RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO
Serie II, Tomo XXIX (1980), pp. 161-258

LES OPERATEURS QUASI FREDHOLM: UNE GENERALISATION DES OPERATEURS SEMI FREDHOLM

JEAN-PHILIPPE LABROUSSE

The present paper is concerned with the study of a new class of linear operators on a Hilbert space: the class of quasi-Fredholm operators, which contains many operators already studied in the litterature (in particular semi-Fredholm operators). An operator A is said to be quasi-Fredholm of degree d if the following conditions are satisfied:

a) For all n greater than d, $R(A^n) \cap N(A) = R(A^d) \cap N(A)$;

b) $N(A) \cap R(A^d)$ is closed in H;

c) $R(A) + N(A^d)$ is closed in H.

Two characterisations of quasi-Fredholm operators are given:

1) A is quasi-Fredholm iff there exists a direct decomposition of H into the sum of two subspaces H_1 and H_2 which are invariant under A and such that the restriction of A to H_1 is quasi-Fredholm of degree 0 and the restriction of A to H_2 is nilpotent (Kato decomposition).

2) A is quasi-Fredholm iff there exists a neighborhood D of 0 in $\mathbf{C}$ such that for all $\lambda \neq 0$ in that neighborhood $A - \lambda I$ has a generalized inverse which is meromorphic in $D - \{0\}$ (The generalized inverse is holomorphic in D iff A is of degree 0).

The bulk of the paper is devoted to the proofs of these characterizations and of related results, making use of the theory of operators ranges and of generalized inverses. Most of the results extend easily to the Banach case.

The rest of the paper deals with the class of quasi-normal operators, which is closely related to the class of spectral operators. Some applications of the first part of the paper are given in this context.

Introduction.

Ce travail est destiné à fournir les démonstrations des résultats annoncés dans [32] et [33]. Il est conçu à partir de troix axes.

Le premier axe est constitué par la théorie, désormais classique, des opérateurs semi Fredholm dans un espace de Hilbert, c'est à dire d'opérateurs linéaires fermés A de domaine $D(A)$ et image $R(A)$ contenus dans un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ tels que $R(A)$ soit fermé et $\min(\dim N(A), \operatorname{codim} R(A)) < \infty$. Ces opérateurs ont deux propriétés importantes. Tout d'abord, une propriété de stabilité qui peut s'énoncer ainsi: si on munit l'espace de tous les opérateurs fermés (bornés ou non) sur $\mathbf{H}$ de la métrique $g(A, B) = \| P_{G(A)} - P_{G(B)} \|$ ou $P_{G(A)}$ et $P_{G(B)}$ dénotent respectivement les projections orthogonales dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ sur le graphe $G(A)$ de l'opérateur A et le graphe $G(B)$ de l'opérateur B, alors l'ensemble des opérateurs semi Fredholm est ouvert dans cet espace.

En d'autres mots, l'ensemble des opérateurs semi Fredholm est stable par rapport à toutes les « petites » perturbations. En outre, on peut facilement démontrer que la condition $\min(\dim N(A), \operatorname{codim} R(A)) < \infty$ est nécessaire pour l'existence de cette stabilité (cf. [31]).

D'autre part, dans [29] T. Kato a montré que si un opérateur A est semi Fredholm, on peut lui associer une décomposition de $\mathbf{H}$ comme somme directe de deux sous-espaces fermés M et N, invariants par A et tels que $\exists\ k \in \mathbf{N}$ tel que $N \subseteq N(A^k)$ et que si A_0 dénote la restriction de A à M on ait: $\forall\ h \in \mathbf{N}$, $N(A_0^h) \subseteq R(A_0)$.

Dans ce travail nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur possède cette deuxième propriété: nous appelons quasi-Fredholm ces opérateurs (qui contiennent évidemment les semi-Fredholm comme cas particuliers). Le chapitre III est consacré à cette étude ainsi qu'à établir d'autres propriétés pour les itérés des opérateurs quasi-Fredholm. A la fin du § 1 du chapitre III on donne une liste non exhaustive d'opérateurs déjà étudiés qui se trouvent être des cas particuliers d'opérateurs quasi-Fredholm.

Dans le chapitre IV on montre que les opérateurs quasi-Fredholm sont eux aussi doués d'une proprieté de stabilité si l'on ne considère que les perturbations du type λI, $\lambda \in \mathbf{C}$, perturbations fondamentales pour l'étude du spectre d'un opérateur.

Pour établir les résultats du chapitre III, nous avons eu besoin d'une part d'affiner les résultats classiques de géométrie hilbertienne (voir par exemple [28]) — c'est l'objet du chapitre I — et d'autre part d'utiliser et d'améliorer les résultats de la théorie des sous-espaces paracomplets d'un espace de Hilbert, théorie qui constitue le deuxième axe de ce mémorie. Si $\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert, $\mathbf{K}$ sera dit sous-espace paracomplet de $\mathbf{H}$ si $\mathbf{K}$ est un sous-espace hilbertisable de $\mathbf{H}$ tel que l'injection de $\mathbf{K}$, muni de sa topologie propre, dans $\mathbf{H}$ est continue. Notamment on démontre que si la somme de deux sous-espaces paracomplets M et N d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ est fermée, alors $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$. Cette théorie fait l'objet du chapitre II.

Le troisième axe de ce mémoire est constitué par la théorie des inverses généralisés ou pseudo inverses d'opérateurs. Si A est un opérateur sur $\mathbf{H}$ on dit que A^+ est un inverse généralisé de A si les propriétés suivantes sont satisfaites:

$$D(A) \supseteq R(A^+); \qquad D(A^+) \supseteq R(A); \qquad A^+ A A^+ = A^+; \qquad A A^+ A = A.$$

Le chapitre IV contient le résultat suivant: un opérateur A est quasi Fredholm si et seulement si $A - \lambda I$ admet un inverse généralisé méromorphe dans un voisinage de l'origine (dans ce cas là tous les inverses généralisés de $A - \lambda I$ ont cette propriété). Ce résultat a été obtenu indépendamment et par des méthodes différentes par Bart et Kaballo, [4] dans le cas ou A est borné mais dans le cadre plus général des espaces de Banach.

Finalement, dans le chapitre V on applique les résultats précédents à la théorie des opérateurs spectraux de Dunford. On introduit la notion d'opérateur quasi normal, notion qui est à rapprocher des résultats de Colojoara et Foias, [13] sur les opérateurs décomposables. Cette notion est très proche de celle d'opérateur spectral (nous conjecturons même que les deux notions sont équivalentes). Les résultats principaux de ce chapitre sont que si un opérateur est spectral, alors il est quasi-normal et réciproquement que si un opérateur est quasi normal et son spectre satisfait certaines conditions, alors il est spectral. Tout opérateur normal est quasi normal.

Les chiffres entre crochets renvoient à la liste des références située à la fin du mémoire.

L'auteur souhaite exprimer ici sa profonde reconnaissance à J. A. Dieudonné qui a bien voulu lire le manuscrit de ce mémoire et qui a suggéré de nombreuses améliorations de sa rédaction.

CHAPITRE I

QUELQUES RESULTATS DE GEOMETRIE HILBERTIENNE

§ 1. Sous-norme d'un operateur.

Dans ce chapitre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{K}$ dénoteront deux espaces de Hilbert et A sera un opérateur continu non identiquement nul de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{K}$ (donc $\|A\| > 0$).

DEFINITION 1.1.1. *Avec les notations introduites, posons:*

$$l(A) = \{u \in \mathbf{H} \mid \|Au\|_K = \|A\| \, \|u\|_H\}$$
(1.1.1)
$$l(A^*) = \{v \in \mathbf{K} \mid \|A^* v\|_H = \|A^*\| \, \|v\|_K\}.$$

PROPOSITION 1.1.1.

$$l(A) = \ker (A^* A - \|A\|^2 I_H)$$

$$l(A^*) = \ker (A A^* - \|A^*\|^2 I_K).$$

Démonstration. Démontrons, par exemple, la première égalité.
Soit $u \in l(A)$. Alors:

$$\|A\|^2 \|u\|_H^2 = \|Au\|_K^2 =$$

$$= (A^* A u, u)_H \leq \|A^* A u\|_H \|u\|_H \leq$$

$$\leq \|A\|^2 \|u\|_H^2 \, .$$

Donc $\|A\|^2 \|u\|_H = \|A^* A u\|_H$ d'où

$$\|A^* A u - \|A\|^2 u\|_H^2 = \|A^* A u\|_H^2 + \|A\|^4 \|u\|_H^2 - 2\|A\|^2 \, \|Au\|_K^2 =$$

$$= 2\|A\|^2 (\|A\|^2 \|u\|_H^2 - \|Au\|_K^2) = 0 .$$

Donc $u \in l(A) \Rightarrow u \in \ker (A^* A - \|A\|^2 I_H)$.
Inversement

$$u \in \ker (A^* A - \|A\|^2 I_H) \Rightarrow A^* A u = \|A\|^2 u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|Au\|_K^2 = (A^* A u, u)_H = \|A\|^2 \|u\|_K^2 \Rightarrow u \in l(A).$$

REMARQUES.

1) $l(A)$, $l(A^*)$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{K}$ respectivement.

2) $l(A) \perp \ker A$, $\quad l(A^*) \perp \ker A^*$.

En effet $u \in l(A) \Rightarrow u = \dfrac{1}{\|A\|^2} A^* A u \in R(A^*)$, l'image de A^* qui est contenue dans $\ker A^{\perp}$.

DEFINITION 1.1.2. On appellera *sous-norme de A*, le nombre réel non-négatif noté $\langle A \rangle$ ainsi défini:

$$\langle A \rangle = \sup_{u \perp l(A)} \frac{\|Au\|_K}{\|u\|_H} . \tag{1.1.2}$$

Si $l(A) = \mathbf{H}$, on pose $\langle A \rangle = 0$.

REMARQUE.

$$\forall A : 0 \leq \langle A \rangle \leq \| A \|, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C} : \langle \lambda A \rangle = |\lambda| \langle A \rangle.$$

Si $l(A) = \{0\}$ on a:

$$\langle A \rangle = \| A \|. \tag{1.1.3}$$

PROPOSITION 1.1.2. *Si $\hat{A}$, $\hat{A}^*$ sont les restrictions de A à $l(A)^\perp$ et de A^* à $l(A^*)^\perp$ respectivement alors*

$$\hat{A} : l(A)^\perp \to l(A^*)^\perp$$

$$\hat{A}^* : l(A^*)^\perp \to l(A)^\perp$$

et $(\hat{A})^* = \hat{A}^*$.

Démonstration. Posons

$$\check{A} = A \,|_{l(A)}, \qquad \check{A}^* = A^* \,|_{l(A^*)} .$$

Alors $\check{A} : l(A) \to l(A^*)$ et $\check{A}^* : l(A^*) \to l(A)$ sont des bijections, comme on le voit sans difficulté. En outre, $u \perp l(A) \Rightarrow A u \perp l(A^*)$. En effet, si $w \in l(A)$ on a:

$$\forall\, w\, (u, w)_H = 0 = \frac{1}{\| A \|^2} (u, A^* A\, w)_H = \frac{1}{\| A \|^2} (A\, u, A\, w)_K \Rightarrow A\, u \perp l(A^*).$$

Donc la première partie de la proposition est démontrée.

En outre $\forall\, u \in l(A)^\perp$, $\forall\, v \in l(A^*)^\perp$ on a:

$$(A\, u, v)_K = (u, A^*\, v)_H .$$

Donc $(\hat{A}\, u, v)_{l(A^*)^\perp} = (u, \hat{A}^*\, v)_{l(A)^\perp}$ et par conséquent

$$(\hat{A})^* = \hat{A}^*, \qquad (\hat{A}^*)^* = \hat{A}.$$

COROLLAIRE 1.1.1.

$$\langle A \rangle = \langle A^* \rangle. \tag{1.1.4}$$

Démonstration.

$$\langle A \rangle = \|\hat{A}\| = \|\hat{A}^*\| = \langle A^* \rangle.$$

§ 2. Ecartement de deux sous-espaces fermés.

Notons P_X la projection orthogonale sur un sous-espace fermé X de $\mathbf{H}$. Si M, N sont deux sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ posons:

$$U_{NM} = (I - P_N)P_M,$$

$$V_{NM} = P_N P_M,$$

$$g(M, N) = \|P_M - P_N\|,$$

$$\delta(M, N) = \|U_{NM}\|.$$

Alors $g(M, N)$ définit une métrique sur la famille des sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ (c.f. [14]). En outre:

(1.2.1) $$\delta(M, N) = \|U_{NM}\| = \|U^*_{NM}\| = \|U_{M^\perp N^\perp}\| = \delta(N^\perp, M^\perp).$$

(1.2.2) $$\delta(M, N) < 1 \Rightarrow M \cap N^\perp = \{0\}.$$

DEFINITION 1.2.1. Posons $\tilde{M} = M \ominus (M \cap N^\perp)$. Alors $\tilde{M} \cap N^\perp = \{0\}$ et par conséquent $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{M}$. Posons encore:

$$\varepsilon(M, N) = \|(I - P_N)P_{\tilde{M}}\| = \delta(\tilde{M}, N).$$

$\varepsilon(M, N)$ sera appelé l'*écartement de M et de N*.

PROPOSITION 1.2.1.

$$\varepsilon(M, N) = \langle U_{NM} \rangle.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $l(U_{NM}) = M \cap N^\perp$. En effet:

$$u \in l(U_{NM}) \Leftrightarrow u \in \ker\{P_M(I - P_N)P_M - I\}$$

$$\Leftrightarrow u = P_M(I - P_N)P_M u \Rightarrow u \in M$$

$$\Rightarrow u = u - P_M P_N u \Rightarrow P_M P_N u = 0$$

$$\Rightarrow \|P_N u\|^2 = (P_N u, u) = (P_N u, P_M u) = 0 \Rightarrow u \in N^\perp.$$

Donc $u \in l(U_{NM}) \Rightarrow u \in M \cap N^{+}$ et l'inclusion réciproque est évidente. Alors:

$$\varepsilon(M, N) = \sup_{u \in \tilde{M}} \frac{\|(I - P_N) P_M u\|}{\|u\|} = \sup_{u \perp l(U_{NM})} \frac{\|U_{NM} P_M u\|}{\|u\|} = \langle U_{NM} \rangle.$$

REMARQUE. On déduit de la proposition 1.2.1:

(1.2.3) $$M \cap N^{+} = \{0\} \Rightarrow \varepsilon(M, N) = \langle U_{NM} \rangle = \|U_{NM}\| = \delta(M, N)$$

(en utilisant (1.1.3) et le fait que $l(U_{NM}) = M \cap N^{+}$).

En outre, on a toujours:

(1.2.4) $$\varepsilon(M, N) = \langle U_{NM} \rangle \leq \|U_{NM}\| = \delta(M, N)$$

(en utilisant encore (1.1.3)).

DEFINITION 1.2.2. Soit B un opérateur linéaire pas nécessairement fermé ni borné, de domaine $D(B)$ et image $R(B)$, tous deux contenus dans $\mathbf{H}$. Posons:

$$c(B) = \inf \|B u\| / \|u\|$$

ou l'inf est pris sur tous les $u \neq 0$ tels que $u \in D(B)$ et $u \perp N(B)$ (Si $B = 0$ on posera $c(B) = +\infty$). $c(B)$ sera appelé la *conorme de B*.

REMARQUE. Rappelons le résultat suivant: ([21] Thm IV.1.6).

Si B est fermé, alors:

(1.2.5) $$R(B) \text{ est fermé dans } \mathbf{H} \Leftrightarrow c(B) > 0.$$

PROPOSITION 1.2.2.

(1.2.6) $$\varepsilon^2(M, N) + c^2(V_{NM}) = 1.$$

Démonstration. On trouve

$$U^*_{NM} U_{NM} + V^*_{NM} V_{NM} = P_M$$

d'où

$$\forall\, u \in \mathbf{H} : \|U_{NM} u\|^2 + \|V_{NM} u\|^2 = \|P_M u\|^2.$$

Or $\ker V_{NM} = M^{\perp} \oplus M \cap N^{\perp}$.

Donc

$$u \perp M \cap N^{\perp} \Rightarrow P_M u \perp \ker V_{NM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||V_{NM} u||^2 = ||V_{NM} P_M u||^2 \geq c^2(V_{NM}) \, ||P_M u||^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||U_{NM} u||^2 \leq [1 - c^2(V_{NM})] \, ||P_M u||^2 \leq [1 - c^2(V_{NM})] \, ||u||^2.$$

Donc si

$$M \cap N^{\perp} = \{0\}, \; \varepsilon^2(M, N) = ||U_{NM}||^2 \leq 1 - c^2(V_{NM})$$

et si

$$M \cap N^{\perp} \neq \{0\}, \; u \perp l(U_{NM}) \Rightarrow ||U_{NM} u||^2 \leq [1 - c^2(V_{NM})] \, ||u||^2$$

c'est à dire que

$$\varepsilon^2(M, N) = \langle U_{NM} \rangle^2 \leq 1 - c^2(V_{NM}).$$

Donc, dans tous les cas $\varepsilon^2(M, N) \leq 1 - c^2(V_{NM})$.

Inversement $u \perp \ker V_{NM} \Rightarrow u \in M$ et $u \perp M \cap N^{\perp}$.

Donc $P_M u = u$, $u \in \tilde{M}$ et par conséquent:

$$||V_{NM} u||^2 \geq ||u||^2 - ||U_{N\tilde{M}}||^2 \, ||u||^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2(V_{NM}) \geq 1 - \varepsilon^2(M, N).$$

Corollaire 1.2.1.

(1.2.7) $$\varepsilon(M, N) = \varepsilon(N, M).$$

Démonstration.

$$V^*_{NM} = V_{MN},$$

d'où

$$c(V_{MN}) = c(V_{NM})$$

(cf. [21] Cor. IV.1.9.) et par conséquent:

$$\varepsilon(M, N) = \varepsilon(N, M).$$

COROLLAIRE 1.2.2.

$$\varepsilon(M, N) = \varepsilon(M^{\perp}, N^{\perp}). \tag{1.2.8}$$

Démonstration.

$$U_{M^{\perp}N^{\perp}} = P_M(I - P_N) = U^*_{NM} .$$

Dès lors :

$$\varepsilon(N^{\perp}; M^{\perp}) = \langle U_{M^{\perp}N^{\perp}} \rangle = \langle U^*_{NM} \rangle = \langle U_{NM} \rangle$$

en utilisant (1.1.4). Donc $\varepsilon(N^{\perp}, M^{\perp}) = \varepsilon(M, N)$ et le corollaire s'en déduit en utilisant (1.2.7).

PROPOSITION 1.2.3.

$$g(M, N) = \max\{\delta(M, N), \ \delta(N, M)\}.$$

Démonstration.

$$\delta(M, N) = ||(I - P_N)P_M|| = ||(P_M - P_N)P_M|| \leq ||P_M - P_N|| = g(M, N).$$

De même : $\delta(N, M) \leq g(M, N)$ et par conséquent :

$$\max\{\delta(M, N), \ \delta(N, M)\} \leq g(M, N).$$

Inversement si $u \in \mathbf{H}$ on a :

$$||(P_M - P_N)u||^2 = ||(I - P_N)P_M u - P_N(I - P_M)u||^2 =$$
$$= ||(I - P_N)P_M u||^2 + ||P_N(I - P_M)u||^2 \leq$$
$$\leq \max\{\delta^2(M, N), \ \delta^2(N, M)\}\,[||P_M u||^2 + ||(I - P_M)u||^2] \leq$$
$$\leq [\max\{\delta(M, N), \ \delta(N, M\}]^2\,||u||^2$$

d'ou on déduit le reste de la démonstration.

COROLLAIRE 1.2.3.

$$\varepsilon(M, N) \leq \min\{\delta(M, N), \ \delta(N, M)\} \leq g(M, N). \tag{1.2.9}$$

Démonstration. La première inégalité est une conséquence immédiate de (1.2.4) et de (1.2.7); la seconde inégalité découle directement de la proposition précédente.

COROLLAIRE 1.2.4.

$$M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = \{0\} \Rightarrow \varepsilon(M, N) = \tag{1.2.10}$$

$$= \delta(M, N) = \delta(N, M) = g(M, N).$$

$$g(M, N) < 1 \Rightarrow M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = \{0\}. \tag{1.2.11}$$

Démonstration. (1.2.10) se déduit immédiatement de (1.2.3), (1.2.7) et de la proposition précédente.

(1.2.11) se déduit de (1.2.2) et du fait que $g(M, N) < 1$ entraine, d'après la proposition précédente, que $\delta(M, N) < 1$ et $\delta(N, M) < 1$.

REMARQUE. On a:

$$\langle U_{NM} \rangle < 1 \Leftrightarrow \varepsilon(M, N) < 1 \Leftrightarrow c(V_{NM}) > 0. \tag{1.2.12}$$

La première équivalence se déduit de (1.2.4), la seconde de (1.2.6).

PROPOSITION 1.2.4. *Soit M, N deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *et soit P, Q deux projections quelconques sur M et N respectivement. Alors*:

$$g(M, N) \leq \|P - Q\|.$$

Démonstration. Soit P_M et P_N les projections orthogonales sur M et N respectivement. On a:

$$P P_M = P_M, \qquad P_M P = P, \qquad Q P_N = P_N, \qquad P_N Q = Q$$

d'où

$$(I - P)(P_M - P_N) = P P_N - P_N = (P - Q) P_N,$$

$$(P_M - P_N) P = P - P_N P = (I - P_N)(P - Q)$$

et par conséquent

$$P^* (P_M - P_N) = (P^* - Q^*)(I - P_N).$$

Soit maintenant $u \in \mathbf{H}$, alors:

$$||u||^2 + ||(P - P^*)u||^2 =$$

$$= ||u||^2 - (Pu, P^*u) - (P^*u, Pu) + ||Pu||^2 + ||P^*u||^2 =$$

$$= ||u||^2 - (Pu, u) - (u, Pu) + ||Pu||^2 + ||P^*u||^2 =$$

$$= ||(I - P)u||^2 + ||P^*u||^2.$$

Donc si $u = (P_M - P_N)v$, v élément quelconque de $\mathbf{H}$ on a:

$$||(P_M - P_N)v||^2 + ||(P - P^*)(P_M - P_N)v||^2 =$$

$$= ||(P - Q)P_N v||^2 + ||(P^* - Q^*)(I - P_N)v||^2 \leq$$

$$\leq ||P - Q||^2(||P_N v||^2 + ||(I - P_N)v||^2) = ||P - Q||^2 \cdot ||v||^2$$

d'où

$$g(M, N) \leq ||P - Q||.$$

§ 3. Somme de sous-espaces fermés.

PROPOSITION 1.3.1. *Soit M, N deux sous-espaces fermés de* $\mathbf{H}$. Alors:

(1.3.1) $$M + N^\perp \text{ est fermé} \Leftrightarrow M + N^\perp = (M^\perp \cap N)^\perp.$$

Démonstration.

$$M + N^\perp = (M^\perp \cap N)^\perp \Rightarrow M + N^\perp \quad \text{est fermé}$$

puisque l'orthogonal d'un sous-espace de $\mathbf{H}$ est toujours fermé.

Inversement:

$$M^\perp \supseteq M^\perp \cap N \quad \text{et} \quad N \supseteq M^\perp \cap N$$

entraînent

$$M \subseteq (M^\perp \cap N)^\perp \quad \text{et} \quad N^\perp \subseteq (M^\perp \cap N)^\perp$$

d'où

$$M + N^\perp \subseteq (M^\perp \cap N)^\perp.$$

De même:

$$M + N^{\perp} \supseteq M \Rightarrow (M + N^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp}$$

et

$$M + N^{\perp} \supseteq N^{\perp} \Rightarrow (M + N^{\perp})^{\perp} \subseteq N$$

d'où

$$(M + N^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap N$$

et par conséquent

$$M + N^{\perp} = (M + N^{\perp})^{\perp\perp} \supseteq (M^{\perp} \cap N)^{\perp}.$$

Donc

$$M + N^{\perp} = (M^{\perp} \cap N)^{\perp}.$$

PROPOSITION 1.3.2. *Soit Q la projection orthogonale de* $\mathbf{H}$ *sur $M^{\perp} \cap N$ et T celle de* $\mathbf{H}$ *sur $M \cap N^{\perp}$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $\varepsilon = \varepsilon(M, N) < 1$;

b) $M + N^{\perp}$ *est fermé;*

c) *Il existe deux projections R et S de* $\mathbf{H}$ *sur $M \ominus (M \cap N^{\perp})$ et sur $N^{\perp} \ominus (M \cap N^{\perp})$ respectivement telles que: $I - Q - T = R + S$.*

On a alors:

$$(1.3.2) \qquad \begin{aligned} &\|R\| \neq 0 \Rightarrow \|R\| = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \\ &\|S\| \neq 0 \Rightarrow \|S\| = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}\,. \end{aligned}$$

Démonstration. a)$\Rightarrow$b). Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $M + N^{\perp}$, convergent vers u. On peut écrire

$$u_n = x_n + y_n + t_n$$

ou

$$x_n \in M \ominus (M \cap N^{\perp}), \quad y_n \in N^{\perp} \ominus (M \cap N^{\perp}), \quad t_n \in M \cap N^{\perp}$$

sont uniquement déterminés. On a:

$$\|u_n\|^2 = \|x_n + y_n\|^2 + \|t_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 + \|t_n\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x_n\,,\, y_n)$$

d'où

$$||x_n||^2 + ||y_n||^2 + ||t_n||^2 \leq ||u_n||^2 + 2\,|(x_n\,,\,y_n)| =$$
$$= ||u_n||^2 + 2\,|(P_M\,x_n\,,\,(I - P_N)\,y_n)| \leq ||u_n||^2 + 2\,\varepsilon\,||x_n||\;||y_n||.$$

Donc: $||t_n||^2 \leq ||u_n||^2$ et:

$$||x_n||^2 \leq (1 - \varepsilon^2)^{-1}\,||u_n||^2, \qquad ||y_n||^2 \leq (1 - \varepsilon^2)^{-1}\,||u_n||^2. \tag{1.3.3}$$

Donc comme $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy, on en déduit que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ et $\{t_n\}$ le sont aussi et on a:

$$x_n \to x \in M \ominus (M \cap N^\perp), \quad y_n \to y \in N^\perp \ominus (M \cap N^\perp), \quad t_n \to t \in M \cap N^\perp,$$

d'où

$$u_n \to u = x + y + t \in M + N^\perp$$

ce qui montre bien que $M + N^\perp$ est fermé.

b) $\Rightarrow$ c). Soit $u \in M + N^\perp$. Comme plus haut on peut écrire $u = x + y + t$ et on pose: $x = \mathrm{Ru}$, $y = \mathrm{Su}$, $t = \mathrm{Tu}$.

Si $z \in \mathbf{H}$, $z = w + u$, $w \in M^\perp \cap N$. On pose alors $w = Q\,z$, $x = R\,z$, $y = S\,z$, $t = T\,z$, Q et T sont évidemment des projections orthogonales et on vérifie immédiatement que $R^2 = R$, $S^2 = S$. Par définition $I - Q - T = R + S$. Il reste donc seulement à montrer (en utilisant le théorème du graphe fermé) que R et S sont continus. Montrons le pour R par exemple.

Soit $\{z_n\}$ une suite dans $\mathbf{H}$ telle que $z_n \to z$ et $R\,z_n \to x$.

Alors $z_n = w_n + u_n$, $w_n \to w$, $u_n \to u \in M + N^\perp$ puisque $M + N^\perp$ est fermé et si

$$u_n = x_n + y_n + t_n\,,\;\; t_n \to t,\;\; x_n = R\,z_n \to x,$$

donc $y_n \to y \in N^\perp \ominus (N^\perp \cap M)$. Donc $z = w + x + y + t$ et $R\,z = x$.

c) $\Rightarrow$ a). Si $\tilde{N} = N \ominus (N \cap M^\perp) = \{0\}$, on voit que $\varepsilon\,(M, N) = 0$.

Si $\tilde{N} \neq \{0\}$, posons $R_N = R\,|_{\tilde{N}}$. Evidemment $||R_N|| \leq ||R||$ et R_N est une bijection de $\tilde{N}$ sur $\tilde{M} = M \ominus (M \cap N^\perp)$. En effet $u \in \tilde{N}$, $R_N\,u = 0 \Rightarrow \mathrm{Ru} = 0$, $\mathrm{Tu} = 0$, $\mathrm{Qu} = 0$. Donc $u = \mathrm{Su} \in N^\perp \Rightarrow u \in N \cap N^\perp$ d'où $u = 0$, ce qui montre que R_N est injectif et que $||R_N|| \neq 0$.

Soit maintenant $v \in \tilde{M}$. Alors $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 = P_{\tilde{N}}\, v$ et $v_2 = (I - P_{\tilde{N}})\, v$; et comme $\tilde{N}^\perp = N^\perp + N \cap M^\perp$ et $v = R\, v = R\, v_1 + R\, v_2$ on a: $v = R_N\, v_1$ car $R\, v_2 = 0$ puisque $(S + T + Q)\, v_2 = v_2$ ce qui montre que R_N est surjectif et par conséquent bijectif. Or:

$$||v||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2 = ||R_{\tilde{N}}^{-1}\, v||^2 + ||(I - P_{\tilde{N}})\, v||^2$$

d'où

$$||(I - P_N)P_{\tilde{M}}\, v||^2 = ||v||^2 - ||R_{\tilde{N}}^{-1}\, v||^2$$

car

$$(I - P_{\tilde{N}})P_{\tilde{M}}\, v = (I - P_N)P_{\tilde{M}}\, v$$

et comme:

$$||v||^2 = ||R_N\, R_{\tilde{N}}^{-1}\, v||^2 \leq ||R_N||^2\, ||R_{\tilde{N}}^{-1}\, v||^2$$

on trouve

$$||(I - P_N)P_{\tilde{M}}\, v||^2 \leq ||v||^2 - ||v||^2 / ||R_N||^2$$

d'où:

$$\varepsilon^2 \leq 1 - \frac{1}{||R_N||^2} < 1 \quad \text{ce qui établit a)}$$

et aussi

(1.3.4) $$||R_N||^2 \geq (1 - \varepsilon^2)^{-1}.$$

En récrivant (1.3.3) sous la forme

$$||R||^2 \leq (1 - \varepsilon^2)^{-1}$$

on trouve:

$$(1 - \varepsilon^2)^{-1} \leq ||R_N||^2 \leq ||R||^2 \leq (1 - \varepsilon^2)^{-1}$$

et par conséquent:

$$||R|| \neq 0 \Rightarrow ||R_N||^2 = ||R||^2 = (1 - \varepsilon^2)^{-1}$$

et de même, en interchangeant les rôles de M et de $N^\perp$, on trouve

$$||S|| \neq 0 \Rightarrow ||S||^2 = (1 - \varepsilon^2)^{-1}.$$

REMARQUE. Cette proposition généralise le lemme de [30].

COROLLAIRE 1.3.1.

$$M + N^{\perp} \text{ fermé} \Leftrightarrow M^{\perp} + N \text{ fermé},$$

$$M + N \text{ fermé} \Leftrightarrow M^{\perp} + N^{\perp} = (M \cap N)^{\perp}.$$

Démonstration. La première ligne est une conséquence immédiate du fait que $\varepsilon(M, N) = \varepsilon(M^{\perp}, N^{\perp})$. La seconde se déduit de la première et de (1.3.1) puisque tout sous-espace fermé est l'orthogonal d'un autre sous-espace fermé.

PROPOSITION 1.3.3. *Soit $M + N^{\perp}$ fermé et soit M' un sous espace fermé de $\mathbf{H}$ tel que $M \subseteq M' \subseteq M + N^{\perp}$. Alors $M' + N^{\perp}$ est fermé et $\varepsilon(M', N) \leq \leq \varepsilon(M, N)$.*

Démonstration.

$$M + N^{\perp} \subseteq M' + N^{\perp} \subseteq M + N^{\perp}.$$

Donc

$$M + N^{\perp} = M' + N^{\perp} \Rightarrow M^{\perp} \cap N = M'^{\perp} \cap N$$

et

$$\varepsilon(M', N) = \delta(N \ominus (N \cap M'^{\perp}), M') = \delta(N \ominus (N \cap M^{\perp}), M') =$$

$$= \|(I - P_{M'}) P_{\tilde{N}}\| = \|(I - P_{M'})(I - P_M) P_{\tilde{M}}\| \leq \delta(\tilde{N}, M) = \varepsilon(M, N).$$

PROPOSITION 1.3.4. *Pour M, M', N, sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ posons $D = = M \cap N^{\perp}$, $D' = M' \cap N^{\perp}$ on a:*

$$\delta(D', D)\,[I - \varepsilon^2(M, N)]^{1/2} \leq \delta(M', M). \tag{1.3.5}$$

Démonstration. Etablissons d'abord l'identité:

$$\|U_{DD'} u\|^2 = \|U_{MM'} P_{D'} u\|^2 + \|U^*_{NM} U_{DD'} u\|^2.$$

En effet:

$$\|U_{MM'} P_{D'} u\|^2 = \|(I - P_M) P_{M'} P_{D'} u\|^2 = \|(I - P_M)(I - P_D) P_{D'} u\|^2 =$$
$$= \|(I - P_M) U_{DD'} u\|^2 \text{ car } P_{M'} P_{D'} = P_{D'} \text{ et } (I - P_M) P_D = 0;$$

$$\|U^*_{NM} U_{DD'} u\|^2 = \|P_M (I - P_N)(I - P_D) P_{D'} u\|^2 = \|P_M (I - P_D) P_{D'} u\|^2 =$$
$$= \|P_M U_{DD'} u\|^2 \text{ car } P_N (I - P_D) P_{D'} = P_N P_{D'} = 0.$$

De l'identité on déduit:

$$||U_{DD'}u||^2 \leq \delta^2(M', M)\,||u||^2 + \varepsilon^2(M^\perp, N^\perp)\,||U_{DD'}u||^2$$

car

$$U^*_{NM} = U_{M^\perp N^\perp}, \qquad l(U_{M^\perp, N^\perp}) = N^\perp \cap M = D.$$

Donc $||U_{DD'}u||^2\,[1 - \varepsilon^2(M, N)] \leq \delta^2(M', M)\,||u||^2$ et la proposition est démontrée.

Proposition 1.3.5. *Soit M, N deux sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ tels que $M + N^\perp$ soit fermé et $M \cap N^\perp = \{0\}$. Soit M' un sous-espace fermé de $\mathbf{H}$ tel que:*

$$\delta^2 = \delta^2(M', N) < 1 - \varepsilon^2(M, N). \tag{1.3.6}$$

Alors $M' + N^\perp$ est fermé et $M' \cap N^\perp = \{0\}$.

Démonstration. En utilisant (1.3.6) avec la proposition 1.3.4 on obtient: $\delta(D', D) < 1$. Comme $D = M \cap N^\perp = \{0\}$ on trouve:

$$\{0\} = D' \cap D^\perp = D' = M' \cap N^\perp.$$

Soit maintenant $\{x_n\}$ une suite convergente d'éléments de $M' + N^\perp$. Comme $M' \cap N^\perp = \{0\}$ il existe des $u_n \in M'$ et des $v_n \in N^\perp$ uniquement déterminés tels que: $x_n = u_n + v_n$.

En outre, on peut écrire: $(I - P_M)u_n = r_n + s_n + t_n$ ou les r_n, s_n, t_n sont uniquement déterminés (puisque $M \cap N^\perp = \{0\}$) par les conditions:

$$r_n \in M,\ s_n \in N^\perp,\ t_n \in M^\perp \cap N = (M + N^\perp)^\perp.$$

Donc:

$$x_n = \underbrace{P_M u_n + r_n}_{\in M} + \underbrace{v_n + s_n}_{\in N^\perp} + \underbrace{t_n}_{\in M^\perp \cap N}$$

Avec les notations de la proposition 1.3.2 on a:

$$P_M u_n + r_n = R\,x_n, \qquad v_n + s_n = S\,x_n, \qquad t_n = Q\,x_n,$$

et par conséquent la suite $\{P_M u_n + r_n\}$ est une suite convergente, donc de Cauchy.

Or:

$$(I - P_M)\,u_n = (I - P_M)^2\,u_n = (I - P_M)\,s_n + t_n$$

et

$$0 = (s_n, t_n) = (s_n, (I - P_M)\,t_n) = ((I - P_M)\,s_n, t_n).$$

Donc:

$$\|(I - P_M)\, u_n\|^2 = \|(I - P_M)\, s_n\|^2 + \|t_n\|^2 \geq \|(I - P_M)\, s_n\|^2$$

et

$$r_n = - P_M\, s_n = - P_M (I - P_N)\, s_n$$

d'où:

$$\|r_n - r_m\| = \|P_M (I - P_N)(s_n - s_m)\| \leq \delta (M, N) \|s_n - s_m\| = \varepsilon \|s_n - s_m\|$$

puisque d'après (1.2.2),

$$M \cap N^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \delta (M, N) = \varepsilon (M, N) = \varepsilon$$

et

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|P_M (s_n - s_m)\|^2 + \|(I - P_M)(s_n - s_m)\|^2 \leq$$

$$\leq \|r_n - r_m\|^2 + \|(I - P_M)(u_n - u_m)\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|s_n - s_m\|^2 (1 - \varepsilon^2) \leq \|(I - P_M)\, P_{M'} (u_n - u_m)\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|s_n - s_m\|^2 \leq \frac{\delta^2}{1 - \varepsilon^2} \|u_n - u_m\|^2$$

et

$$\|r_n - r_m\|^2 < \frac{\varepsilon^2\, \delta^2}{1 - \varepsilon^2} \|u_n - u_m\|^2.$$

Comme

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|P_M (u_n - u_m)\|^2 + \|(I - P_M)\, P_{M'} (u_n - u_m)\|^2$$

on a:

$$\|P_M (u_n - u_m)\|^2 \geq (1 - \delta^2) \|u_n - u_m\|^2$$

et finalement

$$\|P_M\, u_n + r_n - P_M\, u_m - r_m\| \geq \left(\sqrt{1 - \delta^2} - \frac{\varepsilon\, \delta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \|u_n - u_m\|$$

ce qui entraîne que $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy puisque

$$\delta^2 < 1 - \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{1 - \delta^2} - \frac{\varepsilon\, \delta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} > 0.$$

Donc $u_n \to u \in M'$ et par conséquent $v_n \to v \in N^\perp$ d'ou

$$x_n \to x = u + v \in M' + N^\perp$$

ce qui montre bien que $M' + N^\perp$ est fermé.

COROLLAIRE 1.3.2. *Soit M, N deux sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ tels que $M + N^\perp$ soit fermé et* $\dim M \cap N^\perp < \infty$.

Soit M' un sous-espace fermé de $\mathbf{H}$ tel que:

$$\delta^2 = \delta^2(M', M) < 1 - \varepsilon^2(M, N). \tag{1.3.7}$$

Alors $M' + N^\perp$ est fermé et $\dim M' \cap N^\perp \leq \dim M \cap N^\perp$.

Démonstration. Posons

$$M \cap N^\perp = D, \qquad M' \cap N^\perp = D', \qquad L = N \oplus D.$$

Alors

$$N^\perp = L^\perp \oplus D$$

et

$$U_{ML} = (I - P_M)P_L = (I - P_M)(P_N + P_D) = (I - P_M)P_N = U_{MN}.$$

En outre

$$l(U_{ML}) = L \cap M^\perp = N \cap M^\perp = l(U_{MN}).$$

Donc d'après la proposition 1.2.1, $\varepsilon(M, L) = \varepsilon(M, N) = \varepsilon$. En outre:

$$L^\perp \cap M = N^\perp \cap D^\perp \cap M = D \cap D^\perp = \{0\}.$$

Donc $\delta^2 < 1 - \varepsilon^2$ et la proposition 1.3.5 montrent que $M' + L^\perp$ est fermé et $M' \cap L^\perp = \{0\}$. Comme $M' + N^\perp = M' + L^\perp + D$ et $\dim D < \infty$ on voit que $M' + N^\perp$ est fermé.

Finalement

$$\{0\} = M' \cap L^\perp \Rightarrow M' \cap N^\perp \cap D^\perp = \{0\} \Rightarrow \dim M' \cap N^\perp \leq \dim M \cap N^\perp.$$

COROLLAIRE 1.3.3. *Soit M, N deux sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ tels que $M + N^\perp$ soit fermé et* $\dim M^\perp \cap N < \infty$.

Soit M' un sous espace fermé de $\mathbf{H}$ tel que

$$\delta^2 = \delta^2(M, M') < 1 - \varepsilon^2(M, N). \tag{1.3.8}$$

Alors $M' + N^\perp$ est fermé et $\dim M'^\perp \cap N \leq \dim M^\perp \cap N$.

Démonstration. Posons

$$M^{\perp} = K, \quad M'^{\perp} = K', \quad N^{\perp} = L.$$

Alors $M + N^{\perp}$ fermé $\Leftrightarrow K + L^{\perp}$ fermé (corollaire 1.3.1)

$$\dim M^{\perp} \cap N < \infty \Leftrightarrow \dim K \cap L^{\perp} < \infty$$

et (1.3.8) $\Leftrightarrow \delta^2(K', K) < 1 - \varepsilon^2(K, L)$ puisque en utilisant (1.2.1) on a $\delta(M, M') = \delta(K', K)$. Donc d'après le corollaire 1.3.2, $K' + L$ est fermé et $\dim K' \cap L^{\perp} \leq \dim K \cap L^{\perp}$ et le résultat cherché est démontré puisque $K' + L^{\perp}$ fermé $\Leftrightarrow M' + N^{\perp}$ fermé (corollaire 1.3.1).

COROLLAIRE 1.3.4. *Soit M, N deux sous espaces fermés de* $\mathbf{H}$. *Posons:*

$$D = M \cap N^{\perp}; \qquad E = M^{\perp} \cap N.$$

Soit M' un autre sous espace fermé de $\mathbf{H}$. *Posons*

$$D' = M' \cap N^{\perp}, \qquad E' = M'^{\perp} \cap N, \qquad g = g(M, M'), \qquad \varepsilon = \varepsilon(M, N).$$

Supposons les deux conditions suivantes remplies:

a) $\varepsilon^2 + g^2 < 1$ (*ce qui entraine que* $\varepsilon < 1$, *donc que* $M + N^{\perp}$ *est fermé*);

b) $\dim D < \infty$ *ou* $\dim E < \infty$.

Alors:

$$1) \quad \begin{cases} \delta(D', D) \leq \dfrac{g}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < 1, \\[2ex] \delta(E', E) \leq \dfrac{g}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < 1; \end{cases}$$

2) $D \cap D'^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow E \cap E'^{\perp} = \{0\}$.

(*Dans ce cas là* $\delta(D', D) = g(D', D)$, $\delta(E', E) = g(E', E)$).

Démonstration. 1) est une conséquence immédiate de (1.3.5). On démontre 2) par l'absurde: supposons $E \cap E'^{\perp} = \{0\}$ et $D \cap D'^{\perp} \ni u \neq 0$.

Alors en utilisant le corollaire 1.3.2 si $\dim D < \infty$ ou le corollaire 1.3.3 si $\dim E < \infty$ on trouve que $M' + N^{\perp}$ est fermé, et par conséquent, en utilisant le corollaire 1.3.1, que $M'^{\perp} + N$ est fermé et que:

$$u \in D'^{\perp} \Rightarrow u \in (M' \cap N^{\perp})^{\perp} = M'^{\perp} + N \Rightarrow \exists\ x, y$$

tels que

$$u = x + y, \qquad x \in M'^{\perp}, \qquad y \in N.$$

D'autre part,

$$\delta(E', E) < 1 \Rightarrow \varepsilon(E', E) < 1$$

en utilisant (1.2.4).

Donc $E^{\perp} + E'$ est fermé et d'après la proposition 1.3.1 on a:

$$E^{\perp} + E' = (E \cap E'^{\perp})^{\perp} = \mathbf{H}.$$

Alors $\exists\ v, z$ tels que $y = v + z$ avec $v \in E^{\perp}$, $z \in \mathrm{E}'$.

En outre: $v = y - z \in N$, donc $v \in N \cap E^{\perp} = N \ominus (M^{\perp} \cap N) = \tilde{N}$.

En posant $w = x + z$ on obtient: $u = v + w$, $v \in \tilde{N}$, $w \in M'^{\perp}$.

Donc:

$$\|(I - P_M)w\| = \|(I - P_M)v\| = \|(I - P_M)P_{\tilde{N}}v\| \leq \varepsilon\|v\|$$

et

$$\|P_M w\| = \|P_M(I - P_{M'})w\| \leq \delta(M', M)\|w\| \leq g(M', M)\|w\|.$$

Finalement

$$u \in N^{\perp}, \quad v \in N \Rightarrow \|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2;$$

$$\|w\|^2 = \|(I - P_M)w\|^2 + \|P_M w\|^2 \leq \varepsilon^2\|v\|^2 + g^2\|w\|^2 \Rightarrow \|v\|^2 \leq \|w\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{1 - g^2}\|v\|^2 < \|v\|^2 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow u = 0$$

contradiction.

Donc $E \cap E'^{\perp} = \{0\} \Rightarrow D \cap D'^{\perp} = \{0\}$ et la réciproque se déduit de la symétrie des hypothèses en $M, M', N^{\perp}$ d'une part et $M^{\perp}, M'^{\perp}$ et N de l'autre.

COROLLAIRE 1.3.5. *Dans le cadre de la proposition* 1.3.5 *posons*:

$$H_1 = M + N^{\perp}, \qquad H_2 = M' + N^{\perp}.$$

Alors:

$$g(H_1, H_2) \leq g(M, M')(1 - \varepsilon^2(M, N))^{-1/2}.$$

Démonstration. Soit $u \in H_1$, on a: $u = v + w$ avec $v \in M \ominus (M \cap N^\perp)$ et $w \in N^\perp$.

Alors:

$$(I - P_{H_2}) P_{H_1} u = (I - P_{H_2}) v = (I - P_{H_2}) (P_{M'} + (I - P_{M'})) v =$$
$$= (I - P_{H_2}) (I - P_{M'}) v .$$

Donc:

$$\|(I - P_{H_2}) P_{H_1} u\| \leq \|(I - P_{M'}) P_M v\| \leq \delta(M, M') \|v\|$$

et en utilisant la proposition 1.3.2 on voit que

$$\|v\| = \|R u\| \leq (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} \|u\|$$

d'où on déduit que

$$\delta(H_1, H_2) \leq \delta(M, M') (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} < 1. \tag{1.3.9}$$

Soit maintenant $u \in H_2 \cap H_1^\perp$, on a: $u = v + w$ avec $v \in M'$ et $w \in N^\perp$. Or $u \in H_1^\perp \Rightarrow u \in N$ et par conséquent:

$$\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \Rightarrow \|w\| \leq \|v\|. \tag{1.3.10}$$

Par ailleurs:

$$\|v\|^2 = \|P_{M'}\|^2 = \|P_M P_{M'} v\|^2 + \|(I - P_M) P_{M'} v\|^2 \leq$$
$$\leq \|P_M P_{M'} v\|^2 + \delta^2(M', N) \|v\|^2.$$

Donc:

$$\|P_M P_{M'} v\|^2 \geq (1 - \delta^2(M', M)) \|v\|^2. \tag{1.3.11}$$

Finalement:

$$\|P_M P_{M'} v\|^2 = (P_M P_{M'} v, v) = (P_M P_{M'} v, u) - (P_M P_{M'} v, w) =$$
$$= - (P_M P_{M'} v, P_M (I - P_N) w) \leq \delta(N^\perp, M^\perp) \|w\| \cdot \|P_M P_{M'} v\|.$$

Or $M \cap N^\perp = \{0\}$. Donc, en utilisant (1.2.1) et (1.2.3) on voit que

$$\delta(N^\perp, M^+) = \delta(M, N) = \varepsilon(M, N) = \varepsilon.$$

Donc:

$$||P_M P_{M'} v||^2 \leq \varepsilon \, ||v|| \cdot ||P_M P_{M'} v||$$

et en utilisant (1.3.6) on trouve:

$$||P_M P_{M'} v||^2 \leq \varepsilon^2 \, ||v||^2 < (1 - \delta^2 (M', M)) \, ||v||^2$$

ce qui contredit (1.3.11). Donc $H_2 \cap H_1^{\perp} = \{0\}$, et comme (1.2.2) et (1.3.9) entrainent que $H_1 \cap H_2^{\perp} = \{0\}$ on voit, en utilisant (1.2.10), que $\delta (H_1, H_2) = g (H_1, H_2)$. Or d'après la proposition 1.2.3 $\delta (M, M') \leq g (M, M')$.

Le corollaire est donc démontré en utilisant (1.3.9).

Chapitre II

LES SOUS-ESPACES PARACOMPLETS

§ 1. Definition et exemples.

Definition 2.1.1. Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach $\mathbf{B}$. Nous dirons que M est un *sous-espace paracomplet de* $\mathbf{B}$ si M est un espace de Banach et l'injection de M dans $\mathbf{B}$ est continue.

Exemple. Tous les sous-espaces fermés de $\mathbf{B}$.

Proposition 2.1.1 (lemme de Neubauer [35]). *Soit M, N deux-sous-espaces paracomplets de* $\mathbf{B}$ *tels que $M + N$ et $M \cap N$ soient fermés dans* $\mathbf{B}$. *Alors M et N sont des sous-espaces fermés de* $\mathbf{B}$.

Démonstration. On considère d'abord le cas particulier $M \cap N = \{0\}$. Soit alors J l'application linéaire du Banach $M \times N$ dans $M + N$ définie par: $J : (u, v) \to u + v$. C'est une application bijective et continue. Donc d'après le théorème de Banach elle est bicontinue, d'où on déduit que $M = J (M \times \{0\})$ et $N = J (\{0\} \times N)$ sont fermés dans $\mathbf{B}$. Pour le cas général, on remarque que $M \cap N$ étant fermé dans $\mathbf{B}$ est fermé à fortiori dans M et dans N. Donc en posant

$$M' = M / (M \cap N); \qquad N' = N / (M \cap N)$$

on voit que M' et N' sont des sous-espaces paracomplets de $\mathbf{B} / (M \cap N)$. En outre,

$$M' \cap N' = \{0\}; \qquad M' + N' = (M + N) / (M \cap N)$$

sont fermés dans $\mathbf{B} / (M \cap N)$. D'après ce qui précède M' et N' sont fermés dans $\mathbf{B} / (M \cap N)$ et on en déduit que M et N sont fermés dans $\mathbf{B}$.

PROPOSITION 2.2. *Soit M, N deux sous-espaces paracomplets de $\mathbf{B}$. Alors $M + N$ et $M \cap N$ sont également des sous-espaces paracomplets de $\mathbf{B}$.*

Démonstration.

a) $M + N$: Soit $w \in M + N$ et soit $\| \|_M$, $\| \|_N$ les normes de M et de N considérés comme espaces de Banach. Posons:

$$\|w\|^2_{M+N} = \inf \{ \|u\|^2_M + \|v\|^2_N \}$$

ou l'inf est pris sur tous les couples $(u, v) \in M \times N$ tels que $u + v = w$. Alors, en utilisant un cas particulier de l'inégalité de Minkowski on voit facilement que $\| \|_{M+N}$ est une norme, sur $M + N$. Verifions maintenant que, muni de cette norme, $M + N$ est complet.

Soit $\{w_n\}$ une suite de Cauchy dans $M + N$. Par un procédé classique on peut en extraire une sous-suite que nous noterons $\{z_n\}$ telle que $\forall j \in \mathbf{N}$ on ait $\|z_j - z_{j+1}\|_{M+N} \leq 2^{-j-1}$. Il existe alors $u_1 \in M$ et $v_1 \in N$ tels que $z_1 = u_1 + v_1$. On peut alors à partir de la définition de $\| \|_{M+N}$, construire inductivement deux suite $\{u_j\} \subseteq M$ et $\{v_j\} \subseteq N$ telles que $\forall j \in \mathbf{N}$ on ait:

$$r_j + v_j = z_j \text{ et } \|z_j - z_{j+1}\|^2_{M+N} > \|u_j - u_{j+1}\|^2_M + \|v_j - v_{j+1}\|^2_N - 2^{-2j-2}.$$

On en déduit que $\forall j \in \mathbf{N}$ on a:

$$\|u_j - u_{j+1}\|^2_M < 2^{-2j-2} + 2^{-2j-2} < 2^{-2j}$$

d'où

$$\|u_j - u_{j+1}\|_M < 2^{-j}.$$

Donc si $m > n$ on a:

$$\|u_m - u_n\|_M \leq \sum_{j=1}^{m-n} \|u_{n+j} - u_{n+j-1}\|_{\mathrm{M}} < \sum_{j=1}^{m-n} 2^{-n-j+1}$$

ou encore:

$$\|u_m - u_n\|_M < 2^{-n+1}$$

et par conséquent $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy. De la même façon on voit que $\{v_n\}$ est une suite de Cauchy.

Donc il existe $u \in M$ et $v \in N$ tels que $\{u_n\} \to u$ et $\{v_n\} \to v$.

Posons $w = u + v$. Alors $\{z_n\} \to w$ dans $M + N$ et comme $\{w_n\}$ est une suite de Cauchy, si elle contient une sous-suite convergente vers w elle est elle-même convergente vers w, ce qui montre que $M + N$ est complet.

b) $M \cap N$: soit $u \in M \cap N$: Posons $||u||^2_{M \cap N} = ||u||^2_M + ||u||^2_N$. Alors $M \cap N$ muni de cette norme est un sous-espace paracomplet de **B**. La démonstration de ce fait est immédiate.

REMARQUE. Dans le cas ou $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ est un espace de Hilbert et ou M et N sont également des espaces de Hilbert, $M + N$ et $M \cap N$ munis des normes définies ci-dessus sont encore des espaces de Hilbert. En effet, pour qu'un espace de Banach soit un espace de Hilbert, il suffit que sa norme vérifie l'identité du parallélogramme. Or dans le cas de $M + N$ on a:

Si w_1, w_2 sont des éléments de $M + N$,

$$2\,||w_1||^2_{M+N} + 2\,||w_2||^2_{M+N} = 2 \inf \{ ||u_1||^2_M + ||v_1||^2_N + ||u_2||^2_M + ||v_2||^2_N \}$$

ou l'inf est pris sur toutes les paires de couples (u_1, v_1), (u_2, v_2) de $M \times N$ telles que $u_1 + v_1 = w_1$ et $u_2 + v_2 = w_2$, ou encore sur toutes les paires de couples $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, $(u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ telles que $u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = w_1 + w_2$ et $u_1 - u_2 + v_1 - v_2 = w_1 - w_2$. Or:

$$2\{ ||u_1||^2_M + ||v_1||^2_N + ||u_2||^2_M + ||v_2||^2_N \} = ||u_1 + u_2||^2_M + ||v_1 + v_2||^2_N + \\ + ||u_1 - u_2||^2_M + ||v_1 - v_2||^2_N$$

et on en déduit immédiatement que $||\ \ ||_{M+N}$ vérifie l'identité du parallélogramme. Dans le cas $M \cap N$ la vérification est immédiate.

DEFINITION 2.1.2. Soit A un opérateur linéaire non nécessairement borné de domaine $D(A)$ contenu dans un espace de Banach **B** et à valeurs dans un espace de Banach $\mathbf{B}_1$. On notera $G(A)$ le graphe de A c'est à dire le sous-espace linéaire de $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$ constitué par les couples $(u, A\,u)$ avec $u \in D(A)$. Alors on dira que A est un *opérateur paracomplet* si $G(A)$ est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$.

REMARQUE. Les sous-espaces et les opérateurs paracomplets ont été étudiés en détail dans [15] et dans [17]. Nous avons repris ici les notations et une partie des résultats de [35].

Remarquons aussi que si A est un opérateur paracomplet, $D(A)$ est un sous-espace paracomplet de **B**. En effet si $u \in D(A)$ on pose

$$||u||_{D(A)} = ||(u, A\,u)||_{G(A)}.$$

Alors :

$$\|u\|^2_B \leq \|u\|^2_B + \|A\,u\|^2_{B_1} < K\,\|(u, A\,u)\|^2_{G(A)} = K\,\|u\|^2_{D(A)}$$

ce qui établit notre assertion.

PROPOSITION 2.1.3. *Soit A, B deux opérateurs paracomplets d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *dans un espace de Banach* $\mathbf{B}_1$ *et soit C un opérateur paracomplet de* $\mathbf{B}_1$ *dans un espace de Banach* $\mathbf{B}_2$. *Alors*:

a) *$A + B$ est un opérateur paracomplet de* $\mathbf{B}$ *dans* $\mathbf{B}_1$;

b) *$C\,A$ est un opérateur paracomplet de* $\mathbf{B}$ *dans* $\mathbf{B}_2$.

Démonstration:

a) Soit $u \in D(A + B) = D(A) \cap D(B)$, (éventuellement réduit à $\{0\}$). On pose:

$$\|u, (A + B)\,u\|^2_{G(A+B)} = \|(u, A\,u)\|^2_{G(A)} + \|(u, B\,u\|^2_{G(B)}.$$

Alors, muni de cette norme, $G(A+B)$ est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$. Si $\{(u_n, (A + B)\,u_n)\}$ est une suite de Cauchy dans $G(A + B)$ on voit que $\{(u_n, A\,u_n)\}$ et $\{(u_n, B\,u_n)\}$ sont des suites de Cauchy dans $G(A)$ et $G(B)$ respectivement, donc convergentes puisque A et B sont paracomplets. On a:

$$\{(u_n, A\,u_n)\} \to (u, A\,u) \quad \text{et} \quad \{(u_n, B\,u)\} \to (v, B\,v)$$

mais comme $\{u_n\}$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbf{B}$ on doit avoir $u = v$ et on en déduit que

$$\{(u_n, (A + B)\,u_n)\} \to (u, (A + B)\,u) \qquad \text{dans } G(A + B).$$

La continuité de l'injection de $G(A + B)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$ se déduit immédiatement de la continuité des injections de $G(A)$ et $G(B)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$.

b) Soit $u \in D(C\,A) = \{u \in D(A) \mid A\,u \in D(C)\}$ (éventuellement réduit à $\{0\}$). On pose

$$\|(u, C\,A\,u)\|^2_{G(CA)} = \|(u, A\,u)\|^2_{G(A)} + \|(A\,u, C\,A\,u)\|^2_{G(C)}\,.$$

Alors muni de cette norme, $G(C\,A)$ est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_2$. Si $\{(u_n, C\,A\,u_n)\}$ est une suite de Cauchy dans $G(C\,A)$ on voit que $\{(u_n, A\,u_n)\}$ et $\{(A\,u_n, C\,A\,u_n)\}$ sont des suites de Cauchy dans $G(A)$ et $G(C)$

respectivement, donc convergentes puisque A et C sont paracomplets. On a:

$$\{(u_n, A u_n)\} \to (u, A u) \quad \text{et} \quad \{(A u_n, C A u_n)\} \to (v, C v)$$

mai comme $\{A u_n\}$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbf{B}_1$ on doit avoir $v = A u$ et on en déduit que $\{(u_n, C A u_n)\} \to (u, C A u)$ dans $G(C A)$. Ici encore, la continuité de l'injection de $G(C A)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_2$ se déduit immédiatement de la continuité des injections de $G(A)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$ et de $G(C)$ dans $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$.

REMARQUE. On peut montrer que la famille des opérateurs paracomplets est la plus petite famille d'opérateurs fermée pour la somme et le produit d'opérateurs et contenant les opérateurs fermés (c.f. [15]).

PROPOSITION 2.1.4. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Banach $\mathbf{B}$ dans un espace de Banach $\mathbf{B}_1$ et soit M un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B}$ et M_1 un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B}_2$.*

Alors:

a) $A(M \cap D(A)) = \{v \in \mathbf{B}_1 \mid \exists\, u \in D(A) \cap M \text{ avec } v = A u\}$ *est un sous-espace paracomplet de* $\mathbf{B}_1$;

b) $A^{-1}(M_1) = \{u \in \mathbf{B} \cap D(A) \mid A u \in M_1\}$ *est un sous-espace paracomplet de* $\mathbf{B}$;

c) $A|_M$ *est un opérateur paracomplet de* $\mathbf{B}$ *dans* $\mathbf{B}_1$.

Démonstration:

a) Soit $v \in A(M \cap D(A))$.

Posons:

$$||v||^2_{A(M)} = \inf\{||(u, A u)||^2_{G(A)} + ||u||^2_M\}$$

ou l'inf est pris sur tous les $u \in D(A) \cap M$ tels que $A u = v$. On vérifie alors — en procédant exactement comme pour la démonstration de la proposition 2.1.3. — que, muni de cette norme, $A(M \cap D(A))$ est un espace complet et que son injection dans $\mathbf{B}_1$ est continue.

b) Soit $u \in A^{-1}(M_1)$.

Posons:

$$||u||^2_{A^{-1}(M_1)} = ||(u, A u)||^2_{G(A)} + ||A u||^2_{M_1}.$$

Bien que dans ce cas aussi la démonstration soit répétitive, donnons la explicitement. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $A^{-1}(M_1)$. Alors $\{(u_n, A u_n)\}$ et

$\{A\, u_n\}$ sont aussi des suites de Cauchy dans $G(A)$ et M_1 respectivement. Donc: $\{(u_n, A\, u_n)\} \to (v, A\, v)$ et $\{A\, u_n\} \to w$. Comme l'injection de $G(A)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$ et l'injection de M_1 dans $\mathbf{B}_1$ sont continues, on a $w = A\, v$ et $\{u_n\} \to v$ dans $A^{-1}(M_1)$. Donc $A^{-1}(M_1)$ est complet. La continuité de l'injection de $A^{-1}(M_1)$ dans $\mathbf{B}$ découle des inégalités suivantes:

$$||u||_B^2 \leq ||u||_B^2 + ||A\, u||_{B_1}^2 + ||A\, u||_{B_1}^2 \leq K_1\, ||(u,\, A\, u)||_{G(A)}^2 + K_2\, ||A\, u||_{M_1}^2$$

d'où

$$||u||_B^2 \leq K_3\, ||u||_{A^{-1}(M_1)}^2$$

ou K_1 et K_2 sont les normes des injections de $G(A)$ dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$ et de M_1 dans $\mathbf{B}_1$ respectivement et $K_3 = \max\{K_1, K_2\}$.

c) Le graphe $G(A|_M)$ de $A|_M$ est donné par: $G(A|_M) = G(A) \cap (M \times \mathbf{B}_1)$ et par conséquent est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$.

Proposition 2.1.5. (Théorème du graphe paracomplet - Foias, cité dans [17]). *Soit A un opérateur paracomplet défini en tout point d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *et à valeurs dans un espace de Banach* $\mathbf{B}_1$. *Alors A est borné (donc fermé).*

Démonstration. L'application J de $G(A)$ sur $\mathbf{B}$ définie par: $J\, :\, (u, A\, u) \to u$ est continue et bijective, donc bicontinue d'après le théorème de Banach. En d'autres mots, il existe une constante K telle que

$$\forall\, u \in \mathbf{B}\; ||u||_B^2 + ||A\, u||_{B_1}^2 \leq K_1\, ||(u,\, A\, u)||_{G(A)}^2 \leq K_1 K\, ||u||_B^2$$

d'où

$$\forall\, u \in \mathbf{B}\; ||A\, u||_{B_1}^2 \leq K_1 K\, ||u||_B^2$$

et par conséquent A est borné. On voit aussi que dans ce cas là $G(A)$ est fermé dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}_1$.

Remarque. Lorsque nous parlerons de sous-espaces paracomplets d'un espace de Hilbert nous entendrons par là que muni de sa norme propre le sous-espace est de Hilbert (et pas seulement un Banach). De même lorsque nous parlerons d'opérateurs paracomplets d'un espace de Hilbert dans un autre nous supposerons toujours que le graphe de cet opérateur, muni de sa norme propre, est de Hilbert.

§ 2. Cas des espaces de Banach.

PROPOSITION 2.2.1. *Soit* B_1, B_2 *des sous-espaces paracomplets d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *tels que* B_2 *et* $B_1 + B_2$ *soient fermés. Alors*:

a) $\overline{B}_1 = B_1 + \overline{B_1 \cap B_2}$,

b) $\overline{B_1 \cap B_2} = \overline{B}_1 \cap B_2$.

Démonstration. Posons $B_0 = B_1 + \overline{B_1 \cap B_2}$. Alors B_0 est un sous-espace paracomplet de B et on a:

$$B_0 + B_2 \subseteq B_1 + B_2 \subseteq B_0 + B_2$$

puisque $\overline{B_1 \cap B_2} \subseteq B_2$.

Donc $B_0 + B_2$ est fermé et en outre:

$$B_0 \cap B_2 \subseteq \overline{B_1 \cap B_2} \subseteq B_0 \cap B_2 .$$

Donc $B_0 \cap B_2$ est fermé et en utilisant le lemme de Neubauer on trouve que B_0 est fermé.

Or, $B_1 \subseteq B_0 \subseteq \overline{B}_1$ et par conséquent $B_0 = \overline{B}_1 = B_1 + \overline{B_1 \cap B_2}$.

Finalement $\overline{B}_1 \cap B_2 = B_0 \cap B_2 = \overline{B_1 \cap B_2}$ et la proposition est démontrée.

PROPOSITION 2.2.2. *Soit* A *un opérateur paracomplet d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *dans un espace de Banach* $\mathbf{B}'$, *tel que son image* $R(A)$ *soit fermée. Alors*: $\overline{G(A)} = G(A) + \overline{N(A)} \times \{0\}$ *et* A *est fermable si et seulement si*

$$\overline{N(A)} \cap D(A) = N(A).$$

Démonstration. On a: $\mathbf{B} \times \{0\} + G(A) = \mathbf{B} \times \{0\} + \{0\} \times R(A)$ fermé dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}'$. Donc, en utilisant la proposition précédente $\overline{G(A)} = G(A) +$ $+ \overline{N(A)} \cap \{0\}$. Si A est fermable et $u \in \overline{N(A)} \cap D(A)$, alors il existe une suite $\{u_n\} \subseteq N(A)$ telle que $u_n \to u$. Donc $u - u_n \to 0$ et $A(u - u_n) = A u \to A u$ et par conséquent $A u = 0 \Rightarrow u \in N(A)$.

Inversement, soit $(0, v) \in \overline{G(A)} = G(A) + \overline{N(A)} \times \{0\}$. Alors $\exists\, u \in D(A)$ et $\exists\, w \in \overline{N(A)}$ tels que $0 = u + w$ et $v = A u$.

Alors $u = -w \in \overline{N(A)} \cap D(A) = N(A) \Rightarrow v = A u = 0$.

Donc $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$ est le graphe d'un opérateur, c'est à dire que A est fermable.

PROPOSITION 2.2.3. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *dans un espace de Banach* $\mathbf{B}'$, *tel que* $N(A)$ *soit fermé dans* $\mathbf{B}$ *et* $R(A)$ *soit fermé dans* $\mathbf{B}'$. *Alors A est un opérateur fermé.*

Démonstration. De nouveau on écrit:

$$\mathbf{B} \times \{0\} + G(A) = \mathbf{B} \times \{0\} + \{0\} \times R(A)$$

fermé dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}'$ et

$$(\mathbf{B} \times \{0\}) \cap G(A) = N(A) \times \{0\}$$

fermé dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}'$.

En utilisant le lemme de Neubauer on en déduit que $G(A)$ est fermé dans $\mathbf{B} \times \mathbf{B}'$, c'est à dire que A est fermé.

PROPOSITION 2.2.4. *Soit M_j une famille dénombrable de sous espaces paracomplets d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$ *telle que* $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = \mathbf{B}$. *Alors il existe un* j_0 *tel que* $M_{j_0} = \mathbf{B}$.

Démonstration. On utilise les catégories de Baire. Soit i_j l'injection continue de M_j dans $\mathbf{B}$. Alors $\bigcup_{j=1}^{\infty} i_j(M_j) = \mathbf{B}$. Donc $\exists\, j_0$ tel que $i_{j_0}(M_{j_0})$ soit de deuxième catégorie. Or d'après un théorème de Banach ([1] Chap. III, § 3, Théorème 3) on a alors $i_{j_0}(M_{j_0}) = \mathbf{B}$ et d'après le théorème des homomorphismes de Banach, i_{j_0} est ouvert; d'où M_{j_0} est fermé dans $\mathbf{B}$; d'où $M_{j_0} = \mathbf{B}$.

COROLLAIRE 2.2.1. *Soit A un opérateur d'un espace de Banach dans lui même tel que* $\bigcup_{j=1}^{\infty} N(A^j) = \mathbf{B}$. *Alors* $\exists\, j_0$ *tel que* $\mathbf{B} = N(A^{j_0})$.

§ 3. Cas des espaces de Hilbert.

Dans le cadre des espaces de Hilbert il est possible d'obtenir des résultats plus fins.

PROPOSITION 2.3.1. *Soit H_1 et H_2 deux sous-espaces paracomplets d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *tels que* $H_1 + H_2$ *soit fermé dans* $\mathbf{H}$ *et que* $H_1 \cap H_2$ *soit fermé dans* H_1 *muni de sa topologie propre. Alors*:

a) H_2 *est fermé dans* $\mathbf{H}$;

b) *Il existe un sous espace H_0 fermé dans* $\mathbf{H}$ *tel que* $H_0 \subseteq H_1$ *et que* $H_0 + H_2 = H_1 + H_2$;

c) $(H_1 \cap H_2)^+ = H_1^+ + H_2^+$.

Démonstration. Soit H_0 le complément orthogonal de $H_1 \cap H_2$ dans H_1. Alors:

$$H_1 = H_0 + H_1 \cap H_2 \quad \text{et} \quad H_0 \cap H_2 \subseteq H_0 \cap H_2 \cap H_1 = \{0\},$$

et comme $H_0 \subseteq H_1$, $H_0 + H_2 \subseteq H_1 + H_2 \subseteq H_0 + H_2$, on voit que $H_0 + H_2$ est fermé. En utilisant le fait que $H_0 \cap H_2 = \{0\}$ et le lemme de Neubauer on en déduit que H_2 est fermé dans $\mathbf{H}$, que H_0 est fermé dans $\mathbf{H}$ et que (en utilisant la proposition 2.2.1) $\overline{H}_1 \cap H_2 = \overline{H_1 \cap H_2}$.

Or $\overline{H}_1 + H_2$ fermé entraîne (Corollaire 1.3.1) que:

$$\overline{H}_1^+ + H_2^+ = H_1^+ + H_2^+ = (\overline{H}_1 \cap H_2)^+ = (H_1 \cap H_2)^+.$$

PROPOSITION 2.3.2. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans un espace de Hilbert* $\mathbf{K}$ *tel que $R(A)$ soit fermé et $D(A)$ dense dans* $\mathbf{H}$. *Alors A^* existe et $R(A^*) = N(A)^+$ est fermé dans* $\mathbf{H}$.

Démonstration. L'existence de A^* est un résultat bien connu (avec $G(A^*) = = G(-A)^+$ ou le complément orthogonal est pris dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}$). En outre: (cf. Proposition 2.2.2) $\mathbf{H} \times \{0\} + G(-A) = \mathbf{H} \times \{0\} + \{0\} \times R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbf{K}$.

Alors la proposition précédente donne:

$$(N(A) \times \{0\})^+ = [(\mathbf{H} \times \{0\}) \cap G(-A)]^+ = \{0\} \times \mathbf{K} + G(A^*) =$$

$$= \{0\} \times \mathbf{K} + R(A^*) \times \{0\} \Rightarrow R(A^*) = N(A)^+.$$

PROPOSITION 2.3.3. *Soit M et N deux sous espaces paracomplets d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *tels que $M + N$ soit fermé dans* $\mathbf{H}$. *Alors*:

a) $\overline{M} = M + (\overline{M \cap N}) \cap N = M + \overline{M \cap N}$;

b) $\overline{N} = N + (\overline{M \cap N}) \cap M = N + \overline{M \cap N}$;

c) $\overline{M} \cap N = (\overline{M \cap N}) \cap N$; $M \cap \overline{N} = (\overline{M \cap N}) \cap M$;

d) $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{M} \cap N + M \cap \overline{N} = \overline{M \cap N}$.

Démonstration. Posons $M_0 = M + (\overline{M \cap N}) \cap N$. Alors $M_0 + N = M + N$ est fermé, et $M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M}$. En outre:

$$M_0 \cap N \subseteq (\overline{M \cap N}) \cap N \subseteq M_0 \cap N.$$

Donc $M_0 \cap N = (\overline{M \cap N}) \cap N$ est fermé dans N muni de sa topologie propre.

En utilisant la proposition 2.3.1, on voit que M_0 est fermé; donc que $\overline{M} = M_0$ et a) s'en déduit immédiatement; b) se démontre symétriquement; c) se déduit de a) et de b) puisque $M_0 \cap N = (\overline{M \cap N}) \cap N$.

Finalement, en utilisant c) on trouve: $\overline{M} \cap N \subseteq \overline{M \cap N}$ et de même $M \cap \overline{N} \subseteq \overline{M \cap N}$. On trouve aussi:

$$\overline{M} \cap \overline{N} \subseteq M \cap \overline{N} + (\overline{M \cap N}) \cap N \subseteq M \cap \overline{N} + \overline{M} \cap N \subseteq \overline{M \cap N} \subseteq \overline{M} \cap \overline{N}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 2.3.1. *Soit M et N deux sous espaces paracomplets d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ tels que $M + N$ soit fermé dans $\mathbf{H}$. Alors*:

$$M^\perp + N^\perp = (M \cap N)^\perp.$$

Démonstration. D'après le corollaire 1.3.1 on a:

$$M^\perp + N^\perp = \overline{M}^\perp + \overline{N}^\perp = (\overline{M} \cap \overline{N})^\perp = (\overline{M \cap N})^\perp = (M \cap N)^\perp$$

en utilisant d) de la Proposition 2.3.3 pour l'avant dernière égalité.

COROLLAIRE 2.3.2. *Soit M et N deux sous espaces paracomplets d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ tels que $M + N$ soit fermé dans $\mathbf{H}$ et M, N soient denses dans $\mathbf{H}$. Alors $M \cap N$ est dense dans $\mathbf{H}$.*

Démonstration:

$$(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp = \{0\} + \{0\} = \{0\}$$

d'après le corollaire 2.3.2.

PROPOSITION 2.3.4. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même et soit $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, avec la convention $A^0 = I$. Alors*:

$$\left.\begin{array}{r} D(A^{m-1}) + R(A^n) \text{ fermé dans } \mathbf{H} \\ D(A^m) + R(A^n) \text{ fermé dans } \mathbf{H} \end{array}\right\} \Rightarrow D(A^{m-1}) + R(A^{n+1}) \text{ fermé dans } \mathbf{H}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $R(A^n)$ est un sous espace paracomplet de $\mathbf{H}$.

En effet, soit $v \in R(A^n)$. Posons:

$$||v||^2_{R(A^n)} = \inf \sum_{j=1}^{j=n} ||(A^{j-1} u, A^j u)||^2_{G(A)}$$

où l'inf est pris sur tous les $u \in D(A^n)$ tels que $v = A^n u$. Alors par un raisonnement en tout point analogue à celui employé pour la demonstration de a) de la proposition 2.1.2, on constate que muni de cette norme $R(A^n)$ est complet. En outre – voir la remarque suivant la Proposition 2.1.2 – on constate que $R(A^n)$ est ainsi un espace de Hilbert.

Soit maintenant

$$M_{m,n} = D(A^{m-1}) \cap R(A^n) + R(A^{n+1}) = R(A^n) \cap \{D(A^{m-1}) + R(A^{n+1})\}.$$

Montrons que $M_{m,n}$ est fermé dans $R(A^n)$ muni de sa topologie propre. En effet soit $\{v_k\}$ une suite d'éléments de $M_{m,n}$ convergente vers v dans $R(A^n)$. Alors il existe une suite $\{u_k\} \subseteq D(A^n)$ telle que $v_k = A^n u_k$ et telle que $\forall\, j$, $0 \leq j \leq n$, on ait:

$$\{A^j u_k\} \to A^j u \text{ dans } \mathbf{H} \text{ avec } A^n u = v.$$

Or

$$A^n u_k \in M_{m,n} = D(A^{m-1}) \cap R(A^n) + R(A^{n+1}) \Rightarrow A^{n-1} u_k \in D(A^m) + R(A^n).$$

Comme ce dernier espace est fermé dans $\mathbf{H}$ par hypothèse, on en déduit que $A^{n-1} u$ est dans cet espace, d'où $v = A(A^{n-1} u) \in D(A^{m-1}) + R(A^{n+1})$ ce qui montre bien que $v \in M_{m,n}$ et par conséquent que $M_{m,n}$ est fermé dans $R(A^n)$. En outre $\{D(A^{m-1}) + R(A^{n+1})\} + R(A^n) = D(A^{m-1}) + R(A^n)$ est fermé dans $\mathbf{H}$ par hypothèse. Nous pouvons donc appliquer a) de la Proposition 2.3.1 et en déduire que $D(A^{m-1}) + R(A^{n+1})$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

COROLLAIRE 2.3.3. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même tel que $\forall\, m \in \mathbf{N}$ tel que $1 \leq m \leq d$, où $d \in \mathbf{N}$ est donné, on ait: $D(A^m) + R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$. Alors:*

(2.3.1) $\quad \forall\, m, n \in \mathbf{N} \qquad m + n \leq d + 1 \Rightarrow D(A^m) + R(A^n)$

est fermé dans $\mathbf{H}$.

Démonstration. Pour $m = 0$ ou $n = 0$ (2.3.1) est évident. On peut donc supposer que $m \geq 1$ et $n \geq 1$. On procède alors par induction sur n. Pour $n = 1$, (2.3.1) est vrai par hypothèse, pour tout m tel que $m \leq d$. Supposons (2.3.1) démontré pour $n = k$ et pour tout m tel que $m \leq d - k + 1$. Alors la proposition 2.3.4 entraine que (2.3.1) est vrai pour $n = k + 1$ et pour tout m tel que $m \leq d - k$ et le corollaire est démontré.

PROPOSITION 2.3.5. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même, et soit $m, n \in \mathbf{N}$ tels que:*

1) *$R(A^{m+n})$ est fermé dans $\mathbf{H}$;*

2) *$R(A^n) + D(A^m)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.*

Alors $R(A^n) + N(A^m)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

Démonstration. Pour $m = 0$, la proposition est évidente. Supposons donc que $m \geq 1$ et montrons qu'alors $D(A^m)$ est un sous espace paracomplet de $\mathbf{H}$. En effet soit $u \in D(A^m)$. Posons:

$$||u||^2_{D(A^m)} = \sum_{j=1}^{j=m} ||(A^{j-1}u, A^j u)||^2_{G(A)} .$$

Exactement comme dans la démonstration de la Proposition 2.3.4 on voit que muni de cette norme $D(A^m)$ est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{H}$. Posons:

$$N_{m,n} = N(A^m) + D(A^m) \cap R(A^n) = D(A^m) \cap \{N(A^m) + R(A^n)\}.$$

Nous allons voir que $N_{m,n}$ est fermé dans $D(A^m)$. En effet, soit $\{u_k\}$ une suite d'éléments de $N_{m,n}$ convergente dans $D(A^m)$ muni de sa topologie propre, vers u. Alors $\{A^m u_k\} \to A^m u$ dans $\mathbf{H}$ et comme $A^m u_k \in R(A^{m+n})$ qui est fermé par hypothèse dans $\mathbf{H}$, on a $A^m u \in R(A^{m+n})$, ce qui entraîne que $u \in N_{m,n}$. Donc $M_{m,n}$ est fermé dans $D(A^m)$ (muni de sa topologie propre). Or

$$\{R(A^n) + N(A^m)\} + D(A^m) = R(A^n) + D(A^m)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$. On peut donc utiliser le a) de la Proposition 2.3.1 et on en déduit que $R(A^n) + N(A^m)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

CHAPITRE III

LES OPERATEURS QUASI-FREDHOLM

§ 1. Définition et exemples.

NOTATIONS. Dans ce chapitre A dénotera un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même et $\forall\, m \in \mathbf{N}$ on posera:

Si $m \geq 1$: $D(A^m) = \{u \in D(A) \mid A^j u \in D(A);\ j = 1, 2, \ldots, m-1\}$;

$$R(A^m) = \{v \in \mathbf{H} \mid \exists\, u \in D(A^m),\ A^m u = v\};$$

$$N(A^m) = \{u \in D(A^m) \mid A^m u = 0\}.$$

Si $m = 0$: $A^0 = I$; $D(A^0) = \mathbf{H}$; $N(A^0) = \{0\}$. Sauf mention explicite $D(A)$ n'est pas supposé dense dans $\mathbf{H}$.

DEFINITION 3.1.1. Soit:

$$\Delta(A) = \{n \in \mathbf{N} \mid \forall\, m \in \mathbf{N},\ m \geq n \Rightarrow R(A^m) \cap N(A) \supseteq R(A^n) \cap N(A)\}.$$

Alors on appelera *degré d'itération stable de A* la quantité dis $(A) = \inf \Delta(A)$ (avec dis $(A) = \infty$ si $\Delta(A) = \emptyset$). Notons que si $m, n \in \Delta(A)$ on a en fait:

$$R(A^m) \cap N(A) = R(A^n) \cap N(A).$$

REMARQUES. Dans [38] A. Taylor a introduit la notion d'« ascent » d'un opérateur A (noté $\alpha(A)$) de la manière suivante: si

$$\nabla(A) = \{n \in \mathbf{N} \mid \forall\, m \in \mathbf{N},\ m \geq n \Rightarrow N(A^m) = N(A^n)\}$$

alors $\alpha(A) = \inf \nabla(A)$.

On voit facilement que si $\alpha(A) < \infty$ alors dis $(A) = \alpha(A)$ et que si $m \geq \alpha(A)$ alors $R(A^m) \cap N(A) = \{0\}$.

Ajoutons que dans [5] H. Bart M. A. Kaashoek et D. C. Lay ont défini la notion de « reduced ascent » (noté $r\alpha(A(z))$) d'une function $A(z)$ holomorphe dans un ouvert $U \subseteq \mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathbf{H})$.

Cette notion est très proche de dis (A).

Notons enfin que dans [4] H. Bart et W. Kaballo ont introduit la notion de *gradient* d'un opérateur qui coïncide avec celle de degré d'itération stable.

PROPOSITION 3.1.1. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes*:

a) $d \in \Delta(A)$;

b) $\forall\ m \in \mathbf{N},\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ N(A^m) \subseteq N(A^d) + R(A^n)$;

c) $\forall\ m \in \mathbf{N},\ \forall\ n \in \mathbf{N},\ R(A^m) \cap N(A^n) \supseteq R(A^d) \cap N(A^n)$.

Démonstration. a)$\Rightarrow$b): Si $m \leq d$ et quel que soit n, b) est toujours vrai. Supposons le résultat établi pour $m \geq d$ et n quelconque et procédons par induction.

Soit $u \in N(A^{m+1})$. Alors $A^m u \in R(A^m) \cap N(A) = R(A^{m+n}) \cap N(A)$, puisque $d \in \Delta(A)$, $m \geq d \Rightarrow m + n \in \Delta(A)$.

Donc $\exists\ v \in N(A^{m+n+1})$ tel que $A^m\ u = A^{m+n}\, v$ et par conséquent $u - A^n v \in$ $\in N(A^m) \subseteq N(A^d) + R(A^n)$ par hypothèse d'induction.

Ainsi $N(A^{m+1}) \subseteq N(A^d) + R(A^n)$ et a)$\Rightarrow$b).

b)$\Rightarrow$c): Ici aussi, quand $m \leq d$, quelque soit n, c) est toujours vrai. Si $m > d$, soit $u \in R(A^d) \cap N(A^n)$. Alors $\exists\ v \in N(A^{n+d})$ tel que $u = A^d v$. Or b)$\Rightarrow N(A^{n+d}) \subseteq N(A^d) + R(A^{m-d})$ d'où $u \in R(A^m)$ c'est-à-dire que $R(A^d) \cap$ $\cap\ N(A) \subseteq R(A^m)$. Donc b)$\Rightarrow$c).

c)$\Rightarrow$a): Evident en prenant $n = 1$.

PROPOSITION 3.1.2. *Les quatre propositions suivantes sont équivalentes*:

a) $\operatorname{dis}(A) = 0$;

b) $\forall\ m \in \mathbf{N},\ N(A) \subseteq R(A^m)$;

c) $\forall\ n \in \mathbf{N},\ N(A^n) \subseteq R(A)$;

d) $\forall\ m \in \mathbf{N},\ \forall\ m \in \mathbf{N},\ N(A^n) \subseteq R(A^m)$.

Démonstration.

a)$\Rightarrow$b): $\operatorname{dis}(A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = \mathbf{N} \Rightarrow \forall\ m \in \mathbf{N},\ R(A^m) \cap N(A) = R(A^0) \cap$ $\cap\ N(A) = N(A) \Rightarrow \forall\ m \in \mathbf{N},\ N(A) \subseteq R(A^m)$.

b)$\Rightarrow$c): Par induction sur n. Pour $n = 0$, c) est évident et pour $n = 1$ c'est une conséquence immédiate de b). Supposons donc c) démontré pour $n = k$, et soit $u \in N(A^{k+1})$. Alors $A^k u \in N(A) \subseteq R(A^{k+1})$ et par conséquent il existe un $v \in N(A^{k+2})$ tel que $A^k u = A^{k+1} v$. Donc $u = A v + w$ avec $w \in N(A^k) \subseteq$ $\subseteq R(A)$. Donc $u \in R(A)$ et c) est démontré.

c)$\Rightarrow$d): Par induction sur m. Pour $m = 0$, d) est évident pour tout $n \in \mathbf{N}$. De même, pour $m = 1$, d) est vérifié pour tout $n \in \mathbf{N}$ [d) se réduit alors à c)]. Supposons donc d) démontré pour $m = k$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ et soit $u \in N(A^n)$ avec $n \in \mathbf{N}$ quelconque. Alors c)$\Rightarrow$ $\exists\ v \in N(A^{n+1})$ tel que $u = A\,v$ et comme par hypothèse d'induction $N(A^{n+1}) \subseteq R(A^k)$ on voit que $v \in R(A^k)$ et par conséquent que $u \in R(A^{k+1})$, ce qui établit d).

d)$\Rightarrow$a): En prenant $n = 1$ dans d) on voit que $\forall\ m \in \mathbf{N}$, $R(A^m) \supseteq N(A)$, d'où $\forall\ m \in \mathbf{N}$, $R(A^m) \cap N(A) = N(A)$ ce qui entraine que $\Delta(A) = \mathbf{N}$ et donc que dis $(A) = 0$.

Definition 3.1.2. Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même. On dira que A est *quasi-Fredholm de degré* $d\,(d \in \mathbf{N})$, ce qui sera noté $A \in q\,\Phi(d)$, si:

(i) dis $(A) = d$;

(ii) $R(A^d) \cap N(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$;

(iii) $R(A) + N(A^d)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

On dira que A est *quasi-Fredholm* ($A \in q\,\Phi$) s'il existe un $d \in \mathbf{N}$ tel que $A \in q\,\Phi(d)$.

Remarques. On a: $N(A) \cap R(A)$ et $N(A) + R(A)$ fermés dans $\mathbf{H} \Rightarrow N(A)$ et $R(A)$ fermés dans $\mathbf{H} \Leftrightarrow A$ est fermé et $R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$ (en utilisant successivement la proposition 2.1.1 et la proposition 2.2.3.). Donc, d'après la définition précédente on peut écrire:

(3.1.1) $\qquad A \in q\,\Phi(0) \Leftrightarrow \mathrm{dis}\,(A) = 0, \quad A$ est fermé, $R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$;

(3.1.2) $\qquad A \in q\,\Phi(1) \Leftrightarrow \mathrm{dis}\,(A) = 1, \quad A$ est fermé, $R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

Finalement, en utilisant la proposition 3.1.2 on trouve aussi:

(3.1.3) $\qquad A \in q\,\Phi(0) \Leftrightarrow \forall\ n \in \mathbf{N},\ N(A^n) \subseteq R(A)$,

A est fermé, $R(A)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

Exemples d'opérateurs quasi-Fredholm:

1) Soit P une projection (pas nécessairement orthogonale) de $\mathbf{H}$ sur un sous espace fermé M. Alors $\operatorname{dis}(P) \leq 1$ ($= 0$ seulement si $P \equiv I$) et comme $N(P)$, $R(P) = M$ sont fermés P est quasi-Fredholm.

2) Soit A un opérateur nilpotent de degré d. Alors $\operatorname{dis}(A) = d$, $R(A^d) \cap \cap N(A) = \{0\}$; $R(A) + N(A^d) = \mathbf{H}$. Donc $A \in q\Phi(d)$.

3) Soit A un opérateur normal. Alors $R(A^m) \cap N(A) = \{0\}$ si $m \geq 1$. Donc $\operatorname{dis}(A) \leq 1$ et $A \in q\Phi$ si et seulement si $R(A)$ est fermé.

4) Soit A un opérateur semi-Fredholm, c'est-à-dire tel que $R(A)$ soit fermé et tel que soit $\dim N(A) < \infty$, soit $\operatorname{codim} R(A) < \infty$.

En utilisant les lemmes 2.2 et 3.5 de [26] on obtient l'égalité:

$$\forall\, m \in \mathbf{N},\ \dim\{N(A)/[N(A) \cap R(A^m)]\} = \tag{3.1.4}$$
$$= \dim\{[R(A) + N(A^m)]/R(A)\}$$

d'où on peut déduire que si A est semi-Fredholm la codimension de $R(A^m) \cap \cap N(A)$ dans $N(A)$ est bornée indépendamment de m. On en déduit que $d = \operatorname{dis}(A) < \infty$ puisque les $R(A^m) \cap N(A)$ constituent une suite décroissante en m dont les dimensions ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. En outre $\dim\{N(A)/[R(A^d) \cap N(A)]\} < \infty$ entraîne $R(A^d) \cap N(A)$ fermé dans $\mathbf{H}$. De même $\dim\{[R(A) + N(A^d)]/R(A)\} < \infty \Rightarrow R(A) + N(A^d)$ fermé dans $\mathbf{H}$ puisque $R(A)$ est fermé. Donc les opérateurs semi-Fredholm sont quasi-Fredholm.

5) Soit A un opérateur de Kaashoek (cf. [26]) c'est-à-dire un opérateur A tel que $R(A)$ soit fermé et tel qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ avec

$$\dim\left[N(A)/\left\{N(A) \cap \left[\bigcap_{j=0}^{\infty} R(A^j)\right]\right\}\right] \leq k.$$

Alors, en utilisant (3.1.4) et en procédant comme ci-dessus on voit que $A \in q\Phi$.

6) Soit A un opérateur de Taylor (cf. [38]) c'est-à-dire tel qu'il existe $d \in \mathbf{N}$ avec:

$$\forall\, m \geq d,\ N(A^m) = N(A^d);\quad R(A^m) = R(A^d)$$

fermé dans $\mathbf{H}$.

Taylor a démontré que A vérifie alors la condition:

$$R(A^d) \oplus N(A^d) = \mathbf{H}.$$

Donc $\operatorname{dis}(A) = \alpha(A) = d$ et

$$R(A^d) \cap N(A) = \{0\}; \quad R(A) + N(A^d) = \mathbf{H}$$

d'où $A \in q\Phi(d)$.

7) Soit A un opérateur de Lay (cf. [34]) c'est-à-dire tel que:

$\forall\, i,\ k \in \mathbf{N}:\ D(A^i) + R(A^k) = \mathbf{H},\ \alpha(A) = d$ et aussi $\exists\, q \in \mathbf{N}$ tel que $\forall\, m \geq q,\ R(A^m) = R(A^q)$.

A partir des Lemmes 2.2 et 3.2 de [26] on obtient immédiatement:

$$\forall\, i,\ k \in \mathbf{N} \quad \dim\{R(A^i)/R(A^{i+k})\} =$$

$$= \dim\{[R(A^k) + D(A^i)]\ /\ [R(A^k) + N(A^i)]\}.$$

Alors $\operatorname{dis}(A) = \alpha(A) < \infty$ et $R(A) + N(A^q) = R(A) + N(A^d) = \mathbf{H}$ est fermé, tandis que $R(A^d) \cap N(A) = \{0\}$. Donc $A \in q\Phi(d)$.

8) Soit A un opérateur de Gokhberg (cf. [19]) c'est-à-dire tel que A soit borné, $\operatorname{dis}(A) = k < \infty$, $\dim\{R(A^k) \cap N(A)\} = m < \infty$ et $R(A^i)$ soit fermé dans $\mathbf{H}$ pour $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Comme $A^k: R(A) + N(A^k) \to R(A^{k+1})$ est un opérateur à image fermée, on en déduit que $R(A) + N(A^k)$ est fermé dans $\mathbf{H}$, ce qui est également vrai de $R(A^k) \cap N(A)$, sous-espace de $\mathbf{H}$ de dimension finie. Donc $A \in q\Phi$.

9) Soit A un opérateur de Gokhberg-Markus (cf. [20]) c'est-à-dire tel que $\operatorname{dis}(A) = d < \infty$, $\dim\{R(A^d) \cap N(A)\} < \infty$, A borné avec $R(A^d)$, $R(A^{d+1})$ fermés dans $\mathbf{H}$. Alors comme dans le cas précédent on constate que $A \in g\Phi$.

10) Soit A un opérateur de Goldman-Krashkowsky (cf. [22]) c'est-à-dire tel que $\forall\, m \in \mathbf{N}$, $N(A^m) \subseteq R(A)$ fermé. Alors $\operatorname{dis}(A) = 0$ et par conséquent $A \in q\Phi(0)$.

11) Soit A un opérateur de Saphar (cf. [36]) c'est-à-dire, en utilisant les termes de Saphar, tel que A soit parfait et régulier. On trouve que A parfait $\Rightarrow \operatorname{dis}(A) = 0$ et A régulier $\Rightarrow R(A)$ est fermé. Donc $A \in q\Phi(0)$.

12) Soit A un opérateur de Kato (cf. [29]) c'est-à-dire un opérateur tel que $\nu(A; I) = \infty$ (notations de Kato) et que $R(A)$ soit fermé. Alors $\nu(A; I) = \infty \Leftrightarrow \operatorname{dis}(A) = 0$ et par conséquent $A \in q\Phi(0)$.

Ces exemples montrent que la classe des opérateurs quasi-Fredholm contient de nombreux opérateurs étudiés dans la littérature. Dans le paragraphe suivant nous allons donner deux caractérisations des opérateurs quasi-Fredholm.

§ 2. Deux caractérisations des opérateurs quasi-Fredholm.

THEOREME 3.2.1. *Soit A un opérateur quasi-Fredholm de degré d. Alors il existe deux sous-espace fermés M et N de $\mathbf{H}$ tels que:*

a) $M + N = \mathbf{H}$; $M \cap N = \{0\}$;

b) $A(D(A) \cap M) \subseteq M$; $N \subseteq N(A^d) \subseteq D(A)$ (donc $A(N) \subseteq N$ *et* $R(A^d) \subseteq \subseteq M$);

c) *Si* $A_0 = A|_M$, $A_0 \in q\Phi(0)$ (donc A_0 *est fermé et* $R(A_0)$ *est fermé*).

Démonstration. Si $d = 0$, on prend $M = \mathbf{H}$, $N = \{0\}$. Supposons donc que $d > 0$. Commençons par construire N et posons:

$$N_0 = \{0\}$$

$$N_{j+1} = A^{-1}(N_j) \cap [R(A^d) \cap N(A)]^{\perp},\ j \in \mathbf{N}.$$

On a évidemment $A(N_{j+1}) \subseteq N_j$. Montrons par induction que $\forall\, j \in \mathbf{N}$ on a:

$$N_j \subseteq N_{j+1}.$$

Pour $j = 0$, c'est évident. Supposons que c'est vrai pour $j = m$ et soit $u \in N_{m+1}$. Alors $Au \in N_m \subseteq N_{m+1}$. Donc $u \in A^{-1}(N_{m+1})$ et comme $u \in N_{m+1} \Rightarrow \Rightarrow u \perp [R(A^d) \cap N(A)]$ on voit que $u \in N_{m+2}$. On a donc:

(3.2.1) $$\forall\, j \in \mathbf{N},\quad A(N_{j+1}) \subseteq N_j \subseteq N_{j+1} \subseteq N(A^{j+1}).$$

Nous allons démontrer maintenant que:

(3.2.2) $$\forall\, j \in \mathbf{N},\quad N(A^j) = N_j \oplus R(A^d) \cap N(A^j).$$

Montrons d'abord, par induction, que:

(3.2.3) $$\forall\, j \in \mathbf{N},\quad N(A^j) \subseteq N_j + R(A^d) \cap N(A^j).$$

Pour $j = 0$ ou $j = 1$, c'est évident. Supposons (3.2.3) démontré pour $j = m \geq 1$, et soit $u \in N(A^{m+1})$. Alors:

$$A\,u \in N(A^m) \cap R(A) \subseteq N(A^m)$$

et par hypothèse d'induction on a:

$$\exists\ v_1 \in N_m, \qquad \exists\ v_2 \in R(A^d) \cap N(A^m)$$

tels que $A\,u = v_1 + v_2$.

Or $v_1 = A\,u - v_2 \in R(A)$. Donc $\exists\ u_1$ tel que $A\,u_1 = v_1$ et on peut choisir $u_1 \perp [R(A^d) \cap N(A)]$ (donc $u_1 \in N_{m+1}$). De même:

$$v_2 \in R(A^d) \cap N(A^m) \Rightarrow v_2 \in R(A^{d+1}) \cap N(A^m)$$

(proposition 3.1.1, c)).

Donc $\exists\ u_2 \in R(A^d) \cap N(A^{m+1})$ tel que $v_2 = A\,u_2$.

Alors $A\,u = A\,u_1 + A\,u_2$, d'où $u = u_1 + u_2 + u_3$, avec

$$u_3 \in N(A) \subseteq N_1 + R(A^d) \cap N(A) \subseteq N_{m+1} + R(A^d) \cap N(A^{m+1}).$$

Donc $u \in N_{m+1} + R(A^d) \cap N(A^{m+1})$ et (3.2.3) est démontré.

Comme il est évident que $\forall\ j \in \mathbf{N},\ N_j + R(A^d) \cap N(A^j) \subseteq N(A^j)$ on voit que

(3.2.4) $$\forall\ j \in \mathbf{N}, \quad N(A^j) = N_j + R(A^d) \cap N(A^j).$$

Montrons maintenant que:

(3.2.5) $$\forall\ j \in \mathbf{N}, \quad \forall\ k \in \mathbf{N}, \quad N_j \cap R(A^d) \cap N(A^k) = \{0\}.$$

C'est évidemment vrai si $j = 0$, quel que soit k. Si $j \geq 1$ (3.2.5) est encore évident si $k = 0$ ou si $k = 1$. Procédons par induction sur k et supposons (3.2.5) démontré pour $k = m$ et quel que soit $j \in \mathbf{N}$.

Soit $u \in N_{j+1} \cap R(A^d) \cap N(A^{m+1})$; alors $A\,u \in N_j \cap R(A^{d+1}) \cap N(A^m) \subseteq N_j \cap R(A^d) \cap N(A^m)$ et en utilisant l'hypothèse d'induction $A\,u = 0$ ou encore $u \in N(A)$.

Donc $u \in N_j \cap R(A^d) \cap N(A) = \{0\}$ et par conséquent $u = 0$.

On a donc montré que (3.2.5) est vrai pour $k = m + 1$ et pour tout $j \geq 1$, et comme (3.2.5) est toujours vrai pour $j = 0$, il en résulte que (3.2.5) est démontré. En prenant $k = j$ dans (3.2.5) on trouve:

(3.2.6) $$\forall\ j \in \mathbf{N}, \quad N_j \cap R(A^d) \cap N(A^j) = N_j \cap R(A^d) = \{0\}.$$

Dès lors (3.2.2) est démontré (en utilisant (3.2.4) et (3.2.6)).

Montrons maintenant que

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad j \geq d \Rightarrow N_j = N_d. \tag{3.2.7}$$

En effet: $j \geq d$ et (3.2.1) $\Rightarrow N_d \subseteq N_j$.

Inversement, b) de la proposition 3.1.1 et (3.2.1) entrainent que

$$N_j \subseteq N(A^j) \subseteq N(A^d) + R(A^d) \cap N(A^j)$$

et par conséquent, en utilisant (3.2.4) avec $j = d$, on trouve:

$$N_j \subseteq N_d + R(A^d) \cap N(A^j) \cap N_j = N_d$$

(en utilisant (3.2.6) et le fait que $j \geq d$).

Donc (3.2.7) est démontré. Posons $N = N_d$. Alors:

$$(3.2.1) \Rightarrow N \subseteq N(A^d) \subseteq D(A) \tag{3.2.8}$$

$$(3.2.6) \Rightarrow N \cap R(A^d) = \{0\}. \tag{3.2.9}$$

Finalement (3.2.2) $\Rightarrow N(A^d) + R(A^d) \subseteq N + R(A^d) \subseteq N(A^d) + R(A^d)$ d'où on déduit, en utilisant (3.2.9), que:

$$N(A^d) + R(A^d) = N \oplus R(A^d). \tag{3.2.10}$$

Remarquons enfin que par construction N est un sous espace paracomplet de $\mathbf{H}$.

Passons maintenant à la construction de M et posons:

$$M_0 = \mathbf{H}$$

$$M_{j+1} = [R(A) + N(A^d)]^\perp + A(D(A) \cap M_j), \; j \in \mathbf{N}.$$

Montrons d'abord que:

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad R(A^{j+1}) \subseteq A(D(A) \cap M_j) \subseteq M_{j+1} \subseteq M_j. \tag{3.2.11}$$

La seconde inclusion est évidente. La première se démontre par induction sur j. Pour $j = 0$ elle est évidente. Supposons la vraie pour $j = m$ et soit $u \in R(A^{m+2})$. Alors $\exists\; v \in D(A) \cap R(A^{m+1})$ tel que $u = Av$. Or, par hypothèse d'induction $v \in D(A) \cap M_{m+1}$ et par conséquent $u = Av \in A(D(A) \cap M_{m+1})$.

La troisième inclusion se démontre également par induction sur j. Pour $j = 0$ elle est évidente. Supposons la vraie pour $j = m$ et soit $u \in M_{m+2}$. Alors $\exists\ v \in A(D(A) \cap M_{m+1})$ et $\exists\ w \in [R(A) + N(A^d)]^\perp$ tels que $u = w + v$. En outre $\exists\ x \in D(A) \cap M_{m+1}$ tel que $v = Ax$. Or par hypothèse d'induction $x \in \in D(A) \cap M_m$. Donc $v = Ax \in A(D(A) \cap M_m)$ et par conséquent $u \in M_{m+1}$, ce qui achève la démonstration de (3.2.11).

Démontrons ensuite que:

$$(3.2.12) \qquad \forall\ j \in \mathbf{N}, \quad A(D(A) \cap M_j) + N(A^d) = R(A) + N(A^d).$$

L'inclusion $A(D(A) \cap M_j) + N(A^d) \subseteq R(A) + N(A^d)$ étant évidente, (3.2.12) sera démontré si nous établissons que:

$$(3.2.13) \qquad \forall\ j \in \mathbf{N}, \quad R(A) \subseteq A(D(A) \cap M_j) + N(A^d).$$

Nous procèderons encore par induction sur j. Pour $j = 0$, (3.2.13) est évident. Supposons le donc démontré pour $j = m$ et soit $u \in R(A)$. Alors $\exists\ v \in D(A)$ tel que $u = Av$ et $\exists\ x \in [R(A) + N(A^d)]^\perp$, $\exists\ y \in R(A) + N(A^d)$ tels que $v = x + y$. Or, par hypothèse d'induction $\exists\ s \in A(D(A) \cap M_m)$ et $\exists\ t \in N(A^d)$ tels que $y = s + t$. Donc, si $w = x + s$, on voit que $w \in M_{m+1}$ et comme $w = v - t \in D(A)$ on en déduit que $u = Av = Aw + At \in A(D(A) \cap M_{m+1}) + + N(A^d)$ ce qui démontre (3.2.13) et par conséquent (3.2.12).

On a aussi:

$$\begin{aligned} \forall\ j \in \mathbf{N}, \mathbf{H} &= [R(A) + N(A^d)]^\perp + R(A) + N(A^d) \\ &= [R(A) + N(A^d)]^\perp + A(D(A) \cap M_j) + N(A^d) = M_{j+1} + N(A^d). \end{aligned}$$

Donc:

$$(3.2.14) \qquad \forall\ j \in \mathbf{N}, \quad M_j + N(A^d) = \mathbf{H}$$

(car pour $j = 0$, c'est évident).

Montrons encore que:

$$(3.2.15) \qquad \forall\ j \in \mathbf{N}, \quad \forall\ k \in \mathbf{N}, \quad M_j \cap N(A^k) = R(A^j) \cap N(A^k).$$

L'inclusion $M_j \cap N(A^k) \supseteq R(A^j) \cap N(A^k)$ est une conséquence immédiate de (3.2.11) quand $j \geq 1$ et est évidente quand $j = 0$. Démontrons l'inclusion inverse par induction sur j. Pour $j = 0$, elle est évidente quel que soit k. Supposons la démontrée pour $j = m$, quel que soit k, et soit $u \in M_{m+1} \cap N(A^k)$. Alors

$\exists\ v \in D(A) \cap M_m$ et $\exists\ w \in [R(A) + N(A^d)]^\perp$ tels que $u = Av + w$ et $w = -Av + u \in R(A) + N(A^k) \subseteq R(A) + N(A^d)$ en utilisant b) de la proposition 3.1.1. Donc $w \in [R(A) + N(A^d)]^\perp \cap [R(A) + N(A^d)]$ d'où $w = 0$ et par conséquent $u = Av$, ce qui entraine que $v \in M_m \cap N(A^{k+1})$. En utilisant l'hypothèse d'induction on en déduit que $v \in R(A^m) \cap N(A^{k+1})$ et donc que $u \in R(A^{m+1}) \cap N(A^k)$ ce qui établit (3.2.15).

Finalement, montrons que:

$$\forall\ j \in \mathbf{N}, \quad j \geq d \Rightarrow M_j = M_d. \tag{3.2.16}$$

En tenant compte de (3.2.11), il suffit de montrer que $\forall\ j \in \mathbf{N}$, $j \geq d \Rightarrow$ $\Rightarrow M_j \supseteq M_d$. Soit donc $u \in M_d$. Alors:

(3.2.14) $\Rightarrow$ $\exists\ v \in M_j$ et $\exists\ w \in N(A^d)$ tels que $u = v + w$.

Or

$$w = u - v \in M_d \cap N(A^d) = R(A^d) \cap N(A^d) = R(A^j) \cap N(A^d)$$

en utilisant (3.2.15), puis c) de la proposition 3.1.1.

Donc $w \in R(A^j) \subseteq M_j$ (en utilisant (3.2.11)) et par conséquent $u = v + w \in M_j$, ce qui démontre (3.2.16).

Posons $M = M_d$. Alors:

(3.2.17) $\qquad$ (3.2.11) $\Rightarrow$ $R(A^d) \subseteq M;\quad A(D(A) \cap M) \subseteq M$

(3.2.18) $\qquad$ (3.2.12) $\Rightarrow$ $A(D(A) \cap M) + N(A^d) = R(A) + N(A^d)$

(3.2.19) $\qquad$ (3.2.14) $\Rightarrow$ $M + N(A^d) = \mathbf{H}$

(3.2.20) $\qquad$ (3.2.15) $\Rightarrow$ $\forall\ k \in \mathbf{N}, \quad M \cap N(A^k) = R(A^d) \cap N(A^k)$.

Remarquons que par construction M est un sous espace paracomplet de $\mathbf{H}$. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. Pour établir a) remarquons que

$$M + N = M + R(A^d) + N \text{ (en utilisant 3.2.17))}$$

$$= M + R(A^d) + N(A^d) \text{ (en utilisant (3.2.10))}$$

$$= M + N(A^d) = \mathbf{H} \text{ (en utilisant (3.2.17) et (3.2.19)).}$$

De même

$M \cap N = M \cap N(A^d) \cap N$ (en utilisant (3.2.8))

$= R(A^d) \cap N(A^d) \cap N$ (en utilisant (3.2.20) avec $k = d$)

$= R(A^d) \cap N = \{0\}$ (en utilisant (3.2.8) et (3.2.9)).

Donc $\mathbf{H} = M \oplus N$ et en utilisant la proposition 2.1.1 on en déduit que M et N sont des sous espaces fermés de $\mathbf{H}$.

b) se déduit immédiatement de (3.2.17) et de (3.2.8).

Enfin, pour établir c) remarquons que si $A_0 = A|_M$ on a:

$$R(A_0) = A(D(A) \cap M) = R(A) \cap M.$$

En effet (3.2.17) $\Rightarrow A(D(A) \cap M) \subseteq R(A) \cap M$.

Inversement, soit $u \in R(A) \cap M$. Alors $\exists\, v \in D(A)$ tel que $u = Av$ et $\exists\, x \in M$ et $\exists\, y \in N$ tels que $v = x + y$. Alors $u = Ax + Ay$ et $Ay = u - Ax \in M \cap N$, d'où $Ay = 0$ et par conséquent $u = Ax \in A(D(A) \cap M)$.

Donc

(3.2.21) $$(3.2.17) \Rightarrow R(A^d) \subseteq A(D(A) \cap M) \subseteq M.$$

Alors:

$A(D(A) \cap M) + N = R(A_0) + R(A^d) + N$ (en utilisant (3.2.21))

$= R(A_0) + R(A^d) + N(A^d)$ (en utilisant (3.2.10))

$= R(A_0) + N(A^d) = R(A) + N(A^d)$ (en utilisant (3.2.21) et (3.2.18)). En outre $R(A_0) \cap N \subseteq M \cap N = \{0\}$ et par conséquent:

(3.2.22) $$R(A_0) \oplus N = R(A) + N(A^d).$$

Donc en utilisant la proposition 2.1.1 et le fait que $R(A) + N(A^d)$ est fermé on en déduit que $R(A_0)$ est fermé.

En outre, en utilisant (3.2.20) avec $k = 1$, on trouve que

(3.2.23) $$N(A_0) = N(A) \cap M = N(A) \cap R(A^d).$$

Donc $N(A_0)$ est fermé et la proposition 2.2.3 entraine que A_0 est fermé.

Or, d'après la définition de $d = \mathrm{dis}(A)$, (3.2.23) peut s'écrire :

$$\text{(3.2.24)} \qquad \forall\, j \in \mathbf{N}, \quad j \geq d \Rightarrow N(A_0) = N(A) \cap R(A^j) \subseteq R(A^j)$$

et comme $\mathbf{H} = M \oplus N$, avec $N \subseteq N(A^d)$, on voit que :

$$\forall\, j \in \mathbf{N}; \quad j \geq d \Rightarrow R(A_0^j) = R(A^j):$$

Dès lors, on déduit de (3.2.24) que $\forall\, j \in \mathbf{N}$; $j \geq d \Rightarrow N(A_0) \subseteq R(A_0^j)$; ce qui montre bien que $A_0 \in q\Phi(0)$ et achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. Comme $A|_N$ est paracomplet et partout défini, la proposition 2.1.5 entraine que $A|_N$ est fermé, et comme $A_0 = A|_M$ l'est aussi, il en découle que : $A \in q\Phi \Rightarrow A$ est fermé.

DEFINITION 3.2.1. *On dira qu'un opérateur paracomplet A d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même est décomposable au sens de Kato de degré $d \geq 1$ s'il existe deux sous espaces fermés M et N de $\mathbf{H}$ vérifiant les conditions* a), b), *et* c) *du Théorème* 3.2.1 *et tels que* $N \not\subseteq N(A^{d-1})$.

REMARQUE. Le degré d'un opérateur décomposable au sens de Kato est bien défini. En effet supposons qu'il existe deux triplets M, N, d et M', N', d' vérifiant les conditions de la définition. Supposons, sans perte de généralité, que $d \leq d'$. Soit alors $u \in N'$. On a : $u = v + w$ avec $v \in M$ et $w \in N \subseteq N(A^d)$ d'où $A^d u = A^d v \in M$. D'autre part $A^d u \in N' \subseteq N(A^{d'})$; d'où $A^d u \in M \cap N(A^{d'}) = N(A_0^{d'})$ ou $A_0 = A|_M$: Or $A_0 \in q\Phi(0) \Rightarrow N(A_0^{d'}) \subseteq R(A_0^{d'})$ (Proposition 3.1.1 b)).

Donc comme $R(A_0^{d'}) \subseteq R(A^{d'})$ on a montré que $A^d u \in R(A^{d'})$ et par conséquent il existe $u' \in D(A^{d'})$ tel que $A^d u = A^{d'} u'$. En outre $u' = v' + w'$ avec $v' \in M'$ et $w' \in N' \subseteq N(A^{d'})$. Alors $A^d u = A^{d'} v' \in M'$.

Donc $A^d u \in M' \cap N' = \{0\}$ et par conséquent $A^d u = 0$ ou encore $u \in N(A^d)$.

Nous avons montré que $N' \subseteq N(A^d)$ et comme $N' \not\subseteq N(A^{d'-1})$ il en résulte que $d > d' - 1$ ou encore $d \geq d'$. Comme $d \leq d'$ on a bien $d = d'$.

THEOREME 3.2.2. *Soit A un opérateur paracomplet de $\mathbf{H}$ dans lui-même. Alors A est décomposable au sens de Kato de degré d $(d \geq 1)$ si et seulement si $A \in q\Phi(d)$.*

Démonstration. « Si » a été démontré par le Théorème précédent. Il suffit donc d'établir « seulement si ».

Supposons A décomposable au sens de Kato de degré d. On voit immédiatement que si $m \geq d$; $R(A^m) \cap N(A) = R(A_0^m) \cap N(A) = R(A_0^m) \cap N(A_0) = N(A_0) = R(A_0^d) \cap N(A) = R(A^d) \cap N(A)$: Donc $\operatorname{dis}(A) \leq d$.

Montrons maintenant que

$$A(D(A) \cap M) + N \quad \text{est fermé.} \tag{3.2.25}$$

Le fait que $\mathbf{H} = M \oplus N$ entraine que $\mathbf{H}$ est isomorphe à $M \times N$ et par conséquent que $A(D(A) \cap M) + N$ est isomorphe à $A(D(A) \cap M) \times N$.

Or, $A(D(A) \cap M)$ est fermé dans M, d'où on déduit que $A(D(A) \cap M) \times N$ est fermé et donc que $A(D(A) \cap M) + N$ l'est aussi.

En outre: $A(D(A) \cap M) + N \subseteq R(A) + N(A^d)$ et, réciproquement

$$R(A) = A(D(A)) \subseteq A(D(A) \cap M) + A(N) \subseteq A(D(A) \cap M) + N.$$

De même:

$$N(A^d) \subseteq M + N \text{ d'où } N(A^d) \subseteq M \cap N(A^d) + N = N(A_0^d) + N \subseteq R(A_0) + N$$

puisque $A_0 = A|_M \in q\Phi(0)$ et par conséquent: $N(A^d) \subseteq A(D(A) \cap M) + N$. Donc

$$R(A) + N(A^d) \subseteq A(D(A) \cap M) + N$$

d'où

$$R(A) + N(A^d) = A(D(A) \cap M) + N$$

est fermé.

Comme

$$R(A^d) \cap N(A) = A^d(D(A) \cap M) \cap N(A) = R(A_0^d) \cap N(A_0) = N(A_0)$$

est fermé la démonstration sera complète si nous montrons que $\operatorname{dis}(A) = d$. Soit $d_0 = \operatorname{dis}(A)$. Ce qui précède montre que $A \in q\Phi(d_0)$. Or, d'après le Théorème 3.2.1 il s'ensuit que A est décomposable au sens de Kato de degré d_0 et en vertu de la remarque suivant la définition 3.2.1 on en déduit que $d_0 = d$.

Remarque. Le théorème 3.2.2 reste encore vrai dans le cadre plus général des espaces de Banach si dans la définition 3.1.2 les conditions (i) et (ii) sont remplacées par:

(i′) $R(A^d) \cap N(A)$ admet un supplémentaire dans $\mathbf{B}$;

(ii′) $R(A) + N(A^d)$ admet un supplémentaire dans $\mathbf{B}$.

En effet, les démonstrations des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 peuvent être alors utilisées pratiquement sans modification.

DEFINITION 3.2.2. Soit A un opérateur paracomplet de $\mathbf{H}$ dans lui-même. Alors A sera dit *normalement décomposable de degré* d s'il existe deux opérateurs paracomplets D et T de $\mathbf{H}$ dans lui-même tels que:

α) $A = D + T$; $TD = 0$; $DT = 0$;

β) $D \in q\Phi$ avec $\operatorname{dis}(D) \leq 1$;

γ) T est nilpotent de degré d, où d est le plus petit entier naturel tel qu'il existe D et T satisfaisant α), β), γ).

Notons que $\gamma) \Rightarrow D(T) = \mathbf{H}$; $\alpha) \Rightarrow D(A) = D(D) \cap D(T) = D(D)$. Les produits DT et TD sont définis sur leur domaines naturels (cf. Proposition 2.1.3 b)).

THEOREME 3.2.3. *Soit A un opérateur paracomplet de* $\mathbf{H}$ *dans lui-même. Alors A est normalement décomposable de degré d si et seulement si $A \in q\Phi(d)$.*

Démonstration. Si: Quand $d = 0$ il suffit de prendre $D = A$ et $T = 0$.

Supposons donc que $d \geq 1$. Soit P_M et P_N les projections correspondantes à la décomposition $\mathbf{H} = M \oplus N$. Posons $D = A P_M$ et $T = A P_N$. On voit alors que

$$u \in D(D) \Rightarrow P_M u \in D(A) \Rightarrow (I - P_N) u \in D(A) \Rightarrow u \in D(A).$$

Donc $D(D) = D(A)$ et $D(T) = \mathbf{H}$. $D + T = A P_M + A P_N = A$ tandis que $DT = A P_M A P_N = 0$ et $TD = A P_N A P_M = 0$. Donc α) est vérifié. Comme $N \subseteq N(A^d)$ on voit aussi que T est nilpotent de degré $d_0 \leq d$. En outre, si

$$A_0 = A|_M, \quad N(D) = M \cap N(A) + N$$

d'où

$$M \cap N(D) = M \cap N(A) = N(A_0) \subseteq R(A^j) \quad \forall\, j \in \mathbf{N}$$

(d'après la proposition 3.1.2 b)). Alors si $j \geq d$ on a $A^j = D^j$ et par conséquent

$$R(D) \cap N(D) \subseteq M \cap N(D) \subseteq R(A^j) \cap N(D) = R(D^j) \cap N(D)$$

d'où $\operatorname{dis}(D) \leq 1$.

On a en outre montré que

$$R(D) \cap N(D) = R(A^d) \cap N(D) = R(A^d) \cap N(A)$$

est fermé.

Or $R(D) + N(D) = A(D(A) \cap M) + N$ est fermé (cf. (3.2.25)). Donc $D \in q\Phi$ et β) est vérifié. Il reste à montrer que $d_0 = d$. Soit $j \geq d_0$. Alors $A^j = D^j$ d'où $R(A^j) = R(D^j)$ et par conséquent

$$R(A^j) \cap N(A) = R(D^j) \cap N(D) = R(D) \cap N(D)$$

d'où $\operatorname{dis}(A) \leq d_0$. Comme on a déjà vu que $d_0 \leq d$ et donc γ) est vérifié.

Seulement si: Soit T et D satisfaisant α), β) et γ). Alors $\forall j \geq 1$ si $u \in R(D^j) \cap N(D)$ $\exists v \in D(D^j)$ tel que $u = D^j v$. Donc $Au = (D + T)D^j v = Du = 0$ et par conséquent $R(D^j) \cap N(D) = R(D^j) \cap N(A)$. Alors $\forall j \geq d$ on a:

$$R(A^j) \cap N(A) = R(D^j) \cap N(A) = R(D^j) \cap N(D) = R(D) \cap N(D)$$

fermé dans $\mathbf{H}$ ce qui entraîne que $\operatorname{dis}(A) \leq d$ et que $R(A^{d_0}) \cap N(A)$ est fermé ou $d_0 = \operatorname{dis}(A)$.

En outre, soit $u \in D(A)$: alors $Au = Du + Tu$ et par conséquent

$$R(A) + N(A^d) \subseteq R(D) + N(D^d) = R(D) + N(D)$$

(Proposition 3.1.1 b)).

Inversement

$$R(D) + N(D) \subseteq R(A) + N(A^d);$$

donc

$$R(A) + N(A^{d_0}) = R(D) + N(D)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$. Donc $A \in q\Phi(d_0)$ avec $d_0 \leq d$. Alors, d'après la première partie de la démonstration il existerait D' et T' satisfaisant α), β) et γ) avec T' nilpotent de degré d_0. Si $d_0 < d$ cela contredit nos hypothèses.

Donc $d_0 = d$ et le théorème est démontré.

§ 3. Propriétés des opérateurs quasi-Fredholm.

PROPOSITION 3.3.1. *Soit A un opérateur paracomplet de $\mathbf{H}$ dans lui-même tel que $\operatorname{dis}(A) = d$* et que *$R(A) + N(A^d)$ soit fermé dans $\mathbf{H}$. Alors*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad R(A^n) + N(A^d) \text{ est fermé dans } \mathbf{H}.$$

Démonstration. On procède par induction sur n. Pour $n = 0$, $R(A^0) = \mathbf{H}$ et le résultat est évident. Pour $n = 1$ c'est vrai par hypothèse.

Supposons la proposition vraie pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, et posons:

$$M = D(A^n) \cap [R(A) + N(A^d)].$$

Alors M est un sous espace fermé de $D(A^n)$ où $D(A^n)$ muni de la norme

$$||u||^2_{D(A^n)} = \sum_{j=1}^{n} ||\{A^{j-1}u;\, A^j u\}||^2_{G(A)}$$

est un sous-espace paracomplet de $\mathbf{H}$, et par conséquent il existe un sous espace fermé M' de $D(A^n)$ muni de sa topologie propre tel que: $D(A^n) = M \oplus M'$.

Montrons que $R(A^n) + N(A^d) = R(A^{n+1}) + N(A^d) + A^n(M')$. Il est évident que le deuxième membre est contenu dans le premier. Inversement soit $u \in R(A^n)$.

Alors $\exists\ v \in D(A^n)$ tel que $u = A^n v$ et $v = z + w$ avec $z \in M$ et $w \in M'$. Donc $u = A^n z + A^n w$ et comme $A^n z \in R(A^{n+1}) + N(A^d)$ on en déduit l'inclusion cherchée.

En outre: $u \in A^n(M') \cap [R(A^{n+1}) + N(A^d)] \Rightarrow \exists\ v \in M'$ tel que $u = A^n v$ et $\exists\ w \in D(A^{n+1})$ et $\exists\ y \in N(A^d)$ tels que $u = A^{n+1}w + y$. Alors $y = u - - A^{n+1}w \in R(A^n)$ et par conséquent $\exists\ z \in N(A^{n+d})$ tel que $y = A^n z$. Donc $v = Aw + z + x$ ou $x \in N(A^n)$ d'où on tire en utilisant b) de la proposition 3.1.1 que

$$v \in [R(A) + N(A^d)] \cap D(A^n) = M.$$

Donc

$$v \in M \cap M' \Rightarrow v = 0 \Rightarrow A^n(M') \cap [R(A^{n+1}) + N(A^d)] = \{0\}.$$

En utilisant le lemme de Neubauer on en déduit que $R(A^{n+1}) + N(A^d)$ est fermé.

PROPOSITION 3.3.2. *Soit $A \in q\Phi(d)$. Alors $\forall\ m, n \in \mathbf{N}$ tels que $m + n \geq d$ on a:*

$$R(A^n) + N(A^m)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$.

Démonstration. La proposition est vraie quel que soit n si $m \geq d$ (Proposition 3.3.1). Nous allons montrer que si la proposition est vraie pour n et m, elle est vraie pour $n + 1$ et $m - 1$ si $m \geq 1$, ce qui démontrera la proposition par induction.

Soit

$$M = [N(A^{m-1}) + R(A^{n+1})] \cap N(A^m) = N(A^{m-1}) + R(A^{n+1}) \cap N(A^m).$$

Soit $u \in N(A^m)$. Posons

$$\|u\|^2_{N(A^m)} = \sum_{j=0}^{m-1} \|A^j u\|^2_H .$$

Comme A est fermé on voit que muni de cette norme $N(A^m)$ est un espace de Hilbert. Alors M est fermé dans $N(A^m)$.

En effet $u \in M \Leftrightarrow A^{m-1} u \in R(A^d) \cap N(A)$ puisque $m + n \geq d$ et si $u_j \to u$ dans $N(A^m)$ muni de sa topologie propre alors $A^{m-1} u_j \to A^{m-1} u$ dans $\mathbf{H}$. Comme $R(A^d) \cap N(A)$ est fermé, on en déduit que $A^{m-1} u \in R(A^d) \cap N(A)$ et par conséquent que $u \in M$. Donc il existe un sous espace M' de $N(A^m)$ (muni de sa topologie propre) tel que: $N(A^m) = M \oplus M'$.

Montrons que $R(A^{n+1}) + N(A^{m-1}) + M' = R(A^{n+1}) + N(A^m)$.

Il est évident que le premier membre est inclus dans le second.

Soit $u \in N(A^m)$. Alors $\exists\ v, w$ tels que $u = v + w$ avec $v \in M$, $w \in M'$ et comme $M \subseteq N(A^{m-1}) + R(A^{n+1})$ l'inclusion dans l'autre sens est démontrée. Or

$$M' \cap [R(A^{n+1}) + N(A^{m-1})] \subseteq N(A^m) \cap [R(A^{n+1}) + N(A^{m-1})] = M.$$

Donc $M' \cap [R(A^{n+1}) + N(A^{m-1})] \subseteq M \cap M' = \{0\}$.

En appliquant de nouveau de lemme de Neubauer on finit de démontrer la proposition.

Corollaire 3.3.1. *Soit $A \in q\,\Phi(d)$. Alors, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $n \geq d \Rightarrow R(A^n)$ est fermé.*

Corollaire 3.3.2. *Soit $A \in q\,\Phi$ avec $dis(A) \leq 1$.*
Alors $\forall\ j \in \mathbf{N}$, $R(A^j)$ est fermé.

Proposition 3.3.3. *Soit $A \in q\,\Phi(0)$ avec $D(A)$ dense dans $\mathbf{H}$. Alors A^* existe et on a:*

$$A^* \in q\,\Phi(0); \qquad \forall\ n \in \mathbf{N}, \qquad N(A^n)^\perp = R(A^{*n}),\ N(A^{*n})^\perp = R(A^n).$$

Démonstration. On démontre d'abord par induction que

$$\forall\ n \in \mathbf{N}, \qquad N(A^n)^\perp \subseteq R(A^{*n}).$$

C'est évident quand $n = 0$. En outre, d'après le Lemme 1.5 de [14], on a:

$$R(A) \text{ fermé } \Rightarrow R(A^*) = N(A)^\perp. \tag{3.3.1}$$

Donc l'inclusion est encore vraie pour $n = 1$. Supposons la établie pour $n (n \geq 1)$ et soit $u \in N(A^{n+1})^\perp$.

Alors $u \in N(A^n)^\perp$ et par hypothèse d'induction $\exists\, v \in D(A^{*n})$ tel que $u = A^{*n} v$. Donc:

$$\forall\, w \in N(A^{n+1}), \quad 0 = (u, w) = (A^{*n} v, w) = (v, A^n w),$$

d'où

$$v \perp R(A^n) \cap N(A) = N(A) \Rightarrow v \in N(A)^\perp = R(A^*) \Rightarrow u \in R(A^{*n+1}).$$

Or $R(A^{*n}) \subseteq N(A^n)^\perp$ et par conséquent $\forall\, n \in \mathbf{N}$: $N(A^n)^\perp = R(A^{*n})$.

Egalement $\operatorname{dis}(A) = 0 \Rightarrow \forall\, m, n \in \mathbf{N}$, $N(A^n) \subseteq R(A^m)$ ((*d*) de la proposition 3.1.2). Donc $R(A^m)^\perp \subseteq N(A^n)^\perp$ d'où $N(A^{*m}) \subseteq R(A^m)^\perp \subseteq R(A^{*n})$, ce qui entraîne (Proposition 3.1.2) que $\operatorname{dis}(A^*) = 0$. Le reste de la proposition se démontre en utilisant la symétrie des conditions en A et en A^*.

PROPOSITION 3.3.4. *Soit $A \in q\Phi(1)$ tel que $D(A)$ soit dense dans* $\mathbf{H}$. *Alors A^* existe et on a*:

$$A^* \in q\Phi(1); \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad N(A^n)^\perp = R(A^{*n}); \quad N(A^{*n})^\perp = R(A^n).$$

Démonstration. On démontre d'abord par induction que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad N(A^n)^\perp \subseteq R(A^{*n}).$$

C'est évident quand $n = 0$. En vertu de (3.3.1) l'inclusion est encore vraie si $n = 1$. Supposons la établie pour $n (n \geq 1)$ et soit $u \in N(A^{n+1})^\perp$. Alors on voit que $N(A^{n+1})^\perp \subseteq N(A^n)^\perp$ et par hypothèse d'induction $\exists\, v \in D(A^{*n})$ tel que $u = A^{*n} v$.

Donc

$$\forall\, w \in N(A^{n+1}), \quad 0 = (u, w) = (A^{*n} v, w) = (v, A^n w)$$

d'où

$$v \perp R(A^n) \cap N(A) = R(A) \cap N(A)$$

puisque $\operatorname{dis}(A) = 1$. Comme $R(A) + N(A)$ est fermé

$$v \in \{R(A) \cap N(A)\}^\perp \Rightarrow v \in R(A^*) + N(A^*)$$

(cf. Corollaire 1.3.1). Il s'ensuit que $u \in R(A^{*n+1})$ et comme on a toujours $R(A^{*n}) \subseteq N(A^n)^\perp$ on a démontré que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $N(A^n)^\perp = R(A^{*n})$.

Comme (Proposition 3.1.1) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $N(A^n) + R(A) = N(A) + R(A)$ fermé on déduit, en appliquant la Proposition 2.3.1, que:

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad N(A^*) \cap R(A^{*n}) = N(A^*) \cap N(A^n)^\perp =$$

$$= [R(A) + N(A)]^\perp = N(A^*) \cap R(A^*).$$

Donc $\operatorname{dis}(A^*) \leq 1$ et comme la proposition précédente montre que $\operatorname{dis}(A^*) = 0$ entraîne $\operatorname{dis}(A) = 0$, nous avons démontré que $\operatorname{dis}(A^*) = 1$.

Le reste de la proposition se démontre en utilisant la symétrie des conditions en A et en A^*.

PROPOSITION 3.3.5. *Soit $A \in q\,\Phi(d)$ tel que $D(A)$ soit dense dans* $\mathbf{H}$. *Alors A^* existe et on a*:

1) $A^* \in q\,\Phi(d)$;
2) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $N(A^n)^\perp = \overline{R(A^{*n})}$; $N(A^{*n})^\perp = \overline{R(A^n)}$;
3) $\forall\, m, n \in \mathbf{N}$, $m + n \geq d \Rightarrow R(A^n) + N(A^m) = (N(A^{*n}) \cap R(A^{*m}))^\perp$;
4) $\forall\, m, n \in \mathbf{N}$, $m + n \geq d \Rightarrow R(A^{*n}) + N(A^{*m}) = (N(A^n) \cap R(A^m))^\perp$;
5) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq d \Rightarrow N(A^n)^\perp = R(A^{*n})$; $N(A^{*n})^\perp = R(A^n)$.

Démonstration. Par hypothèse A est normalement décomposable de degré d. Donc $A = D + T$ avec $D \in q\,\Phi$, $\operatorname{dis}(D) \leq 1$ et T est nilpotent de degré d.

Alors comme T est borné on a $A^* = D^* + T^*$ et d'après les propositions 3.3.3 et 3.3.4 on voit que $D^* \in q\,\Phi$ avec $\operatorname{dis}(D^*) = \operatorname{dis}(D)$. En outre T^* est nilpotent de degré d. Finalement $D\,T = 0 \Rightarrow (D\,T)^* = 0$. Or $(D\,T)^*$ est une extension de T^*D^*. Donc $T^*D^* = 0$. De même $T\,D = 0 \Rightarrow (T\,D)^*$ et comme $(T\,D)^*$ est une extension de D^*T^* on en déduit que $D^*T^* = 0$. Il en résulte que A^* est normalement décomposable de degré $d_0 \leq d$ avec $d_0 = \operatorname{dis}(A^*)$. Donc $A \in q\,\Phi(d) \Rightarrow A^* \in q\,\Phi(d_0)$.

En appliquant ce résultat à A^* on trouve de même $\operatorname{dis}(A) = \operatorname{dis}(A^{**}) \leq \leq \operatorname{dis}(A^*)$. Donc $\operatorname{dis}(A^*) = \operatorname{dis}(A)$ et 1) est démontré.

En outre $\forall\, n \in \mathbf{N}$, si $n \geq 1$, $R(A^n) = R(D^n) + R(T^n)$ et comme $R(D^n) \subseteq M$, $R(T^n) \subseteq N$ on a:

$$\overline{R(A^n)} = R(D^n) + \overline{R(T^n)}$$

d'où

$$R(A^n)^\perp = R(D^n)^\perp \cap R(T^n)^\perp = \overline{N(D^{*n})} \cap N(T^{*n}) = \overline{N(D^{*n}) \cap N(T^{*n})}$$

compte tenu de la Proposition 2.2.1 et du fait que

$$N(D^{*n}) + N(T^{*n}) \supseteq N(D^*) + N(T^*) \supseteq N^* + M^* = \mathbf{H},$$

ou N^* et M^* sont les deux sous espaces correspondant à la décomposition de Kato de A^*, et que par conséquent $N(D^{*n}) + N(T^{*n}) = \mathbf{H}$. Or

$$N(D^{*n}) \cap N(T^{*n}) = N(A^{*n}).$$

En effet $N(D^{*n}) \cap N(T^{*n}) \subseteq N(A^{*n})$ puisque $A^{*n} = D^{*n} + T^{*n}$.

Inversement soit $u \in N(A^{*n})$. Alors $D^{*n} u = - T^{*n} u \in M^* \cap N^* = \{0\}$ et par conséquent $D^{*n} u = T^{*n} u = 0$ d'où $u \in N(D^{*n}) \cap N(T^{*n})$. On a donc montré que $R(A^n)^{\perp} = \overline{N(A^{*n})}$, ce qui est encore vrai quand $n = 0$.

En utilisant la symétrie entre A et A^* on voit que $R(A^{*n})^{\perp} = \overline{N(A^n)}$ et 2) est démontré.

Pour établir 3) il suffit d'appliquer la proposition 3.3.2 et la proposition 2.3.3 (et son corollaire). 4) se déduit de 3) en utilisant la symétrie entre A et A^*. Enfin, 5) est une conséquence immédiate de 3) et de 4) en prenant $m = 0$.

Nous terminerons ce chapitre en donnant una autre caractérisation des opérateurs quasi-Fredholm.

PROPOSITION 3.3.6. *Soit A un opérateur paracomplet d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui-même. Alors A est quasi-Fredholm si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.*

a) $N(A) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} R(A^j)\right)$ *est fermé dans* $\mathbf{H}$.

b) $R(A) + \bigcup_{j=1}^{\infty} N(A^j)$ *est fermé dans* $\mathbf{H}$.

Démonstration: « seulement si ». Soit $A \in q\Phi(d)$. Alors en utilisant la Proposition 3.1.1 on voit que:

$$R(A) + \bigcup_{j=1}^{\infty} N(A^j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [R(A) + N(A^j)] = R(A) + N(A^d)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$.

De même:

$$N(A) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} R(A^j)\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} (N(A) \cap R(A^j)) = N(A) \cap R(A^d)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$.

« si ». Soit A paracomplet satisfaisant a) et b). Alors en posant:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (R(A) + N(A^j)) = \mathbf{H}_0$$

on voit que $\forall\, j$, $R(A) + N(A^j)$ est un sous espace paracomplet de $\mathbf{H}_0$ puisqu'il est la somme de deux sous espaces paracomplets de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}_0$ est fermé dans $\mathbf{H}$. En utilisant la Proposition 2.2.4 on en déduit qu'il existe un j_0 tel que

$$R(A) + N(A^{j_0}) = \mathbf{H}_0 .$$

En prenant d égal au plus petit j_0 tel que cette égalité soit vraie on trouve:

$$R(A) + N(A^d) = \mathbf{H}_0$$

est fermé dans $\mathbf{H}$ et $\forall\, n \geq d$ on a:

$$R(A) + N(A^n) = R(A) + N(A^d),$$

d'où en utilisant la Proposition 3.1.1 on déduit que $\operatorname{dis}(A) = d < \infty$. En outre, dans ces conditions on a:

$$N(A) \cap R(A^d) = N(A) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} R(A^j) \right)$$

est fermé dans $\mathbf{H}$.

Chapitre IV

L'OPERATEUR RESOLVANT GENERALISE (THEORIE LOCALE)

§ 1. Les points réguliers.

Definition 4.1.1. Soit A un opérateur fermé non nécessairement borné, d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui-même. On dira que $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ est un point régulier pour A si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) $R(A - \lambda_0 I)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

b) Il existe un voisinage U de λ_0 dans $\mathbf{C}$ tel que:

$$\forall\, \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \in U \Rightarrow g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) < 1.$$

L'ensemble des points réguliers pour A sera noté $\operatorname{reg}(A)$.

REMARQUE. Si $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A et si $\sigma_d(A)$, $\sigma_r(A)$ sont respectivement les spectres discrets et résiduels de A on a:

$$\rho(A) \subseteq \text{rég}(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_r(A).$$

En effet, si $\lambda \in \sigma_c(A)$, le spectre continu de A, alors $R(A - \lambda I)$ n'est pas fermé et par conséquent $\lambda \notin \text{rég}(A)$.

PROPOSITION 4.1.1. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\lambda_0 \in \text{rég}(A)$;

b) $A - \lambda_0 I \in q\,\Phi(0)$.

Démonstration. Nous démontrerons d'abord un lemme:

LEMME 4.1.1. *Soit $R(A - \lambda_0 I)$ fermé et soit $c = c(A - \lambda_0 I)$ la conorme de $A - \lambda_0 I$ (c.f. Définition 1.2.2). Alors,* [*c.f.* (1.2.5)] $c > 0$ *et* $\forall\, \lambda \in \mathbf{C}$ *tel que* $|\lambda - \lambda_0| \leq c$ *on a*:

$$\delta(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) \leq |\lambda - \lambda_0| / c.$$

En outre, si $\lambda_0 \in \text{rég}(A)$ *on a*: $\forall\, \lambda \in U$, *avec* $|\lambda - \lambda_0| \leq c$

$$g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) \leq |\lambda - \lambda_0| / c.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbf{H}$; alors:

$$\|(I - P_{N(A-\lambda_0 I)}) P_{N(A-\lambda I)}\, u\| \leq 1/c\, \|(A - \lambda_0 I) P_{N(A-\lambda I)}\, u\| =$$
$$= |\lambda - \lambda_0| / c\, \|P_{N(A-\lambda I)}\, u\| \leq |\lambda - \lambda_0| / c\, \|u\|.$$

Donc $\delta(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) \leq |\lambda - \lambda_0| / c < 1$ ce qui démontre la première partie du lemme.

Si $\lambda \in \text{rég}(A)$ et si $\lambda \in U$, $g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) < 1$ entraine, en utilisant (1.2.11) et (1.2.10), que

$$g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) = \delta(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I))$$

et le lemme est démontré.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Montrons que:

(4.1.1) a) $\Rightarrow$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $N(A - \lambda_0 I) \subseteq R\{(A - \lambda_0 I)^n\}$,

$R\{(A - \lambda_0 I)^n\}$ fermé dans $\mathbf{H}$.

On procédera par induction.

Si $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $\lambda \neq \lambda_0$ on a:

$$N(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda_0 I).$$

Soit $u \in N(A - \lambda_0 I)$.

Alors:

$$P_{N(A-\lambda I)}\, u = u - (I - P_{N(A-\lambda I)})\, u \in R(A - \lambda_0 I).$$

D'où

$$(I - P_{R(A-\lambda_0 I)})\, u = (I - P_{R(A-\lambda_0 I)})\, \mathrm{J} P_{N(A-\lambda_0 I)} - P_{N(A-\lambda I)})\, u$$

et par conséquent si $|\lambda - \lambda_0| < c = c(A - \lambda_0 I)$

$$\|(I - P_{R(A-\lambda_0 I)})\, u\| \leq g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I))\, \|u\| \leq |\lambda - \lambda_0| / c\, \|u\|$$

(lemme 4.1.1) et en passant à la limite pour $\lambda \to \lambda_0$ on trouve:

$$(I - P_{R(A-\lambda_0 I)})\, u = 0 \Rightarrow N(A - \lambda_0 I) \subseteq R(A - \lambda_0 I) \text{ fermé dans } \mathbf{H}.$$

Supposons maintenant (4.1.1) démontré pour n et soit

$$u \in R\, \overline{\{(A - \lambda_0 I)^{n+1}\}}.$$

Alors il existe une suite $\{v_j\} \subseteq \mathbf{H}$ telle que $(A - \lambda_0 I)^{n+1} v_j \to u$ dans $\mathbf{H}$.

Posons

$$w_j = (I - P_{N(A-\lambda_0 I)})(A - \lambda_0 I)^n v_j \in R\{(A - \lambda_0 I)^n\}$$

puisque par hypothèse d'induction $N(A - \lambda_0 I) \subseteq R(A - \lambda_0 I)^n$.

Alors

$$(A - \lambda_0 I)\, w_j = (A - \lambda_0 I)^{n+1} v_j \to u$$

et par conséquent $\{(A - \lambda_0 I)\, w_j\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}$. Or, par définition de $c(A - \lambda_0 I)$,

$$\|(A - \lambda_0 I)(w_j - w_k)\| \geq c(A - \lambda_0 I)\, \|w_j - w_k\|$$

d'où il résulte que $\{w_j\}$ est également une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}$ et par conséquent il existe un $w \in R\{(A - \lambda_0 I)^n\}$ (hypothèse d'induction) tel que $w_j \to w$.

Donc $u = (A - \lambda_0 I)\, w \in R\{(A - \lambda_0 I)^{n+1}\}$ qui est donc fermé dans $\mathbf{H}$.

Comme $\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow N(A - \lambda I) \subseteq R\{(A - \lambda_0 I)^{n+1}\}$ on démontre comme plus haut que $N(A - \lambda_0 I) \subseteq R\{(A - \lambda_0 I)^{n+1}\}$ ce qui établit (4.1.1).

Par la même occasion nous avons démontré que:

$\lambda_0 \in \text{rég}(A) \Rightarrow A - \lambda_0 I \in q\,\Phi(0)$ c'est à dire que a) $\Rightarrow$ b).

Supposons maintenant b) vérifiée et soit $u \in N(A - \lambda_0 I) \subseteq R(A - \lambda_0 I)$. Alors $\exists\ u_1 \in N\{A - \lambda_0 I)^2\} \cap (N(A - \lambda_0 I))^\perp$ tel que $(A - \lambda_0 I) u_1 = u$.

Comme $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $N\{(A - \lambda_0 I)^n\} \subseteq R(A - \lambda_0 I)$ on peut ainsi construire inductivement une suite $u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots$ (avec $u_0 = u$) telle que:

$$\forall\ j \in \mathbf{N},\ (A - \lambda_0 I) u_j = u_{j-1},\ \text{avec}\ u_j \in (N(A - \lambda_0 I))^\perp.$$

Donc:

$$||u_{j-1}|| \geq c\,||u_j|| \Rightarrow ||u_j|| \leq c^{-j}\,||u||.$$

Si $|\lambda - \lambda_0| < c$, posons: $w = -\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j u_j \in (N(A - \lambda_0 I))^\perp$.

Cette série est convergente puisque normalement convergente.

En outre si

$$w_n = -\sum_{j=1}^{j=n} (\lambda - \lambda_0)^j u_j$$

on voit que

$$(A - \lambda_0 I) w_n = -\sum_{j=1}^{j=n} (\lambda - \lambda_0)^j u_{j-1}.$$

Quand $n \to \infty$, $w_n \to w$ et $(A - \lambda_0 I) w_n \to (\lambda - \lambda_0)(-u + w)$ et par conséquent comme A est fermé on en déduit que $(A - \lambda_0 I) w = (\lambda - \lambda_0)(-u + w)$ d'où

$$(A - \lambda I) w = -(\lambda - \lambda_0) u = (A - \lambda I) u$$

et donc

$$u \in (N(A - \lambda_0 I))^\perp + N(A - \lambda I)$$

ou encore

$$N(A - \lambda_0 I) \subseteq (N(A - \lambda_0 I))^\perp + N(A - \lambda I)$$

et par conséquent

$$(N(A - \lambda_0 I))^\perp + N(A - \lambda I) = \mathbf{H}.$$

En utilisant maintenant la proposition 1.3.1 (en prenant $M = N(A - \lambda I)$ et $N = N(A - \lambda_0 I)$) on trouve:

$$\mathbf{H} = N(A - \lambda I) + (N(A - \lambda_0 I))^\perp = ((N(A - \lambda I))^\perp \cap N(A - \lambda_0 I))^\perp$$

d'où:

$$(N(A - \lambda I))^\perp \cap N(A - \lambda_0 I) = \{0\}.$$

En outre, (lemme 4.1.1) nous avons vu que si $R(A - \lambda_0 I)$ est fermé alors:

$$\forall \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda - \lambda_0| < c \Rightarrow \delta(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) < 1$$

d'où $N(A - \lambda I) \cap (N(A - \lambda_0 I))^\perp = \{0\}$ (c.f. (1.2.2)).

Donc en utilisant (1.2.10) on voit que: $\forall \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda - \lambda_0| < c$ on a:

$$g(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) = \delta(N(A - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) < 1.$$

On a donc montré que b) $\Rightarrow$ a).

REMARQUE. Il ressort de la démonstration précédente que dans la définition d'un point régulier on peut toujours supposer que $U \supseteq \{\lambda;\ |\lambda - \lambda_0| < c\}$.

COROLLAIRE 4.1.1. *Si $D(A)$ est dense dans $\mathbf{H}$ et si A est normal on a: $rég(A) = \rho(A)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\text{rég}(A) \subseteq \rho(A)$. Soit $\lambda \in \text{rég}(A)$. Alors:

$$N(A^* - \bar{\lambda} I) = N(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda I) = (N(A^* - \bar{\lambda} I))^\perp$$

d'où on tire que $N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $R(A - \lambda I) = \mathbf{H}$ donc que $\lambda \in \rho(A)$.

COROLLAIRE 4.1.2. *Si $D(A)$ est dense dans $\mathbf{H}$ on a:*

$$rég(A^*) = \overline{rég(A)} \quad \textit{(conjugué complexe).}$$

Démonstration:

$$\lambda \in \text{rég}(A^*) \Leftrightarrow A^* - \lambda I \in q\Phi(0) \Leftrightarrow A - \bar{\lambda} I \in q\Phi(0) \qquad \text{(prop. 3.3.3)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \text{rég}(A) \Leftrightarrow \lambda \in \overline{\text{rég}(A)}.$$

PROPOSITION 4.1.2. *Soit A un opértaeur fermé de $\mathbf{H}$ dans lui-même. Alors $rég(A)$ est ouvert dans $\mathbf{C}$ et si U est un ouvert de $rég(A)$ les conditions suivantes sont satisfaites:*

a) *l'application $\lambda \to N(A - \lambda I)$ de U dans l'espace des sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ muni de la métrique g est continue.*

b) *l'application $\lambda \to R(A - \lambda I)$ de U dans l'espace des sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ muni de la métrique g est continue.*

Démonstration:

a) Soit $\lambda_0 \in \text{rég}(A)$. Alors d'après le lemme 4.1.1, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$|\lambda - \lambda_0| < c = c(A - \lambda_0 I)$$

on a:

$$g(N(A-\lambda I),\ N(A-\lambda_0 I)) \leq |\lambda-\lambda_0|/c < 1.$$

Alors, d'après (1.2.9):

$$\varepsilon(N(A-\lambda I),\ N(A-\lambda_0 I)) < 1 \tag{4.1.2}$$

et d'après (1.2.11):

$$(N(A-\lambda I))^{\perp} \cap N(A-\lambda_0 I) = \{0\}$$

d'où

$$[(N(A-\lambda I))^{\perp} \cap N(A-\lambda_0 I)]^{\perp} = \mathbf{H}. \tag{4.1.3}$$

Or, d'après la proposition 1.3.2:

$$(4.1.2) \Rightarrow N(A-\lambda I) + (N(A-\lambda_0 I))^{\perp} \quad \text{est fermé}$$

et par conséquent en utilisant la proposition 1.3.1 et (4.1.3) on obtient:

$$N(A-\lambda I) + (N(A-\lambda_0 I))^{\perp} = \mathbf{H}. \tag{4.1.4}$$

Soit maintenant $u \in (N(A-\lambda I))^{\perp}$. On déduit alors de (4.1.4) qu'il existe $u_1 \in N(A-\lambda I)$ et $u_2 \in (N(A-\lambda_0 I))^{\perp}$ tels que $u = u_1 + u_2$.

Donc:

$$||u_2||^2 = ||u||^2 + ||u_1||^2 \geq ||u||^2.$$

Par conséquent:

$$||(A-\lambda I)u|| = ||(A-\lambda I)u_2|| \geq ||(A-\lambda_0 I)u_2|| - |\lambda-\lambda_0|\,||u_2|| >$$

$$> (c-|\lambda-\lambda_0|)\,||u_2|| \geq (c-|\lambda-\lambda_0|)\,||u||.$$

Donc:

$$c(A-\lambda I) \geq c - |\lambda-\lambda_0|. \tag{4.1.5}$$

En utilisant (1.2.5) on en déduit:

$$|\lambda-\lambda_0| < c \Rightarrow R(A-\lambda I) \quad \text{est fermé.} \tag{4.1.6}$$

Soit maintenant $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |\lambda - \mu| < (c - |\lambda - \lambda_0|) / 2$.
Alors:

$$\begin{aligned} |\mu - \lambda_0| \leq |\mu - \lambda| + |\lambda - \lambda_0| &< \\ &< (c - |\lambda - \lambda_0|) / 2 + |\lambda - \lambda_0| \leq \\ &\leq (c + |\lambda - \lambda_0|) / 2 < c. \end{aligned}$$

En outre, de (4.1.5) on déduit que

$$c(A - \lambda I) > 2 |\lambda - \mu| > |\lambda - \mu|$$

et que

$$c(A - \mu I) \geq c - |\mu - \lambda_0| > (c - |\lambda - \lambda_0|) / 2 > |\lambda - \mu|.$$

Donc, en utilisant le lemme 4.1.1 on trouve:

$$\delta(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) < |\lambda - \mu| / c(A - \mu I) < 1;$$

$$\delta(N(A - \mu I), N(A - \lambda I)) < |\mu - \lambda| / c(A - \lambda I) < 1.$$

Donc, d'après la proposition 1.2.3, $g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) < 1$ et en utilisant (1.2.11) et (1.2.10) on trouve que

$$\begin{aligned} g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) = \delta(N(A - \mu I), N(A - \lambda I)) &< \\ &< |\mu - \lambda| / (c - |\lambda - \lambda_0|). \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

En d'autres mots, $R(A - \lambda I)$ est fermé, et il existe un voisinage V de λ dans $\mathbf{C}$

$$(V = \{\mu;\ 2|\mu - \lambda| < c - |\lambda - \lambda_0|\})$$

tel que $\forall \mu \in V$ on a

$$g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) < 1,$$

c'est à dire que $\lambda \in \text{rég}(A)$.

Donc: $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < c \Rightarrow \lambda \in \text{rég}(A)$ et on en déduit que $\text{reg}(A)$ est ouvert dans $\mathbf{C}$.

En outre, on déduit de (4.1.7) que l'application $\lambda \to N(A - \lambda I)$ de $\text{rég}(A)$ dans l'espace des sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ muni de la métrique g est continue.

b) Soit maintenant $u \in R(A - \lambda I) \cap (R(A - \lambda_0 I))^{\perp}$. Il existe alors $v \in \in D(A)$ tel que $u = (A - \lambda I)v$ et de (4.1.4) on déduit qu'on peut choisir v dans $(N(A - \lambda_0 I))^{\perp}$. Alors :

$$A v - \lambda v \perp R(A - \lambda_0 I) \Rightarrow -(\lambda - \lambda_0) v + (A - \lambda_0 I) v \in (R(A - \lambda_0 I))^{\perp}$$

d'où

$$|\lambda - \lambda_0|^2 \|v\|^2 \geq \|(A - \lambda_0 I) v\|^2 \geq c^2 \|v\|^2 \Rightarrow v = 0.$$

Donc

$$R(A - \lambda I) \cap (R(A - \lambda_0 I))^{\perp} = \{0\}. \tag{4.1.8}$$

Soit $s \in R(A - \lambda_0 I)$ et soit $t \in \mathbf{H}$ tel que

$$(A - \lambda_0 I) t = P_{R(A - \lambda_0 I)} s = s$$

avec $t \in (N(A - \lambda_0 I))^{\perp}$.

Alors :

$$\|(I - P_{R(A-\lambda I)}) P_{R(A-\lambda_0 I)} s\| =$$

$$= \|(I - P_{R(A-\lambda I)})(A - \lambda I) t + (I - P_{R(A-\lambda I)})(\lambda - \lambda_0) t\| =$$

$$= |\lambda - \lambda_0| \, \|(I - P_{R(A-\lambda I)}) t\| \leq |\lambda - \lambda_0| \, \|t\| \leq$$

$$\leq |\lambda - \lambda_0| / c \, \|(A - \lambda_0 I) t\| \leq |\lambda - \lambda_0| / c \, \|s\|$$

(en utilisant la définition 1.2.2 de la conorme).

Donc :

$$\delta(R(A - \lambda_0 I), R(A - \lambda I)) \leq |\lambda - \lambda_0| / c < 1$$

et par conséquent :

$$R(A - \lambda_0 I) \cap (R(A - \lambda I))^{\perp} = \{0\}. \tag{4.1.9}$$

Finalement (4.1.8), (4.1.9) et (1.2.10) entrainent que

$$g(R(A - \lambda_0 I), R(A - \lambda I)) = \delta(R(A - \lambda_0 I), R(A - \lambda I)) \leq |\lambda - \lambda_0| / c$$

ce qui établit b).

§ 2. Les opérateurs résolvants généralisés.

NOTATION. Dans ce paragraphe on notera $\mathbf{D}(A)$ l'espace de Hilbert obtenu en munissant le domaine $D(A)$ d'un opérateur fermé A de $\mathbf{H}$ dans lui-même de la norme du graphe de A ($\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2_H + \|A\,u\|^2_H$).

DEFINITION 4.2.1. Soit A un opérateur fermé de $\mathbf{H}$ dans lui-même et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. On dira que A admet un *opérateur résolvant généralisé* $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ au point λ si $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur continu de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{D}(A)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites:

1) $R(A - \lambda I)$ est fermé dans $\mathbf{H}$.

2) Il existe une projection P_λ dans $\mathbf{H}$ avec $R(P_\lambda) = R(A - \lambda I)$ et une projection Q_λ dans $\mathbf{H}$ telle que $N(Q_\lambda) = N(A - \lambda I)$.

3) $(A - \lambda I)\,\mathrm{Rg}(A, \lambda) = P_\lambda$.

4) $\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = Q_\lambda|_{D(A)}$ (on a visibilment $Q_\lambda(D(A)) \subseteq D(A)$).

Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ on dira que A admet un opérateur résolvant généralisé dans U si $\forall\, \lambda \in U$, $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur résolvant généralisé de A.

REMARQUE. En général $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ n'est pas unique. Si toutefois $\lambda \in \rho(A)$. Alors $P_\lambda = I_H$, $Q_\lambda = I_{D(A)}$ et $\mathrm{Rg}(A, \lambda) = R(A, \lambda)$, l'opérateur résolvant habituel.

PROPOSITION 4.2.1. *Soit A un opérateur fermé de $\mathbf{H}$ dans lui-même et soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. Alors A admet un opérateur résolvant généralisé analytique à valeurs dans $\mathbf{D}(A)$ dans un voisinage U de λ_0 si et seulement si $\lambda_0 \in rég(A)$.*

Démonstration: « seulement si »: soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, U un voisinage de λ_0 dans $\mathbf{C}$ et soit $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ analytique dans U. Alors $R(A - \lambda_0 I)$ est fermé.

Vérifions que $A - \lambda_0 I \in q\Phi(0)$, c'est à dire que:

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda_0 I).$$

Or si $\lambda \neq \lambda_0$ et si $n \in \mathbf{N}$ soit $u \in N((A - \lambda_0 I)^n)$.

Posons:

$$v = -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(A - \lambda_0 I)^j u}{(\lambda - \lambda_0)^j}.$$

Alors $v \in N((A - \lambda_0 I)^n)$.

En outre

$$(A - \lambda I) v = (A - \lambda_0 I) v - (\lambda - \lambda_0) v =$$

$$= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(A - \lambda_0 I)^j u}{(\lambda - \lambda_0)^j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(A - \lambda_0 I)^j u}{(\lambda - \lambda_0)^j} = u.$$

Donc $u \in R(A - \lambda I)$ ou encore

$$N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda I). \tag{4.2.1}$$

Donc

$$\|(I - P_{R(A-\lambda_0 I)}) u\| \leq$$

$$\leq g(R(A - \lambda I)), R(A - \lambda_0 I)) \|u\| \leq \|P_\lambda - P_{\lambda_0}\| \|u\|$$

en utilisant la proposition 1.2.4. Or $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est analytique dans U, donc continu dans U et par conséquent $P_\lambda = (A - \lambda I) \circ \mathrm{Rg}(A, \lambda)$, composé de deux applications bornées (car $A - \lambda I$ est borné de $\mathbf{D}(A)$ dans $\mathbf{H}$) donc continues en λ, est continu en λ dans U. Par conséquent en passant à la limite par $\lambda \to \lambda_0$ dans U on trouve

$$(I - P_{R(A-\lambda_0 I)}) u = 0$$

c'est à dire $u \in R(A - \lambda_0 I)$.

Donc $\lambda_0 \in \mathrm{rég}(A) \Rightarrow U \subseteq \mathrm{rég}(A)$.

« si ». Soit $\lambda_0 \in \mathrm{rég}(A)$, et soit

$$U = \{\lambda;\ |\lambda - \lambda_0| \leq c\}$$

avec $c = c(A - \lambda_0 I)$. Nous avons vu (remarque suivant la démonstration de la proposition 4.1.1) qu'alors $U \subseteq \mathrm{rég}(A)$ et que $\forall \lambda \in U$ on a :

$$g_1 = g(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda I)) < 1; \quad g_2 = g(R(A - \lambda_0 I), R(A - \lambda I)) < 1.$$

Or, si M et N sont deux sous-espaces fermés de $\mathbf{H}$ tels que $g(M, N) < 1$ on a :

$$\varepsilon(M, N) = g(M, N) < 1$$

(d'après (1.2.11) et (1.2.10)) avec $M \cap N^\perp = \{0\}$ et $M^\perp \cap N = \{0\}$.

Donc, d'après la proposition 1.3.1 $M + N^\perp = (M^\perp \cap N)^\perp = \mathbf{H}$.

Par conséquent, $\forall\ \lambda \in U$ on a:

$$H = N(A - \lambda I) \oplus (N(A - \lambda_0 I))^+ = R(A - \lambda I) \oplus (R(A - \lambda_0 I))^+.$$

Soit Q_λ la projection sur $(N(A - \lambda_0 I))^+$ correspondant à la première décomposition et P_λ la projection sur $R(A - \lambda I)$ correspondant à la deuxième. Alors, en utilisant la proposition 1.3.2 on trouve:

$$\text{(4.2.2)} \qquad ||P_\lambda|| \leq (1 - g_2^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad ||Q_\lambda|| \leq (1 - g_1^2)^{-1/2}$$

Soit maintenant $u \in \mathbf{H}$: alors $P_\lambda u \in R(A - \lambda I)$ et il existe un $v \in \mathbf{H}$ tel que $(A - \lambda I)v = P_\lambda u$.

On posera par définition $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v \in D(A)$.

Il faut montrer que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est ainsi bien défini.

En effet, soit $w \in \mathbf{H}$ tel que $(A - \lambda I)w = P_\lambda u$.

Alors $v - w \in N(A - \lambda I)$ d'où $Q_\lambda(v - w) = 0$ ou encore $Q_\lambda v = Q_\lambda w$ ce qui montre que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)u$ ne dépend pas du choix de v.

Les conditions de la définition 4.2.1 sont vérifiées.

En effet:

1) est une conséquence du fait que $\lambda \in \mathrm{rég}(A)$;

2) a déjà été établi lors de la construction de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$;

3) soit $u \in \mathbf{H}$. Alors $(A - \lambda I)\mathrm{Rg}(A, \lambda)u = (A - \lambda I) \quad Q_\lambda v = (A - \lambda I)v = = P_\lambda u$;

4) soit $v \in D(A)$. Posons $(A - \lambda I)v = u = P_\lambda u$. Alors:

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I)v = \mathrm{Rg}(A, \lambda)u = Q_\lambda v.$$

Finalement soit $u \in \mathbf{H}$ et soit

$$g_1 = g(N - \lambda I),\ N(A - \lambda_0 I)) < 1 \qquad \text{(car } \lambda \in U\text{)}.$$

Alors:

$$||P_{N(A-\lambda I)}\mathrm{Rg}(A, \lambda)u||_H =$$

$$= ||P_{N(A-\lambda I)}(I - P_{N(A-\lambda_0 I)})\mathrm{Rg}(A, \lambda)u||_H \leq g_1 ||\mathrm{Rg}(A, \lambda)u||_H$$

d'où

$$(1 - g_1^2) \| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 \leq$$
$$\leq \| (1 - P_{N(A-\lambda I)}) \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 \leq \| P_\lambda u \|_H^2 / c^2 (A - \lambda I)$$

et

$$\| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_{D(A)}^2 = \| A \, \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 + \| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 =$$
$$\| (A - \lambda I) \mathrm{Rg}(A, \lambda) u + \lambda \, \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 + \| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 \leq$$
$$\leq 2 \| P_\lambda u \|_H^2 + (2 |\lambda|^2 + 1) \| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_H^2 .$$

Donc il existe une constante K telle que $\forall \lambda \in U$

$$\| \mathrm{Rg}(A, \lambda) u \|_{D(A)} \leq K \| u \|_H$$

(en utilisant (4.2.2)). Donc $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est un opérateur continu.

Pour établir l'analyticité de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ soit $\lambda, \mu \in U$. On a:

$$(I - P_\lambda)(I - P_\mu) = I - P_\mu$$

d'où $P_\lambda P_\mu = P_\lambda$; de même $Q_\mu Q_\lambda = Q_\lambda$.

Alors, si $u \in \mathbf{H}$ on a

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) u - \mathrm{Rg}(A, \mu) u = Q_\mu \mathrm{Rg}(A, \lambda) u - \mathrm{Rg}(A, \mu) P_\lambda u =$$
$$= \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \mu I) \mathrm{Rg}(A, \lambda) u - \mathrm{Rg}(A, \mu)(A - \lambda I) \mathrm{Rg}(A, \lambda) u =$$
$$= (\lambda - \mu) \mathrm{Rg}(A, \mu) \mathrm{Rg}(A, \lambda) u.$$

En passant à la limite pour $\lambda \to \mu$ on voit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est continu en λ. Donc en divisant les deux termes de l'égalité ci-dessus par $\lambda - \mu$ et en passant à la limite pour $\mu \to \lambda$ on trouve:

$$(\mathrm{Rg}(A, \lambda))' = (\mathrm{Rg}(A, \lambda))^2$$

formule qui généralise la formule bien connue pour la dérivée de l'opérateur résolvant habituel et qui établit que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ est analytique dans U.

Corollaire 4.2.1. *Les projections P_λ et Q_λ définies au cours de la démonstration de la proposition précédente sont analytiques dans U à valeurs dans* $\mathbf{H}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'analyticité de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ et des conditions 3) et 4) de la définition de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$.

§ 3. Caractérisation des poles des opérateurs résolvants généralisés.

PROPOSITION 4.3.1. *Soit A un opérateur fermé de $\mathbf{H}$ dans lui-même et soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A - \lambda_0 I \in q\Phi(d)$, $d \in \mathbf{N}$. Alors il existe quatre constantes α, β, γ et δ positives telles que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ avec $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ on a:*

a) $A - \lambda I \in q\Phi(0)$ *et* $c(A - \lambda I) \geq \gamma |\lambda - \lambda_0|^d$;

b) $g(N(A - \lambda I),\ R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)) < \alpha |\lambda - \lambda_0|$;

c) $g(R(A - \lambda I),\ R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)) < \beta |\lambda - \lambda_0|$.

Démonstration. Soit M et N les deux sous-espaces de $\mathbf{H}$ correspondant à la décomposition de Kato de $A - \lambda_0 I$. On a:

$$A(M \cap D(A)) \subseteq M \quad \text{et} \quad A(N) \subseteq N.$$

Soit $u \in N(A - \lambda I)$; alors $u = v + w$ avec $v \in M$ et $w \in N$.

En outre

$$0 = (A - \lambda I)u = (A - \lambda I)v + (A - \lambda I)w$$

entraine

$$(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)w = 0.$$

Or $w \in N(A - \lambda_0 I)^d$ et par conséquent $(\lambda - \lambda_0)^d w = 0$ d'où $w = 0$, et $u = v$.

Donc $N(A - \lambda I) \subseteq M$, ou encore $N(A - \lambda I) = N(A - \lambda I|_M)$.

Or, $A - \lambda_0 I|_M \in q\Phi(0) \Leftrightarrow \lambda_0 \in \text{rég}(A)$ (proposition 4.1.1) et comme $\text{rég}(A)$ est ouvert (proposition 4.1.2), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \lambda \in \text{rég}(A)$$

c'est à dire que $A - \lambda I|_M \in q\Phi(0)$ ou encore que $R(A - \lambda I|_M)$ est fermé et que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad N(A - \lambda I|_M) \subseteq R((A - \lambda I|_M)^n) \subseteq R((A - \lambda I)^n).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad N(A - \lambda I) \subseteq R((A - \lambda I)^n). \tag{4.3.1}$$

En outre, si $\lambda \neq \lambda_0$, $A - \lambda I|_N$ est une bijection de N sur lui-même.

En effet, si $s \in N$ posons

$$t = -1/(\lambda - \lambda_0) \sum_{j=0}^{d-1} (\lambda - \lambda_0)^{-j} (A - \lambda_0 I)^j s.$$

Alors: $t \in N$ et $(A - \lambda I)t = s$, et par conséquent $A - \lambda I|_N$ est une surjection sur N. Par ailleurs si $r \in N(A - \lambda I|_N)$ on a:

$$A r = \lambda r \quad \text{d'où} \quad (A - \lambda_0 I)^d r = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^d r = 0 \Rightarrow r = 0$$

et par conséquent $A - \lambda I|_N$ est une bijection de N sur lui-même. En outre:

$$\|A - \lambda I|_N^{-1}\| \leq \sum_{j=0}^{d-1} |\lambda - \lambda_0|^{-j-1} k^j \leq h\,|\lambda - \lambda_0|^{-d} \tag{4.3.2}$$

où $k = \|A - \lambda I|_N\|$ et $h = \sum_{j=0}^{d-1} \delta^{d-1-j} k^j$.

Alors, si $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ on trouve:

$$R(A - \lambda I) = R(A - \lambda I|_M) + R(A - \lambda I|_N) = R(A - \lambda I|_M) + N$$

d'où on déduit que $R(A - \lambda I)$, somme de deux sous-espaces fermés respectivement de M et de N est lui-même fermé. Donc $A - \lambda I \in \Phi(0)$.

En outre, d'après la proposition 4.1.1, il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow g(N(A - \lambda I|_M),\ N(A - \lambda_0 I|_M)) \leq \alpha\,|\lambda - \lambda_0|.$$

Or:

$$N(A - \lambda_0 I|_M) = R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)$$

(en utilisant (3.2.3)) d'où on déduit immédiatement b).

De même, d'après la proposition 4.1.2, il existe $\omega > 0$ tel que:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow g(R(A - \lambda I|_M),\ R(A - \lambda_0 I|_M)) \leq \omega\,|\lambda - \lambda_0|.$$

Or:

$$R(A - \lambda I) = R(A - \lambda I|_M) + N$$

et

$$R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d) = R(A - \lambda_0 I|_M) + N$$

(cf. (3.2.4)).

En utilisant le corollaire 1.3.5 on obtient:

$$g(R(A - \lambda I),\ R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)) \leq$$

$$\leq g(R(A - \lambda I|_M),\ R(A - \lambda_0 I|_M)) \cdot (1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$$

ou $\varepsilon = \varepsilon(R(A - \lambda_0 I|_M), N^+)$ et en prenant $\beta = \omega(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$ on en déduit c).

Il reste à démontrer que $c(A - \lambda I) \geq \gamma |\lambda - \lambda_0|^d$.

Soit

$$u \in D(A);\ v = P_M u,\ w = P_N u,\ c = c(A - \lambda_0 I|_M) > 0$$

et $\varepsilon = \varepsilon(M, N^{\perp}) < 1$. Alors:

$$c(A - \lambda I|_M) \geq c - |\lambda - \lambda_0|$$

en utilisant (4.1.5).

Par conséquent si on pose $P =$ projection orthogonale sur $N(A - \lambda I)$ dans $\mathbf{H}$ on voit que $(I - P)v \in M$ et avec la définition 1.2.2 on obtient:

$$\|(A - \lambda I|_M) v\| \geq (c - |\lambda - \lambda_0|) \|(I - P) v\|. \tag{4.3.3}$$

Par ailleurs, de (4.3.2) on déduit:

$$\|w\| = \|(A - \lambda I|_N)^{-1} (A - \lambda I) w\| \leq h |\lambda - \lambda_0|^{-d} \|(A - \lambda I) w\|$$

ou encore:

$$\|(A - \lambda I) w\| \geq 1 / h |\lambda - \lambda_0|^d \|w\|. \tag{4.3.4}$$

Nous procéderons maintenant comme pour la démonstration de la proposition 1.3.2:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \|v + w\|^2 \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(v, w) \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\{I - (I - P_N)\} P_M v, \{I - (I - P_N)\} w) \\
&\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|\{I - (I - P_N)\} P_M\| \, \|v\| \, \|w\|.
\end{aligned}$$

Or

$$\|\{I - (I - P_N)\} P_M\| = \delta(M, N^{\perp}) = \varepsilon(M, N^{\perp}) = \varepsilon$$

en utilisant (1.2.10).

Donc:

$$\|u\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\varepsilon \|v\| \, \|w\|$$

ou encore

$$\|u\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \{\|v\|^2 + \|w\|^2\}. \tag{4.3.5}$$

De la même façon on trouve:

$$||(A - \lambda I)\, u||^2 \geq |||(A - \lambda I)\, v||^2 +$$
$$+ ||(A - \lambda I)\, w||^2 - 2\varepsilon\, ||A - \lambda I)\, v||\, ||(A - \lambda I)\, w||$$

ou encore:

$$||(A - \lambda I)\, u||^2 \geq (1 - \varepsilon)\, ||(A - \lambda I)\, v||^2 + (1 - \varepsilon)\, ||(A - \lambda I)\, w||^2$$
$$\geq (1 - \varepsilon)\, \{(c - |\lambda - \lambda_0|)^2\, ||(I - P)\, v||^2 + |\lambda - \lambda_0|^{2d} / h^2\, ||w||^2.$$

En choisissant δ suffisamment petit pour que

$$c - |\lambda - \lambda_0| \geq |\lambda - \lambda_0|^d / h$$

et en utilisant (4.3.5) on trouve:

$$||(I - P)\, v||^2 + ||w||^2 \geq$$
$$\geq\ ||(I - P)\, v + w||^2 / (1 + \varepsilon) \geq (1 - \varepsilon)\, ||(I - P)\, v + w||^2$$

et par conséquent, en posant $\gamma = (1 - \varepsilon) / h$:

(4.3.6) $\forall\, \lambda\, \mathbf{C},\ 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow ||(A - \lambda I)\, u|| > \gamma\, |\lambda - \lambda_0|^d\, ||(I - P)\, v + w||.$

Finalement, remarquons que $(I - P)\, u = (I - P)\, v + (I - P)\, w$ et que par **conséquent**

$$||(I - P)\, v + w||^2 =$$
$$= ||(I - P)\, u||^2 + ||P\, w||^2 \geq ||(I - P)\, u||^2.$$

Donc, de (4.3.6) il s'ensuit que:

$$\forall\, \lambda \in \mathbf{C}, \quad 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow ||(A - \lambda I)\, u|| \geq \gamma\, |\lambda - \lambda_0|^d\, ||(I - P)\, u||$$

c'est à dire que $c\,(A - \lambda I) \geq \gamma\, |\lambda - \lambda_0|^d$ et a) est démontré.

REMARQUE. Dans les conditions du théorème on peut démontrer — en utilisant le théorème 2 de [18] — que $\lim\limits_{n \to \infty} [c\,((A - \lambda_0 I)^n)]^{1/n}$ existe et fournit la meilleure valeur possible de δ (le théorème 2 de [18] n'est démontré que pour les opérateurs semi-Fredholm mais sa démonstration s'étend sans modification au cas plus général des opérateurs quasi-Fredholm).

COROLLAIRE 4.3.1. *Soit* $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ *tel que* $A - \lambda_0 I \in q\Phi(d)$. *Alors il existe un voisinage* U *de* λ_0 *dans* $\mathbf{C}$ *tel que* A *admet un opérateur résolvant généralisé analytique dans* $U - \{\lambda_0\}$, *à valeurs dans* $\mathbf{D}(A)$, *admettant un pôle d'ordre* $\leq d$ *au point* λ_0.

Démonstration. On procède comme pour la démonstration de la proposition 4.2.1 en remplaçant $N(A - \lambda_0 I)$ par $R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)$ et $R(A - \lambda_0 I)$ par $R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)$.

En effet, si $c_0 = \min\{1/\alpha, 1/\beta, \delta\}$ et si $U = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid 0 < |\lambda - \lambda_0| < c_0\}$, on a $\forall \lambda \in U$:

$$g_1 = g(N(A - \lambda I), R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)) < 1;$$

$$g_2 = g(R(A - \lambda I), R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)) < 1.$$

Donc, tout comme dans la proposition 4.2.1 on en déduit:

$$\mathbf{H} = N(A - \lambda I) + \{R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)\}^{\perp} =$$

$$= R(A - \lambda I) + \{R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)\}^{\perp}$$

et on note Q_λ la projection sur $\{R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)\}^{\perp}$ correspondant à la première décomposition et P_λ la projection sur $R(A - \lambda I)$ correspondant à la seconde. Dès lors on définit $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ comme dans la démonstration de la proposition 4.2.1 et on établit l'analycité de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ dans U exactement de la même manière.

On peut alors développer $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ en série de Laurent dans U:

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j (\lambda - \lambda_0)^j$$

ou les B_j sont des opérateurs continus de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{D}(A)$.

Soit $v \in \mathbf{H}$. Alors $\mathrm{Rg}(A, \lambda) v = \mathrm{Rg}(A, \lambda) P_\lambda v$ et il existe un $u \in D(A)$ tel que $P_\lambda v = (A - \lambda I) u$ et que $u \perp N(A - \lambda I)$.

D'après a) de la proposition 4.3.1 et si $\lambda \in U$ on a:

$$\|P_\lambda v\| = \|(A - \lambda I) u\| \geq \gamma |\lambda - \lambda_0|^d \|u\|.$$

Alors:

$$|\lambda - \lambda_0|^d \|\mathrm{Rg}(A, \lambda) v\| =$$

$$= |\lambda - \lambda_0|^d \|\mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) u\| = |\lambda - \lambda_0|^d \|Q_\lambda u\| \leq$$

$$\leq |\lambda - \lambda_0|^d \|Q_\lambda\| \|u\| \leq \|Q_\lambda\| / \gamma \|P_\lambda v\|$$

et par conséquent $|\lambda - \lambda_0|^d \, ||\mathrm{Rg}(A, \lambda)||$ est borné et on en déduit que $B_j = 0$ si $j < -d$, c'est à dire que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ a un pôle d'ordre $d_0 \leq d$ au point λ_0.

REMARQUE. En démontrant le corollaire 4.3.1 on a également montré que P_λ et Q_λ sont analytiques à valeurs dans **H** dans un voisinage de λ_0. En effet, le corollaire montre que P_λ et $Q_\lambda|_{D(A)}$ admettent un pôle d'ordre d_0 en λ_0 et comme par ailleurs nous savons que ces opérateurs sont bornés dans un voisinage de ce point, on en déduit qu'ils sont analytiques à valeurs dans **H** dans ce voisinage. Comme $Q_\lambda = I$ sur $D(A)^+$, de l'analyticité de $Q_\lambda|_{D(A)}$ et de la continuité de Q_λ on déduit celle de Q_λ.

PROPOSITION 4.3.2. *Soit U un ouvert de* **C** *et $\lambda_0 \in U$ et soit A un opérateur fermé de domaine et image contenus dans* **H**, *tel que A admette un opérateur résolvant généralisé* $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ *analytique dans $U - \{\lambda_0\}$ et à valeurs dans* $\mathbf{D}(A)$ *et tel que λ_0 soit un pôle d'ordre d de $Rg(A, \lambda)$. Supposons en outre que*

$$P_\lambda = (A - \lambda I) Rg(A, \lambda) \quad et \quad Q_\lambda = Rg(A, \lambda)(A - \lambda I)$$

soient analytiques dans U.

Alors $A - \lambda_0 I \in q\Phi(d_0)$ ou $d_0 \leq d$.

Démonstration. D'après les hypothèses on peut écrire:

$$\mathrm{Rg}(A, \lambda) = \sum_{j=-d}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j A_j$$

ou les A_j sont des opérateurs continus de **H** dans $\mathbf{D}(A)$. Alors:

$$P_\lambda = (A - \lambda I) \mathrm{Rg}(A, \lambda) = \{(A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I\} \mathrm{Rg}(A, \lambda) =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)^{-d} (A - \lambda_0 I) A_{-d} + \sum_{j=-d+1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \{(A - \lambda_0 I) A_j - A_{j-1}\}$$

et en utilisant le fait que P_λ est analytique dans un voisinage de λ_0 on en déduit:

$$(4.3.7) \qquad (A - \lambda_0 I) A_{-d} = 0 \quad (A - \lambda_0 I) A_j = A_{j-1}, \ -d < j \leq -1.$$

De même:

$$Q_\lambda = \mathrm{Rg}(A, \lambda)(A - \lambda I) = \mathrm{Rg}(A, \lambda) \{(A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I\} =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)^{-d} A_{-d} (A - \lambda_0 I) + \sum_{j=-d+1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j \{A_j (A - \lambda_0 I) - A_{j-1}\}$$

et encore en utilisant l'analyticité de Q_λ dans un voisinage de λ_0 on trouve:

(4.3.8) $\quad A_{-d}(A-\lambda_0 I)=0; \quad A_j(A-\lambda_0 I)=A_{j-1},\ j=-d,\ldots,-1.$

De (4.3.7) et (4.3.8) on déduit: (avec la convention $A_j=0$ si $j<-d$)

(4.3.9) $$\forall\, j\in\mathbf{N}, \quad A_{-j-1}=(A-\lambda_0 I)^j A_{-1}=A_{-1}(A-\lambda_0 I)^j.$$

En outre, puisque P_λ et Q_λ sont continus en λ_0 on a trouvé:

(4.3.10) $$P_{\lambda_0}=(A-\lambda_0 I)A_0-A_{-1}$$

(4.3.11) $$Q_{\lambda_0}=A_0(A-\lambda_0 I)-A_{-1}.$$

De (4.3.10) on déduit que

(4.3.12) $$R(P_{\lambda_0})\subseteq R(A-\lambda_0 I)+N((A-\lambda_0 I)^d)$$

puisque (4.3.9) entraine que

$$0=A_{-d-1}=(A-\lambda_0 I)^d A_{-1}$$

et par conséquent que

$$R(A_{-1})\subseteq N((A-\lambda_0 I)^d).$$

Or de (4.2.1) on déduit que $\forall\, j\in\mathbf{N},\ u\in N((A-\lambda_0 I)^j)\Rightarrow P_\lambda u=u.$ Donc en passant à la limite $P_{\lambda_0}u=u$ ou encore:

(4.3.13) $$\forall\, j\in\mathbf{N}, \quad N((A-\lambda_0 I)^j)\subseteq R(P_{\lambda_0}).$$

Soit maintenant $u\in R(A-\lambda_0 I)$. Alors $\exists\ v\in D(A)$ tel que

$$u=(A-\lambda_0 I)v=(A-\lambda I)v+(\lambda-\lambda_0)v$$

par conséquent

$$P_\lambda u=(A-\lambda I)v+(\lambda-\lambda_0)P_\lambda v$$

d'où, en passant à la limite

$$P_{\lambda_0}u=(A-\lambda_0 I)v=u.$$

Donc:

(4.3.14) $$R(A-\lambda_0 I)\subseteq R(P_{\lambda_0}).$$

De (4.3.12), (4.3.13), (4.3.14) on déduit:

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad R(A-\lambda_0 I) + N((A-\lambda_0 I)^j) \subseteq$$
$$\subseteq R(P_{\lambda_0}) \subseteq R(A-\lambda_0 I) + N((A-\lambda_0 I)^d)$$

d'où:

$$\forall\, j \geq d, \quad R(A-\lambda_0 I) + N((A-\lambda_0 I)^j) = R(P_{\lambda_0}) = N(I-P_{\lambda_0})$$

ou encore

$$d_0 = \operatorname{dis}(A-\lambda_0 I) \leq d,\ R(A-\lambda_0 I) + N((A-\lambda_0 I)^{d_0}) \text{ est fermé.}$$

Soit maintenant

$$u \in R((A-\lambda_0 I)^d) \cap N(A-\lambda_0 I).$$

Alors $\exists\, v \in D(A^d)$ tel que $u = (A-\lambda_0 I)^d v$ et par conséquent, en utilisant (4.3.11) on trouve:

$$Q_{\lambda_0} u = A_0(A-\lambda_0 I)u - A_{-1}(A-\lambda_0 I)^d v = 0$$

et on en déduit que

(4.3.15) $$R((A-\lambda_0 I)^d) \cap N(A-\lambda_0 I) \subseteq N(Q_{\lambda_0}).$$

Inversement soit $u \in N(Q_{\lambda_0})$.

Alors quand $\lambda \to \lambda_0$, $Q_\lambda u \to Q_{\lambda_0} u$ et

$$(A-\lambda_0 I)Q_\lambda u = (A-\lambda I)Q_\lambda u + (\lambda-\lambda_0)Q_\lambda u =$$
$$= (A-\lambda I)(Q_\lambda - I)u + (A-\lambda I)u + (\lambda-\lambda_0)Q_\lambda u$$

a pour limite $(A-\lambda_0 I)u$ puisque $(Q_\lambda - I)u \subseteq N(A-\lambda I)$.

Donc comme $A-\lambda_0 I$ est un opérateur fermé, on trouve:

$$(A-\lambda_0 I)u = 0$$

d'où:

(4.3.16) $$N(Q_{\lambda_0}) \subseteq N(A-\lambda_0 I).$$

Montrons maintenant par induction que si $u \in N(Q_{\lambda_0})$ on a:

(4.3.17) $$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad u = (A-\lambda_0 I)^j A_0^j\, u.$$

Pour $j = 1$ on remarque qu'en utilisant (4.3.11) on a:

$$Q_{\lambda_0} = 0 \Rightarrow A_0(A - \lambda_0 I)u - A_{-1}u = A_{-1}u = 0 \tag{4.3.18}$$

t en utilisant (4.3.10) et (4.3.13) on trouve $u = P_{\lambda_0}u = (A - \lambda_0 I)A_0 u$.

Supposons maintenant (4.3.17) démontré pour $j \leq m$.

Alors $A_0^m u \in N((A - \lambda_0 I)^{m+1})$ et en utilisant de nouveau (4.3.10) et (4.3.13) n trouve:

$$A_0^m u = P_{\lambda_0} A_0^m u = (A - \lambda_0 I) A_0^{m+1} u - A_{-1} A_0^m u$$

t en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient:

$$u = (A - \lambda_0 I)^m A_0^m u = (A - \lambda_0 I)^{m+1} A_0^{m+1} u - (A - \lambda_0 I)^m A_{-1} A_0^m u =$$
$$= (A - \lambda_0 I)^{m+1} A_0^{m+1} u$$

uisque

$$(A - \lambda_0 I)^m A_{-1} A_0^m u = A_{-1}(A - \lambda_0 I)^m A_0^m u = A_{-1} u = 0$$

n utilisant (4.3.18).

Donc (4.3.17) est démontré et on en déduit que

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad N(Q_{\lambda_0}) \subseteq R((A - \lambda_0 I)^j).$$

Avec (4.3.15) et (4.3.16) on peut en conclure que

$$N(Q_{\lambda_0}) = R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I) = R((A - \lambda_0 I)^{d_0}) \cap N(A - \lambda_0 I)$$

ui est donc fermé, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Remarque. De [6] on tire que tous les opérateurs résolvants généralisés ssociés à un opérateur A dans un domaine U ont un pôle de même ordre en n point λ_0 de U. Donc le corollaire 4.3.1 permet de conclure que dans la proosition 4.3.2 on peut en fait affirmer que $d_0 = d$.

Corollaire 4.3.2. *Soit $\lambda_0 \in \mathbf{C}$. Alors les trois conditions suivantes sont équialentes*:

a) $A - \lambda_0 I \in q\Phi(d) \in \mathbf{N}$;

b) *Il existe un voisinage U de λ_0 dans $\mathbf{C}$ tel que A admette un opérateur ésolvant généralisé $Rg(A, \lambda)$ dans $U - \{\lambda_0\}$ tel que*:

b$_1$) *$Rg(A, \lambda)$ est analytique à valeurs dans* $\mathbf{D}(A)$ *dans $U - \{\lambda_0\}$ et admet un pôle d'ordre d au point λ_0.*

b$_2$) *Les projections P_λ et Q_λ correspondantes sont analytiques dans U.*

c) *Il existe quatre constantes positives α, β, γ et δ et deux sous-espaces fermés* $\mathbf{H}_1$ *et* $\mathbf{H}_2$ *de* $\mathbf{H}$ *tels que les conditions suivantes soient satisfaites pour tout λ tel que $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$:*

c$_1$) $g(N(A - \lambda I), H_1) < \alpha |\lambda - \lambda_0|$;

c$_2$) $g(R(A - \lambda I), H_2) < \beta |\lambda - \lambda_0|$;

c$_3$) $c(A - \lambda I) \geq \gamma |\lambda - \lambda_0|^d$, *$d$ étant le plus petit entier tel que l'inégalité soit vérifiée.*

REMARQUE. c$_3$) $\Rightarrow R(A - \lambda I)$ fermé, et par conséquent c$_2$) a un sens.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ c) se déduit de la proposition 4.3.1 en prenant

$$H_1 \Rightarrow R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)$$

et

$$H_2 = R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d).$$

c) $\Rightarrow$ b). Il suffit de reprendre la démonstration du corollaire 4.3.1 (en remplaçant

$$R((A - \lambda_c I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)$$

par H_1 et

$$R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)$$

par H_2) et de tenir compte de la remarque suivant la proposition 4.3.2.

b) $\Rightarrow$ a) se déduit de la proposition 4.3.2 et de la remarque suivant cette proposition.

REMARQUE. Sous les conditions du corollaire on a:

1) $A - \lambda I \in q\,\Phi(0)$;

2) $H_1 = R((A - \lambda_0 I)^d) \cap N(A - \lambda_0 I)$;

3) $H_2 = R(A - \lambda_0 I) + N((A - \lambda_0 I)^d)$.

CONJECTURE. Nous avons vu plus haut que $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$ n'est pas uniquement déterminé. Il semble probable que si la condition b$_1$) est vérifiée pour un choix de $\mathrm{Rg}(A, \lambda)$, il existe un autre choix pour lequel b$_1$) et b$_2$) sont vérifiés.

CHAPITRE V

APPLICATIONS

§ 1. Opérateurs bornés dont le spectre essentiel est vide.

De la proposition 4.3.1 il découle que l'ensemble résolvant quasi-Fredholm d'un opérateur fermé A, c'est à dire l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \in q\Phi\}$ est ouvert dans $\mathbf{C}$. En outre, chaque point de cet ensemble possède un voisinage dans lequel $A - \lambda I$ admet un inverse généralisé méromorphe. En utilisant le théorème 1 de [37] on peut montrer que par conséquent A admet un opérateur résolvant généralisé dont le domaine de méromorphie est précisément l'ensemble résolvant quasi-Fredholm de A. Nous n'utiliserons pas ici ce résultat, mais il permet de justifier l'emploi du terme spectre essentiel (déjà employé dans des sens divers par plusieurs auteurs) dans la définition suivante.

DEFINITION 5.1.1. Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A) \subseteq \mathbf{H}$. L'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \mid A - \lambda I \notin q\Phi\}$ sera appelé le *spectre essentiel* de A et sera noté $\sigma_e(A)$.

REMARQUE:

$$\sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$$

et c'est un sous ensemble fermé de $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 5.1.1. *Soit T un opérateur linéaire borné de $\mathbf{H}$ dans lui-même, tel que $\sigma_e(T)$ soit vide. Alors il existe un $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, tous distincts, tels que*:

$$\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

Démonstration:

$$\sigma_e(T) = \emptyset \Rightarrow \forall\, \lambda \in \mathbf{C},\ T - \lambda I \in q\Phi.$$

Or les points λ tels que $T - \lambda I \in q\Phi(d)$ avec $d \geq 1$ sont des points isolés (proposition 4.3.1 a)).

Par ailleurs, comme T est borné ces points sont tous contenus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|T\|$. Par conséquent, ils sont en nombre fini, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Donc $\text{rég}\,(T) = \mathbf{C} - \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, ensemble ouvert et connexe.

Comme l'application $\lambda \to N(T - \lambda I)$ est continue dans rég (T) (proposition 4.1.2 a)) et que $N(T - \lambda I) = \{0\}$ quand $|\lambda| > \|T\|$ on en déduit que $N(T - \lambda I) = \{0\}$ pour tout $\lambda \in$ rég (T). De même, comme l'application $\lambda \to R(T - \lambda I)$ est continue dans rég (T) (proposition 4.1.2 b)) et que $R(T - \lambda I) = \mathbf{H}$ quand $|\lambda| > \|T\|$, on en déduit que $R(T - \lambda I) = \mathbf{H}$ pour tout $\lambda \in$ rég (T). Donc rég $(T) = \rho(T)$ l'ensemble résolvant de T et la proposition est démontrée.

Remarque. Si $\dim \mathbf{H} < \infty$ alors $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $T - \lambda I$ est de Fredholm, donc quasi-Fredholm et par conséquent $\sigma_e(T) = \emptyset$.

Proposition 5.1.2. *Soit T borné avec $\sigma_e(T) = \emptyset$.*
Alors:

1) *$\exists\, N_1, N_2, \ldots, N_n$, sous espaces fermés de $\mathbf{H}$ tels que $\mathbf{H} = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ et avec $\forall\, j$: $T(N_j) \subseteq N_j$; $T - \lambda_j I|_{N_j}$ nilpotent.*

2) *$\exists\, Q$, opérateur nilpotent et $\exists\, S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$, ou P_j est la projection de $\mathbf{H}$ sur N_j correspondant à la décomposition $\mathbf{H} = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$, tels que $T = S + Q$ et $SQ = QS$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Soit M_j et N_j les deux sous espaces de $\mathbf{H}$ correspondants à la décomposition de Kato de $T - \lambda_j I$ (c.f. théorème 3.2.1) et soit $d_j = \operatorname{dis}(T - \lambda_j I)$.

Alors pour tout j tel que $1 \leq j \leq n$ on a: $M_j \oplus N_j$.

Montrons par induction que pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$ on a:

$$\mathbf{H} = \bigcap_{j=1}^{k} M_j \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{k} N_j\Big) \tag{5.1.1}$$

$$M_k = \bigcap_{j=1}^{n} M_j \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} N_j\Big). \tag{5.1.2}$$

Commençons par (5.1.1): pour $k = 1$ on trouve $\mathbf{H} = M_1 \oplus N_1$ qui est vrai.

Supposons (5.1.1) démontré pour $k < n$.

Alors

$$N_{k+1} \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} M_j. \tag{5.1.3}$$

En effet, soit $u \in N_{k+1}$. Alors il existe un $v \in \bigcap_{j=1}^{k} M_j$ et un $w_j \in N_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ tels que $u = v + \sum_{j=1}^{k} w_j$ (par hypothèse d'induction).

Mais alors

$$0 = (T - \lambda_{k+1} I)^{d_{k+1}} u = (T - \lambda_{k+1} I)^{d_{k+1}} v + \sum_{j=1}^{k} (T - \lambda_{k+1} I)^{d_{k+1}} w_j$$

et comme $\bigcap_{j=1}^{k} M_j$ et chaque N_j sont stables pour $T - \lambda_{k+1} I$ on en déduit (hypothèse d'induction) que

$$\forall\, j (1 \leq j \leq k): \ (T - \lambda_{k+1} I)^{d_{k+1}} w_j = 0.$$

Or

$$\forall\, j (1 \leq j \leq k): \ (T - \lambda_j I)^{d_j} w_j = 0.$$

Donc:

$$\forall\, j (1 \leq j \leq k): \ (\lambda_{k+1} - \lambda_j)^{d_j + d_{k+1}} w_j =$$

$$= \{(T - \lambda_j I) - (T - \lambda_{k+1} I)\}^{d_j + d_{k+1}} w_j =$$

$$= \sum_{h=0}^{d_j + d_{k+1}} \binom{d_j + d_{k+1}}{h} (-1)^h (T - \lambda_j I)^{d_j + d_{k+1} - h} (T - \lambda_{k+1} I)^h w_j = 0$$

puisque

$$\forall\, h (0 \leq h \leq d_j + d_{k+1})$$

on a soit $h \geq d_{k+1}$ ou bien

$$d_j + d_{k+1} - h \geq d_j .$$

Comme $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$ on a donc:

$$\forall\, j (1 \leq j \leq k): \ w_j = 0$$

et par conséquent

$$u = v \in \bigcap_{j=1}^{k} M_j$$

et (5.1.3) est démontré.

Soit maintenant $x \in \bigcap_{j=1}^{k} M_j$. Alors il existe $y \in M_{k+1}$ et $z \in N_{k+1}$ tels que $x = y + z$. Mais alors $y = x - z \in \bigcap_{j=1}^{k} M_j$ d'où $y \in \bigcap_{j=1}^{k+1} M_j$ et par conséquent

$$\mathbf{H} \subseteq \bigcap_{j=1}^{k+1} M_j \oplus (\bigoplus_{j=1}^{k+1} N_j) \subseteq \mathbf{H}$$

et (5.1.1) est démontré.

Remarquons maintenant que (5.1.3) est vrai quel que soit l'ordre dans lequel on a choisi d'énumérer les points de $\sigma(T)$. On en déduit que:

$$(5.1.4) \qquad \forall\, j (1 \leq j \leq n), \quad \forall\, k (1 \leq k \leq n), k \neq j \Rightarrow N_k \subseteq M_j .$$

De même (5.1.1) est vrai quel que soit l'ordre dans lequel on a choisi d'enumérer les points de $\sigma(T)$. Donc:

$$(5.1.5) \qquad \forall\, k (1 \leq k \leq n), \ \mathbf{H} = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} M_j \oplus (\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} N_j).$$

Posons:

$$\bigcap_{j=1}^{n} M_j \oplus (\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} N_j) = M'_k, \qquad N_0 = \bigcap_{j=1}^{n} M_j .$$

Alors, en utilisant (5.1.4) et (5.1.5) on trouve:

$$\forall\, k (1 \leq k \leq n); \qquad M_k = \mathbf{H} \cap M_k \subseteq M'_k \subseteq M_k$$

et (5.1.2) est démontré.

Posons maintenant $T_0 = T|_{N_0}$, la restriction de T à N_0 et $I_0 = I|_{N_0}$ la restriction de l'opérateur identique à N_0. Nous allons montrer que $\text{rég}(T_0) = \mathbf{C}$.

En effet, si $\lambda \in \rho(T)$, l'ensemble résolvant de T, on voit sans difficulté que $\lambda \in \rho(T_0)$. Si par contre $\lambda \in \sigma(T)$, alors $\lambda = \lambda_j$ pour un certain $j (1 \leq j \leq n)$. Or, en prenant $k = j$ dans (5.1.2) on trouve:

$$(5.1.6) \qquad M_j = N_0 \oplus (\bigoplus_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} N_h)$$

d'où

$$R(T - \lambda_j I|_{M_j}) = R(T_0 - \lambda_j I_0) \oplus (\bigoplus_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} R(T - \lambda_j I|_{N_h})$$

et comme le premier membre de l'égalité est fermé (théorème 3.2.1) on en déduit (proposition 2.1.1) que $R(T_0 - \lambda_j I_0)$ est fermé.

En outre, soit

$$u \in N(T_0 - \lambda_j I_0) = N(T - \lambda_j I) \cap N_0 \subseteq N(T - \lambda_j) \cap M_j .$$

Alors: $\forall\ k \in \mathbf{N}\ \ \exists\ v_j \in M_j$ tel que $u = (T - \lambda_j I)^k v_j$.

En effet, d'après (3.2.3)

$$N(T - \lambda_j I) \cap M_j = N(T - \lambda_j I) \cap R((T - \lambda_j I)^{d_j}) \subseteq$$

$$\subseteq N(T - \lambda_j I) \cap R((T - \lambda_j I)^k)$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Or, en utilisant (5.1.6) on voit qu'il existe $v_h \in N_h$ avec $(0 \leq h \leq n)$, $h \neq j$, tels que

$$v_j = v_0 + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} v_h$$

d'où

$$u = (T_0 - \lambda_j I_0)^k v_0 + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} (T - \lambda_j I)^k v_h$$

et comme $(T_0 - \lambda_j I_0)^k v_0 \in N_0$ on en déduit que

$$\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} (T - \lambda_j I)^k v_h \in N_0 \cap \{ \bigoplus_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} N_j \} = \{0\},$$

donc:

$$u = (T_0 - \lambda_j I_0)^k v_0$$

ou encore

$$\forall\ k \in \mathbf{N}, \quad N(T_0 - \lambda_j I_0) \subseteq R((T_0 - \lambda_j I_0)^k)$$

c'est à dire que $\lambda_j \in \text{rég}\,(T_0)$.

Donc $\text{rég}\,(T_0) = \mathbf{C}$ et comme T_0 est borné on en déduit comme dans la démonstration de la proposition 5.1.1 que $\rho(T_0) = \mathbf{C}$, ce qui n'est possible que si $N_0 = \{0\}$.

Donc, en prenant $k = n$ dans (5.1.1) on démontre la première partie de l'énoncé de la proposition.

Pour démontrer 2), remarquons tout d'abord que $\forall\ j\,(1 \leq j \leq n)\, T P_j = P_j T$ d'où

$$TS = ST. \tag{5.1.7}$$

En outre, si nous posons $Q_j = (T - \lambda_j I) P_j$ on a:

$$T = \sum_{j=1}^{n} T P_j = S + Q \qquad \text{ou} \qquad Q = \sum_{j=1}^{n} Q_j ,$$

et par conséquent, comme (5.1.7) entraîne $QS = SQ$, il reste seulement a montrer que Q est nilpotent. Pour celà posons: $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.

Alors, si $u \in \mathbf{H}$ quelconque on a:

$$Q^d u = \sum_{j=1}^{n} Q^d P_j u = \sum_{j=1}^{n} (T - \lambda_j)^d P_j u = 0$$

et la proposition est démontrée.

Corollaire 5.1.1. *Soit T borné avec $\sigma_e(T) = \emptyset$. Alors T est spectral au sens de Dunford (c.f.* [16]*).*

Démonstration. Evident dès lors que tout opérateur spectral est caractérisé par le fait qu'il peut s'écrire comme la somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur quasi-nilpotent commutant entre eux.

Remarque. Dans le cas ou $\dim \mathbf{H} < \infty$ on retrouve le résultat bien connu qui exprime le fait que toute matrice carrée finie est semblable à une matrice de Jordan.

§ 2. Compléments sur les opérateurs quasi-Fredholm.

Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A) \subseteq \mathbf{H}$ et d'image $R(A) \subseteq \mathbf{H}$ avec $A \in q\Phi$.

Posons

$$C(A) = \bigcap_{j \in \mathbf{N}} R(A^j).$$

Rappelons que d'après le théorème 3.2.1, $A \in q\Phi$ entraine qu'il existe deux sous espaces fermés M et N de $\mathbf{H}$, invariants par A, tels que:

$$M + N = \mathbf{H}, \qquad M \cap N = \{0\}$$

avec $N \subseteq N(A^d)$ ou $d = \operatorname{dis}(A)$.

En outre si A_0 est la restriction de A à M on a: $A_0 \in q\,\Phi(0)$, ce qui entraine en particulier que $R(A_0)$ est fermé.

Comme $N \subseteq N(A^d)$ on voit que si $j \geq d$, $R(A^j) \subseteq M$.

Finalement (3.2.22) peut s'écrire:

$$N \oplus R(A_0) = R(A) + N(A^d).$$

Dans le reste de ce chapitre nous utiliserons fréquemment ces notations et ces résultats.

PROPOSITION 5.2.1:

1) *$C(A)$ est un sous-espace fermé de* **H**, *et on a*: $C(A) \subseteq M$;

2) *A envoie $C(A)$ sur lui-même;*

3) *il existe un opérateur linéaire continu S de $C(A)$ dans lui-même tel que* $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\forall\, u \in C(A)$, $S^n u \in D(A^n)$ *et* $A^n S^n u = u$.

Démonstration:

1) Soit $d = \operatorname{dis}(A)$. Alors $C(A) = \bigcap_{j \geq d} R(A^j)$ est une intersection d'espaces fermés (car d'après la proposition 3.3.5 $j \geq d \Rightarrow R(A^j)$ fermé) et par conséquent $C(A)$ est fermé. En outre $j \geq d \Rightarrow R(A^j) \subseteq M$. Donc $C(A) \subseteq M$.

2) Soit maintenant $u \in C(A) \subseteq R(A) \cap M = A(M \cap D(A))$.

Alors $\exists\, v \in M \cap D(A)$ avec $v \perp N(A) \cap M$ tel que $A\,v = u$.

Ce v est unique et on a:

$$\|v\| \leq 1 / c(A_0)\, \|u\|$$

ou $c(A_0)$ — la conorme de la restriction A_0 de A à M — est strictement positive en vertu de (1.2.5) et du fait que $R(A_0)$ est fermé. Posons $S\,u = v$. Alors $\|S\| \leq 1 / c(A_0) < \infty$.

Donc S est bien définie et continue comme application linéaire de $C(A)$ dans **H** à valeurs dans $D(A)$, et on a: $A\,S\,u = u$.

Montrons maintenant que $S\,u \in C(A)$, c'est à dire que $\forall\, j \in \mathbf{N}$, $S\,u \in R(A^j)$.

Procédons par induction.

$$u \in C(A) \Rightarrow u \in R(A^2) \Rightarrow S\,u \in (R(A) + N(A)) \cap M \subseteq (R(A) + N(A^d)) \cap M.$$

Donc $Su \in A(M \cap D(A))$ puisque $N \oplus A(M \cap D(A)) = R(A) + N(A^d)$ d'après (3.2.22). Donc $Su \in R(A_0)$.

Supposons démontré maintenant que $Su \in R(A_0^j)$.

Alors $\exists\ x \in M \cap D(A^j)$ tel que $A^j x = Su$, d'ou $u = A\,Su = A_0^{j+1}x$.

Comme $u \in C(A) \subseteq R(A^{j+2})$ on en déduit que

$$x \in (R(A) + N(A^{j+1})) \cap M \subseteq (R(A) + N(A^d)) \cap M \subseteq R(A_0)$$

(en utilisant b) de la proposition 3.1.1). Donc $Su = A^j x \in R(A_0^{j+1})$, et nous avons ainsi démontré que $Su \in C(A)$ et par conséquent que A envoie $C(A)$ sur lui-même.

3) Nous avons déjà établi 3) pour le cas $n = 1$. Le cas général se démontre par induction: supposons le résultat vrai pour n. Alors

$$S^{n+1} u \in C(A)$$

et

$$A\,S^{n+1} u = S^n u \in D(A^n).$$

Donc

$$S^{n+1} u \in D(A^{n+1})$$

et

$$A^{n+1} S^{n+1} u = A^n S^n u = u.$$

REMARQUE. Le fait que A envoie $C(A)$ sur lui même montre que si $A \in q\Phi$, $C(A)$ est le coeur de A tel qu'il a été défini par P. Saphar dans [36].

COROLLAIRE 5.2.1. *Soit $\hat{A}$ la restriction de A à $C(A)$. Alors:*

(5.2.1) $$R(\hat{A}) = C(A)$$

et si $d = dis(A)$,

(5.2.2) $$N(\hat{A}) = R(A^d) \cap N(A).$$

Démonstration. (5.2.1) n'est qu'une autre façon d'écrire 2) de la proposition précédente. En outre:

$$N(\hat{A}) = N(A) \cap C(A) \subseteq N(A) \cap R(A^d).$$

Or d'après la proposition 3.1.1:

$$N(A) \cap R(A^d) \subseteq C(A).$$

Donc

$$N(A) \cap C(A) = N(A) \cap R(A^d).$$

PROPOSITION 5.2.2. *Soit $T \in q\,\Phi(d)$ et soit T borné. Soit encore X un opérateur borné, inversible de* $\mathbf{H}$ *sur lui-même tel que X^{-1} soit également borné.*
Alors

$$XTX^{-1} \in q\,\Phi(d). \tag{5.2.3}$$

Démonstration. Par transport de structure.

COROLLAIRE 5.2.2. *Soit T un opérateur borné sur* $\mathbf{H}$ *et soit X comme dans la proposition précédente. Alors $\sigma_e(XTX^{-1}) = \sigma_e(T)$.*

Démonstration. Par transport de structure.

§ 3. Les opérateurs paranormaux bornés.

Dans ce paragraphe T dénotera toujours un opérateur linéaire borné $\mathbf{H}$ dans lui-même. Posons:

$$[T]_0 = T^*.$$

Pour $j \in \mathbf{N}$, $[T]_{j+1} = i\,[T, [T]_j]$, le commutateur de T et de $[T]_j$, multiplié par $i = \sqrt{-1}$.

PROPOSITION 5.3.1.

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{C}, \quad j \geq 1 \Rightarrow [T]_j = [T - \lambda I]_j \tag{5.3.1}$$

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad [T]_j^* = [T^*]_j\,. \tag{5.3.2}$$

Démonstration. Par induction. Commençons par (5.3.1)

$$[T - \lambda I]_1 = i\{(T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) - (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I)\} =$$

$$= i(TT^* - T^*T) = [T]_1$$

ce qui établit (5.3.1) pour $n = 1$.

Supposons maintenant (5.3.1) vrai pour n. Alors:

$$\begin{aligned}[T-\lambda I]_{n+1} &= i\,[T-\lambda I,\,[T-\lambda I]_n]\\ &= i\,[T-\lambda I,\,[T]_n]\\ &= i\,[T,\,[T]_n] - \lambda i\,[I,\,[T]_n] = [T]_{n+1}\end{aligned}$$

et (5.3.1) est démontré.

Par ailleurs:

$$[T]_0^* = (T^*)^* = T = [T^*]_0\,.$$

Supposons maintenant (5.3.2) vrai pour n. Alors:

$$[T]_{n+1}^* = \{i\,[T,\,[T]_n]\}^* = -\,i\,[[T]_n^*,\,T^*] = i\,[T^*,\,[T^*]_n] = [T^*]_{n+1}$$

et (5.3.2) est démontré.

NOTATIONS. Dans le reste de ce paragraphe nous omettrons d'écrire le crochet, c'est-à-dire que nous écrirons T_n au lieu de $[T]_n$.

DEFINITION 5.3.1. Nous dirons que T est *paranormal* si $\lim\limits_{n\to\infty} ||T_n||^{1/n} = 0$. Nous écrirons alors $T \in pN$.

REMARQUES:

1) Si T est normal, $T_n = 0$ si $n \geq 1$. Donc T normal $\Rightarrow$ T paranormal.

2) $T \in pN \Leftrightarrow T^* \in pN$. En effet: $\lim\limits_{n\to\infty} ||T_n||^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} ||T_n^*||^{1/n}$.

PROPOSITION 5.3.2. *T quasi-nilpotent $\Rightarrow$ T paranormal.*

Démonstration. Montrons d'abord, par induction, que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ on a:

$$T_n = i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j\, T^{n-j}\, T^*\, T^j \tag{5.3.3}$$

en effet, pour $n = 0$, (5.3.3) se réduit à $T_0 = T^*$, qui est vrai.

Supposons donc (5.3.3) vérifié pour n. Alors:

$$T_{n+1} = i^{n+1} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j T^{n+1-j} T^* T^j - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j T^{n-j} T^* T^{j+1} \right\}$$

$$= i^{n+1} \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} (-1)^j T^{n+1-j} T^* T^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-1)^j T^{n+1-j} T^* T^j \right\}$$

$$= i^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j T^{n+1-j} T^* T^j$$

et (5.3.3) est démontré.

Donc $\forall\, n \in \mathbf{N}$ on a:

$$||T_n|| \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ||T^{n-j}||\, ||T^*||\, ||T^j||$$

et comme $\binom{n}{j} \leq 2^n$, $\forall\, \rho \in \mathbf{R}^+$ on a:

$$||T_n|| \leq \rho^n ||T|| \sum_{j=0}^{n} (2/\rho)^{n-j} ||T^{n-j}|| (2/\rho)^j ||T^j|| \leq \rho^n ||T|| \sum_{j=0}^{n} (2/\rho)^{2j} ||T^j||^2$$

(en utilisant l'inégalité de Schwarz).

Posons:

$$\theta(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} (2/\rho)^{2j} ||T^j||^2.$$

Notons que $\theta(\rho)$ existe est fini pour tout $\rho \in \mathbf{R}^+$ puisque $\lim\limits_{j\to\infty} ||T^j||^{2/j} = 0$ (T étant supposé quasi-nilpotent).

Donc:

$$\forall\, \rho \in \mathbf{R}^+, \quad ||T_n|| \leq \rho^n ||T||\, \theta(\rho)$$

d'où:

$$\forall\, \rho \in \mathbf{R}^+, \quad ||T_n||^{1/n} \leq \rho (||T||\, \theta(\rho))^{1/n}$$

et par conséquent

$$\forall\, \rho \in \mathbf{R}^+, \quad \lim_{n\to\infty} ||T_n||^{1/n} \leq \rho \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||T_n||^{1/n} = 0.$$

Donc T est paranormal.

Dans ce qui suit nous allons utiliser plusieurs notions et résultats du chapitre XV du Tome III de [16].

PROPOSITION 5.3.3. *Si T est un opérateur spectral borné (au sens de Dunford) il existe un opérateur continu inversible X de* $\mathbf{H}$ *dans lui-même (avec X^{-1} continu) tel que $XTX^{-1} \in pN$.*

Démonstration. Le théorème 5 de [16] (p. 1939) dit que si T est spectral il peut s'écrire comme la somme d'un opérateur scalaire S et d'un opérateur quasi-nilpotent Q tels que $SQ = QS$. Le théorème 4 (p. 1947) dit que pour tout opérateur scalaire S il existe un opérateur continu inversible X tel que X^{-1} soit continu et que $XSX^{-1} = \hat{S}$ soit normal. Posons alors $\hat{Q} = XQX^{-1}$. On voit par transport de structure que $\hat{Q}$ est encore quasi-nilpotent et que $XTX^{-1} = \hat{S} + \hat{Q}$ avec $\hat{S}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{S}$. Finalement le lemme 6 (p. 1948) dit que puisque $\hat{S}$ est normal on doit avoir également $\hat{S}^*\hat{Q} = \hat{Q}\hat{S}^*$ et par conséquent $\hat{S}\hat{Q}^* = \hat{Q}^*\hat{S}$.

Posons $\hat{T} = XTX^{-1}$ et montrons par induction que pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ on a:

$$\hat{T}_n = \hat{Q}_n. \tag{5.3.4}$$

En effet, pour $n = 1$ on a:

$$\hat{T}_1 = i(\hat{T}\hat{T}^* - \hat{T}^*\hat{T}) =$$

$$= i\{(\hat{S} + \hat{Q})(\hat{S}^* + \hat{Q}^*) - (\hat{S}^* + \hat{Q}^*)(\hat{S} + \hat{Q})\} =$$

$$= i\{\hat{S}\hat{S}^* + \hat{Q}\hat{S}^* + \hat{S}\hat{Q}^* + \hat{Q}\hat{Q}^* - \hat{S}^*\hat{S} - \hat{S}^*\hat{Q} - \hat{Q}^*\hat{S} - \hat{Q}^*\hat{Q}\} = \hat{Q}_1.$$

Supposons maintenant (5.3.4) vrai pour n. Alors:

$$\hat{T}_{n+1} = i[\hat{T}, \hat{T}_n] = i[\hat{S}, \hat{Q}_n] + i[\hat{Q}, \hat{Q}_n].$$

Or $\hat{S}$ commute avec $\hat{Q}$ et avec $\hat{Q}^*$. Donc $[\hat{S}, \hat{Q}_n] = 0$ et par conséquent $\hat{T}_{n+1} = \hat{Q}_{n+1}$ ce qui démontre (5.3.4).

Finalement, d'après la proposition 5.3.2:

$$\lim_{n\to\infty} ||\hat{T}_n||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} ||\hat{Q}_n||^{1/n} = 0$$

d'où $\hat{T} \in pN$.

DEFINITION 5.3.2. *Si T est tel qu'il existe un opérateur borné inversible X tel que X^{-1} soit également borné et tel que XTX^{-1} soit paranormal, nous dirons que T est quasi-normal.*

REMARQUE. La proposition 5.3.3 peut s'énoncer ainsi:

T spectral, borné $\Rightarrow$ T quasi-normal.

PROPOSITION 5.3.4. *Soit* $n \in \mathbf{N}$. *Alors*:

$$T^* T^n = i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n-j}. \tag{5.3.5}$$

Démonstration. Par induction. Pour $n = 0$, (5.3.5) est évident. Supposons le vrai pour n. Alors:

$$
\begin{aligned}
T^* T^{n+1} &= i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n-j} T \\
&= i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j (T_{n-j} T - T T_{n-j}) + i^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^{j+1} T_{n-j} \\
&= i^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n+1-j} + i^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^{j+1} T_{n-j} \\
&= i^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n+1-j} + i^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-iT)^j T_{n+1-j} \\
&= i^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) (-iT)^j T_{n+1-j} \\
&= i^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j+1} (-iT)^j T_{n+1-j}
\end{aligned}
$$

et (5.3.5) est démontré.

§ 4. Opérateurs quasi-Fredholm paranormaux.

PROPOSITION 5.4.1. *Soit* $T \in q\Phi(d)$ *et* $T \in pN$. *Alors, avec les notations de la proposition* 5.2.1, T^* *envoie* $C(T)$ *dans lui-même.*

Démonstration. Soit $u \in C(T)$ et soit S l'opérateur défini dans la proposition 5.2.1. Soit $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ avec $n \geq k \geq 1$. Alors, en utilisant (5.3.5) on a:

$$T^* u = T^* T^n S^n u = i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n-j} S^n u$$

donc:

$$T^* u - i^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (-\,i\,T)^j\, T_{n-j}\, S^n u \in R(T^k)$$

or:

$$\left\| i^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (-\,i\,T)^j\, T_{n-j}\, S^n u \right\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \|T\|^j \, \|T_{n-j}\| \, \|S\|^n \, \|u\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} (2\,\|T\|\,\|S\|)^j \, (2\,\|T_{n-j}\|^{1/(n-j)}\,\|S\|)^{n-j}\,\|u\|$$

puisque $\binom{n}{j} \leq 2^n$. Or, comme T est paranormal, $\exists\, n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \forall\, j\,(0 \leq j \leq k-1)\ \|T_{n-j}\|^{1/(n-j)} \leq 1/4\,\|S\|.$$

Posons:

$$K = \sum_{j=0}^{k-1} (4\,\|T\|\,\|S\|)^j.$$

Alors:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\| i^n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (-\,i\,T)^j\, T_{n-j}\, S^n u \right\| \leq 2^{-n} K\,\|u\|.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} K\,\|u\| = 0$, on en déduit que $T^* u \in R(\overline{T^k})$ et par conséquent que $T^* u \in R(T^k)$ si $k \geq d$.

Come ceci est vrai pour tout $k \geq d$, on voit que $T^* u \in C(T)$.

Remarque. Il découle des propriétés des opérateurs quasi-Fredholm et paranormaux que si T est à la fois quasi-Fredholm et paranormal il en va de même pour T^*.

Notations. Dans le reste de ce paragraphe nous écrirons seulement C au lieu de $C(T)$ et C^* au lieu de $C(T^*)$.

Corollaire 5.4.1. *Soit* $T \in q\,\Phi(d) \cap p\,N$. *Alors*:

(5.4.1) $$C = T^*(C) \oplus R(T^d) \cap N(T)$$

(5.4.2) $$C^* = T(C^*) \oplus R(T^{*d}) \cap N(T^*).$$

Démonstration. Soit $\hat{T}$ la restriction de T à C. La proposition précédente montre que $(\hat{T})^* = \hat{T}^*$. Comme $R(\hat{T}) = C$ est fermé, il en va de même pour

$R(\hat{T}^*)$ et on a: $C = R(\hat{T}^*) \oplus N(\hat{T})$ ou encore $C = T^*(C) \oplus R(T^d) \cap N(T)$ en utilisant (5.2.1) et (5.2.2), ce qui établit (5.4.1).

On déduit (5.4.2) de (5.4.1) en vertu de la symétrie des hypothèses en T et en T^*.

PROPOSITION. 5.4.2. *Soit* $T \in q\Phi(d) \cap pN$:

(5.4.3) $$C = C \cap C^* \oplus C \cap C^{*\perp}$$

(5.4.4) $$C^* = C^* \cap C \oplus C^* \cap C^{\perp}.$$

Démonstration. Evidemment T envoie $C \cap C^{*\perp}$ dans lui-même. Montrons que l'application est surjective. Pour celà so t $x \in C \cap C^{*\perp}$.

Posons $y = Sx$. Alors $y \in C$ et $x = Ty$. Soit z un élément quelconque de C^*. Alors $\exists\, z' \in C^*$ tel que $z = T^* z'$ et on a:

$$(y, z) = (y, T^* z') = (Ty, z') = (x, z') = 0$$

et par conséquent $y \in C^{*\perp}$, c'est-à-dire que $y \in C \cap C^{*\perp}$.

Soit maintenant C' le complément orthogonal de $C \cap C^{*\perp}$ dans C, et soit $u \in C'$. Alors $u \in C$ et d'après (5.4.1) $\exists\, v \in C$ et $\exists\, w \in R(T^d) \cap N(T)$ tels que $u = T^* v + w$. Comme $u \perp C \cap C^{*\perp} \supseteq R(T^d) \cap N(T)$ on a:

$$0 = (u, w) = (T^* v, w) + (w, w) = \|w\|^2.$$

Donc $w = 0$ et $u = T^* v$. Soit encore x un élément quelconque de $C \cap C^{*\perp}$ et soit $y \in C \cap C^{*\perp}$ tel que $x = Ty$. Alors:

$$(v, x) = (v, Ty) = (T^* v, y) = (u, y) = 0.$$

Donc $v \in C'$ et par conséquent T^* envoie C' sur lui-même. Donc $C' \subseteq C^*$ c'est-à-dire que $C' \subseteq C \cap C^*$ ou encore:

$$C \subseteq C \cap C^* \oplus C \cap C^{*\perp} \subseteq C,$$

d'où on déduit (5.4.3).

(5.4.4) se déduit de (5.4.3) en utilisant la symétrie des hypothèses en T et T^*.

PROPOSITION 5.4.3. *En reprenant les notations du* § 2 *on a*:

(5.4.5) $$M = C + C^*.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $C^* \subseteq M$. En effet, avec les notations de la démonstration du théorème 3.2.1, nous allons montrer que $\forall\, j \in \mathbf{N}$ on a

$C^* \subseteq M_j$. Pour $j = 0$ c'est évident, puisque $M_0 = \mathbf{H}$. Supposons le vrai pour j et soit $u \in C^*$. Alors d'après (5.4.2)

$$\exists\ v \in C^*, \qquad \exists\ w \in R(T^{*d}) \cap N(T^*) = (R(T) + N(T^d))^\perp$$

tels que $u = Tv + w$.

Or, par hypothèse d'induction $v \in M_j$, d'où on déduit que

$$u \in T(M_j) + (R(T) + N(T^d))^\perp = M_{j+1}$$

d'où $C^* \subseteq M_{j+1}$. Donc $M = M_d \supseteq C^*$.

Soit M' le supplémentaire orthogonal de C^* dans M. Evidemment, T envoie M' dans lui-même. Montrons que l'application est surjective.

Pour celà soit $x \in M'$. Comme:

$$M = T(M) \oplus R(T^{*d}) \cap N(T^*),$$

$$\exists\ y \in M \quad \text{et} \quad \exists\ z \in R(T^{*d}) \cap N(T^*)$$

tels que $x = Ty + z$. Comme

$$x \perp C^* \supseteq R(T^{*d}) \cap N(T^*)$$

on trouve:

$$0 = (x, z) = (Ty, z) + (z, z) = \|z\|^2.$$

Donc $z = 0$ et $x = Ty$.

Soit $t \in C^*$: alors $\exists\ t' \in C^*$ tel que $t = T^* t'$ et:

$$(y, t) = (y, T^* t') = (Ty, t') = (x, t') = 0.$$

Donc $y \in M \cap C^{*\perp} = M'$ et par conséquent T envoie M' sur lui-même, d'où $M' \subseteq C$. Donc $M \subseteq C + C^* \subseteq M$ ce qui entraîne (5.4.5).

COROLLAIRE 5.4.2. *T^* envoie M dans lui-même et on a:*

$$M = T^*(M) \oplus R(T^d) \cap N(T). \tag{5.4.6}$$

Démonstration. Soit $u \in M$. Alors $\exists\ v \in C$ et $\exists\ v^* \in C^*$ tels que $u = v + v^*$. En outre, $\exists\ w^* \in C^*$ tel que $v^* = T^* w^*$ et d'après (5.4.1)

$$\exists\ y \in C, \qquad \exists\ z \in R(T^d) \cap N(T)$$

tels que $v = T^* y + z$.

Dès lors:

$$u = T^* (y + w^*) + z$$

et comme

$$y + w^* \in C + C^* = M,$$

$$u \in T^* (M) + R (T^d) \cap N (T).$$

Comme

$$T^* (M) \subseteq T^* (C) + T^* (C^*) \subseteq C + C^* \subseteq M$$

on a donc:

$$M \subseteq T^* (M) + R (T^d) \cap N (T) \subseteq M$$

d'où on déduit (5.4.6).

PROPOSITION 5.4.4. *Toujours avec les notations du § 2, si $T \in q\Phi(d) \cap pN$, on a*:

(5.4.7) $$M^\perp = N.$$

Démonstration. Reprenons encore les notations de la démonstration du théorème 3.2.1.

Nous allons montrer par induction que $\forall\, j \in \mathbf{N}$, $N_j \subseteq M^\perp$. C'est vrai pour $j = 0$, puisq'alors $N_0 = \{0\}$. Supposons le vrai pour j et soit $u \in N_{j+1}$. Alors $u \perp R(T^d) \cap N(T)$ et $Tu \in N_j \subseteq M^\perp$. Donc $u \perp T^*(M) \oplus R(T^d) \cap N(T) = M$, d'où $N_{j+1} \subseteq M^+$. Par conséquent $N = N_d \subseteq M^\perp$.

Soit maintenant $v \in M^\perp$. Alors $\exists\, x \in M$ et $\exists\, y \in N$ tels que $v = x + y$ donc $x = v - y \in M^\perp$ d'où $x \in M^\perp \cap M = \{0\} \Rightarrow x = 0$ et par conséquent $M^\perp \subseteq N$ d'où $N = M^+$.

COROLLAIRE 5.4.3. *Si $T \in q\Phi \cap pN$ on a*:

(5.4.8) $$M = C \cap C^* \oplus C \cap C^{*\perp} \oplus C^\perp \cap C^*$$

(5.4.9) $$N = C^\perp \cap C^{*\perp}.$$

Démonstration. (5.4.8) se déduit immédiatement de la proposition 5.4.3 et de (5.4.3) et (5.4.4).

(5.4.9) se déduit du fait que

$$N = M^\perp = (C + C^*)^\perp = C^\perp \cap C^{*\perp}.$$

COROLLAIRE 5.4.4. *Si* $T \in q\Phi(d) \cap pN$ *on a*:

$$M = R(T^d) + R(T^{*d}) \tag{5.4.10}$$

$$N = N(T^d) \cap N(T^{*d}). \tag{5.4.11}$$

Démonstration:

$$N \subseteq N(T^d) \Rightarrow M \supseteq R(T^{*d})$$

(en utilisant la proposition 3.3.5).

Donc

$$M = C + C^* \subseteq R(T^d) + R(T^{*d}) \subseteq M$$

d'où (5.4.10).

$$N = M^\perp = (R(T^d) + R(T^{*d}))^\perp = N(T^{*d}) \cap N(T^d)$$

(en utilisant encore la proposition 3.3.5). Donc (5.4.11) est démontré.

§ 5. Opérateurs bornés quasi-normaux dont le spectre essentiel est réduit à un point.

PROPOSITION 5.5.1. *Soit* T *borné tel que* $\sigma_e(T) = \{\lambda_0\}$. *Alors il existe une suite* $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbf{C}$ *d'éléments distincts de* $\mathbf{C}$ *telle que* $\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_0\}$.

Deux cas peuvent alors se présenter:

(I) *La suite* $\{\lambda_n\}$ *est finie.*

(II) *La suite* $\{\lambda_n\}$ *est infinie et converge vers* λ_0.

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 5.1.1, on remarque que les $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $T - \lambda I \in q\Phi(d)$ avec $d \geq 1$ sont des points isolés.

Soit $\{\lambda_n\}$ la suite de ces points. On a:

$$\{\lambda_n\} \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$$

et

$$C - (\{\lambda_n\} \cup \{\lambda_0\}) \subseteq \text{rég}(T)$$

et comme dans la démonstration de la proposition 5.1.1 on en déduit que

$$\mathbf{C} - (\{\lambda_n\} \cup \{\lambda_0\}) \subseteq \rho(T).$$

Donc:

$$\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_0\}.$$

En outre, comme T est borné, la suite $\{\lambda_n\}$ l'est aussi, et si elle n'est pas finie, elle doit avoir au moins un point d'accumulation. Soit μ un tel point d'accumulation. Alors $T - \mu I \notin q\Phi$ ou encore $\mu \in \sigma_e(T)$, c'est-à-dire $\mu = \lambda_0$. Donc $\{\lambda_n\}$ possède un et un seul point d'accumulation, λ_0, et par conséquent converge vers λ_0. Les cas (I) et (II) sont donc les seuls cas qui peuvent se présenter.

PROPOSITION 5.5.2. *Soit T borné tel que $\sigma_e(T) = \{\lambda_0\}$. Supposons que nous soyons dans le cas (I). Alors:*

1) $\exists\, N_0, N_1, \ldots, N_n$, *sous-espaces fermés de* $\mathbf{H}$, *tels que*:

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{j=0}^{n} N_j,$$

avec

$$\forall j:\ T(N_j) \subseteq N_j$$

et si Q_j est la restriction de $T - \lambda_j I$ à N_j, Q_0 est quasi-nilpotent et si $1 \leq j \leq n$, Q_j est nilpotent.

2) *En posant $Q = \sum_{j=0}^{n} Q_j P_j$ et $S = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j$ où P_j est la projection de $\mathbf{H}$ sur N_j correspondant à la décomposition $\mathbf{H} = \bigoplus_{j=0}^{n} N_j$ alors $T = S + Q$, S scalaire et Q quasi-nilpotent, avec $SQ = QS$.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 5.1.1 à ceci près que dans le cas présent, en général $N_0 \neq \{0\}$ et que par conséquent

$$Q = Q_0 P_0 + \sum_{j=1}^{n} Q_j P_j$$

n'est plus nécessairement nilpotent mais seulement quasi-nilpotent.

PROPOSITION 5.3.3. *Soit T borné tel que $\sigma_e(T) = \{\lambda_0\}$. Supposons que nous soyons dans le cas (II) et supposons que T soit paranormal. Alors:*

1) $\exists$ *une suite $\{N_j\}$ de sous espaces fermés de $\mathbf{H}$, mutuellement orthogonaux et tels que*

$$\bigoplus_{j=0}^{\infty} N_j = \mathbf{H},\ T(N_j) \subseteq N_j;$$

si Q_j dénote la restriction de $T - \lambda_j I$ à N_j, alors Q_0 est quasi-nilpotent et $Q_j\, (j \geq 1)$ est nilpotent.

2) *En posant* $S = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j$ *et* $Q = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j P_j$ *où* P_j *est la projection orthogonale de* $\mathbf{H}$ *sur* N_j *(nous verrons que ces deux séries sont convergentes dans un certain sens), alors:*

$$T = S + Q, \quad S\,Q = Q\,S,$$

S est normal et Q est quasi-nilpotent.

Démonstration. Soit M_j, N_j les deux sous-espaces de $\mathbf{H}$ correspondant à la décomposition de Kato de $T - \lambda_j I$. En combinant (5.4.7) et (5.1.4) nous voyons que:

$$\forall\, j \in \mathbf{N}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}\; k \neq j\, N_k \subseteq M_j \subseteq N_j^{\perp},$$

c'est-à-dire que les N_j sont mutuellement orthogonaux (avec N_0 défini comme dans la démonstration de la proposition 5.1.2, par $N_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$).

Soit $u \in \mathbf{H}$. Alors:

$$\|u\|^2 \geq \sum_{j=0}^{n} \|P_j u\|^2.$$

Posons

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} P_j u.$$

La suite $\{u_n\}$ est convergente. Soit w sa limite. D'après (5.1.1) $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\exists\, v_n \in \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ tel que $u = v_n + u_n$. Comme $u_n \to w$, la suite $\{v_n\}$ est également convergente et sa limite est $v = u - w$. Comme les M_j sont fermés, $v \in N_0$. Pour finir de démontrer 1) il nous reste seulement à montrer que Q_0 est quasi-nilpotent.

Notons T_0 la restriction de T à N_0 et I_0 celle de l'identité à N_0. Alors $Q_0 = T_0 - \lambda_0 I_0$. Exactement comme dans la démonstration de la proposition 5.1.2 on voit que $\sigma(T_0) = \{\lambda_0\}$ et par conséquent que Q_0 est quasi-nilpotent.

Finalement, comme

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j u\|^2 \leq \|T\|^2 \|u\|^2$$

pour tout $u \in \mathbf{H}$ et comme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|Q_j P_j u\|^2 \leq 4 \|T\|^2 \|u\|^2$$

également pour tout $u \in \mathbf{H}$ on voit que les séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j u, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} Q_j P_j u$$

sont convergentes pour tout $u \in \mathbf{H}$. Donc S et Q sont bien définis, et on a bien $T = S + Q$; $SQ = QS$. Exactement comme dans la démonstration de la proposition 5.1.2 on vérifie que $\sigma(Q) = \{0\}$, c'est-à-dire que Q est quasi-nilpotent.

Finalement, comme $S^* = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\lambda}_j P_j$, on voit que S est normal.

PROPOSITION 5.5.4. *Soit T borné, avec un spectre essentiel, soit vide, soit réduit à un point. Alors T est spectral si et seulement si T est quasi-normal.*

Démonstration. Nous avons déjà vu (proposition 5.3.3) que T spectral $\Rightarrow T$ quasi-normal. Réciproquement, si le spectre de T est fini et si son spectre essentiel est soit vide soit réduit à un point, nous avons déjà vu (propositions 5.1.2 et 5.5.2) que T est spectral (et par conséquent quasi-normal). Il nous reste à montrer que si le spectre essentiel de T se réduit à un point et si son spectre est infini, alors T quasi normal $\Rightarrow T$ spectral.

Or T quasi-normal $\Rightarrow \exists X$ opérateur continu inversible sur $\mathbf{H}$ avec X^{-1} continu tel que $XTX^{-1} = T'$ est paranormal. Comme la proposition 5.2.2 montre que T' a aussi un spectre essentiel réduit à un point et un spectre infini (ce dernier point est immédiat) on peut appliquer la proposition 5.5.3:

$\exists S'$ normal et $\exists Q'$ quasi-nilpotent tels que $T' = S' + Q'$ avec $S'Q' = Q'S'$.

Posons

$$S = X^{-1}S'X; \qquad Q = X^{-1}Q'X.$$

Alors:

$T = S + Q$; S est scalaire (au sens de Dunford); Q est quasi-nilpotent et $SQ = QS$. Donc T est spectral.

COROLLAIRE 5.5.1. *Soit R un opérateur de Riesz* (*cf.* [12], [39]). *Alors R est spectral si et seulement si il est quasi-normal.*

Démonstration. Si R est un opérateur de Riesz, alors $\sigma_e(R) = \{0\}$ et le corollaire se déduit immédiatement de la proposition précédente.

Nous terminerons en énonçant une conjecture:

CONJECTURE: *Un opérateur fermé sur un espace de Hilbert est spectral si et seulement si il est quasi-normal.*

REFERENCES

[1] Banach S., *Théorie des opérations linéaires,* Mon. Mat., Varsovie 1932.

[2] Bart H., *Holomorphic relative inverses of operator valued functions,* Math. Annalen, **208** (1974), 179-194.

[3] Bart H., *Poles of the resolvent of an operator function,* Proc. Roy. Ir. Acad., **74** A (1974), 169-184.

[4] Bart H.-Kaballo W., *Local invertibility of meromorphic operator functions* (à paraître dans Proc. Roy. Ir. Acad.).

[5] Bart H.-Kaashoek M. A.-Lay D. C., *Relative inverses of meromorphic operator functions,* Univ. of Maryland Techn. Report TR 74-71 (1974).

[6] Bart H.-Kaashoek M. A.-Lay D. C., *Relative inverses of meromorphic operator functions and associated holomorphic projection functions,* Math. Annalen, **218** (1975), 199-210.

[7] Bart H.-Lay D. C., *Poles of a generalized resolvent operator,* Proc. Roy. Irish Acad., **74** A (1974), 147-168.

[8] Caradus S. R., *Operators of Riesz type,* Pac. Jour. Math., **18** (1) (1966), 61-71.

[9] Caradus S. R., *On meromorphic operators (I)* et *(II)*, Can. Jour. Math., **19** (1967),

[10] Caradus S. R., *Operator theory of the pseudo-inverse,* Queen's papers in pure and applied mathematics n. 38. Queen university, Kingston, Ontario 1974.

[11] Caradus S. R., *Generalized inverses and operator theory,* Technical report (à paraitre).

[12] Caradus S. R.-Pfaffenberger W. E.-Yood B., *Calkin algebras and algebra of operators on Banach spaces,* Lecture notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker Inc New York 1974.

[13] Colojoara I.-Foias C., *Theory of generalized spectral operators,* Gordon and Breach, New York 1968.

[14] Cordes H. O.-Labrousse J. P., *The invariance of the Index in the Metric space of Closed Operators,* Jour. of Math. and Mech., **12** (1963), 693-720.

[15] Dixmier J., *Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia,* Bull. Soc. Math. France, **77** (1949), 11-101.

[16] Dunford N.-Schwartz J., *Linear Operators Part III,* Wiley Interscience, New York 1971.

[17] Fillmore P.-Williams J., *On operators ranges,* Advance in Math., **7** (1971), 254-282.

[18] Förster K. H.-Kaashoek M. A., *The asymptotic behaviour or the reduced minimum modulus of a Fredholm operator,* Proc. A.M.S., **49** (1975), 123-131.

[19] Gokhberg I. C., *Quelques propriétés d'opérateurs normalement solubles* (en Russe), Dok. Akad. Nauk SSSR (N. S.), **104** (1955), 9-11.

[20] Gokhberg I. C.-Markus A. S., *Propriétés caractéristiques de certains points du spectre d'opérateurs linéaires bornés* (en Russe), Izv. Utch. Zaved. Matematika, **2** (1960), 74-87.

[21] Goldberg S., *Unbounded Linear Operators,* New York, Mc Graw Hill 1966.

[22] Goldman M. A.-Kratchowsky S. N., *Sur la stabilité de quelques propriétés d'un opérateur linéaire fermé* (en Russe), Dok. Akad. Nauk SSSR, **209** (1973) (traduction anglaise: Sov. Math. Dokl., **14** (1973) n. 2).

[23] Grabiner S., *Operators with eventual uniform ascent and descent,* Technical report Pomona college, Claremont, California.

[24] Grabiner S., *Operators with almost uniform ascent and descent,* Technical report Pomona college, Claremont, California.

[25] Kaashoek M. A., *Stability theorems for closed linear operators,* Proc. Acad. Sci. Amsterdam A, **68** (1965), 452-466.

[26] Kaashoek M. A., *Ascent, descent, nullity and defect,* Math. Annalen, **172** (1967), 105-115.

[27] Kaashoek M. A., *On the Riesz set of a linear operator,* Nederl. Akad. Wetensh. Proc. Ser. A, **71** - Indag. Math, **30** (1968), 46-53.

[28] Kato T., *Perturbation theory for linear operators,* Springer Verlag, Berlin 1966.

[29] Kato T., *Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators,* Jour. Anal. Math., **6** (1958), 261-322.

[30] Labrousse J. Ph., *Une caractérisation topologique des générateurs infinitésimaux de semi-groupes analytiques et de contraction sur un espace de Hilbert,* Acad. Naz. dei Lincei, (8) **52**.

[31] Labrousse J. Ph., *On a metric space of closed operators on a Hilbert space,* Rev. Mat. y Fis. T. Ser. A Univ. Nat. de Tucumán (Argentine), **16** (1966), 45-77.

[32] Labrousse J. Ph., *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur soit décomposable au sens de Kato,* C. R. Acad. Sci. Paris, **284** (1977), 295-298.

[33] Labrousse J. Ph., *Opérateurs spectraux et opérateurs quasi-normaux,* C. R. Acad. Sci. Paris, **286** (1978), 1107-1108.

[34] Lay D. C., *Spectral analysis using ascent, descent, nullity and defect,* Math., Annalen, **184** (1970), 197-214.

[35] Neubauer G., *Espaces Paracomplets,* Conférence à Nice, juin 1974.

[36] Saphar P., *Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach,* Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), 363-384.

[37] Shubin M. A., *Familles holomorphes de sous-espaces d'un espace de Banach* (en Russe), Math. Issled., **5** (1970), 153-165.

[38] Taylor A. E., *Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators,* Math. Annalen, **163** (1966), 18-49.

[39] West T. T., *Riesz operators in Banach spaces,* Proc. Lond. Math. Soc. (3) **16** (1966), 131-140.

Pervenuto il 30 marzo 1979

Institut de Mathématiques
et Sciences Physiques
Parc Valrose, Nice
(Francia)