TRABAJOS DE ESTADISTICA
Vol. 6, núm. 1, 1991, pp. 35 a 43

LA DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA COMO BINOMIAL DE POISSON

J. OLLERO HINOJOSA
Dpto. Estadística e I.O
Universidad de Granada (Granada)
H. M. RAMOS ROMERO
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Cádiz (Cádiz)

RESUMEN

En este trabajo demostramos que toda distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$ puede ser descrita como suma de pruebas independientes con probabilidades de éxito distintas entre sí. Tal distribución recibe habitualmente el nombre de binomial de Poisson o binomial generalizada.

Palabras clave: Distribución Hipergeométrica; Distribución Binomial de Poisson.
Clasificación AMS: 60E05.

ABSTRACT

We prove in this paper that any Hypergeometric distribution $H(N, X, n)$ may be described as a sum of independent trials with unequal probabilities. Such a distribution is usually called Poisson-Binomial or Generalized-Binomial distribution.

Key words: Hypergeometric distribution; Poisson-Binomial distribution.
AMS Classification: 60E05.

Recibido: Enero 1990.
Revisado: Octubre 1990.

1. INTRODUCCION

A partir del modelo genérico del que surge la distribución binomial, que indica el número de éxitos que ocurren al realizar n pruebas aleatorias independientes, con probabilidad de éxito p común a todas ellas, surge la generalización que hizo Poisson, simplemente eliminando la exigencia de que todas las pruebas sean equivalentes. A este tipo de pruebas se las denomina ensayos de Poisson y la distribución que indica el número de éxitos ocurridos recibe el nombre de binomial de Poisson o binomial generalizada.

Denotando por p_i a la probabilidad del éxito en la prueba i-ésima, la distribución binomial generalizada quedará especificada por el vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$.

Los principales resultados sobre esta distribución se encuentran recogidos en WALSH (1955), HOEFFDING (1956), LE CAM (1960), DARROCH (1964), SAMUELS (1965) y GLESER (1975).

El objetivo de este trabajo es probar que cualquier distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$ puede ser expresada como una distribución binomial generalizada $B_g(\mathbf{p})$ cuyas pruebas no determinísticas ocurren con probabilidades de éxito distintas entre sí.

El interés fundamental de nuestro resultado radica en que la distribución hipergeométrica, que inicialmente, y por responder a un esquema de muestreo sin reemplazamiento, se configura como un modelo de pruebas dependientes, va a poder ser descrita en términos de ensayos de Poisson y, en consecuencia, configurada como un modelo de pruebas independientes.

La identificación de la distribución hipergeométrica con la binomial de Poisson la efectuaremos a través de las correspondientes funciones generatrices de probabilidad.

Para el caso de la distribución binomial generalizada con vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$, su función generatriz de probabilidad viene dada por

$$G_B(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z),$$

tratándose, por tanto, de un polinomio en z de grado a lo sumo n, ya que p_i varía en el intervalo $[0, 1]$, y con todas sus raíces reales.

Por otra parte, para la distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$, con función de probabilidad

$$h_k = \frac{\binom{X}{k}\binom{N-X}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ con máx}\,(0, n+X-N) = m \leqslant k \leqslant s = \text{mín}\,(n, X), \quad (1)$$

la función generatriz de probabilidad es

$$G_H(z) = \sum_{k=m}^{s} h_k z^k.$$

Evidentemente, $G_H(z)$ es un polinomio en z de grado s.

Si $m = 0$, y con ayuda de la función hipergeométrica $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, definida como

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(i)}\beta^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \frac{z^i}{i!} \quad , \quad \gamma > 0, \qquad (2)$$

donde

$$A^{(i)} = A(A+1)...(A+i-1) \quad ; \quad A^{(0)} = 1,$$

$G_H(z)$ se puede expresar como

$$G_H(z) = h_0 F(-n, -X; N-X-n+1; z), \qquad (3)$$

como puede verse en ORD (1967).

En la sección 2 generalizarémos este resultado eliminando la exigencia de que m sea cero y obtendremos que

$$G_H(z) = h_m z^m F(-n+m, -X+m; N-X-n+1+2m; z).$$

El objetivo final de nuestro trabajo lo alcanzaremos, como ya hemos dicho, identificando las funciones generatrices de probabilidad de las distribuciones hipergeométrica y binomial generalizada. Para ello probaremos que $G_H(z)$ admite únicamente raíces reales, nulas o negativas, siendo simples todas las raíces negativas.

Recogemos, finalmente, conocidos resultados acerca de la función $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ que utilizaremos en nuestras demostraciones y que pueden verse en ABRAMOWITZ y STEGUN (1972).

(i) La función hipergeométrica verifica la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{dF}{dz} - \alpha\beta F = 0. \qquad (4)$$

(ii) Su derivada se expresa en términos de otra función hipergeométrica

$$\frac{d}{dz}F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z). \qquad (5)$$

2. RESULTADOS

Lema 1

Si la función hipergeométrica $F(-\alpha, -\beta, \gamma; z)$, con $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \in \mathbb{R}^+$, alcanza en $z = z_0$ un máximo o un mínimo, entonces $F(z_0) \geqslant 0$ ó $F(z_0) \leqslant 0$, respectivamente.

Demostración:

Haremos uso de la ecuación (4), dándole a los parámetros los valores particulares del enunciado y a la variable el valor z_0. Dado que, por las hipótesis del lema, $F(-\alpha, -\beta, \gamma; z)$ es un polinomio de grado α con todos los coeficientes positivos, es evidente que cualquier extremo se localizará en valores de z_0 negativos, de modo que tenemos:

$$z_0(1-z_0) < 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{dF}{dz}\right|_{z=z_0} = 0.$$

Sustituyendo en (4), dicha ecuación se reduce a

$$z_0(1-z_0)\left.\frac{d^2F}{dz^2}\right|_{z=z_0} = \alpha\beta F(z_0).$$

Por consiguiente, en caso de máximo se deduce que $F(z_0) \geqslant 0$, y lo contrario, en caso de mínimo.

Observación: la exigencia de que $\alpha \leqslant \beta$, impuesta en la hipótesis, se plantea únicamente con carácter formal ya que los dos primeros argumentos de la función hipergeométrica son intercambiables.

Teorema 1

La función hipergeométrica $F(-\alpha, -\beta, \gamma; z)$, con $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant \beta$ y $\gamma \in \mathbb{R}^+$, tiene α raíces reales distintas.

Demostración:

Lo probaremos por inducción. En primer lugar, para $\alpha = 2$,

$$F(-2, -\beta, \gamma; z) = 1 + \frac{2\beta z}{\gamma} + \frac{2\beta(\beta - 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{z^2}{2!},$$

verificándose la proposición al ser positivo el discriminante de la ecuación $F(-2, -\beta, \gamma; z) = 0$, ya que

$$\Delta = \frac{4\beta^2}{\gamma^2} - \frac{4\beta(\beta - 1)}{\gamma(\gamma + 1)} = \frac{4\beta}{\gamma}\left[\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\beta - 1}{\gamma + 1}\right] = \frac{4\beta}{\gamma}\left[\frac{\beta + \gamma}{\gamma(\gamma + 1)}\right] > 0.$$

Consideremos ahora válida la proposición para $\alpha = n - 1$ y para cualesquiera valores compatibles de β y γ. Pasemos entonces a probarla para $F(-n, -\beta, \gamma; z)$. Para ello, particularicemos la relación (5) a dicha función, obteniendo que

$$\frac{d}{dz} F(-n, -\beta, \gamma; z) = \frac{n \cdot \beta}{\gamma} F(-(n - 1), -(\beta - 1), \gamma + 1; z).$$

Al satisfacer $F(-(n - 1), -(\beta - 1), \gamma + 1; z)$ la hipótesis de inducción, admitirá $n - 1$ raíces reales distintas que denominaremos $z_1, ..., z_{n-1}$ y que consideraremos ordenadas decrecientemente, siendo además todas ellas negativas.

Por otra parte, debido al carácter simple de las raíces $F(-(n - 1), -(\beta - 1), \gamma + 1; z)$, se verifica que

$$\left.\frac{d^2}{dz^2} F(-n, -\beta, \gamma; z)\right|_{z_i} = \frac{n\beta}{\gamma} \left.\frac{d}{dz} F(-(n - 1), -(\beta - 1), \gamma + 1; z)\right|_{z_i}$$

$$i = 1, ..., n - 1,$$

irá cambiando alternadamente de signo, por lo que, en dichos valores, $F(-n, -\beta, \gamma; z)$ alcanzará sucesivamente mínimos y máximos, comenzando siempre por un mínimo.

Aplicando el lema, $F(-n, -\beta, \gamma; z_i)$ tomará valores de signo opuesto al variar i entre 1 y $n-1$. Además, como $F(-n, -\beta, \gamma; 0)$ es mayor que cero, y $\lim_{z \to -\infty} F(-n, -\beta, \gamma; z)$ tiene distinto signo que $F(-n, -\beta, \gamma; z_{n-1})$, se obtiene una partición de n subintervalos en cuyos extremos $F(-n, -\beta, \gamma; z)$ toma valores de signos opuestos. Por tanto, hemos separado todas las posibles raíces de $F(-n, -\beta, \gamma; z)$, con lo que queda terminada la demostración.

Lema 2

Dada una distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$, su función generatriz de probabilidad es

$$G_H(z) = h_m z^m F(-n + m, -X + m; N - X - n + 1 + 2m; z),$$

siendo $m = \text{máx}\,(0, X + n - N)$.

Demostración:

Por definición,

$$G_H(z) = \sum_{k=m}^{s} h_k z^k = h_m z^m \left(1 + \sum_{i=1}^{s-m} i! \frac{h_{m+i}}{h_m} \frac{z^i}{i!}\right),$$

donde $s = \text{mín}\,(n, X)$. Por otra parte, teniendo en cuenta (1),

$$\frac{h_{m+i}}{h_m} = \frac{(-n + m)^{(i)}(-X + m)^{(i)}}{(m + 1)^{(i)}(N - X - n + m + 1)^{(i)}}.$$

En el caso de que $m > 0$, entonces, $N - X - n + m = 0$ y, por tanto, se cumple que $(N - X - n + m + 1)^{(i)} = i!$ y, por otra parte, podríamos reescribir

$$m + 1 = N - X - n + 2m + 1. \tag{6}$$

En consecuencia,

$$i! \frac{h_{m+i}}{h_m} = \frac{(-n + m)^{(i)}(-X + m)^{(i)}}{(N - X - n + 1 + 2m)^{(i)}} \quad , \quad i = 1, ..., s - m,$$

de forma que, teniendo en cuenta la definición (2) de la función hipergeométrica, la función generatriz de probabilidad puede ser expresada como

$$G_H(z) = h_m z^m F(-n + m, -X + m; N - X - n + 1 + 2m; z), \quad (7)$$

expresión que, para el caso particular $m = 0$, adopta la forma conocida (3), mientras que para $m > 0$, utilizando la identidad (6), puede ser reescrita como

$$G_H(z) = h_m z^m F(-n + m, -X + m; m + 1; z).$$

Teorema 2

La función generatriz de probabilidad de la distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$ tiene s raíces reales, de las cuales $s - m$ son simples y las restantes son la raíz $z = 0$ con orden de multiplicidad m, siendo $m = \text{máx}(0, n + X - N)$ y $s = \text{mín}(n, X)$.

Demostración:

Basta tener en cuenta la expresión (7) dada en el lema 2 para la función generatriz de probabilidad de la distribución hipergeométrica $H(N, X, n)$.

De una parte, es evidente la existencia de la raíz $z = 0$ con grado de multiplicidad m y, por otra parte, si tomamos $\alpha = s = \text{mín}(n, X)$, el teorema 1 nos asegura la existencia de $s - m$ raíces reales distintas negativas.

Teorema 3

Toda distribución hipergeométrica puede interpretarse como una distribución binomial de Poisson.

Demostración:

Si $z_1, ..., z_s$ son las s raíces de la función generatriz de probabilidad de $H(N, X, n)$, donde $s = \text{mín}(n, X)$, ésta se expresará como

$$G_H(z) = c \cdot \prod_{i=1}^{s} (z - z_i), \quad \text{con } c = h_s.$$

Consideremos ahora la función generatriz de probabilidad de la distribución binomial generalizada, en el supuesto de que las s pruebas tienen probabilidades de éxito no nulas:

$$G_B(z) = \prod_{i=1}^{s} (q_i + p_i z) = \prod_{i=1}^{s} p_i \prod_{i=1}^{s} \left(z + \frac{q_i}{p_i} \right).$$

Exigiendo que ambas funciones generatrices tengan las mismas raíces, obtenemos que $-q_i/p_i = z_i$, o lo que es lo mismo,

$$p_i = \frac{1}{1 - z_i} \qquad i = 1, ..., s.$$

Para terminar sólo queda comprobar que ambas funciones generatrices coinciden, lo cual es cierto porque para $z = 1$ las dos deben valer la unidad.

En consecuencia,

$$H(N, X, n) \equiv B_g(\mathbf{p}) \quad , \quad \text{con } p_i = \frac{1}{1 - z_i} \qquad i = 1, ..., s.$$

Observación: hacemos notar que cuando $z_i = 0$, para $i = 1, ..., m$, en la descomposición de $H(N, X, n)$ en s pruebas de Poisson independientes, m pruebas son determinísticas.

REFERENCIAS

ABRAMOWITZ, M., y STEGUN, I. A. (1972): «Handbook of Mathematical Functions», *Dover Publications, INC.*

DARROCH, J. N. (1964): «On the Distribution of the Number of Successes in Independent Trials», *A.M.S.*, 35, pp. 1317-1321.

GLESER, L. (1975): «On the Distribution of the Number of Successes in Independent Trials», *A.P.*, 3, pp.182-188.

HOEFFDING, W. (1956): «On the Distribution of the Number of Successes in Independent Trials», *A.M.S.*, 27, pp. 713-721.

Le CAM, L. (1960): «An Approximation Theorem for the Poisson Binomial Distribution», *Pacific J. Math.*, 10, pp. 1181-1197.

ORD, J. K. (1967): «On a System of Discrete Distributions», *Biometrika*, 54, p. 649.

SAMUELS, S. M. (1965): «On the Number of Successes in Independent Trials», *A.M.S.*, 36, pp. 1272-1278.

WALSH, J. (1955): «Approximate Probability Values for Observed Number of "Successes" from Statistically Independent Binomial Events with Unequal Probabilities», *Sankhya,* 15, pp. 281-290.