_0),\ n_1(f(z_0)))$. Per ogni $n \geq n_1(f^2(z_0))$ si ha

$$|f^{n+3}(z_0)| < |f^{n+2}(z_0)| .$$

Sia $n_3 = n_3(z_0) > \max(n_2(z_0), n_1(f^2(z_0)))$. Risulta

$$|f^{n_3+3}(z_0)| < f^{n_3+2}(z_0)| < \ldots < |f^{n_2+2}(z_0)| < |f^{n_2+1}(z_0)| <$$
$$< \ldots < |f^{n_1+1}(z_0)|, \text{ ecc.}$$

La successione $\{f^{n_j+j}(z_0)\}$ ha pertanto un valore limite in Δ, il che è assurdo.

QED

Ritornando alla dimostrazione del Teorema 1.1, siano z e $\{n_j\}$ come nel Lemma 1.2, sicché risulta

$$\liminf_{j \to +\infty} \frac{1 - |f^{n_j+1}(z)|}{1 - |f^{n_j}(z)|} \leq 1 .$$

Non è restrittivo supporre che ambedue le successioni $\{f^{n_j}(z)\}$ e $\{f^{n_j+1}(z)\}$ tendano a 1. Per il teorema di Julia (cf. ad es. [2, p. 27]), esiste una costante α, con $0 < \alpha \leq 1$, tale che

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}$$

per ogni $z \in \Delta$, ossia tale che, indicando con E_k, per $0 < k < 1$, l'oriciclo

$$E_k = \left\{ z \in \Delta : \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < \frac{k}{1 - k} \right\},$$

risulta

$$f(E_k) \subset E_{k'} ,$$

con

$$k' = \frac{\alpha k}{1 + \alpha k - k}$$

e

$$\frac{k'}{1 - k'} = \frac{\alpha k}{1 - k} \leq \frac{k}{1 - k} .$$

Ne segue che ogni sottosuccessione di $\{f^n\}$ convergente per la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Δ converge all'applicazione $z \mapsto 1$. Pertanto $\lim_{n \to +\infty} f^n(z) = \tau = 1$ per ogni $z \in \Delta$. Per il teorema di Vitali, la convergenza è uniforme sui compatti, e la dimostrazione del Teorema 1.1 è completa.

OSSERVAZIONI. - a. Se $f \in \operatorname{Aut} \Delta$, $f \neq id$ e $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$, la successione $\{f^n\}$ non converge.

b. Con le notazioni del Teorema 1.1, sia $\tau \in \Delta$. L'applicazione $z \mapsto \tau$ è un idempotente del semigruppo $\operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$. Posta in $\operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$ la topologia della convergenza uniforme sui compatti, f genera allora un semigruppo relativamente compatto in $\operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$, cioè la chiusura $S(f)$ di $\{f, f^2, \dots\}$ per la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Δ è compatta in $S(f)$.

c. Se $S(f) \subset \operatorname{Hol}(\Delta, \Delta)$, per il teorema di Montel $S(f)$ è compatto. Quindi, se inoltre $f \in \operatorname{Aut} \Delta$, risulta $\operatorname{Fix} f \neq \emptyset$. Nel qual caso $S(f)$ è un gruppo.

Quanto osservato in b. ed in c. può essere confrontato con il seguente risultato sui semigruppi topologici (cf. [6, 7]):

Sia S *un semigruppo topologico compatto. Per* $\mathrm{f} \in \mathrm{S}$, *sia* S(f) *la chiusura dell'insieme* $\{\mathrm{f}, \mathrm{f}^2, \dots\}$ *in* S. S(f) *è un semigruppo compatto abeliano per il quale valgono le affermazioni seguenti*:

a) S(f) *contiene uno ed un solo idempotente*, h.

b) *Se* h *è un'identità in* S(f), *cioè se* $\mathrm{gh} = \mathrm{g}$ *per ogni* $\mathrm{g} \in \mathrm{S(f)}$, *allora* S(f) *è un gruppo, e* f *è invertibile in* S(f).

c) *Se* h *è uno zero di* S(f), *cioè se* $\mathrm{gh} = \mathrm{h}$ *per ogni* $\mathrm{g} \in \mathrm{S(f)}$, *allora la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge a* h.

§ 2. - GLI IDEMPOTENTI DI $\operatorname{Hol}(D, D)$.

A questo punto possiamo delineare più nitidamente il tema di questa relazione. Sia D un dominio limitato di uno spazio di Banach complesso $\mathcal{E}$. Con $\operatorname{Hol}(D, \mathcal{E})$ indichiamo l'insieme delle applicazioni olomorfe (cioè differenziabili secondo Fréchet, od equivalentemente, analitiche secondo Gateaux e localmente limitate) di D in $\mathcal{E}$. Sia

$\mathrm{Hol}(D, D) = \{f \in \mathrm{Hol}(D, \mathcal{C}) : f(D) \subset D\}$. La topologia della convergenza uniforme locale nel semigruppo $\mathrm{Hol}(D, D)$ è definita nel modo seguente.

Se H è un sottoinsieme di D, diremo che H è completamente interno a D, e scriveremo $H \subset\subset D$, se $\inf\{\|x - y\| : x \in H, y \in \mathcal{C}/D\} > 0$. La topologia della convergenza uniforme locale è definita dalla convergenza uniforme sulle unioni finite di dischi chiusi completamente interni a D.

OSSERVAZIONI. - d. Se $\{f^n\}$ converge puntualmente ad un elemento $h \in \mathrm{Hol}(D, D)$, h è un idempotente di $\mathrm{Hol}(D, D)$.

e. Sia $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$, e sia $S(f)$ la chiusura di $\{f, f^2, \dots\}$ in $\mathrm{Hol}(D, \mathcal{C})$ per la topologia della convergenza uniforme locale. Sotto quali condizioni su D e su f risulta $S(f) \subset \mathrm{Hol}(D, D)$?

Se $\mathrm{Fix}\, f \neq \emptyset$, una condizione sufficiente è che D soddisfi il seguente *principio del massimo*: Se $l \in \mathrm{Hol}(D, \mathcal{C})$ è tale che $l(D) \subset \bar{D}$ e $l(D) \cap \partial D \neq \emptyset$, risulta $l(D) \subset \partial D$.

Ad esempio il dominio $D = \{z \in \Delta : \text{se } \mathrm{Im}\, z = 0 \text{ è } -1 < \mathrm{Re}\, z < 0\}$ non soddisfa il principio del massimo.

f. Se $\mathrm{Fix}\, f \neq \emptyset$, sotto quali condizioni esiste $h \in \mathrm{Hol}(D, D)$ tale che $\mathrm{Fix}\, f = h(D)$? Se ciò accade, $\mathrm{Fix}\, f$ è connesso ed inoltre risulta

$$f \circ h = h. \tag{2.1}$$

Viceversa, se due elementi f e h di $\mathrm{Hol}(D, D)$ soddisfano la (2.1), è $\mathrm{Fix}\, f \supset h(D)$.

g. La (2.1) è soddisfatta se la successione $\{f^n\}$ converge puntualmente ad una funzione $h \in \mathrm{Hol}(D, D)$. In tal caso risulta $\mathrm{Fix}\, f = h(D)$.

Illustreremo ora alcuni risultati concernenti gli idempotenti di $\mathrm{Hol}(D, D)$ e, per una $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$, la convergenza della successione $\{f^n\}$ per la topologia della convergenza uniforme locale. Applicheremo questi risultati alla ricerca dei punti uniti di f.

Sia $h \in \mathrm{Hol}(D, D)$ un idempotente, e sia $x_0 \in h(D)$. Differenziando l'eguaglianza $h \circ h = h$ in x_0, si vede che $dh(x_0)$ è un idempotente nell'algebra di Banach $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ degli operatori lineari continui in $\mathcal{E}$. Il teorema seguente concerne l'inversione di questo risultato.

TEOREMA 2.1. - *Sia* D *limitato e soddisfi il principio del massimo. Sia* $\mathrm{f} \in \mathrm{Hol}(\mathrm{D}, \mathrm{D})$, *con* $\mathrm{Fix}\,\mathrm{f} \neq \emptyset$, *e sia* $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{Fix}\,\mathrm{f}$. *Se* $\mathrm{df}(\mathrm{x}_0)$ *è un idempotente in* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, *la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge, per la topologia della convergenza uniforme locale, ad un idempotente* $\mathrm{h} \in \mathrm{Hol}(\mathrm{D}, \mathrm{D})$.

Poiché vale la (2.1), per quanto visto in g. è $\mathrm{Fix}\, f = h(D)$.

Risulta $dh(x_0) = df(x_0)$, ed è noto che lo spettro dell'idempotente $dh(x_0)$ di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ consta al più dei punti 0 e 1, riducendosi al primo se, e solo se, $dh(x_0) = 0$, ed al secondo se, e solo se, $dh(x_0) = I$. Ne segue che $\mathrm{Fix}\, f = \{x_0\}$ se, e solo se, $Sp\, df(x_0) = \{0\}$. L'altro caso estremo, $Sp\, df(x_0) = \{1\}$, implica che $df(x_0) = I$, e — per un teorema di H. Cartan — che $f(x) = x$ per ogni $x \in D$.

§ 3. - CONVERGENZA DI $\{f^n\}$.

Sia D un dominio limitato di $\mathcal{E}$, sia $f \in \mathrm{Hol}(D, D)$ tale che $\mathrm{Fix}\, f \neq \emptyset$, e sia $x \in \mathrm{Fix}\, f$.

La limitatezza di D implica [4, Lemma IV.2.5, pp. 94-95] che il raggio spettrale $\varrho(df(x))$ di $df(x)$ soddisfa la condizione $\varrho(df(x)) \leq 1$, cioè lo spettro $Sp\, df(x)$ di $df(x)$ è tale che $Sp\, df(x) \in \bar{\Delta}$.

Se la successione $\{f^n\}$ converge ad un elemento di $\mathrm{Hol}(D, D)$ per la topologia della convergenza uniforme locale, il limite $h = \lim f^n$ è un idempotente del semigruppo $\mathrm{Hol}(D, D)$, e, per ogni $x \in \mathrm{Fix}\, f$, $dh(x) = \lim df^n(x) = \lim (df(x))^n$, per la topologia definita dalla norma di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, è un idempotente di $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Cosa può dirsi dello spettro di $df(x)$?

Vale la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE 3.1. - *Se la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge ad un elemento di* $\mathrm{Hol}(\mathrm{D}, \mathcal{E})$ *per la topologia della convergenza uniforme locale, e se* $\mathrm{Fix}\,\mathrm{f} \neq \emptyset$, *e, per ogni* $\mathrm{x} \in \mathrm{Fix}\,\mathrm{f}$, *è*

$$Sp\, df(x) \subset \Delta \cup \{1\}. \tag{3.1}$$

Inoltre, è $\mathrm{Sp\,df(x)} \subset \Delta$ *oppure* 1 *è un punto isolato di* $\mathrm{Sp\,df(x)}$, *nel quale la funzione risolvente* $\xi \mapsto (\xi \mathrm{I} - \mathrm{df(x)})^{-1}$ *ha un polo del primo ordine.*

Le condizioni su $Sp\,df(x)$ espresse dalla Proposizione 3.1 sono sufficienti per la convergenza di $\{f^n\}$ ad un elemento di $\mathrm{Hol}(D, \mathcal{E})$ per la topologia della convergenza uniforme locale?

La risposta, affermativa, è espressa dal seguente

TEOREMA 3.2. - *Sia* f *un'applicazione olomorfa di* D *in* D *avente un punto unito* $\mathrm{x} \in \mathrm{D}$. *Se*

$$Sp\,df(x) \subset \Delta\,, \tag{3.2}$$

oppure se $\mathrm{Sp\,df(x)} \cap \partial\Delta = \{1\}$ *e* 1 *è un punto isolato di* $\mathrm{Sp\,df(x)}$ *nel quale la funzione risolvente* $\xi \mapsto (\xi \mathrm{I} - \mathrm{df(x)})^{-1}$ *ha un polo, allora la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge, per la topologia della convergenza uniforme locale, ad un'applicazione* $\mathrm{h} \in \mathrm{Hol(D}, \mathcal{E})$ *tale che* $\mathrm{h(D)} \subset \bar{\mathrm{D}}$.

Se D *soddisfa il principio del massimo,* h *è un idempotente di* Hol(D, D).

Se vale la (3.2), *risulta* $\mathrm{h(D)} = \{\mathrm{x}\}$ *e* $\mathrm{Fix\,f} = \{\mathrm{x}\}$.

Il Teorema 3.2 — e precisamente il caso in cui vale la (3.2) — dà luogo alla seguente estensione del Teorema del punto fisso di Earle-Hamilton [4, Theorem V.5.2, p. 138].

TEOREMA 3.3. - *Se la chiusura* S(f) *di* $\{\mathrm{f}, \mathrm{f}^2, \dots\}$ *per la topologia della convergenza uniforme locale contiene un'applicazione* $\mathrm{g} \in \mathrm{Hol(D, D)}$, *tale che* $\overline{\mathrm{g(D)}} \subset\subset \mathrm{D}$, Fix f *consiste di un solo punto* x, *e la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge all'applicazione costante* $\mathrm{z} \mapsto \mathrm{x}$ *per la topologia della convergenza uniforme locale.*

Se $df(x)$ è un operatore compatto $Sp\,df(x) \setminus \{0\}$ consta di autovalori isolati con autospazi di dimensione finita, e quindi la funzione risolvente ha un polo (isolato) in ogni punto di $Sp\,df(x) \setminus \{0\}$. Ne segue il

COROLLARIO 3.4. - *Se* df(x) *è un operatore compatto, la successione* $\{\mathrm{f}^n\}$ *converge per la topologia della convergenza uniforme locale se, e soltanto se, vale la* (3.1).

In particolare, se lo spazio $\mathcal{E}$ ha dimensione finita, la successione $\{f^n\}$ converge in ogni punto di D per la topologia della convergenza uniforme sui compatti se, e soltanto se, tutti gli autovalori di $df(x)$ hanno modulo minore di uno oppure 1 è il solo autovalore di modulo uno.

SUMMARY. — Extending a classical result due to Wolff and Denjoy iterations of holomorphic maps of bounded domains in complex Banach spaces are investigated.

BIBLIOGRAFIA

[1] BURCKEL R. B., *Iterating self-maps of discs*. Amer. Math. Monthly, *88* (1981), 396-407.

[2] CARATHEODORY C., *Theory of functions*. Vol. II, Chelsea, New York, 1954.

[3] DENJOY A., *Sur l'itération des fonctions analytiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, *182* (1926), 255-257.

[4] FRANZONI T. and VESENTINI E., *Holomorphic maps and invariant distances*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam/New York/Oxford, 1980.

[5] HEINS M., *On the iteration of functions which are analytic and single valued in a given multiply connected region*. Amer. J. Math., *63* (1941), 461-480.

[6] HEWITT E. and ROSS K., *Abstract harmonic analysis*. Vol. I, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963.

[7] WALLACE A. D., *The structure of topological semigroups*. Bull. Amer. Math. Soc. *61* (1955), 95-112.

[8] WOLFF J., *Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région*. C. R. Acad. Sci. Paris, *182* (1926), 42-43.

[9] WOLFF J., *Sur l'itération des fonctions bornées*. C. R. Acad. Sci. Paris, *182* (1926), 200-201.