
Muß sich die Logik nach der Mathematik, oder die Mathematik nach der Logik richten?

Eine Erwiderung

Von

Wilhelm Koppelman, Münster

Zwei mathematisch hochgebildete Herren haben mir die Ehre erwiesen, meine in dieser Zeitschrift gegen die logische Korrektheit der Arithmetik gerichteten Angriffe (VI. Band, 1927, Heft 1—3) einer kritischen Betrachtung zu unterziehen. Freilich von sehr verschiedenen, miteinander unvereinbaren Standpunkten aus. Herr Stammler (Annalen der Philosophie, VII. Band, 1928, Heft 4—5, S. 146ff.) erkennt meine Ausstellungen als berechtigt an, soweit sie sich gegen die früheren, noch jetzt in manchen Lehrbüchern fortwirkenden „Beweise“ richten. Er glaubt aber, daß die moderne Mathematik imstande sei, an deren Stelle bessere, logisch einwandfreie zu setzen, und sucht dies an dem Beispiel der Lehre von den negativen Zahlen darzulegen. Herr Dieck dagegen (Annalen der Philosophie, VII. Band, 1929, Heft 9—10, S. 313ff.) erkennt den von Herrn Stammler versuchten Beweis nicht als richtig an, hält aber trotzdem meine Vorwürfe gegen die Arithmetik nicht für berechtigt. Freilich seien sie zutreffend vom Standpunkt der bisherigen Logik. Diese sei aber überholt. Sobald sie durch eine neue, noch zu schaffende, an der Mathematik orientierte Logik ersetzt werde, sei alles in Ordnung.

Ich will mich in den Streit der beiden Mathematiker untereinander nicht einmengen, gebe Herrn Dieck auch ohne weiteres zu, daß Fiktionen in der Wissenschaft überhaupt und in der Mathematik im besonderen zulässig, ja oft unentbehrlich sind. Aber das gilt nur von Fiktionen in Vaihingers Sinn, bei denen die logische Inkorrektheit durch die „Methode der entgegengesetzten Fehler“ wieder aufgehoben werden soll. „Alle Abweichungen von der

Wirklichkeit sind Fehler, und vollends die Selbstwidersprüche sind logische Fehler ersten Grades. Wir fügten mehrfach hinzu, daß diese Fehler wieder rückgängig gemacht werden müßten, weil sonst die Fiktionen wertlos seien und schaden würden“ (Philosophie des Als Ob, 2. Aufl., S. 194). Dadurch ist der Anstoß für den Logiker beseitigt, wobei ich hier dahingestellt sein lasse, ob diese Methode der „entgegengesetzten Fehler“ der einzige oder auch nur der hauptsächlichste Weg zur logischen Legitimierung der Fiktionen ist. Jedenfalls will Vaihinger von eigentlichen Widersprüchen in der Wissenschaft nichts wissen. Bei Herrn Dieck kommt dieser vorsichtige Vorbehalt Vaihingers weder in seinem Aufsatz in den Annalen, noch in seinem sonst verdienstvollen Buch „der Widerspruch im Richtigen“ genügend zur Geltung. Es sieht beinahe so aus, als ob er für die logische Berechtigung des Widerspruchs an sich eine Lanze brechen wolle.

Aber das ist es nicht, was mich zu dieser Entgegnung veranlaßt, sondern die an die Beurteilung meines Aufsatzes angeschlossene Forderung des Herrn Dieck, daß die Logik sich nach der Mathematik zu richten habe. „Wiederholen wir nun im Rückblick auf die gesamte vorausgehende Erörterung die in der Überschrift der Abhandlung des Herrn Koppelmann aufgeworfene Frage: ‚Ist die Arithmetik ein logisch korrektes Lehrgebäude?‘, so wird die Antwort folgendermaßen lauten müssen: ‚die Arithmetik ist ein logisch korrektes Lehrgebäude, zwar nicht im Sinne der bisherigen, überholten Logik, wohl aber im Sinne einer berichtigten Logik, welche die wirklichen Formen und Gesetze unseres Denkens gemäß dem heutigen Stande der Einzelwissenschaften vollständig kennt und kritisch untersucht‘. Es bleibt bestehen, daß die Mathematik von allen Wissenschaften, die Logik nicht ausgenommen, am weitesten entwickelt ist. So ist die Tatsache der arithmetischen Fiktionen eine Fanfare für die Logik. Diese darf nicht länger zögern, die wahren Gesetze des menschlichen Denkens vollständig und richtig festzustellen, nachdem die Formen des mathematischen Denkens die bisherigen Anschauungen der Logik als unzulänglich erwiesen haben.“

Diese Forderung stellt das Verhältnis von Logik und Mathematik völlig auf den Kopf. Ich hatte in meinem Aufsatz behauptet, daß gewisse Gedankengänge der Mathematik mit den Gesetzen des menschlichen Denkens in Widerspruch ständen, und Herr Dieck behauptet demgegenüber, daß die bisherige, von mir als Maßstab

angelegte Logik mit den „wahren Gesetzen des menschlichen Denkens“ unvereinbar sei und daher „gemäß dem heutigen Stande der Einzelwissenschaften“, insbesondere der von allen Wissenschaften am weitesten entwickelten Mathematik „berichtigt“ werden müsse. Ich will mich nun nicht mit dem Nachweis aufhalten, daß die Logik, deren Möglichkeit damit steht und fällt, daß es im Wesen des menschlichen Geistes begründete und aus ihm zu entwickelnde Kriterien der Richtigkeit des Denkens gibt, sich unmöglich darauf einlassen kann, den jeweiligen Stand der Einzelwissenschaften zur Richtschnur zu nehmen. Ich will nur darauf hinweisen, daß die Rolle, welche Herr Dieck der Logik in ihrem Verhältnis zur Mathematik zumutet, zum mindesten voraussetzen würde, daß die Mathematik ein ihrer Richtigkeit nach über jeden Zweifel erhabenes Lehrgebäude sei, also nur auf Grund richtigen Denkens zustande gekommen sein könne und demnach den Logikern die Möglichkeit biete, die Gesetze des richtigen Denkens aus ihr zu abstrahieren. In der Tat nimmt Herr Dieck für die Mathematik eine solche Unfehlbarkeit gewissermaßen in Anspruch. Er sagt auf S. 332/33 seines Aufsatzes: „Zwar gibt Herr Koppelman zu, daß die Mathematik von allen Wissenschaften logisch am weitesten entwickelt ist. Aber er glaubt, daß sie trotzdem nach dieser Richtung noch Fortschritte machen könne. Diese Ansicht ist ganz abwegig. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die Mathematik und insbesondere die Zahlenlehre gar nicht wesentlich anders aufgebaut werden kann, als sie in der heutigen mathematischen Wissenschaft tatsächlich aufgebaut wird. Die Mathematik ist so richtig, so logisch, wie menschliches Denken überhaupt richtig und logisch sein kann. Die Mathematik ist nach wie vor das Muster der menschlichen Begriffsbildung und menschlicher Wissenschaft. Sie zeigt die Methoden unseres Denkens in ihrer einfachsten und zugleich in ihrer vollkommensten möglichen Gestalt. Wie zu den Zeiten des Platon und Aristoteles, so muß auch heute die Logik an der Mathematik lernen, wie das menschliche Denken in Wirklichkeit arbeitet. Der Logiker hat sich bisher über die wahren Gesetze unseres Denkens in mancher Hinsicht getäuscht, nicht der Mathematiker... Am Logiker ist es daher, umzulernen und den wahren Gesetzen unseres Denkens nachzuspüren.“

„Der“ Mathematiker, welcher hier gemeint ist, ist allerdings nach Diecks Meinung nicht der einzelne Mathematiker; denn an

den Deduktionen der einzelnen Mathematiker übt er in seiner Abhandlung in den „Annalen“ wie in seinem Buch über den „Widerspruch im Richtigen“ öfters eine herbe Kritik. Er meint vielmehr die Mathematik als Ganzes, die für ihn zu den Gedankengängen der einzelnen Mathematiker offenbar in ähnlichem Verhältnis steht wie die offizielle, auf Kirchenversammlungen festgesetzte Kirchenlehre zu den wissenschaftlichen Versuchen einzelner Theologen.

Wie steht es nun in Wirklichkeit mit dieser von Herrn Dieck behaupteten unanfechtbaren Richtigkeit „der“ Mathematik? Wir wollen sie billigerweise nicht an den Sätzen der bisherigen „falschen“ Logik, sondern gemäß dem Grundsatz: „An ihren Früchten sollt ihr sie erkennen“, an ihren Ergebnissen prüfen. Und zwar nehme ich die Beispiele aus dem Kapitel, welches durch die Aufsätze der Herren Stammler und Dieck in den Mittelpunkt des Interesses gerückt worden ist, aus der Lehre von den negativen Zahlen. Die (unbewiesene und unbeweisbare) Festsetzung, daß das Produkt aus zwei negativen Zahlen positiv sei, führt zu der Konsequenz, daß $\sqrt{a^2} = a$, oder, ebenso richtig, $= -a$ ist. Nach diesem Satze müßte, wie ich auf S. 36/37 meines obengenannten Aufsatzes in den „Annalen“ näher ausgeführt habe, die Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete = 3, die andere = 4 Meter ist, = 5 Meter sein können. Oder ein Kaufmann, welcher für 1080 Mk. Kaffee bestellt hat, und, weil der Kaffee mittlerweile um 18 Mk. für den Ballen im Preise gestiegen ist, zwei Ballen weniger erhält als er erwartet hatte, müßte, wenn der Satz über das Produkt zweier negativer Zahlen richtig wäre, für sein Geld — 12 Ballen Kaffee erhalten können. Solcher, in Gleichungen höheren Grades in verstärktem Maße wiederkehrender Unsinn wird nicht dadurch richtig, daß man da, wo es sich um Anwendung auf die Wirklichkeit handelt, die negativen bzw. imaginären Wurzeln stillschweigend unter den Tisch fallen läßt, also das, was man in der Theorie als richtig behauptet, in der Praxis verleugnet. Das allein brauchbare und richtige Ergebnis hätte man in den beiden genannten wie in allen ähnlichen Fällen ohne weiteres gefunden, wenn die Welt von negativen Zahlen noch nichts gewußt hätte. Das unbrauchbare, oder, etwas gröber ausgedrückt, falsche zweite Ergebnis der Rechnung ist lediglich die Folge des Satzes über das Produkt zweier negativer Zahlen.

Nun scheint allerdings im weiteren Aufbau der Mathematik die Anwendung des Minuszeichens auf Strecken usw. zu richtigen Er-

gebnissen zu führen. Aber doch nur deswegen, weil es im vollen Gegensatz zu seiner ursprünglichen Bedeutung zum Ausdruck für Lage- bzw. Richtungsverhältnisse gebraucht wird. Nimmt man im rechtwinkligen Koordinatensystem das Minuszeichen im ursprünglichen arithmetischen Sinn, so würde der in die X-Achse hineinfallende Durchmesser des mit der Einheitsstrecke um 0 geschlagenen Kreises $= (+1) + (-1) = \text{Null}$ sein. Also auch hier führt die konsequente Durchführung der Sätze über die negativen Zahlen zu falschen Resultaten.

Auf andere Unebenheiten habe ich in dem mehrfach genannten Aufsatz in den „Annalen“ hingewiesen.

Betrachtet man den Aufbau der modernen Mathematik im ganzen vom logisch-erkenntnkritischen Standpunkt aus, so scheint er mir an zwei Grundmängeln zu leiden. Der eine besteht in dem Gebrauch von Begriffen bzw. Begriffsverbindungen, denen keine „Anschauung“ gegeben werden kann, d. h. in der Mathematik solcher, welche nicht „konstruiert“ werden können.¹⁾ Solche nach Kants Ausdruck „leeren“ Begriffe sind für die Wirklichkeitserkenntnis unbrauchbar (vgl. meinen Aufsatz über „das logische Rätsel der nichteuklidischen Geometrien und seine Lösung“ im Archiv für systematische Philosophie, XXIX. Band, Heft 3 u. 4 und XXX. Band, Heft 1 u. 2, und meine Erwiderung auf Herrn Stammers Abhandlung in den Annalen der Philosophie, 7. Band, 1928, Heft 7/8, S. 279/80).

Der andere Mangel besteht in der Verwendung von willkürlichen „Festsetzungen“ („Verabredungen“, „Konventionen“), welche manchmal sogar „Definitionen“ genannt werden. Auch das von Herrn Dieck gelobte „Beharrungsgesetz“ („Permanenzprinzip“), welches sich in der Mathematik besonders in der Anwendung der gewohnten Rechenregeln auf die neu eingeführten Zahlen äußert, gehört zu diesen willkürlichen Festsetzungen. Denn wenn es auch zunächst logisch zu den unberechtigten Verallgemeinerungen zu rechnen ist, so kann man doch, da diese Verallgemeinerung hier

¹⁾ Unter „Konstruiertwerdenkönnen“ verstehe ich, daß etwas dem Begriff Entsprechendes gemacht bzw. ausgeführt werden kann, sei es in der Vorstellung oder in Wirklichkeit. Ein Hexaeder kann der Tischler machen, nicht aber ein Heptaeder (einen von sieben Quadraten oder gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper). Die Multiplikation $5 \cdot 7$ kann man ohne weiteres ausführen (den entsprechenden Zahlenwert auffinden), die Multiplikation $-5 \cdot 7$ dagegen nicht, es sei denn, daß man zu den bekannten „Festsetzungen“ seine Zuflucht nimmt.

sozusagen zum Prinzip erhoben wird, mit Recht von willkürlicher Festsetzung sprechen.

In meinem Aufsatz in den Annalen habe ich mehrfach Beispiele solcher Festsetzungen angeführt und vom logischen Standpunkt aus besprochen. Auch die Ausartungen der „Axiomatik“ auf dem geometrischen Gebiet gehören hierher.

Diese „Festsetzungen“ haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den auf Kirchenversammlungen festgesetzten theologischen Dogmen. Lessing hat, wenn ich mich recht entsinne, irgendwo gesagt, auf nichts in der Welt sei mehr Scharfsinn verwandt worden als auf den Aufbau der Kirchenlehre. Auch die Mathematik dürfte der Theologie darin den Rang nicht ablaufen. Und doch schwebt das ganze kunstvolle Gebäude der kirchlichen Lehren in der Luft und stellt sich als ein bloßes Gedankengebilde dar, wenn nicht die Fundamente auf die eine oder andere Weise gesichert werden können. Und wenn die grundlegenden Dogmen, etwa über das Wesen Gottes oder die Beschaffenheit des natürlichen Menschen, geändert werden, so wird dadurch der ganze Aufbau in Mitleidenschaft gezogen. Man könnte die dogmatischen Systeme der verschiedenen christlichen Konfessionen und Sekten geradezu vergleichen mit den verschiedenen Geometrien, welche im Lauf des 19. Jahrhunderts entstanden sind, nur daß letztere nicht entfernt dieselbe praktische Bedeutung haben wie jene. Es genügt bei diesen geometrischen Systemen ebensowenig wie bei jenen theologischen, daß sie in sich widerspruchsfrei sind. Sobald man fragt, welches von ihnen in der Wirklichkeit gilt, enthüllt sich die ganze Unzulänglichkeit der Methode. Man kann nicht einmal sagen, die Erfahrung bzw. wissenschaftliche Beobachtung werde schon von selbst ergeben, welche von den verschiedenen Geometrien „gelte“. Denn was für eine Veranlassung hat die Wirklichkeit, sich zu einer der von den Menschen auf Grund willkürlicher Voraussetzungen aufgebauten Geometrien zu bekennen? Oder mit welchem Recht können wir behaupten, daß im „physikalischen“ Raume überall irgendeine, und zwar dieselbe Geometrie gelte? Ich kann auf diese Probleme hier nicht eingehen und brauche es um so weniger, als ich auf den obengenannten Aufsatz im Archiv für systematische Philosophie verweisen kann, in welchem ich nachzuweisen versucht habe, wie von der nuklidischen Geometrie her die Brücke zur Wirklichkeit tatsächlich geschlagen werden kann. Die moderne Mathematik nimmt zu den erkenntnistheoretischen Problemen leider im allgemeinen gar nicht ernstlich Stellung.

Vielleicht geht man nicht zu weit, wenn man behauptet, daß von allen Wissenschaften die moderne Mathematik am wenigsten der besonders von Kant so scharf betonten Notwendigkeit der Voraussetzungslosigkeit der Wissenschaft genügt. Gerade in der Mathematik wird von unbewiesenen Festsetzungen und mehr oder weniger willkürlichen Voraussetzungen am unbefangenen Gebrauch gemacht. Für die Logik ist die Billigung dieses Verfahrens unmöglich, und aus diesem und den anderen oben ausgeführten Gründen wird sie der Forderung des Herrn Dieck, in neue, an der Mathematik orientierte Bahnen einzulenken, schwerlich Folge leisten.

Die Frage der logischen Korrektheit der Mathematik ist übrigens auch pädagogisch von größter Bedeutung. Die Mathematik ist mit anderen Wissenschaften, besonders der Physik, der Geographie, Astronomie usw., so eng verflochten, daß, auch ganz abgesehen von den Bedürfnissen der Berufsbildung, ein gewisses Maß von mathematischen Kenntnissen für jeden Gebildeten zur Herstellung des Konnexes mit der gegenwärtigen Kultur, dem geistigen Milieu, in dem er lebt und zu leben gezwungen ist, also zu seiner materialen Bildung, unentbehrlich ist. Nicht minder aber ist die Mathematik für die formale Bildung, nämlich die Ausbildung und Entwicklung der Anlagen und Fähigkeiten des Individuums, von Bedeutung. Da nämlich die Mathematik, wie ich von vornherein unumwunden anerkannt habe, von allen Wissenschaften logisch am meisten entwickelt ist, so ist sie für die Ausbildung der Fähigkeit klaren und folgerichtigen Denkens von unschätzbarem Wert. Das gilt insbesondere von der euklidischen Geometrie, welche von jeher auch den Philosophen als Muster logischer Gedankenführung gegolten hat und von Spinoza sogar in dem Titel seines Hauptwerkes (*Ethica ordine geometrico ordinata*) als Vorbild anerkannt wird. Aber auch die Arithmetik, soweit sie es mit den „natürlichen“ Zahlen zu tun hat, ist für den genannten Zweck von hohem Wert. Dagegen haben die sogenannten Erweiterungen des Zahlbegriffs, wie ich in meinem Aufsatz in den *Annalen* gezeigt habe, zu logischen Kunststücken geführt, welche vom Standpunkt der intellektuellen Ausbildung der Jugend zu ernststen Bedenken Anlaß geben. Für die Scheinbeweise, welche aus den Lehrbüchern noch immer nicht ganz verschwunden sind, wird wohl auch kein wissenschaftlich ernst zu nehmender Mathematiker eintreten wollen. Aber ist es viel besser, wenn der nach Wahrheit und Erkenntnis dürstende jugendliche Mensch an

kritischen Wendepunkten mit einem „sic volo sic jubeo“ abgespeist wird: „Wir“ setzen fest, daß die und die Regel auch für den und den Fall gelten soll! Wenn es sich um ein Spiel handelt, kann man die Regeln willkürlich festsetzen, wie es einem am zweckmäßigsten scheint. Aber Spielregeln machen auch keinen Anspruch auf Wahrheit! Und man wird doch auch bei der Jugend nicht den Gedanken aufkommen lassen wollen, daß es sich in gewissen Partien der mathematischen Wissenschaft bloß um ein geistreiches Gedankenspiel ohne irgendwelchen Erkenntniswert für die Wirklichkeit handle.