EXTENSION À L'ÉQUATION DE LA CHALEUR D'UN THÉORÈME DE A. HARNACK

par **J. Hadamard** (Paris)

Deux théorèmes de A. Harnack sont bien connus dans la théorie des fonctions harmoniques.

I. *Une série de fonctions régulièrement harmoniques dans une aire D et continues sur son contour S qui converge uniformément sur S converge uniformément dans D ainsi que toutes ses séries dérivées. Elle représente une fonction harmonique dans D.*

II. *Une série de fonctions régulièrement harmoniques et positives qui converge en un point déterminé quelconque a intérieur à D converge dans tout l'intérieur de D, et cela uniformément dans tout domaine intérieur D', ainsi que toutes ses dérivées et représente par conséquent une fonction harmonique.*

Le premier de ces deux théorèmes s'étend aisément ([1]) aux fonctions « paraboliques », c'est à dire aux solutions de l'équation de la chaleur

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Je ne sais si une semblable extension, également utile à la théorie, a été obtenue pour le théorème II. Par une analogie évidente avec ce qui se passe en théorie des fonctions harmoniques, toute la question est d'obtenir une limite inférieure de la fonction de Green $G(a, M)$ ainsi que de l'une de ses dérivées intérieures en se donnant, d'autre part, une limite inférieure de la distance du point a au contour.

([1]) Voir p. ex. S. Täcklind, *Actes de la Soc. Roy. Sc. Upsal,* t. X_4, 1936.

Dans le cas des fonctions harmoniques, on commence par prendre pour D un cercle. Dans le cas actuel, nous considérerons un rectangle $A_1 A_2 a_1 a_2$ de côtés parallèles aux axes, le côté supérieur $a_1 a_2$ étant mené par notre point $a(x, y)$ et dont nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer que les côtés $A_1 a_1$, $A_2 a_2$ ont les abscisses $-l$, $+l$ pendant que $A_1 A_2$ peut être pris provisoirement comme axe des x.

Dans un pareil rectangle, la fonction de Green se déduit de la solution élémentaire

$$v = v(x, y; X, Y) = (y - Y)^{-1/2} \exp. \{-(x - X)^2/4(y - Y)\}$$

en remplaçant l'abscisse X du point M, sans changement de l'ordonnée Y, successivement par les valeurs

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} X_k = X + 4kl \\ X'_{k'} = 2l - X + 4k'l, \end{cases}$$

et formant les quantités successives

$$v_k = v(x, y; X_k, Y), \qquad w_{k'} = v(x, y; X'_{k'}, Y)$$

et la série

$$\text{(2)} \qquad G = G(x, y; X, Y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} v_k - \sum_{-\infty}^{+\infty} w_{k'}.$$

Avec cette expression de G, la solution de (E) qui prend, sur les trois côtés $A_1 A_2$, $A_1 a_1$, $A_2 a_2$, des valeurs données (lesquelles, ici, seront supposées toutes non négatives) a, en un point a (x, y) situé à l'intérieur du côté $a_1 a_2$, la valeur donnée par

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\, u(a) &= \int_{a_1 A_1 A_2 a_2} u\left(G\,dx - \frac{\partial G}{\partial X} dY\right) \\ &= \int_{-l}^{+l} u(X, 0)\, G(x, y; X, 0)\, dX \\ &\quad + \int_0^y u(-l, Y) \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{X=-l} dY - \int_0^y u(l, Y) \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{X=l} dY. \end{aligned} \right.$$

Les abscisses x, X étant arbitraires dans l'intervalle ouvert $(-l, +l)$, $X - x$ est de signe variable; mais tous les autres $X_k - x$ ont le signe de k; tous les $X'_{k'} - x$, le signe de k'. Comme les valeurs (1) se suivent dans l'ordre

$$\text{(4)} \qquad \cdots\ X'_{k-1} < X_k < X'_k < \cdots,$$

les valeurs positives de k, k' d'une part ainsi que, d'autre part, les valeurs négatives des mêmes quantités donnent respectivement deux séries alternées qui, chacune de son côté, satisferont à la double condition classique de convergence.

Nous considérerons comme donnés:
un premier point $a(x, y)$ que nous supposerons non seulement intérieur à la demi-bande D, mais suffisamment distant de son contour, soit

$$l - |x| > \delta, \qquad y > \delta'; \tag{5}$$

un second point a' (x', y'), auquel nous imposerons, outre des conditions analogues à celles auxquelles nous venons d'assujettir le premier, la condition supplémentaire (laquelle n'avait pas son analogue dans la théorie des fonctions harmoniques) que l'ordonnée y' soit inférieure à y.

Dans ces conditions et avec des choix convenables de y, δ, nous allons obtenir une limite inférieure positive pour les coefficients de la formule (3) et une limite supérieure pour les coefficients analogues avec remplacement de x, y par x', y', de manière à comparer ces derniers aux premiers.

Nous effectuerons cette comparaison en réduisant G à son terme principal $v_0 = v$ et nous plaçant, d'autre part, dans des conditions telles que cette substitution ne change pas le résultat.

I. *INTEGRALES SUIVANT LE SEGMENT DE L'AXE DES* $\underline{x}$.

Le segment considéré ne sera pas $A_1 A_2$ tout entier: nous en détacherons, aux extrémités, deux petits segments $A_1 A_1'$, $A_2' A_2$ de longueur δ_1, que nous considérerons à part.

Puisque chacune des séries

$$v - w_0 + v_1 - w_1 + \cdots v_k - w_k + \cdots\cdot$$

$$v - w_{-1} + v_{-1} - w_{-2} + - + v_{-k} - w_{-k-1} + \cdots\cdot\cdot$$

converge dans les conditions du théorème général des séries alternées, si le terme initial v qui leur est commun est supérieur à la somme $w_0 + w_{-1}$ des premiers termes soustractifs, la valeur positive de la différence ne pourra qu'être accrue par l'ensemble des termes suivants. Nous choisirons les abscisses x, X de manière à satisfaire aux conditions

$$w_0 < 1/2\ v, \qquad w_{-1} < 1/2\ v,$$

ce qui, d'après l'expression de v (et en accord avec le fait que les valeurs (1) des X, X' ont été choisies de manière à annuler G pour $x = \pm l$ et pour $X = \pm l$) se réduit à

$$|x - \varepsilon l|\ |X - \varepsilon l| > y \log 2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et aura lieu si les facteurs du premier membre - c'est à dire les distances de chacun des points a, a' au contour - satisfont à la condition

$$\frac{\delta\,\delta_1}{y} > k > \log 2,$$

ce qui d'une part fournit la limitation attendue de la distance du point a aux deux côtés verticaux et, de l'autre, nous a obligés à détacher du segment $A_1 A_2$, pour les traiter séparément, les deux petits segments $A_1 A_1'$, $A_2' A_2$ de longueur δ_1. Nous prendrons $\delta_1 = \delta/2$.

Lorsque le point $(X, 0)$ sera pris sur la partie restante $A_1' A_2'$, on aura pour G l'évaluation par défaut

$$G(x,\ y;\ X,\ 0) > v - w_0 - w_{-1} > v(1 - 2e^{-k}).$$

Si donc on a l'inégalité

$$\text{(6)} \qquad \frac{\delta}{2\sqrt{y}} > \frac{1}{2}\sqrt{2k} = \theta_0,$$

G sera avec v dans un rapport borné inférieurement. D'autre part, ce même rapport est borné supérieurement, comme il résulte aisément du mode de convergence des séries (2). Ainsi, à des facteurs près que nous pouvons assigner connaissant le domaine rectangulaire D et le point a, l'évaluation de G, lorsque le point $(X, 0)$ est pris sur le segment $A_1' A_2'$, est ramenée à celle de v. Mais cette dernière quantité reste bornée quel que soit X dans l'intervalle $(-l+\delta,\ l-\delta)$, l'exposant de e étant négatif et borné en valeur absolue.

II. *INTÉGRALES SUIVANT* $X = \pm l$.

Ces intégrales font intervenir non plus les valeurs de G, G', mais celles de $\frac{\partial G}{\partial X}$, $\frac{\partial G'}{\partial X}$, qu'il s'agit de comparer entre elles dans leur segment commun d'existence (les portions d'intégrales relatives à $y' < Y < y$ ayant pour effet d'assurer a fortiori les inégalités que nous nous proposons d'établir).

La quantité

$$\frac{\partial v}{\partial X} = -\frac{1}{2}\frac{X - x}{(y - Y)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(X - x)^2}{4(y - Y)}\right\}$$

fait intervenir la variable

$$\tau = \frac{|X - x|}{2\sqrt{y - Y}}$$

par la fonction

$$\varphi(\tau) = \tau e^{-\tau^2}.$$

Cette dernière, lorsque τ va de zéro à ∞, part de zéro et revient à zéro. Sa dérivée logarithmique étant

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\tau} - 2\tau,$$

son maximum correspond à $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette valeur étant supérieure au second membre θ_0 de (6), on voit que, pour $\tau \geqslant \theta_1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la fonction $\varphi(\tau)$ sera toujours décroissante, sa dérivée logarithmique étant en valeur absolue supérieure à un nombre fixe $\psi_1 = \psi(\theta_1)$.

Les dérivées $\partial v_k/\partial X$ ont des expressions semblables; mais (puisque $dX'_{k'}/dX = -1$) on a

$$\partial w_{k'}/\partial X = -\partial v_{k'}/\partial x.$$

Formons, par exemple, la dérivée normale $\partial G/\partial X$ pour $X = + l$, ce qui correspond à $k' = k$. Les deux termes $\partial v/\partial X$, $\partial w_0/\partial X$, et, d'une manière générale

$$-\partial v_k/\partial X, \qquad \partial w_k/\partial X$$

au lieu de se détruire, se doubleront.

La valeur commune de $-\frac{\partial v_k}{\partial X}$ et de $\frac{\partial w_k}{\partial X}$ étant positive (négative) en même temps que k, considérons par exemple les valeurs de X_k correspondant au segment $A_2 a_2$, soit

$$X_k = X'_k = l(1 + 4k)$$

et examinons le rapport de v à w_{-1} ou, plus généralement, de v_k à w_{k-1} (le point d'abscisse X'_{k-1} étant l'image de X_k par rapport à la droite $X = - l$): la différence $X - x$ est au moins égale à δ. Si donc

$$\frac{\delta}{2\sqrt{y}} > \theta_1 \tag{7}$$

une telle valeur de τ tombera dans l'intervalle de décroissance de la fonction φ.

D'autre part cette différence $X - x$ est au plus égale à $2l - \delta$ pendant que, en valeur absolue, la différence analogue $X'_{-1} - x$ est au moins égale à $2l + \delta$. Il en résulte que le rapport des valeurs correspondantes de φ, égal au rapport $\frac{\partial w_{-1}}{\partial X} \Big/ \frac{\partial v}{\partial X}$, est moindre que $e^{-\sigma}$ avec

$$\sigma = \frac{\delta}{\sqrt{y}} \psi_1.$$

Ainsi le terme soustractif $\frac{\partial w_{-1}}{\partial X}$ ne diminuera le terme principal $\frac{\partial v}{\partial X}$ que dans un rapport au plus égal à $e^{-\sigma}$. Quant aux autres différences analogues $\frac{\partial v_k}{\partial X} - \frac{\partial v_{-k}}{\partial X}$, il nous suffit de noter qu'elles sont positives. Nous avons donc bien une évaluation par défaut du rapport $\frac{\partial G}{\partial X} \Big/ \frac{\partial v}{\partial X}$.

Il y a lieu ici de tenir compte du rapport entre $\frac{\partial v}{\partial X}$ et la quantité analogue $\frac{\partial v'}{\partial X}$ où $v' = v(x', y'; l, Y)$ avec Y variable de 0 à y'. C'est ce qu'il est aisé de faire en donnant à $X - x$, dans v, sa valeur minima δ et écrivant, d'autre part,

$$\frac{\partial v}{\partial X} = - \frac{1}{2(X-x)^2} \tau^3 e^{-\tau^2}$$

où le premier facteur est connu pour une figure donnée, pendant que le second, seul variable avec Y, sera fonction décroissante de τ du moment que τ sera supérieur à $\sqrt{\frac{3}{2}}$, condition qui remplacerait celles que nous avons jusqu'ici imposées à τ.

III. *INTÉGRALES SUIVANT LES SEGMENTS EXTRÊMES* $A_1A'_1$, A'_2A_2.

Ici, nous ne pouvons plus chercher un minimum de G, cette quantité étant nulle pour $X = \pm l$; mais, par contre, cette circonstance nous permet d'évaleur G pour X pris dans l'un des deux intervalles en question - l'intervalle A'_3A_3, par exemple - par l'intégrale

$$G = \int_{\varepsilon l}^{X} \frac{\partial G}{\partial X} \partial X.$$

La comparaison de cette quantité avec la quantité analogue G' sera donc ramenée à la comparaison des valeurs de $\frac{\partial G}{\partial X}$, $\frac{\partial G'}{\partial X}$ pour un même X. La question est donc tout analogue à celle qui fait l'objet du n⁰ précédent. Il y a seulement la différence qu'au lieu de $|X - x| > \delta$ nous connaissons seulement l'inégalité $|X - x| > \frac{\delta}{2}$. Nous sommes donc obligés de remplacer la condition (6) par

$$\frac{\delta}{2\sqrt{y}} > 2\theta_0, \tag{6'}$$

inégalité qui comprend les précédentes.

Nous avons, dans ce qui précède, obtenu une limite inférieure pour chacune des quantités $G:v$- lorsque a restant fixe, le point $M(X, Y)$ décrit le segment $A_1'A_2'$ de l'axe des x — ; $\frac{\partial G}{\partial X}:\frac{\partial v}{\partial X}$ lorsque M décrit l'un des segments $A_1 a_1$, $A_2 a_2$, $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ si le second point a' est assujetti à avoir une abscisse comprise entre $-l + \delta$ et $l - \delta$ et une ordonnée comprise entre une limite positive quelconque δ' et l'ordonnée y de a; nous sommes en état de limiter supérieurement le rapport $\frac{v'}{v}$, cette borne supérieure ne dépendant que de l, y, δ, δ'.

Nous allons maintenant limiter aussi supérieurement, en fonction des quantités précédentes, les rapports $G':v'$, $\frac{\partial G'}{\partial X}:v'$. Cette limitation est beaucoup plus facile que la précédente. Dans l'expression de G', chaque terme autre que v' diffère de ce dernier en ce que $\xi = |X - x|$ (ou $|2l - X - x|$) est majoré de $4kl$ (ou de $4k'l$). De ce fait, en remplaçant le carré $(\xi + 4kl)^2$ par la quantité plus petite $\xi^2 + 16k^2l^2$, on voit que G' s'obtient en multipliant v' par une quantité plus petite que la série

$$1 + 2\sum e^{-\frac{4k^2l^2}{y-Y}}. \tag{8}$$

En ce qui regarde la dérivée $\frac{\partial G'}{\partial X}$, il y a à tenir compte du facteur $\tau_k = \tau + \frac{2kl}{\sqrt{y-Y}}$ qui figure dans l'expression de $\frac{\partial v_k}{\partial X}$. Mais nous avons choisi y et δ de manière à rendre la fonction $\varphi(\tau)$ constamment décroissante et de dérivée logarithmique supérieure en valeur absolue à ψ_1. Dès lors $\frac{1}{v'}\frac{\partial v_k'}{\partial X}$ sera, pour tout k, au plus égal en valeur absolue à $e^{-k\sigma}$.

De même, $\frac{\partial w_{k'}}{\partial X}$ sera inférieur en valeur absolue au produit de w_0 ou de w_{-1} par $e^{-k\sigma}$ et comme, d'autre part, $|X'_0 - x|$ et $|X'_{-1} - x|$ sont plus grands que $|X - x|$, nous aurons pour $\frac{1}{\nu'}\frac{\partial w'_k}{\partial X}$ la même limitation que tout à l'heure.

Nous sommes dès lors en mesure de limiter le rapport $u(a'):u(a)$ et cela en fonction des seules quantités l, y, δ, δ', de sorte que si, en a, une série de solutions positives de (E) est convergente, cette même série sera, en a', non seulement convergente, mais uniformément convergente dans toute région intérieure à notre demi-bande et où les quantites $\frac{\delta}{2\sqrt{y}}$, δ' seront bornées inférieurement.

Mais nous aurons aussi à limiter en a' les dérivées de u et à cet effet, à limiter les dérivées correspondantes de G' et (pour $X = \pm l$) de $\frac{\partial G'}{\partial X}$. Cette limitation ne souffre pas de difficulté quel que soit l'ordre de différentiation; mais en fait il suffira de l'obtenir pour les dérivées des deux premiers ordres par rapport à x', lesquelles mettent en jeu les dérivées des trois premiers ordres de v'_k, ou de w'_k, par rapport à X ou à x'.

Les dérivées successives de v_k par rapport à X ou à x s'obtiennent en multipliant v_k par des polynômes en $\tau_k = \tau + \frac{2kl}{\sqrt{y-Y}}$, donc en k, de degrés égaux aux ordres de différentiation; et de même pour les dérivées successives de $w_{k'}$. Formant ainsi les dérivées de v'_k et de $w'_{k'}$ par rapport à X ou à x', on voit qu'on aura, pour les grandes valeurs de k ou de k',

$$\frac{\partial^2 v'_k}{\partial x'^2},\ \frac{\partial^2 w'_k}{\partial x'^2} = O\left(k^2 e^{-\frac{4k^2l^2}{y-Y}}\right),$$

$$\frac{\partial^3 v'_k}{\partial x'^3},\ \frac{\partial^3 w'_k}{\partial x'^3} = O\left(k^3 e^{-\frac{4k^2l^2}{y-Y}}\right).$$

Les seconds membres de ces relations étant les termes généraux de séries convergentes ne dépendant que de l, y, δ, nous voyons bien que les séries

$$\sum_k \frac{\partial^i v'_k}{\partial x'^i},\quad \sum_k \frac{\partial^i w'_k}{\partial x'^i} \qquad (i = 2,\ 3)$$

seront uniformément convergentes dans les mêmes conditions que (2), de sorte que:

1) leurs sommes représenteront bien les dérivées de G' ou de $\dfrac{\partial G'}{\partial x}$;

2) ces quantités seront, avec v, dans des rapports uniformément bornés lorsque a' variera arbitrairement sous les conditions indiquées.

En particulier, $u(x', y')$ admettra bien des dérivées des deux premiers ordres par rapport à X' et aussi une dérivée par rapport à y' (attendu que $\left.\dfrac{\partial v'_k}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 v'_k}{\partial X^2}\right)$, donc sera solution de (E).

Les conclusions que nous avons en vue sont donc complètement établies si les deux points a, a' sont intérieurs à un même rectangle parallèle aux axes, et cela de manière que leurs distances δ aux côtés parallèles à l'axe des y et la hauteur y du rectangle vérifient $\tau > \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ainsi que

$$y > y' > \delta' > 0.$$

Si maintenant la différence d'ordonnées $y - y'$ est supérieure ou égale à celle qui, par rapport à $\delta = \max (l - |x'|)$, satisferait à (7), on introduira des points intermédiaires. Le premier d'entre eux $\bar{a}(\bar{x}, \bar{y})$ sera pris à l'intérieur du rectangle primitif (soit $\bar{y} > \delta'$, $|l - \bar{x}| > \delta$) ce qui permettra de limiter le rapport $u(\bar{a})/u(a)$.

Puis on pourra inclure un second point dans un rectangle limité aux mêmes abscisses que le premier et aux ordonnées $\bar{y}$, $\bar{y} - \theta_1^2 \delta^2$ lequel par conséquent empiètera sur le premier par une tranche d'épaisseur δ'. En un point $\bar{\bar{a}}$ strictement intérieur à ce second rectangle (et tel que $\bar{y} - \bar{\bar{y}} < \theta_1^2 \delta^2$), la valeur de u sera, avec $u(\bar{a})$ et, par conséquent, avec $u(a)$, dans un rapport que nous serons en mesure de limiter.

On pourra continuer ainsi tant que cela sera possible sans sortir de l'aire D, en diminuant éventuellement la largeur de ces rectangles successifs à partir d'un certain moment ou en augmentant la marge δ interdite aux points intermédiaires à partir des côtés parallèles à l'axe des y, ce qui permettra d'augmenter la hauteur.

On pourra aussi passer d'un de ces rectangles à un autre qui lui soit adjacent latéralement et empièterait sur lui par une tranche d'épaisseur δ (comptée parallèlement à l'axe des x). En combinant convenablement cette opération avec la précédente, on pourra passer du premier point donné a au second

a' s'il existe à l'intérieur de D un chemin allant du premier point au second par ordonnées constamment décroissantes [1].

Ainsi, $a(x, y)$ et $a'(x', y')$ avec $y' < y$ étant deux points strictement intérieurs à D et cela sous l'hypothèse géométrique qui vient d'être formulée, on pourra limiter supérieurement le rapport $u(a')/u(a)$ entre les valeurs de la fonction u supposée positive dans tout D, ainsi que les rapports analogues obtenus en remplaçant $u(a')$ par ses dérivées.

Paris, mai 1954

[1] Un tel chemin existera si l'aire D est limitée par deux lignes à ordonnées monotones: condition toujours supposée remplie dans les problèmes relatifs à l'équation de la chaleur.