The Journal of Geometric Analysis
Volume 8, Number 3, 1998

Inégalités de Morse Holomorphes Singulières

By *Laurent Bonavero*

ABSTRACT. We generalize Demailly's holomorphic Morse inequalities to the case of a line bundle E equipped with a singular metric on an arbitrary compact complex manifold X. Our inequalities give an estimate of the cohomology groups with values in the tensor power $E^{\otimes k}$ twisted by the corresponding sequence of multiplier ideal sheaves introduced by Nadel. The allowed singularities are of the following type: the metric is locally given by a weight $\exp(-\phi)$ where $\phi \sim \frac{c}{2}\log(\sum|f_j|^2)$ with holomorphic f_j. As a consequence, we obtain a necessary and sufficient analytic condition, invariant by bimeromorphism, for a manifold X to be Moishezon. This characterization improves a result given by Ji and Shiffman. We finally recall and improve some results of Kollár in order to show that the corresponding sufficient conditions obtained by Siu and Demailly in the smooth case are not necessary.

1. Introduction

L'objet de ce travail est de généraliser les inégalités de Morse holomorphes de J.-P. Demailly au cas d'un fibré en droites E muni d'une métrique singulière au dessus d'une variété complexe compacte X. Ces inégalités nous permettent de caractériser analytiquement les variétés de Moishezon.

Avant d'énoncer nos propres résultats, faisons quelques rappels de notions et résultats bien connus:

Définition. *Une variété complexe compacte X de dimension n est de Moishezon si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.* □

Une telle variété n'est pas très loin d'être projective comme l'illustre le résultat suivant de Moishezon [10]:

Théorèm. *Une variété X est de Moishezon si et seulement si il existe une variété projective $\tilde{X}$ et une application $\mu : \tilde{X} \to X$ composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses.* □

Dans la lignée de la célèbre caractérisation analytique des variétés projectives par Kodaira [8], Grauert et Riemenschneider conjecturaient une caractérisation analogue pour les variétés X de Moishezon, sous la forme de l'existence de certains fibrés en droites à courbure semi-positive et génériquement positive.

Siu [14, 15] et Demailly [2] ont donné la réponse affirmative suivante:

ISSN 1050-6926

Théorèm. *X est de Moishezon dès que X possède un fibré E holomorphe de rang 1 muni d'une métrique hermitienne lisse dont la forme de courbure $\Theta(E)$ vérifie l'une des conditions suivantes:*

(i) $\Theta(E)$ est partout semi-positive et définie positive en au moins un point.

(ii) $\int_{X(\leq 1,E)} \Theta(E)^n > 0$ où $X(\leq 1, E)$ désigne l'ouvert de X des points où la signature de $\Theta(E)$ est d'indice inférieur à 1 (c'est-à-dire les points où $\Theta(E)$ est non dégénérée et possède au plus une valeur propre strictement négative). □

La preuve proposée par Demailly repose sur ses inégalités de Morse holomorphes qui donnent une estimation des groupes de cohomologie de Dolbeault à valeurs dans les puissances tensorielles $E^{\otimes k}$ en fonction d'intégrales de courbure [2].

Cependant, les conditions suffisantes données par le théorème précédent ne sont pas nécessaires en général: Kollár a donné des exemples de variétés de Moishezon ne possédant pas de fibré big et nef dans le cadre des métriques lisses, donc en particulier ne vérifiant pas (i) (voir [9]) (rappelons qu'un fibré E est nef si pour tout $\epsilon > 0$ et toute métrique hermitienne ω sur X, E possède une métrique lisse h_ϵ telle que $\Theta_{h_\epsilon}(E) \geq -\epsilon\omega$; et que E est big si $\dim H^0(X, E^{\otimes k}) > Ck^n$ pour $k > k_0$). Dans ce travail, nous détaillerons la construction de Kollár, donnerons une preuve élémentaire de son affirmation et montrerons que sa construction permet aussi d'obtenir des variétés de Moishezon ne possédant pas de fibré muni d'une métrique lisse vérifiant la condition (ii) (voir paragraphe 4).

Dans le but d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété soit de Moishezon, l'idée est d'autoriser des singularités aux métriques des fibrés considérés (cette idée est déjà présente dans les travaux de Ji et Shiffman [7]). Plus précisément, considérons un fibré E muni d'une métrique singulière $h = |.| \exp(-\phi)$ où ϕ est localement intégrable. La forme de courbure d'un tel fibré est alors naturellement un courant sur X, que l'on note encore $\Theta(E)$, courant donné par la $(1,1)$-forme $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$.

Dans ce travail, nous démontrons des inégalités de Morse holomorphes pour de tels fibrés hermitiens singuliers. Ces inégalités donnent une estimation des groupes de cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles $E^{\otimes k}$, tordues par une suite d'idéaux $\mathcal{I}_k(h)$ naturellement associée aux poids $\exp(-k\phi)$: la suite des faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel. La présence de ces faisceaux d'idéaux constitue le phénomène nouveau par rapport au cas où la métrique est lisse.

Le type de singularités autorisées est le suivant : la métrique est donnée localement par un poids $\exp(-\phi)$ où $\phi(x) \sim \frac{c}{2}\log(\sum |f_j|^2)$, et où les f_j sont holomorphes [hypothèse (S)]. Nous verrons plus loin en quoi cette restriction est naturelle. Notre résultat est le suivant:

Théorèm 1.1. *Pour tout fibré F de rang r et pour tout q compris entre 0 et n, on a:*

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\dim H^j\left(X, \mathcal{O}\left(E^k \otimes F\right) \otimes \mathcal{I}_k(h)\right) \leq r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\leq q,E)}(-1)^q\Theta(E)^n + o(k^n)$$

(avec égalité si $q = n$), où $X(\leq q, E)$ désigne l'ouvert de X des points lisses de la métrique d'indice inférieur à q.

On obtient comme application des conditions nécessaires et suffisantes, invariantes par morphisme biméromorphe, pour que la variété X soit de Moishezon.

Donnons par exemple le:

Théorèm 1.2. *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement si il* *existe sur X un courant T de bidegré* $(1, 1)$ *tel que:*

(i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,

(ii) $T = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi + \alpha$, *où* ϕ *vérifie l'hypothèse (S) et* α *est un représentant* $\mathcal{C}^\infty$ *de* T,

(iii) $\int_{X(\leq 1,T)} T^n > 0$ *où l'intégrale est prise sur les points lisses de* T.

Remerciements : je tiens à remercier très sincèrement J.-P. Demailly ; ce travail, tant par le fond que par la forme, lui doit beaucoup.

Les résultats des trois premières parties de ce travail ont été annoncés dans la note [1]

2. Notations et énoncé du résultat principal

2.1. Notations

Dans tout ce travail, X désigne une variété complexe compacte de dimension n, E un fibré holomorphe de rang un sur X, muni d'une métrique h singulière : h est donnée localement par un poids $\exp(-\phi)$ où ϕ est dans L^1_{loc} (pour des définitions et exemples précis, on renvoie à [3]).

A (E, h), on associe pour tout entier k positif le faisceau d'idéaux des germes de fonctions holomorphes f telles que $|f|^2 e^{-2k\phi}$ est L^1_{loc}, faisceau que l'on note $\mathcal{I}_k(h)$. Ce faisceau est connu sous le nom de "faisceau multiplicateur de Nadel" [11].

On fait enfin l'hypothèse suivante sur h (c'est-à-dire localement sur ϕ):

Hypothèse (S) :

ϕ s'écrit localement:

$$\phi = \frac{c}{2}\log\left(\sum \lambda_j |f_j|^2\right) + \psi$$

où les f_j *sont holomorphes, les* λ_j *sont des fonctions réelles positives* $\mathcal{C}^\infty$, ψ *est* $\mathcal{C}^\infty$, *et* c *est un rationnel positif ou nul.*

Cette hypothèse implique que la fonction ϕ est presque plurisousharmonique (ce qui signifie que son hessien complexe est minoré par une $(1, 1)$-forme à coefficients continus) et donc en particulier que le faisceau $\mathcal{I}_k(h)$ est un faisceau cohérent d'après un résultat de Nadel [11].

Remarque. C'est précisément par des fonctions ayant ce type de singularités que Demailly approche une fonction presque plurisousharmonique quelconque [4]. Ceci aura une importance capitale dans les applications et c'est en ce sens que cette restriction est naturelle. □

Pour un germe de fonction holomorphe f, le fait d'appartenir à $\mathcal{I}_k(h)$ équivaut à certaines conditions d'annulation comme l'illustre l'exemple suivant:

Exemple :

Plaçons nous dans $\mathbb{C}^n$ *au voisinage de l'origine et posons:*

$$\phi(z) = \frac{1}{2}\log\left(|z_1|^{2\alpha_1} + \cdots + |z_p|^{2\alpha_p}\right) + \psi(z)\,.$$

Alors, $\mathcal{I}_k(\phi)_{\mathbb{C}^n,0}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-engendré par les $\prod_{j=1}^p z_j^{\beta_j}$ où:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j + 1}{\alpha_j} > k\,.$$

On note enfin $\Theta(E) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ le courant de courbure de E, $X(q, E)$ l'ouvert de X formé des points x au voisinage desquels ϕ est bornée et $\Theta(E)_x$ possède exactement q valeurs propres strictement négatives et $n - q$ valeurs propres strictement positives; et finalement $X(\leq q, E) = X(0, E) \cup \ldots \cup X(q, E)$.

L'hypothèse (S) implique en particulier que le courant de courbure $\Theta(E) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ est presque positif selon la terminologie de [3] (c'est-à-dire minoré par une $(1, 1)$-forme à coefficients continus).

2.2. Enoncé du résultat principal

Sous les hypothèses précédentes et si F désigne de plus un fibré de rang r sur X, on a le résultat suivant:

Théorèm 2.1. *Pour tout q compris entre 0 et n, on a:*

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j} \dim H^j\left(X, \mathcal{O}\left(E^k \otimes F\right) \otimes \mathcal{I}_k(h)\right) \leq r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\leq q,E)} (-1)^q\Theta(E)^n + o\left(k^n\right)$$

(avec égalité si $q = n$).

Comme dans le cas où la métrique est lisse, on en déduit les inégalités de Morse faibles:

Corollaire 2.2. *Pour tout q compris entre 0 et n, on a:*

$$\dim H^q\left(X, \mathcal{O}\left(E^k \otimes F\right) \otimes \mathcal{I}_k(h)\right) \leq r\frac{k^n}{n!}\int_{X(q,E)} (-1)^q\Theta(E)^n + o\left(k^n\right)\,.$$

2.3. Plan de la preuve

La démarche suivie est la suivante:

a) après éclatement de X le long de sous-variétés définies par les singularités de h, on se ramène à un fibré muni d'une métrique lisse ; on peut alors appliquer les inégalités de Morse holomorphes dans le cas h lisse à la variété obtenue $\tilde{X}$.

b) on relie les groupes de cohomologie sur $\tilde{X}$ à ceux de X grâce à l'étude de la suite spectrale de Leray.

3. Démonstration du Théorème 2.1

3.1. Quelques remarques sur l'hypothèse (S)

L'hypothèse (S) nous dit que les singularités de la métrique h sont localisées le long d'un ensemble analytique A, défini localement par $\{x \mid \forall j,\ f_j(x) = 0\}$. Cet ensemble analytique n'est pas nécessairement irréductible et ses composantes irréductibles sont de dimension quelconque (celui de l'exemple du Sectionbona.sec1.1 est de dimension $n - p$).

3.2. Réduction au cas lisse

La réduction au cas lisse consiste dans un premier temps à se ramener à une variété $\tilde{X}$, obtenue en éclatant X le long de centres lisses: $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de telle sorte que la métrique $\tilde{h} = \pi^* h$ sur le fibré $\tilde{E} = \pi^* E$ n'ait ses singularités qu'en codimension 1 (ou de telle sorte que le faisceau $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ soit inversible).

Dans un deuxième temps, nous appliquerons les inégalités de Morse dans le cas lisse.

3.2.1. Désingularisation de $\mathcal{I}_k(h)$

a) Enonçons la proposition suivante:

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une variété $\tilde{X}$ et $\pi : \tilde{X} \to X$ une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses tels que $\tilde{E} = \pi^* E$ muni de la métrique singulière $\tilde{h} = \pi^* h$ de poids local $e^{-\tilde{\phi}}$ vérifie la propriété suivante: pour tout $x_0 \in \tilde{X}$, il existe des coordonnées holomorphes $w_1, \dots, w_n$ centrées en x_0 telles que:*

$$\tilde{\phi}(w) = c.\sum_j a_j \log \left|g_j(w)\right| + \tilde{\psi}(w)$$

où les a_j sont des entiers ≥ 0 et où les g_j sont irréductibles dans $\mathcal{O}_{\tilde{X},x_0}$ et définissent des diviseurs lisses à croisements normaux.

Démonstration.

Observons d'abord qu'il existe un faisceau d'idéaux global $\tilde{\mathcal{I}}$, qui coïncide avec la cloture intégrale du faisceau d'idéaux engendré par les f_j sur chaque ouvert où ϕ s'écrit comme dans l'hypothèse (S): en effet, $\tilde{\mathcal{I}}$ est donné par:

$$\tilde{\mathcal{I}}_x = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \ ; \ \exists C \ , \ |f(z)| \leq C.\exp\left(\frac{1}{c}\phi(z)\right) \text{ au voisinage de } x \right\} .$$

Eclatons cet idéal $\tilde{\mathcal{I}}$ de sorte que l'image inverse $\pi^{-1}\tilde{\mathcal{I}}.\mathcal{O}_{X'}$ soit un faisceau inversible. Par le théorème d'Hironaka [5], on peut dominer cet éclatement par une variété $\tilde{X}$ obtenue par une suite d'éclatements de centres lisses dans X, et l'image inverse de $\tilde{\mathcal{I}}$ est toujours inversible!

Mais alors, la métrique image réciproque sur $\pi^* E$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{c}{2}\log\left(\sum (\lambda_j \circ \pi)\,|f_j \circ \pi|^2\right) + \psi \circ \pi \\ &= \frac{c}{2}\log\left(|g|^2\right) + \frac{c}{2}\log\left(\sum (\lambda_j \circ \pi)\,|h_j|^2\right) + \psi \circ \pi = \frac{c}{2}\log(|g|^2) + \tilde{\psi} \ , \end{aligned}$$

où on a noté g le générateur local du faisceau d'idéaux engendré par les $f_j \circ \pi$. Décomposons g en facteurs irréductibles dans $\mathcal{O}_{\tilde{X},x_0}$: $g = \prod_j g_j^{a_j}$. Il suffit enfin d'appliquer à nouveau le théorème d'Hironaka pour rendre le diviseur défini par les g_j à croisements normaux. $\square$

b) Dans tout ce qui suit, les notations sont celles obtenues par application de la Proposition 3.1.

Notons $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ le faisceau d'idéaux des germes de fonctions holomorphes sur $\tilde{X}$ telles que

$|f|^2 e^{-2k\tilde{\phi}}$ est L^1_{loc}. Cette condition s'écrit localement:

$$\frac{|f|^2}{\prod_{j=1}^n |g_j|^{2ca_jk}} \in L^1_{loc}$$

soit encore, si p_j désigne l'ordre d'annulation de f le long de $\{g_j = 0\}$: $2p_j - 2ca_jk > -2$, soit $p_j \geq E(ca_jk)$ ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

Notons $b_{j,k} = E(ca_jk)$, et $\tilde{D}_j$ le diviseur défini localement par $g_j = 0$.

Nous venons de prouver le lemme suivant:

Lemme 3.2. *Sous les conditions précédentes, le faisceau d'idéaux $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ s'identifie au faisceau inversible de rang 1: $\mathcal{O}(-\sum_j b_{j,k}\tilde{D}_j)$.*

c) Exemples

Illustrons ce qui précède en reprenant les notations de l'exemple du Section 2.1. Dans ces cas évidemment simples, il n'est nul besoin d'appliquer le théorème d'Hironaka : on explicite directement le choix des éclatements!

(i) Si on suppose que tous les α_i sont égaux à α, alors $\mathcal{I}_k(\phi)_{\mathbb{C}^n,0}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-engendré par les $\prod_{j=1}^p z_j^{\beta_j}$ où: $\sum_{j=1}^p \beta_j \geq k\alpha - p + 1$, soit $\mathcal{I}_k(\phi) = \mathcal{I}_Y^{k\alpha-p+1}$ où $Y = \{z_1 = \ldots = z_p = 0\}$.

Si $p = 1$, le faisceau d'idéaux est déjà inversible, sinon éclatons $\mathbb{C}^n$ le long de Y. L'expression de la nouvelle métrique est donnée dans la première carte par $\tilde{\phi}(w) = \alpha\log(|w_1|) + \frac{1}{2}\log(1 + |w_2|^{2\alpha} + \cdots + |w_p|^{2\alpha})$ si bien que $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{\phi}) = \mathcal{O}(-k\alpha D)$ où D est le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Il suffit dans ce cas d'un éclatement en codimension p pour obtenir le résultat souhaité.

(ii) Si $\phi(z) = \frac{1}{2}\log(|z_1|^2 + |z_2|^{2\alpha})$ dans $\mathbb{C}^n$, il faut cette fois α éclatements en codimension 2.

En effet, éclatons le long de $\{z_1 = z_2 = 0\}$. L'expression de la nouvelle métrique est donnée dans la première carte par $\tilde{\phi}(w) = \log(|w_1|) + \frac{1}{2}\log(1 + |w_1 w_2|^{2\alpha})$ qui est de la forme voulue alors qu'on obtient dans la deuxième carte $\tilde{\phi}(w) = \log(|w_2|) + \frac{1}{2}\log(|w_1|^2 + |w_2|^{2(\alpha-1)})$. On éclate alors dans la deuxième carte le long de $\{w_1 = w_2 = 0\}$. En répétant ce procédé α fois, on obtient une métrique de la forme voulue en tout point.

Décrivons le faisceau d'idéaux obtenu: notons, pour tout j compris entre 1 et α, D_j la transformée stricte dans $\tilde{X}$ du diviseur exceptionnel du j-ième éclatement. Alors D_j et D_{j+1} se coupent transversalement et on a $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{\phi}) = \mathcal{O}(-kD)$ où D désigne le diviseur à croisements normaux $D = \sum_{j=1}^{\alpha} jD_j$.

3.2.2.

On montre maintenant comment appliquer les inégalités de Morse holomorphes classiques à $\tilde{X}$ et $\tilde{E}$. Pour cela, la remarque suivante est essentielle:

Remarque 3.3. *Notons $c = \frac{p}{q}$ et supposons que k est un multiple du dénominateur de c: $k = qk'$. On a alors $b_{j,k} = ca_jk$, et donc:*

$$\tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right) = \mathcal{O}\left(-k'\tilde{D}\right)$$

où $\tilde{D} = p \sum_j a_j \tilde{D}_j$ et:

$$\tilde{E}^k \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right) = \left(\tilde{E}^q \otimes \mathcal{O}\left(-\tilde{D}\right)\right)^{\otimes k'} .$$

De plus, le fibré $\hat{E} = \tilde{E}^q \otimes \mathcal{O}(-\tilde{D})$ est muni de la métrique produit naturelle donnée localement par le poids:

$$\tilde{\chi}(z) = q \cdot \tilde{\phi}(z) - \sum_{j=1}^{n} pa_j \log|g_j| = q \cdot \tilde{\psi}(z) .$$

Ainsi, $\hat{E}$ est muni d'une métrique hermitienne lisse.

Cette remarque nous permet d'estimer les groupes de cohomologie qui nous intéressent: les $H^q(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h}))$ qui s'identifient aux groupes de cohomologie de Dolbeault $H^q(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \mathcal{O}(-\sum_j b_{j,k}\tilde{D}_j))$.

Proposition 3.4. *On a pour tout k:*

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j} \dim H^j\left(\tilde{X}, \mathcal{O}\left(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}\right) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right)\right) \le r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\le q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$$

où l'intégrale est prise sur les points lisses de la métrique de E.

Démonstration.

D'après la remarque précédente, on peut appliquer les inégalités de Morse de Demailly au fibré $\hat{E}$, si bien que pour $k = k'q$, on a:

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j} \dim H^j\left(\tilde{X}, \mathcal{O}\left(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}\right) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right)\right) \le r\frac{k'^n}{n!}\int_{\tilde{X}(\le q, \hat{E})} (-1)^q \Theta\left(\hat{E}\right)^n + o\left(k'^n\right) .$$

Relions alors l'intégrale de courbure sur $\tilde{X}$ à une intégrale de courbure sur X.

Comme $\Theta(\hat{E}) = q.\Theta(\tilde{E})$ sur les points lisses de la métrique de $\tilde{E}$ si $k = k'q$ (toujours d'après la Remarque 3.3), on a:

$$k'^n \int_{\tilde{X}(\le q, \hat{E})} \Theta\left(\hat{E}\right)^n + o\left(k'^n\right) = k^n \int_{\tilde{X}(\le q, \tilde{E})} \Theta\left(\tilde{E}\right)^n + o\left(k^n\right) .$$

Notons alors S la réunion des diviseurs exceptionnels de $\pi : \tilde{X} \to X$; S est négligeable pour la mesure de Lebesgue et on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{X}(\le q, \tilde{E})} \Theta\left(\tilde{E}\right)^n &= \int_{\tilde{X}(\le q, \tilde{E})\setminus S} \Theta\left(\tilde{E}\right)^n = \int_{\tilde{X}(\le q, \tilde{E})\setminus S} \Theta\left(\pi^* E\right)^n \\
&= \int_{\tilde{X}(\le q, \tilde{E})\setminus S} \pi^*(\Theta(E)^n) = \int_{X(\le q, E)\setminus \pi(S)} \Theta(E)^n = \int_{X(\le q, E)} \Theta(E)^n .
\end{aligned}$$

On a donc pour les entiers k multiples d'un entier fixe:

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j} \dim H^j\left(\tilde{X}, \mathcal{O}\left(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}\right) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right)\right) \le r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\le q, E)} (-1)^q \Theta(E)^n + o(k^n)$$

où l'intégrale est prise sur les points lisses de la métrique de E.

Pour terminer cette preuve, il suffit de montrer que l'estimation précédente est valable sans restriction sur k.

En reprenant les notations du Lemme 3.2 et en posant $c = \frac{p}{q}$, on a, pour $k = k'q + r$:

$$b_{j,k} = pa_j k' + r'$$

où r' ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières ; on a alors:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^k \otimes \tilde{F} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_j b_{j,k} D_j\right) &= \left(\tilde{E}^q\right)^{k'} \otimes \tilde{E}^{r'} \otimes \tilde{F} \otimes \mathcal{O}\left(-k'p \sum_j a_j D_j\right) \\
&\quad \otimes \mathcal{O}\left(-r' \sum_j D_j\right) \\
&= \left(\tilde{E}^q\right)^{k'} \otimes \mathcal{O}\left(-k'p \sum_j a_j D_j\right) \otimes \hat{F} .
\end{aligned}$$

On raisonne alors comme précédemment: on munit $\hat{F}$ d'une métrique lisse quelconque tandis que $(\tilde{E}^q)^{k'} \otimes \mathcal{O}(-k'p \sum_j a_j D_j)$ est muni de la métrique lisse naturelle donnée localement par $q.\tilde{\psi}(z)$.
$\square$

3.3. Lien entre cohomologie sur $\tilde{X}$ et cohomologie sur X

Pour achever la preuve du Théorème 2.1, il reste à relier les groupes $H^q(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F}) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h}))$ de la Proposition 3.4 et les $H^q(X, \mathcal{O}(E^k \otimes F) \otimes \mathcal{I}_k(h))$ qui nous intéressent directement.

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante:

Proposition 3.5. *Il existe un fibré $\hat{F}$ et un entier k_0 tels que pour tout $k \geq k_0$, on a un isomorphisme:*

$$H^q\left(\tilde{X}, \mathcal{O}\left(\tilde{E}^k \otimes \hat{F}\right) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right)\right) \cong H^q\left(X, \mathcal{O}\left(E^k \otimes F\right) \otimes \mathcal{I}_k(h)\right) .$$

Cette proposition achève bien entendu la preuve du Théorème 2.1!

3.3.1. Un lemme de changement de variables

On relie ici $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$ et $\mathcal{I}_k(h)$ en prouvant le résultat suivant:

Lemme 3.6. *Il existe un fibré L sur $\tilde{X}$, indépendant de k, de rang 1 tel que:*

$$\pi_*\left(\tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right) \otimes \mathcal{O}(L)\right) = \mathcal{I}_k(h) .$$

Démonstration.

Supposons dans un premier temps que π consiste en l'éclatement le long d'une sous-variété Y, et soit $x_0 \in Y$.

Soit U un voisinage de x_0 dans X sur lequel E est trivialisé.

Alors pour toute fonction holomorphe f sur $\pi^{-1}(U)$, on a l'égalité:

$$\int_{\pi^{-1}(U)} |f(w)|^2 \, |J_\pi(w)|^2 e^{-2k\tilde{\phi}(w)} d\lambda(w) = \int_U \left| f(\pi^{-1}(z)) \right|^2 e^{-2k\phi(z)} d\lambda(z) ,$$

ceci d'après la formule de changement de variables $z = \pi(w)$, la notation $f(\pi^{-1}(z))$ étant sans ambiguïté, même pour z dans Y car f est constante sur les fibres de π.

On en déduit dans ce cas, si s est la codimension de Y:

$$\pi_* \left(\tilde{\mathcal{I}}_k \left(\tilde{h} \right) \otimes \mathcal{O}((s-1)D) \right) = \mathcal{I}_k(h) .$$

Le passage au cas général où π est une composée finie d'éclatements de centres lisses ne pose pas de difficultés. □

On déduit immédiatement de ce lemme le:

Corollaire 3.7. *Il existe un fibré L sur $\tilde{X}$, indépendant de k, de rang 1 tel que:*

$$\pi_* \left(\mathcal{O} \left(\tilde{E}^k \otimes \tilde{F} \otimes L \right) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k \left(\tilde{h} \right) \right) = \mathcal{O} \left(E^k \otimes F \right) \otimes \mathcal{I}_k(h) .$$

3.3.2. Etude de la suite spectrale de Leray

Considérons la suite spectrale de Leray associée au faisceau $\mathcal{O}(\tilde{E}^k \otimes \hat{F}) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h})$.

D'après l'étude précédente, il suffit de montrer, grâce au théorème de Leray, que les images directes supérieures sont nulles, soit:

Lemme 3.8. *On a pour tout $q \geq 1$ et $k \geq k_0$:*

$$R^q \pi_* \tilde{\mathcal{I}}_k \left(\tilde{h} \right) \otimes \mathcal{O}(L) = 0 .$$

Démonstration du Lemme 3.8.

Supposons dans un premier temps que π est l'éclatement du point $x_0 \in X$.

Alors $R^q \pi_* \tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h}) \otimes \mathcal{O}(L)$ est un faisceau "gratte-ciel" dont la seule fibre éventuellement non nulle est celle au dessus de x_0, F_{k,x_0}, donnée par:

$$F_{k,x_0} = \varinjlim_{x_0 \in U} H^q \left(\pi^{-1}(U), \tilde{\mathcal{I}}_k \left(\tilde{h} \right) \otimes \mathcal{O}(L)_{|_{\pi^{-1}(U)}} \right) .$$

Pour U ouvert de Stein, notons $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$. Alors $\tilde{U}$ est 1-convexe et on a une projection naturelle $p : \tilde{U} \to \mathbb{P}^{n-1}$ sur le diviseur exceptionnel. Il existe alors des entiers d et d' tels que:

$$\tilde{\mathcal{I}}_k \left(\tilde{h} \right) \otimes \mathcal{O}(L)_{|_{\pi^{-1}(U)}} \simeq p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \left(kd + d' \right) .$$

Affirmation 1 L'entier d est positif.

Démonstration.

En effet, le fibré $\tilde{\mathcal{I}}_k(\tilde{h}) \otimes \mathcal{O}(L)$ est de la forme $\mathcal{O}(-k\sum_j a_j D_j)$ où les a_j sont positifs et où l'un des D_j est le diviseur exceptionnel; il suffit alors de se rappeler que $\mathcal{O}(-D)_{|D} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$. $\square$

Il reste donc à montrer:

Affirmation 2 On a pour $q \geq 1$, pour $d > 0$ et pour $k \geq k_0$:

$$H^q\left(\tilde{U}, p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}\left(kd + d'\right)_{|\tilde{U}}\right) = 0\,.$$

Démonstration.

Pour $kd + d' + n > 0$, le fibré $K^*_{\mathbb{P}^{n-1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(kd + d')$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ est muni d'une métrique lisse à courbure définie positive. Le fibré $p^*(K^*_{\mathbb{P}^{n-1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(kd + d'))$ muni de la métrique image réciproque est donc positif sauf dans la direction des fibres. En le tensorisant par le fibré trivial muni de la métrique $\exp(-|\pi(w)|^2)$, on obtient alors un fibré positif.

Comme $\tilde{U}$ est faiblement pseudo-convexe, on en déduit par les estimations L^2 de Hörmander (voir par exemple [13] ou [12]) que, pour $q \geq 1$:

$$H^{n,q}\left(\tilde{U}, p^*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}\left(kd + d'\right) \otimes K^*_{\mathbb{P}^{n-1}}\right)_{|\tilde{U}}\right) = 0\,,$$

d'où le résultat. $\square$

Il reste enfin le cas où on éclate X le long d'une sous-variété Y de codimension s: alors, cet éclatement est isomorphe localement au produit de l'éclatement d'un point en dimension s par Y. On se ramène au cas précédent par la formule de Künneth: en effet, cette dernière affirme que si l'on choisit $U = U' \times U''$ où U' est un voisinage de x_0 dans Y et U'' un voisinage de zéro dans $\mathbb{C}^s$, on a:

$$\begin{aligned} &H^q\left(\pi^{-1}(U), \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right) \otimes \mathcal{O}(L)_{|_{\pi^{-1}(U)}}\right) \\ &\quad = \bigoplus_{i+j=q} H^i\left(\pi^{-1}\left(U''\right), \tilde{\mathcal{I}}_k\left(\tilde{h}\right) \otimes \mathcal{O}(L)_{|_{\pi^{-1}(U'')}}\right) \hat{\otimes} H^j\left(U', \mathcal{O}_{U'}\right) \end{aligned}$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété. Si U est Stein, tous les termes sont nuls sauf celui pour $i = q$ et $j = 0$ qui nous ramène à la situation déjà étudiée. $\square$

4. Caractérisation analytique des variétés de Moishezon

Dans la lignée des conditions suffisantes données par Y.-T. Siu et J.-P. Demailly pour caractériser les variétés de Moishezon, on obtient ici la caractérisation analytique suivante:

Théorèm 4.1. *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement si il existe sur X un courant T de bidegré $(1, 1)$ tel que:*

(i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,

(ii) $T = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi + \alpha$, *où ϕ vérifie l'hypothèse (S) et α est un représentant C^∞ de T,*

(iii) $\int_{X(\leq 1, T)} T^n > 0$ *où l'intégrale est prise sur les points lisses de T.*

Démonstration.

Supposons donc que X possède un courant T vérifiant (i), (ii) et (iii). Alors il existe un fibré holomorphe E de rang 1 sur X muni d'une métrique hermitienne singulière dont le courant de courbure est donné par T. On déduit comme dans le cas lisse que la variété $\tilde{X}$ donnée par la Proposition 3.4 est de Moishezon : en effet, le fibré $\hat{E}$ a sa dimension de Kodaira égale à n car $\int_{\tilde{X}(\leq 1,\hat{E})} \Theta(\hat{E})^n > 0$. On en déduit que X est de Moishezon car biméromorphiquement équivalente à $\tilde{X}$.

Réciproquement, si X est de Moishezon, il existe une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses $\hat{X} \xrightarrow{\mu} X$ avec $\hat{X}$ projective. Si $\hat{\omega}$ est une $(1, 1)$ forme C^∞ définie positive sur $\hat{X}$ telle que $\{\hat{\omega}\} \in H^2(\hat{X}, \mathbb{Z})$, et si ω est une $(1, 1)$ forme C^∞ définie positive sur X, alors il existe une constante $A > 0$ telle que $\hat{\omega} \geq A\mu^*\omega$, donc le courant $T = \mu_*\hat{\omega}$ vérifie : $T \geq A\omega$. Par le théorème d'approximation des courants de Demailly [4], il existe un courant $T' \in \{T\}$, vérifiant (ii) - c'est-à-dire ayant localement les singularités de l'hypothèse (S) - tel que $T' \geq A/2 \cdot \omega$. A fortiori, T' vérifie (iii). □

On retrouve aussi le résultat suivant, démontré indépendamment par Ji et Shiffman [7]:

Théorèm 4.2. *Une variété compacte X de dimension n est de Moishezon si et seulement si il existe sur X un courant T de bidegré $(1, 1)$ tel que:*

(i) $\{T\} \in H^2(X, \mathbb{Z})$,

(ii) $T > 0$, *ce qui signifie qu'il existe une $(1, 1)$ forme ω définie positive, C^∞ sur X telle que $T - \omega$ est un courant positif.*

Démonstration.

Supposons que X possède un courant T vérifiant (i) et (ii). Alors, par le théorème d'approximation des courants, il existe un courant T_ε sur X, dans la même classe de cohomologie que T, ayant localement les singularités de l'hypothèse (S) et telle que $T_\varepsilon - (1 - \varepsilon)\omega$ est un courant positif. Alors $X(q, T_\varepsilon) = \emptyset$ pour $q \geq 1$ et on conlut à nouveau comme dans le cas lisse, que $\tilde{X}$, donc X, est de Moishezon.

La réciproque a déjà été vue dans la démonstration du Théorème 4.1. □

Ces deux résultats illustrent l'intérêt de travailler avec des métriques singulières ; nous allons montrer en effet dans la prochaine partie que les conditions de semi-positivité données par Demailly et Siu rappelées dans l'introduction ne sont pas en général nécessaires.

5. Exemples dans le cadre des métriques lisses

Avant d'énoncer le résultat principal, nous allons rappeler en détail la construction de Kollár esquissée dans [9].

5.1. La construction de J. Kollár

La construction qui suit exhibe une famille de variétés de dimension 3 complexe dépendant d'un paramètre entier m.

Prenons $Q \subset \mathbb{P}^3$ une quadrique lisse, donnée par exemple par l'équation homogène $xy = zt$, où $[x : y : z : t]$ sont les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^3$.

On a un isomorphisme $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ donné explicitement par:

$$\varphi : \left(\begin{array}{lcl} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \to & Q \subset \mathbb{P}^3 \\ ([u_0 : u_1], [v_0 : v_1]) & \mapsto & [u_0 v_0 : u_1 v_1 : u_0 v_1 : u_1 v_0] \end{array} \right)$$

Notons $L_1 = \varphi([0 : 1] \times \mathbb{P}^1) = \{x = z = 0\}$ et $L_2 = \varphi(\mathbb{P}^1 \times [0 : 1]) = \{x = t = 0\}$. On a évidemment $L_i \cdot L_i = 0$, et $L_1 \cdot L_2 = 1$. De plus, tout diviseur D de Q est numériquement caractérisé par un couple d'entiers (a, b) donné par l'intersection de D avec L_1 et L_2 : $(a, b) = (D \cdot L_1, D \cdot L_2) \in \mathbb{Z}^2$. Ce couple est appelé le type de D.

Exemple : *le diviseur canonique K_Q est de type $(-2, -2)$.*

Affirmation 1: *Pour tout n et m entiers positifs, il existe une courbe lisse $C_{n,m}$ de type (n, m).*

Une telle courbe est de genre $g_{n,m} = (n-1)(m-1)$ et de degré $n + m$.

Démonstration.

L'existence de $C_{n,m}$ résulte du fait que $\mathcal{O}(n, m) = \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}(n) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}(m)$ est très ample sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Le calcul du genre est donné par la formule classique $2g_{n,m} - 2 = C_{n,m} \cdot (C_{n,m} + K_Q)$. Ici, $C_{n,m} \cdot C_{n,m} = 2nm$ et $C_{n,m} \cdot K_Q = -2(n + m)$. □

Eclatons $\mathbb{P}^3$ le long de $C_{n,m}$: on obtient une variété projective $\tilde{X}$, et un morphisme $\tilde{X} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^3$. Notons $E_{n,m}$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement : $E_{n,m} \simeq \mathbb{P}(N_{C_{n,m}/\mathbb{P}^3})$. Le groupe de Picard de $\tilde{X}$ est $\mathbb{Z}^2$ et est engendré par $\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ et $\mathcal{O}(E_{n,m})$.

Si $\tilde{Q}$ désigne la transformée stricte de Q, $\tilde{L_i}$ celle de L_i, alors le type du fibré normal $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}}$ de $\tilde{Q}$ dans $\tilde{X}$ est donné par l'affirmation suivante:

Affirmation 2: *on a : $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L_1} = 2 - n$ et $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L_2} = 2 - m$*

Démonstration.

La suite exacte

$$0 \to T\tilde{Q} \to T\tilde{X}_{|\tilde{Q}} \to N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \to 0$$

donne l'égalité : $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} = K_{\tilde{Q}} - K_{\tilde{X}}\big|_{\tilde{Q}}$ avec $K_{\tilde{X}} = \pi_1^* K_{\mathbb{P}^3} + \mathcal{O}(E_{n,m})$.

De là : $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}} \cdot \tilde{L_i} = K_{\tilde{Q}} \cdot \tilde{L_i} - \pi_1^* K_{\mathbb{P}^3} \cdot \tilde{L_i} - \mathcal{O}(E_{n,m}) \cdot \tilde{L_i} = K_Q \cdot L_i - K_{\mathbb{P}^3} \cdot L_i - C_{n,m} \cdot L_i$.

Or, $K_Q = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)_{|Q}$ et $K_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$.

Le résultat s'en suit immédiatement. □

Comme cas particulier de l'affirmation précédente, considérons le cas où $n = 3$. La restriction à $\tilde{L_1}$ du fibré $N_{\tilde{Q}/\tilde{X}}$ est donc isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

Il existe donc une variété X_m et une application $\tilde{X} \xrightarrow{\pi_2} X_m$ de sorte que π_2 est l'éclatement d'une courbe lisse rationnelle C_m, de fibré normal projectivement trivial tel que le diviseur exceptionnel de π_2 est exactement $\tilde{Q}$.

Evidemment, X_m est biméromorphiquement équivalente à $\mathbb{P}^3$ donc est de Moishezon. De plus, le groupe de Picard de X_m est $\mathbb{Z}$.

5.2. Deux propriétés de X_m

Théorèm 5.1. *On a les deux assertions suivantes:*

(i) si m est strictement plus grand que 3, X_m ne possède pas de fibré holomorphe de rang 1 à la fois big et nef (rappelons que L est nef signifie ici que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute métrique hermitienne ω sur X, L possède une métrique lisse h_ε telle que $\Theta_{h_\varepsilon}(L) \geq -\varepsilon\omega$).

(ii) Si m est strictement plus grand que 5, X_m ne possède pas de fibré holomorphe L de rang 1 muni d'une métrique hermitienne lisse h telle que la forme de courbure vérifie:

$$\int_{X(\leq 1, L)} \Theta_h(L)^3 > 0\,.$$

L'affirmation (i) est due à Kollár, nous en donnerons une preuve élémentaire, tandis que (ii) est nouveau à notre connaissance.

5.2.1. Démonstration de (i)

Soit L un fibré holomorphe de rang 1 sur X_m, que l'on suppose non trivial (le fibré trivial, bien que nef, n'est pas big!).

Il existe des entiers k et l tels que : $\pi_2^* L = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(l) - \mathcal{O}(kE_{3,m})$.

Comme $\tilde{L_1}$ est une fibre de π_2, on a : $\pi_2^* L \cdot \tilde{L_1} = 0$. On en déduit la relation $l = 3k$ et donc: $\pi_2^* L = k(3\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - \mathcal{O}(E_{3,m}))$, où k est un entier non nul (sinon L serait trivial).

En particulier, si $\tilde{F}$ est une fibre de π_1 dans $\tilde{X}$, on a les calculs d'intersection suivants:

$$\begin{cases} \pi_2^* L \cdot \tilde{L_2} = k(3 - m) \\ \pi_2^* L \cdot \tilde{F} = k \end{cases}$$

On en déduit que pour $m > 3$, $\pi_2^* L$ n'est pas nef (sinon son intersection avec toute courbe serait positive ou nulle). On conclut alors facilement que L n'est pas nef. □

5.2.2. Démonstration de (ii)

Notons dans la suite $\mathcal{L}$ le générateur du groupe de Picard de X_m tel que $\pi_2^* \mathcal{L} = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) - \mathcal{O}(E_{3,m})$.

Affirmation 3: *On a $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) = 0$ pour tout entier $k < 0$ et donc le fibré $\mathcal{L}$ est big.*

Démonstration.

Cet espace de cohomologie s'identifie à l'espace des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3k)$ qui ont un pôle d'ordre inférieur ou égal à $|k|$ le long de $C_{3,m}$. Mais alors, une telle section se prolonge en une section holomorphe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3k)$ qui doit être nulle car $k < 0$.

Ainsi, la dimension d'Iitaka de $-\mathcal{L}$ est $-\infty$. Comme X_m est de Moishezon de groupe de Picard $\mathbb{Z}$, X_m possède un fibré big qui n'est pas $-\mathcal{L}$, c'est donc que $\mathcal{L}$ est big.

Affirmation 4: *On a* $K_{X_m} = -2\mathcal{L}$.

Démonstration.

On a $K_{\tilde{X}} = \pi_2^* K_{X_m} + \mathcal{O}(\tilde{Q})$ par construction. Si comme précédemment, $\tilde{F}$ désigne une fibre de π_1, on en déduit que $\pi_2^* K_{X_m} \cdot \tilde{F} = -2$, ce qui donne le résultat car $\pi_2^* \mathcal{L} \cdot \tilde{F} = 1$. □

Corollaire. *On a* $H^3(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}) = 0$ *pour tout entier* $k > -2$. □

Démonstration.

On a $\dim H^3(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}) = \dim H^0(X_m, \mathcal{L}^{\otimes(-2-k)})$ par dualité de Serre et l'Affirmation 4. Le résultat s'en suit par l'Affirmation 3. □

On est en mesure de passer à la preuve de (ii) : raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{L}$ possède une telle métrique. D'après les inégalités de Morse holomorphes de Demailly, il existe une constante C strictement positive telle que:

$$\dim H^0\left(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}\right) - \dim H^1\left(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}\right) \geq Ck^3 + o(k^3) .$$

Or, on a ici:

$$\dim H^0\left(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}\right) - \dim H^1\left(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}\right) + \dim H^2\left(X_m, \mathcal{L}^{\otimes k}\right) = \left(c_1(\mathcal{L})^3\right) \frac{k^3}{6} + o\left(k^3\right) .$$

Il suffit donc de montrer pour obtenir la contradiction cherchée que pour $m > 5$, on a: $c_1(\mathcal{L})^3 \leq 0$.

Or

$$c_1(\mathcal{L})^3 = c_1\left(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) - \mathcal{O}\left(E_{3,m}\right)\right)^3$$
$$= c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right)^3 - 3 \int_{E_{3,m}} c_1\left(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right)^2 + 3 \int_{\tilde{X}} c_1\left(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right) \wedge c_1\left(\mathcal{O}\left(E_{3,m}\right)\right)^2 - E_{3,m}^3 .$$

On a évidemment $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^3 = 27$ et

$$\int_{E_{3,m}} c_1\left(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right)^2 = 0 .$$

Pour les deux derniers termes, on commence par remarquer que $c_1(\mathcal{O}(E_{3,m}))_{|E_{3,m}}$ est égale à $-h$ où $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3})}(1))$ désigne la classe fondamentale de l'éclatement.

On en déduit que:

$$\int_{\tilde{X}} c_1\left(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right) \wedge c_1\left(\mathcal{O}\left(E_{3,m}\right)\right)^2 = -\int_{E_{3,m}} \pi_1^* c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right) \wedge h$$
$$= -\int_{C_{3,m}} c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\right) = -3(3+m) ,$$

la dernière égalité venant du fait que $C_{3,m}$ est de degré $3+m$ dans $\mathbb{P}^3$ (rappelons que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)_{|Q} = \mathcal{O}(1,1)$).

Finalement, il reste à calculer $E^3_{3,m}$. Pour celà, rappelons que h vérifie la formule fondamentale suivante:

$$h^2 - \pi_1^* c_1 \left(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}\right) h + \pi_1^* c_2 \left(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}\right) = 0$$

qui se réduit ici à $h^2 - \pi_1^* c_1(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3})h = 0$.

Il vient alors: $E^3_{3,m} = \int_{E_{3,m}} h^2 = \int_{E_{3,m}} \pi_1^* c_1(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3})h = \int_{C_{3,m}} c_1(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3})$.

Or la suite exacte:

$$0 \to TC_{3,m} \to T\mathbb{P}^3_{|C_{3,m}} \to N_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3} \to 0$$

donne de suite:

$$\int_{C_{3,m}} c_1 \left(N^*_{C_{3,m}/\mathbb{P}^3}\right) = \int_{C_{3,m}} c_1 \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)\right) - 2g_{3,m} + 2 = -6 - 8m\ .$$

Il reste finalement:

$$c_1(\mathcal{L})^3 = 27 - 27 - 9m + 6 + 8m = 6 - m\ ,$$

quantité négative ou nulle dès que $m > 5$.

6. Une question et un début de réponse

Dans ce dernier paragraphe, indépendant de ce qui précède, on se donne une variété X complexe, compacte de dimension n, E un fibré de rang 1 et F un fibré de rang r sur X.

On conjecture alors le résultat suivant:

Conjecture. *On a pour tout q compris entre* 0 *et n:*

$$\dim H^q\left(X, E^k \otimes F\right) = r \cdot \dim H^q\left(X, E^k\right) + o\left(k^n\right)\ .$$

□

Cette conjecture est motivée par le résultat partiel suivant:

Théorèm 6.1. *On a:*

$$\dim H^q\left(X, E^k \otimes F\right) = r \cdot \dim H^q\left(X, E^k\right) + o\left(k^n\right)$$

dans les cas suivants:

(i) pour tout q compris entre 0 *et n si X est de Moishezon (et donc en particulier si X est projective),*

(ii) pour $q = 0$ et $q = n$ si X est quelconque,

(iii) pour tout q compris entre 0 *et n si X est une surface.*

6.1. Démonstration dans le cas X projective

6.1.1. Le cas $r = 1$

Lemme 6.2. *Soit D un diviseur effectif irréductible lisse, alors:*

$$\dim H^q\left(X, E^k \otimes F \otimes \mathcal{O}(-D)\right) = \dim H^q\left(X, E^k \otimes F\right) + o\left(k^n\right) .$$

Démonstration.

Considérons la suite exacte:

$$0 \to E^k \otimes F \otimes \mathcal{O}(-D) \to E^k \otimes F \to E^k \otimes F_{|D} \to 0 .$$

Comme on a $\dim H^q(D, E^k \otimes F_{|D}) = o(k^n)$ car D est de dimension $n-1$ [2], la suite exacte longue de cohomologie donne de suite le résultat. □

Maintenant, si X est projective, tout fibré de rang 1 est de la forme $\mathcal{O}(D_1 - D_2)$ où D_1 et D_2 sont effectifs, lisses et irréductibles. Le lemme précédent appliqué deux fois conclut le cas $r = 1$, X projectif. □

6.1.2. r quelconque

Soit L un fibré ample de rang 1 sur X et considérons pour m entier positif les sections s : $L^{-m} \otimes \mathbb{C}^r \to F$.

Pour m assez grand, et $x_0 \in X$ fixé, il existe une telle s de sorte que s_{x_0} soit un isomorphisme et donc de sorte que s soit génériquement un isomorphisme.

En notant $\operatorname{coker}\ s = F/s(L^{-m} \otimes \mathbb{C}^r)$ le faisceau conoyau, on a la suite exacte de faisceaux:

$$0 \to E^k \otimes L^{-m} \otimes \mathbb{C}^r \to E^k \otimes F \to E^k \otimes \operatorname{coker}\ s \to 0 ,$$

sachant que $\operatorname{coker}\ s$ est à support dans un ensemble analytique de codimension ≥ 1.

On a donc comme précédemment $\dim H^q(X, E^k \otimes \operatorname{coker}\ s) = o(k^n)$.

En passant à la suite longue de cohomologie:

$$\begin{aligned}
\dim H^q\left(X, E^k \otimes F\right) &= \dim H^q\left(X, E^k \otimes L^{-m} \otimes \mathbb{C}^r\right) + o(k^n) \\
&= r \cdot \dim H^q\left(X, E^k \otimes L^{-m}\right) + o\left(k^n\right) \\
&= r \cdot \dim H^q\left(X, E^k\right) + o\left(k^n\right) .
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du cas X projective, et du même coup celui où X est de Moishezon: dans ce cas, il existe en effet une composée d'un nombre fini d'éclatements de centres lisses $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ avec $\hat{X}$ projective et l'isomorphisme déjà rencontré:

$$H^q(X, L) \simeq H^q\left(\hat{X}, \pi^* L\right)$$

donne le résultat.

6.2. Démonstration des cas $q = 0$ et $q = n$

Par dualité de Serre, il suffit de traiter le cas $q = 0$.

Si la dimension de Kodaira de E, $\kappa(E)$, est différente de n, l'égalité à montrer est triviale car les deux dimensions considérées sont des $o(k^{n-1})$, sinon la variété X est de Moishezon, cas traité précédemment.

6.3. Cas où X est une surface

C'est un corollaire immédiat du point précédent pour les cas $q = 0$ et $q = 2$ et de l'égalité des caractéristiques d'Euler:

$$\chi\left(X, E^k \otimes F\right) = r \cdot \chi\left(X, E^k\right) + o\left(k^n\right) ,$$

pour le cas $q = 1$.

References

[1] Bonavero, L. Inégalités de Morse holomorphes singulières, *C.R. Acad. Sci,* **317**, Série I, 1163–1166, (1993).

[2] Demailly, J.-P. Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d'' cohomologie, *Ann. Inst. Fourier,* **35**, 189–229, (1985).

[3] Demailly, J.-P. Singular hermitian metrics on positive line bundles, Proceedings of the Bayreuth conference "Complex algebraic varieties," April 2-6, 1990, *Lecture Notes In Math.,* no. 1507, Springer-Verlag, (1992).

[4] Demailly, J.-P. Regularization of closed positive currents and intersection theory, *J. Alg. Geom.,* **1**, 361–409, (1992).

[5] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic 0, *Ann. Math.,* **79**, 109–326, (1964).

[6] Ji, S. Big nef line bundles and Moishezon manifolds, preprint.

[7] Ji, S. and Shiffman. Properties of compact closed positive currents, preprint.

[8] Kodaira, K. On Kähler varieties of restricted type, *Ann. Math.,* **60**, 28–48, (1954).

[9] Kollár, J. Flips, flops, minimal models, *Surveys Diff. Geom.,* **1**, 113–199, (1991).

[10] Moishezon, B. On n dimensional compact varieties with n independent meromorphic functions, *Am. Math. Soc., Translations,* **63**, 51–177, (1967).

[11] Nadel, A. Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,* **86**, 7299–7300, (1989).

[12] Ohsawa, T. Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds, *Publ. R.I.M.S.,* Kyoto University, **15**, 853–870, (1979).

[13] Skoda, H. Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,* **11**, 577–611, (1978).

[14] Siu, Y.-T. A vanishing theorem for semi-positive line bundles over non-Kähler manifolds, *J. Diff. Geom.,* **19**, 431–452, (1984).

[15] Siu, Y.-T. Some recent results in complex manifolds theory related to vanishing theorems for the semi-positive case, *L.N.M.,* **1111**, Springer-Verlag, Berlin, 169–192, (1985).

Received February 9, 1994

Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n^o 188,
Institut Fourier, B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Hères
e-mail: bonavero@grenet.fr