PRODOTTI SGHEMBI DI INSIEMI E STRUTTURE DI GRUPPO COLLEGATE

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI

1. Siano dati due insiemi G e Γ e si indichino con (lettere latine) $a, b, \ldots$ e con (lettere greche) $\alpha, \beta, \ldots$ i rispettivi elementi.

Consideriamo l'insieme delle coppie (a, α) e supponiamo che per tale insieme sia definito un prodotto

$$(1) \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = \big(f(a, \alpha; b, \beta), \varphi(a, \alpha; b, \beta)\big)$$

ove $f(a, \alpha; b, \beta) \in G$, $\varphi(a, \alpha; b, \beta) \in \Gamma$ e le funzioni f e φ (di a, α, b, β) hanno uno ed un solo valore nei rispettivi campi G e Γ, per una qualsiasi quaterna di elementi a, α, b, β [1]).

Un tale insieme di coppie (a, α) con l'assegnata legge del prodotto (1) lo diciamo, secondo la nomenclatura di Rédei « *prodotto sghembo* » $G \circ \Gamma$ dei dati insiemi G e Γ; ed appunto ai problemi di Rédei [2]) si ispira la presente nota pur discostandosene ampiamente.

Qui diamo prima una immediata condizione necessaria e sufficiente perchè $G \circ \Gamma$ sia un gruppo $\Delta_{G\Gamma}$.

Mostriamo poi che l'essere $G \circ \Gamma$ un gruppo, senza o con l'aggiunta di eventuali ulteriori condizioni, porta all'esistenza di certi *sottogruppi particolari in* $G \circ \Gamma$; introduce delle *strutture di gruppo in* G, *in* Γ *od in loro sottinsiemi;* ed importa *per* $G \circ \Gamma$ *una scomposizione in prodotti di gruppi permutabili ed in ampliamenti di Schreier.*

---

[1]) Naturalmente si suppone che due coppie (a, α) e (b, β) siano uguali solo se $a = b$ ed $\alpha = \beta$.

[2]) Cfr. [4] anche per la nomenclatura.

Quest'ultima proprietà risulta essere estensione di risultati già conseguiti altrove [3]) per certi prodotti sghembi che si presentano come casi particolari dei prodotti sghembi trattati nel presente lavoro.

2. Enunciamo anzitutto il seguente banale teorema.

TEOREMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'anzidetto prodotto sghembo* $G \circ \Gamma$ *degli insiemi* G *e* Γ, *sia, in relazione al prodotto definito da* (1) *un gruppo,* $\Delta_{G\Gamma}$, *è che, qualunque siano* $a, b \in G$ *ed* $\alpha, \beta \in \Gamma$:

1) *esistano due elementi* e *ed* ε *in* G *e* Γ, *rispettivamente, per cui:*

$$(2_1) \qquad f(a,\ \alpha;\ e,\ \varepsilon) = a; \qquad (2_2) \qquad \varphi(a,\ \alpha;\ e,\ \varepsilon) = \alpha;$$

$$(3_1) \qquad f(e,\ \varepsilon;\ a,\ \alpha) = a; \qquad (3_2) \qquad \varphi(e,\ \varepsilon;\ a,\ \alpha) = \alpha;$$

2) *valgano le relazioni:*

$$(4_1) \quad f\big(f(a,\alpha;\ b,\beta),\ \ \varphi(a,\alpha;\ b,\beta);\ \ c,\gamma\big) = f\big(a,\alpha;\ f(b,\beta;\ c,\gamma),\ \ \varphi(b,\beta;\ c,\gamma)\big)$$

$$(41_2) \quad \varphi\big(f(a,\alpha;\ b,\beta),\ \ \varphi(a,\alpha;\ b,\beta);\ c,\gamma\big) = \varphi\big(a,\alpha;\ f(b,\beta;\ c,\gamma),\ \ \varphi(b,\beta;\ c,\gamma)\big);$$

3) *abbiano rispettivamente una soluzione i due sistemi:*

$$(5_1) \qquad \begin{cases} f(a,\ \alpha;\ x,\ \xi) = e \\ \varphi(a,\ \alpha;\ x,\ \xi) = \varepsilon \end{cases} \qquad (5_2) \qquad \begin{cases} f(x,\ \xi;\ a,\ \alpha) = e \\ \varphi(x,\ \xi;\ a,\ \alpha) = \varepsilon \end{cases}$$

ove le incognite sono gli elementi x *e* ξ (*con* $x \in G$, $\xi \in \Gamma$).

Consideriamo l'insieme $G \circ \Gamma$ ed in esso il prodotto dato dalla legge (1).

Si verifica subito che, per le (2_1), (2_2), (3_1), (3_2), la coppia (e, ε) è unità destra e sinistra in $G \circ \Gamma$.

Per le (4_1) e (4_2) si ha

$$[(a,\ \alpha)(b,\ \beta)](c,\ \gamma) = (a,\ \alpha)[(b,\ \beta)(c,\ \gamma)],$$

il che significa che il prodotto definito da (1) gode (nella presente ipotesi) della proprietà associativa.

---

3) Cfr. [2], [3].

Infine, avendo una soluzione i sistemi (5_1) e (5_2) per ogni elemento di $G \circ \Gamma$ esiste un'inversa (destra e sinistra).

Pertanto quando sono soddisfatte le condizioni 1), 2), 3) l'insieme $G \circ \Gamma$, in relazione al prodotto definito da (1) è un gruppo $\Delta_{G\Gamma}$ (e conseguentemente i sistemi (5_1), (5_2) ammetteranno una sola soluzione, uguale per entrambi).

Viceversa, se $G \circ \Gamma$ è (in relazione ad (1)) un gruppo valgono ovviamente le 1), 2), e 3).

Notiamo che le condizioni 1), 2), 3) sono sovrabbondanti affinchè $G \circ \Gamma$ sia un gruppo [4]).

Abbiamo però enunciato nel teorema 1 tutte le proprietà ivi indicate poichè ciò sarà utile in seguito.

Nel presente lavoro si considereranno soprattutto i *particolari gruppi* $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *per cui valgono anche* (oltre a quelle enunciate nel teorema 1) ***le condizioni***:

(8_1) $\quad f(a, \varepsilon;\ e, \alpha) = a;$ $\qquad$ (8_2) $\quad \varphi(a, \varepsilon;\ e, \alpha) = \alpha$

che equivalgono ad

$$(a, \varepsilon)(e, \alpha) = (a, \alpha).$$

Indicheremo questi ultimi gruppi $\Delta_{G\Gamma}$ con $\Lambda_{G\Gamma}$.

Sono analoghi a questi gruppi $\Lambda_{G\Gamma}$ i particolari gruppi $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ per cui valgono le condizioni

$(8_1')$ $\quad f(e, \alpha;\ a, \varepsilon = a;$ $\qquad$ $(8_2')$ $\quad \varphi(e, \alpha;\ a, \varepsilon) = \alpha$

che equivalgono ad

$$(e, \alpha)(a, \varepsilon) = (a, \alpha).$$

Indicheremo questi ultimi *gruppi particolari* $\Delta_{G\Gamma}$ con $\Lambda'_{G\Gamma}$.

Naturalmente è possibile immaginare altre particolarizzazioni di $\Delta_{G\Gamma}$. Per esempio appartengono a tali particolarizzazioni i prodotti sghembi di Rédei trattati in [4] e [3].

3. In questo paragrafo diamo quattro teoremi, fra loro simili, i quali mostrano come dalle condizioni imposte nel teorema 1 consegua l'esistenza di particolari sottogruppi in $\Delta_{G\Gamma}$ ed una struttura di gruppo in certi sottinsiemi di G e Γ.

---

4) Cfr. per es. [8], cap. I, n. 4, pag. 16.

TEOREMA 2. *Si considerino tutti gli elementi* a_1 *(indicati con lettere latine qualsiansi dotate dell'indice* 1) *di* G *per cui si abbia*

$$\varphi(a_1, \varepsilon; b, \beta) = \beta \ [5] \tag{9_1}$$

qualunque siano gli elementi $b \in G$ *e* $\beta \in \Gamma$. *L'insieme di tutte le coppie* (a_1, ε) *del gruppo* $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *è un sottogruppo* Δ_{G_1}.

Fra gli (a_1, ε) vi è l'unità (e, ε) e ciò in virtù della (3_2).

Ponendo in (4_2) $a = a_1$, $\alpha = \varepsilon$, $b = b_1$, $\beta = \varepsilon$ si ha tenendo conto di (9_1)

$$\varphi\big(f(a_1, \varepsilon; b_1, \varepsilon), \varepsilon; c, \gamma\big) = \varphi\big(a_1, \varepsilon; f(b_1, \varepsilon; c, \gamma), \varphi(b_1, \varepsilon; c, \gamma)\big) =$$
$$= \varphi(b_1, \varepsilon; c, \gamma) = \gamma$$

cioè

$$f(a_1, \varepsilon \ b_1, \varepsilon) = d_1$$

Allora, per l'ultima relazione e per la (9_1), si ha:

$$(a_1, \varepsilon)(b_1, \varepsilon) = \big(f(a_1, \varepsilon; b_1, \varepsilon), \varphi(a_1, \varepsilon; b_1, \varepsilon)\big) = (d_1, \varepsilon).$$

L'inversa (per esempio a destra) di (a_1, ε) è la coppia (x, ξ) per cui

$$\begin{cases} f(a_1, \varepsilon; x, \xi) = e \\ \varphi(a_1, \varepsilon; x, \xi) = \varepsilon \end{cases} \tag{10_1}$$

Ora $\varphi(a_1, \varepsilon; x, \xi) = \xi$ per (9_1), e quindi

$$\xi = \varepsilon. \tag{11_1}$$

Dalla (4_2) ponendo $a = a_1$, $\alpha = \varepsilon$, $b = x$, $\beta = \varepsilon$, si ha, tenendo conto delle (9_1), (10_1) ed (11_1):

$$\varphi(e, \varepsilon; c, \gamma) = \varphi\big(a_1, \varepsilon; f(x, \varepsilon; c, \gamma), \varphi(x, \varepsilon; c, \gamma)\big) = \varphi(x, \varepsilon; c, \gamma)$$

cioè, per (3_2),

$$\varphi(x, \varepsilon; c, \gamma) = \gamma.$$

Quindi $x = h_1$ ed

$$(a_1, \varepsilon)^{-1} = (h_1, \varepsilon).$$

Pertanto l'insieme degli elementi (a_1, ε) è un sottogruppo di $\Delta_{G\Gamma}$ che chiamiamo Δ_{G_1}.

---

[5]) Tale relazione equivale alla $(a_1, \varepsilon)(b, \beta) = \big(f(a_1, \varepsilon; b, \beta), \beta\big)$

Teorema 3. *Si considerino tutti gli elementi b_2 (indicati con lettere latine qualsiansi dotate dell'indice 2) di G per cui*

$$(12_1) \qquad \varphi(a,\ \alpha;\ b_2,\ \varepsilon) = \alpha \ [6]$$

qualunque siano $a \in G$ ed $\alpha \in \Gamma$. L'insieme delle coppie $(b_2,\ \varepsilon)$ del gruppo $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ è un sottogruppo Δ_{G_2}.

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema 2 e pertanto qui non la riferiremo.

Teorema 4. *Si considerino tutti gli elementi α_1 (indicati con lettere greche qualsiansi dotate dell'indice 1) di Γ per cui*

$$(9_2) \qquad f(e,\ \alpha_1;\ b,\ \beta) = b \ [7]$$

qualunque siano $b \in G$ e $\beta \in \Gamma$. L'insieme delle coppie $(e,\ \alpha_1)$ del gruppo $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ è un sottogruppo Δ_{Γ_1}.

La dimostrazione di questo teorema, molto simile a quella del teorema 2 (con opportuni scambi di lettere greche con lettere latine) è la seguente, che riportiamo per chiarezza (in quanto orientativa per altre dimostrazioni che ometteremo nel seguito).

L'unità $(e,\ \varepsilon)$ appartiene all'insieme delle $(e,\ \alpha_1)$, e ciò in virtù della (3_1).

Nella (4_1) poniamo $a = e$, $\alpha = \alpha_1$, $b = e$, $\beta = \beta_1$ e teniamo conto della (9_2): si ha

$$f\big(e,\ \varphi(e,\ \alpha_1;\ e,\ \beta_1);\ c,\ \gamma\big) = f\big(e,\ \alpha_1;\ f(e,\ \beta_1,\ c,\ \gamma),\ \varphi(e,\ \beta_1,\ c,\ \gamma)\big) =$$
$$= f(e,\ \beta_1;\ c,\ \gamma) = c$$

e cioè, per (9_2),

$$\varphi(e,\ \alpha_1;\ e,\ \beta_1) = \delta_1.$$

Pertanto

$$(e,\ \alpha_1)(e,\ \beta_1) = \big(f(e,\ \alpha_1;\ e,\ \beta_1),\ \varphi(e,\ \alpha_1;\ c,\ \beta_1)\big) = (e,\ \delta_1).$$

Sia $(x,\ \xi)$ l'inverso di $(e,\ \alpha_1)$; per tale elemento vale, per esempio:

$$(10_2) \qquad \begin{cases} f(e,\ \alpha_1;\ x,\ \xi) = e \\ \varphi(e,\ \alpha_1;\ x,\ \xi) = \varepsilon. \end{cases}$$

---

[6]) In altro modo ciò si scrive $(a,\ \alpha)(b_2,\ \varepsilon) = (f(a,\ \alpha;\ b_2,\ \varepsilon),\ \alpha)$.

[7]) In altro modo, ovviamente, ciò si scrive $(e,\ \alpha_1)(b,\ \beta) = (b,\ \varphi(e,\ \alpha_1;\ b,\ \beta))$.

Ora $f(e, \alpha_1; x, \xi) = x$ per la (9_2) e quindi

$$(11_2) \qquad x = e.$$

Dalla (4_1) ponendo $a = e$, $\alpha = \alpha_1$, $b = e$, $\beta = \xi$ si ha, tenendo conto delle (9_2), (10_2), (11_2):

$$f(e, \varepsilon \; c, \gamma) = f(e, \xi; c, \gamma)$$

cioè, per (3_1):

$$f(e, \xi; c, \gamma) = c.$$

Quindi $\xi = \chi_1$ ed

$$(e, \alpha_1)^{-1} = (e, \chi_1).$$

Pertanto l'insieme degli elementi (e, α_1) è un sottogruppo di $\Delta_{G\Gamma}$ che chiamiamo Δ_{Γ_1}.

TEOREMA 5. *Si considerino tutti gli elementi β_2 (indicati con qualsiansi lettere greche dotate dell'indice 2) di Γ per cui*

$$(12_2) \qquad f(a, \alpha; e, \beta_2) = a \; (^8)$$

qualunque siano $a \in G$ ed $\alpha \in \Gamma$. L'insieme delle coppie (e, β_2) del gruppo $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ è un sottogruppo Δ_{Γ_2}.

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del precedente teorema 4.

COROLLARIO 6. *Entro un gruppo $\Delta_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ si ha*

$$(a_1, \varepsilon \; (e, \beta_2) = (a_1, \beta_2)$$
$$(e, \alpha_1)(b_2, \varepsilon) = (b_2, \alpha_1)$$

ove a_1, β_2, α_1, b_2 sono elementi che soddisfano rispettivamente alle (9_1), (12_2), (9_2), (12_1).

Ciò deriva immediatamente dalla legge (1) e dalla definizione degli elementi in questione.

I precedenti teoremi, basati sul fatto che il prodotto sghembo $G \circ \Gamma$ definito dalla legge (1) sia un gruppo $\Delta_{G\Gamma}$, tra l'altro, vengono ad *introdurre delle strutture di gruppo in certi sottinsiemi di G e Γ*, generati in relazione alle funzioni f e φ.

---

[8]) Ciò si scrive anche: $(a, \alpha)(e, \beta_2) = (a, \varphi(a, \alpha; e, \beta_2))$.

Precisamente, *nell'ipotesi che* $G \circ \Gamma$ *sia un gruppo* $\Delta_{G\Gamma}$, consideriamo *l'insieme* G_1 *degli elementi* a_1 *di* G indicati nel teorema 2 e definiamo *prodotto di due elementi* a_1 *e* b_1 *di* G_1 *l'elemento* d_1 *per cui*

$$(a_1,\ \varepsilon)(b_1,\ \varepsilon) = (d_1,\ \varepsilon).$$

Allora, in virtù dello stesso teorema 2 *l'insieme* G_1 *è un gruppo* avente e per unità.

Analogamente, quando $G \circ \Gamma$ è un gruppo, usando i teoremi 3, 4, 5 si introducono *strutture di gruppo negli insiemi degli elementi* a_2 *di* G *ed* α_1, α_2 *di* Γ; *indichiamo rispettivamente tali insiemi (e gruppi) con* G_2 *e* Γ_1, Γ_2.

4. D'ora in poi considereremo i *prodotti sghembi* $G \circ \Gamma$ *che siano dei gruppi* $\Lambda_{G\Gamma}$ cioè (cfr. n. 2) dei $\Delta_{G\Gamma}$ *per cui valgono anche le condizioni* (8_1) *ed* (8_2), poichè per tali prodotti sghembi (in cui rientrano molti casi di prodotti sghembi già trattati — cfr. [4], [1], [5], [6], [2], [3], [7] —) si presentano delle proprietà più significative che non per i generici $\Delta_{G\Gamma}$.

Analoghe proprietà si presentano *anche per i gruppi* $\Lambda'_{G\Gamma}$ (cfr. n. 2), ma non riferiremo su queste poichè i risultati (e le relative dimostrazioni) sono dello stesso tipo di quelle che daremo per i $\Lambda_{G\Gamma}$.

Per un gruppo $\Lambda_{G\Gamma}$ indicheremo ancora con G_1, G_2, Γ_1, Γ_2 gli insiemi definiti dalle (9_1), (12_1), (9_2), (12_2), (cfr. l'ultimo capoverso del n. 3) e con Λ_{G_1}, Λ_{G_2}, Λ_{Γ_1}, Λ_{Γ_2} i sottogruppi definiti rispettivamente come i Δ_{G_1}, Δ_{G_2}, Δ_{Γ_1}, Δ_{Γ_2} di un generico $\Delta_{G\Gamma}$. Per gli elementi di G_1, G_2, Γ_1, Γ_2 si userà la stessa nomenclatura introdotta sopra a proposito dei teoremi 2, 3, 4, 5.

Lemma 7. *Entro i gruppi* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ si ha

$$(a_1,\ \varepsilon)(b_1,\ \beta) = (c_1,\ \beta)$$

ove a_1, b_1, $c_1 \in G_1$ *e* $\beta \in \Gamma$.

Infatti dalle (8_1), (8_2) e dal teorema 2 si deduce:

$$(a_1,\ \varepsilon)(b_1,\ \beta) = (a_1,\ \varepsilon)(b_1,\ \varepsilon)(e,\ \beta) = (c_1,\ \varepsilon)(e,\ \beta) = (c_1,\ \beta).$$

Teorema 8. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'insieme degli elementi del tipo* $(a_1,\ \alpha)$ *(con* $a_1 \in G_1$, $\alpha \in \Gamma$*) di un gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$

sia un gruppo $\Lambda_{G_1\Gamma} = G_1 \circ \Gamma$ *(sottogruppo di* $\Lambda_{G\Gamma}$*) è che:*

A_{G_1}) *sia*

$$f(e, \beta;\ a_1, \alpha) \in G_1 \tag{13$_1$}$$

per qualsiansi $\alpha, \beta \in \Gamma$ *e* $a_1 \in G_1$*; ed, essendo* $(e, \alpha)^{-1} = (x, \xi)$*, sia*

$$\varphi(e, \xi;\ e, \alpha) = \varepsilon \tag{14$_1$}$$

per ogni $\alpha \in \Gamma$.

La condizione A_{G_1}) è sufficiente.

L'unità (e, ε) appartiene all'insieme degli (a_1, α).

Per le (8_1), (8_2), la A_{G_1}) ed il lemma 7, si ha

$$(a_1, \alpha)(b_1, \beta) = (a_1, \varepsilon)(e, \alpha)(b_1, \beta) = (a_1, \varepsilon)(c_1, \gamma) = (d_1, \gamma).$$

Calcoliamo l'inversa di (a_1, α); si ha

$$(a_1, \alpha)^{-1} = (e, \alpha)^{-1}(a_1, \varepsilon)^{-1} = (e, \alpha)^{-1}(b_1, \varepsilon)$$

e ciò per le (8_1), (8_2) ed il teorema 2.

Ora calcoliamo $(e, \alpha)^{-1}$; sia

$$(e, \alpha)^{-1} = (x, \xi).$$

Allora si ha

$$(x, \xi)(e, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

cioè

$$(x, \varepsilon)(e, \xi)(e, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

da cui, per A_{G_1}),

$$(x, \varepsilon)(h_1, \varepsilon) = (e, \varepsilon)$$

cioè

$$(x, \varepsilon) = (h_1, \varepsilon)^{-1} = (k_1, \varepsilon)$$

per il teorema 2, e quindi

$$x = k_1 .$$

Così risulta

$$(e, \alpha)^{-1} = (k_1, \xi)$$

ed

$$(a_1, \alpha)^{-1} = (k_1, \xi)(b_1, \varepsilon).$$

Di qui, applicando le (8_1), (8_2), la (13_1) ed il teorema 2 si ha

$$(a_1, \alpha)^{-1} = (k_1, \varepsilon)(e, \xi)(b_1, \varepsilon) = (k_1, \varepsilon)(c_1, \gamma) = (k_1, \varepsilon)(c_1, \varepsilon)(e, \gamma) =$$
$$= (d_1, \varepsilon)(e, \gamma) = (d_1, \gamma).$$

Pertanto l'insieme delle coppie (a_1, α) è un sottogruppo di $\Lambda_{G\Gamma}$ che chiamiamo $\Lambda_{G_1\Gamma}$.

La condizione $A_{G_1})$ è necessaria.

L'insieme delle coppie (a_1, α) sia un gruppo $\Lambda_{G_1\Gamma}$. Si ha allora

$$(e, \beta)(a_1, \alpha) = (c_1, \gamma)$$

donde la (13_1), per ogni $a_1 \in G_1$ ed $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Sia

$$(x_1, \xi) = (e, \alpha)^{-1}$$

cioè

$$(x_1, \xi)(e, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

cioè, per (8_1) e (8_2),

$$(x_1, \varepsilon)(e, \xi)(e, \alpha) = (e, \varepsilon)$$

cioè, per l'ipotesi attuale,

$$(x_1, \varepsilon)(b_1, \beta) = (e, \varepsilon).$$

Ora, per il teorema 2, è

$$(x_1, \varepsilon)^{-1} = (y_1, \varepsilon)$$

quindi (per quanto scritto sopra):

$$(e, \xi)(e, \alpha) = (b_1, \beta) = (y_1, \varepsilon)$$

e pertanto

$$\varphi(e, \xi; e, \alpha) = \varepsilon.$$

Ovviamente, *nelle ipotesi poste, il gruppo* $\Lambda_{G_1\Gamma}$ *è, a sua volta, un prodotto sghembo degli insiemi* G_1 e Γ rispetto alla stessa legge (1).

TEOREMA 9. *Il sottogruppo* Λ_{G_1} *degli elementi del tipo* (a_1, ε) *appartenenti al gruppo* $\Lambda_{G_1\Gamma}$ *è normale in* $\Lambda_{G\Gamma}$ *stesso se e solo se vale la seguente proprietà*:

$B_{G_1})$ $$\varphi(e, \xi; a_1, \alpha) = \varepsilon$$

qualunque siano $a_1 \in G_1$ $\alpha \in \Gamma$ *ed essendo* $(e, \alpha)^{-1} = (x_1, \xi)$.

Se vale la $B_{G_1})$ il sottogruppo Λ_{G_1} è normale in $\Lambda_{G_1\Gamma}$. Per verificare ciò, poichè $(b_1, \alpha) = (b_1, \varepsilon)(e, \alpha)$, basta provare (cfr. teorema 2) che

$$(e, \alpha)^{-1}(a_1, \varepsilon)(e, \alpha)$$

è ancora un elemento di Λ_{G_1}.

Sia $(e, \alpha)^{-1} = (x_1, \xi)$; allora si ha per B_{G_2}):

$$(e, \alpha)^{-1}(a_1, \varepsilon)(e, \alpha) = (x_1, \xi)(a_1, \varepsilon)(e, \alpha) = (x_1, \varepsilon)(e, \xi)(a_1, \alpha) =$$
$$= (x_1, \varepsilon)(c_1, \varepsilon) = (d_1, \varepsilon).$$

Viceversa Λ_{G_1} sia normale in $\Lambda_{G_1\Gamma}$, cioè sia

$$(e, \alpha)^{-1}(a_1, \varepsilon)(e, \alpha) = (d_1, \varepsilon)$$

cioè

$$(x_1, \xi)(a_1, \varepsilon)(e, \alpha) = (d_1, \varepsilon).$$

Allora

$$(x_1, \varepsilon)(e, \xi)(a_1, \alpha) = (d_1, \varepsilon)$$
$$(e, \xi)(a_1, \beta) = (x_1, \varepsilon)^{-1}(d_1, \varepsilon) = (c_1, \varepsilon)$$

per il teorema 2 e quindi

$$\varphi(e, \xi; a_1, \beta) = \varepsilon.$$

COROLLARIO 10. *Quando il sottogruppo Λ_{G_1} è normale nel gruppo $\Lambda_{G_1\Gamma}$ l'insieme degli elementi di G del tipo $f(e, \alpha; b_1, \varepsilon)$, per α qualsiasi ma fisso, coincide con G_1, più precisamente per ogni $\alpha \in \Gamma$ la corrispondenza $b_1 \rightarrow f(e, \alpha; b_1, \varepsilon)$ è una sostituzione $S_1^{(\alpha)}$ entro G_1.*

I laterali di Λ_{G_1} in $\Lambda_{G_1\Gamma}$ si possono scrivere

$$(e, \alpha)\Lambda_{G_1} = \Lambda_{G_1}(e, \alpha).$$

Di qui segue

$$(e, \alpha)(b_1, \varepsilon) = (c_1, \varepsilon)(e, \alpha) = (c_1, \alpha)$$

cioè

$$f(e, \alpha; b_1, \varepsilon) = c_1$$

ove, al variare di b_1, descrivendo interamente uno dei suddetti laterali, si hanno tutti gli elementi c_1 di G_1. In altre parole ciò significa che se $f(e, \alpha; b_1, \varepsilon) = f(e, \alpha; d_1, \varepsilon)$ si ha $b_1 = d_1$.

Quindi per ogni α la corrispondenza $b_1 \rightarrow f(e, \alpha; b_1, \varepsilon)$ è una sostituzione $S_1^{(\alpha)}$ entro G_1.

Da quanto detto sopra segue anche che per $b_1 \rightarrow f(e,\ \alpha;\ b_1\ ,\ \varepsilon) = c_1$ si ha

$$(e,\ \alpha)(b_1\ ,\ \varepsilon)(e,\ \alpha)^{-1} = (c_1\ ,\ \varepsilon)$$

il che illustra il significato della $S_1^{(\alpha)}$.

Lemma 11. *Entro il gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *si ha*

$$(a_2\ ,\ \varepsilon)(b_2\ ,\ \beta) = (c_2\ ,\ \beta).$$

La dimostrazione è analoga a quella del lemma 7 e segue dalle (8_1), (8_2) e dal teorema 3.

Teorema 12. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'insieme degli elementi del tipo* $(a_2,\ \alpha)$ *(con* $a_2 \in G_2$, $\alpha \in \Gamma$*) di un gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G_2 \circ \Gamma$ *sia un gruppo* $\Lambda_{G_2\Gamma} = G_2 \circ \Gamma$ *(sottogruppo di* $\Lambda_{G\Gamma}$*) è che:*

$A_{G_2})$ *sia*

$$f(e,\ \alpha;\ b_2\ ,\ \beta) \in G_2 \tag{15_1}$$

per qualsiansi α, $\beta \in \Gamma$ e $b_2 \in G_2$, *ed essendo* $(e,\ \alpha)^{-1} = (x,\ \xi)$, *sia*

$$\varphi(e,\ \xi;\ e,\ \alpha) = \varepsilon \tag{16_1}$$ [9])

per ogni $\alpha \in \Gamma$.

La dimostrazione è simile a quella del teorema 8, però per chiarezza la riportiamo.

La condizione $A_{G_2})$ è sufficiente.

Per le (8_1), (8_2), la $A_{G_2})$ ed il lemma 11 si ha

$$(a_2,\ \alpha)(b_2,\ \beta) = (a_2,\ \varepsilon)(e,\ \alpha)(b_2, \beta) = (a_2,\ \varepsilon)(c_2,\ \gamma) = (d_2,\ \gamma).$$

Ora

$$(a_2,\ \alpha)^{-1} = (e,\ \alpha)^{-1}(a_2,\ \varepsilon)^{-1} = (e,\ \alpha)^{-1}(b_2,\ \varepsilon)$$

in virtù del Teorema 3.

Sia

$$(e,\ \alpha)^{-1} = (x,\ \xi).$$

Di qui si ha

$$(x,\ \varepsilon)(e,\ \xi)(e,\ \alpha) = (e,\ \varepsilon)$$

[9]) Notiamo che la (14_1) e la (16_1) coincidono; quindi le ipotesi $A_{G_1})$ ed $A_{G_2})$ hanno una parte in comune.

e per A_{G_2})

$$(x, \varepsilon)(h_2, \varepsilon) = (e, \varepsilon)$$
$$(x, \varepsilon) = (h_2, \varepsilon)^{-1} = (k_2, \varepsilon),$$

per il teorema 3, ed infine

$$x = k_2 .$$

Quindi l'insieme degli (a_2, α) è un gruppo.

La condizione A_{G_2}) è necessaria.

L'insieme degli (a_2, α) sia un gruppo $\Lambda_{G\Gamma}$.

Si ha

$$(e, \alpha)(b_2, \beta) = (c_2, \gamma)$$

da cui segue la (15_1).

Sia

$$(x_2, \xi) = (e, \alpha)^{-1}$$

cioè

$$(x_2, \varepsilon)(e, \xi)(e, \alpha) = (e, \varepsilon).$$

Di qui, poichè per il teorema 3 si ha

$$(x_2, \varepsilon)^{-1} = (y_2, \varepsilon),$$

segue

$$(e, \xi)(e, \alpha) = (y_2, \varepsilon)$$

e quindi la (16_1).

Anche il gruppo $\Lambda_{G_2\Gamma}$ è prodotto sghembo dei due insiemi G_2 e Γ rispetto alla legge (1).

TEOREMA 13. *Il sottogruppo* Λ_{G_2} *degli elementi del tipo* (a_2, ε), *appartenenti al gruppo* $\Lambda_{G_2\Gamma}$, *è normale in* $\Lambda_{G_2\Gamma}$ *stesso.*

Si ha

$$(b_2, \beta)^{-1}(a_2, \varepsilon)(b_2, \beta) = (e, \beta)^{-1}(b_2, \varepsilon)^{-1}(a_2, \varepsilon)(b_2, \varepsilon)(e, \beta) =$$
$$= (e, \beta)^{-1}(c_2, \varepsilon)(e, \beta)$$

per (8_1), (8_2) ed il teorema 3.

Ora, ponendo

$$(e, \beta)^{-1} = (x_2, \xi),$$

si ha

$$(e, \beta)^{-1}(c_2, \varepsilon)(e, \beta) = (x_2, \xi)(c_2, \varepsilon)(e, \beta) = (h_2, \xi)(e, \beta) =$$
$$= (h_2, \varepsilon)(e, \xi)(e, \beta) = (h_2, \varepsilon)(k_2, \varepsilon) = (l_2, \varepsilon)$$

e ciò in virtù, tra l'altro, del teorema 3 e della (16_1). Quindi Λ_{G_2} è normale in $\Lambda_{G_2\Gamma}$.

COROLLARIO 14. *In relazione al gruppo* $\Lambda_{G_2\Gamma}$, *l'insieme degli elementi del tipo* $f(e, \alpha; b_2, \varepsilon)$ *di* G *per* α *qualsiasi ma fisso coincide con* G_2, *più precisamente per ogni* $\alpha \in \Gamma$ *la corrispondenza* $b_2 \rightarrow f(e, \alpha; b_2, \varepsilon)$ *è una sostituzione* $S_2^{(\alpha)}$ *entro* G_2.

La dimostrazione di tale corollario è analoga a quella del corollario 10.

I seguenti lemmi e teoremi 15, 16, 17, 18 19, 20, 21, 22 sono analoghi rispettivamente ai precedenti 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Poichè le relative dimostrazioni possono condursi in modo rispettivamente simile (con opportuni scambi fra lettere latine e greche), di essi riportiamo ormai solo gli enunciati.

LEMMA 15. *Entro i gruppi* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *si ha*

$$(b, \beta_1)(e, \alpha_1) = (b, \gamma_1).$$

TEOREMA 16. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'insieme degli elementi del tipo* (a, α_1) *(con* $a \in G$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$*) di un gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma_1$ *(sottogruppo di* $\Lambda_{G\Gamma_1}$*) è che:*

A_{Γ_1}) *sia*

$$\varphi(a, \alpha_1; b, \varepsilon) \in \Gamma_1 \tag{13$_2$}$$

per qualsiansi $a, b \in G$ *e* $\alpha_1 \in \Gamma_1$, *ed essendo* $(a, \varepsilon)^{-1} = (x, \xi)$ *sia*

$$f(a, \varepsilon; x, \varepsilon) = e \tag{14$_2$}$$

per ogni $a \in G$.

TEOREMA 17. *Il sottogruppo* Λ_{Γ_1} *degli elementi del tipo* (e, α_1) *appartenenti al gruppo* $\Lambda_{G\Gamma_1}$ *è normale in* $\Lambda_{G\Gamma_1}$ *stesso se e solo se:*

B_{Γ_1}) $$f(a, \alpha_1; x, \varepsilon) = e,$$

essendo

$$(a, \varepsilon)^{-1} = (x, \xi_1),$$

qualunque siano $a \in G$, $\alpha_1 \in \Gamma_1$.

COROLLARIO 18. *Quando il sottogruppo* Λ_{Γ_1} *è normale in* $\Lambda_{G_1\Gamma}$ *l'insieme degli elementi del tipo* $\varphi(e, \alpha_1; b, \varepsilon)$ *di* Γ, *per* b *qualsiasi, ma* *fisso, coincide con* Γ_1, *più precisamente per ogni* $b \in G$ *la corrispondenza* $\alpha_1 \to \varphi(e, \alpha_1;\ b, \varepsilon)$ *è una sostituzione* $S_1^{(b)}$ *entro* Γ_1.

LEMMA 19. *Entro il gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *si ha*

$$(b, \beta_2)(e, \alpha_2) = (b, \gamma_2).$$

TEOREMA 20. *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'insieme degli elementi del tipo* (a, α_2) *(con* $a \in G$ *ed* $\alpha_2 \in \Gamma_2$*) di un gruppo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *sia un gruppo* $\Lambda_{G\Gamma_2} = G \circ \Gamma$ *(sottogruppo di* $\Lambda_{G\Gamma}$*) è che:*

A_{Γ_2}) *sia*

$$\varphi(b, \beta_2;\ a, \varepsilon) \in \Gamma_2 \tag{15_2}$$

per qualsiansi $a, b \in G$, $\beta_2 \in \Gamma_2$ *ed, essendo* $(a, \varepsilon)^{-1} = (x, \xi)$, *sia*

$$f(a, \varepsilon;\ x, \varepsilon) = e \tag{16_2}$$ [10])

TEOREMA 21. *Il sottogruppo* Λ_{Γ_2} *degli elementi del tipo* (e, α_2) *appartenenti al gruppo* $\Lambda_{G\Gamma_2}$, *è normale in* $\Lambda_{G\Gamma_2}$ *stesso.*

COROLLARIO 22. *In relazione al gruppo* $\Lambda_{G\Gamma_2}$, *l'insieme degli elementi del tipo* $\varphi(e, \alpha_2;\ b, \varepsilon)$, *per* b *qualsiasi ma fisso descrive tutto* Γ_2 *e precisamente per ogni* $b \in G$ *la corrispondenza* $\alpha_2 \to \varphi(e, \alpha_2;\ b, \varepsilon)$ *è una sostituzione* $S_2^{(b)}$ *entro* Γ_2.

5. Nel seguente paragrafo raccoglieremo alcune possibili scomposizioni del prodotto sghembo $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ in cui rientrano, come casi particolari, scomposizioni già note (cfr. [1], [5], [2], [6], [3]).

A questo proposito valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 23. *Il prodotto sghembo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *risulta:*

1) *prodotto dei due gruppi permutabili* $\Lambda_{G_1\Gamma}$ *e* $\Lambda_{G\Gamma_1}$ *quando valgono le ipotesi* A_{G_1}) *ed* A_{Γ_1});

2) *prodotto dei due gruppi permutabili* $\Lambda_{G_1\Gamma}$ *e* $\Lambda_{G\Gamma_2}$ *quando valgono le ipotesi* A_{G_1}) *ed* A_{Γ_2});

3) *prodotto dei due gruppi permutabili* $\Lambda_{G_2\Gamma}$ *e* $\Lambda_{G\Gamma_2}$ *quando valgono le ipotesi* A_{G_2}) *ed* A_{Γ_2});

---

[10]) Notiamo che la (14_2) e la (16_2) coincidono: quindi le ipotesi A_{Γ_1}) ed A_{Γ_2}) hanno una parte in comune.

4) *prodotto dei due gruppi permutabili* $\Lambda_{G_2\Gamma}$ *e* $\Lambda_{G\Gamma_1}$ *quando valgono le ipotesi* A_{G_2}) *ed* A_{Γ_1});

Per dimostrare la proprietà 1) ricordiamo che per ogni elemento (a, α) si ha

$$(a, \alpha) = (a, \varepsilon)(e, \alpha)$$

ove $(a, \varepsilon) \in \Lambda_{G\Gamma_1}$ ed $(e, \alpha) \in \Lambda_{G_1\Gamma}$.

Di qui segue immediatamente [11]) la proprietà 1).

In modo analogo si dimostrano le proprietà 2), 3), 4).

Teorema 24. *Valgono le seguenti proprietà*:

1) *l'insieme degli elementi* (a_1, α_1) *è un sottogruppo* $\Lambda_{G_1\Gamma_1}$ *del gruppo* $\Lambda_{G\Gamma}$, *quando valgono le ipotesi* A_{G_1}) *ed* A_{Γ_1});

2) *l'insieme degli elementi* (a_1, α_2) *è un sottogruppo* $\Lambda_{G_1\Gamma_2}$ *del gruppo* $\Lambda_{G\Gamma}$ *che risulta un ampliamento* (che si scinde) *di* Λ_{Γ_2} *per* G_1, *quando valgono le ipotesi* A_{G_1}) *ed* A_{Γ_2});

3) *l'insieme degli elementi* (a_2, α_1) *è un sottogruppo* $\Lambda_{G_2\Gamma_1}$ *del gruppo* $\Lambda_{G\Gamma}$ *che risulta un ampliamento* (che si scinde) *di* Λ_{G_2} *per* Γ_1, *quando valgono le ipotesi* A_{G_2}) *ed* A_{Γ_1});

4) *l'insieme degli elementi* (a_2, α_2) *è un sottogruppo* $\Lambda_{G_2\Gamma_2}$ *del gruppo* $\Lambda_{G\Gamma}$ *che risulta il prodotto diretto di* Λ_{G_2} *per* Λ_{Γ_2}, *quando valgono le ipotesi* A_{G_2}) *ed* A_{Γ_2}).

La proprietà 1) segue dal precedente teorema 23 in quanto l'insieme degli elementi (a_1, α_1) — valendo le ipotesi A_{G_1}) ed A_{Γ_1}) — è quello degli elementi comuni ai due gruppi $\Lambda_{G_1\Gamma}$ e $\Lambda_{G\Gamma_1}$ e quindi è un gruppo (che indichiamo con $\Lambda_{G_1\Gamma_1}$).

Analogamente si verifica che l'insieme degli elementi (a_1, α_2) è un gruppo $\Lambda_{G_1\Gamma_2}$, Ora per il teorema 21 il gruppo Λ_{Γ_2} è normale in $\Lambda_{G\Gamma_2}$ e quindi anche in $\Lambda_{G_1\Gamma_2}$. I laterali di $\Lambda_{G_1\Gamma_2}$ rispetto a Λ_{Γ_2} sono del tipo

$$(a_1, \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}$$

e pertanto, tenendo conto delle considerazioni fatte alla fine del n. 3 segue che $\Lambda_{G_1\Gamma_2}$ è un ampliamento (che si scinde) di Λ_{Γ_2} per G_1.

Analogamente si verificano le proprietà 3) e 4) (per quest'ultima conviene tener conto, in particolare, del fatto che $\Lambda_{G_2} \cap \Lambda_{\Gamma_2} = (e, \varepsilon)$).

---

[11]) Cfr. ad es. [8], cap. III, n. 24, pag. 61.

Si possono ovviamente dare altre proprietà del tipo di quelle indicate dal teorema 24 introducendo anche le ipotesi B_{G_1}) e B_{Γ_1}).

6. In questo paragrafo mostriamo che quando per un prodotto sghembo $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ valgono alcune delle ipotesi A_{G_1}), A_{G_2}), A_{Γ_1}), A_{Γ_2}), B_{G_1}), B_{Γ_1}), si introduce senz'altro una struttura di gruppo in uno od in entrambi gli insiemi dati da G e Γ.

Per esempio vale il seguente teorema.

TEOREMA 25. *Se per un gruppo, prodotto sghembo* $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ *vale l'ipotesi* A_{Γ_2}), *nell'insieme* G *si riscontra una struttura di gruppo in relazione alla quale* G_2 *è proprio un sottogruppo di* G.

Per il teorema 21 il sottogruppo Λ_{Γ_2} è normale in $\Lambda_{G\Gamma_2}$. I laterali di Λ_{Γ_2} in $\Lambda_{G\Gamma_2}$ sono dati da tutti gli

$$(a,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}$$

ove a descrive tutto G.

Ora

$$\big((a,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}\big)\big((b,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}\big) = (c,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2} = \big((a,\ \varepsilon)(b,\ \varepsilon)\big)\Lambda_{\Gamma_2}. \tag{17}$$

Assumiamo, per esempio, *come prodotto* $a \cdot b$ *l'elemento* c *che compare nella* (17).

Per le ipotesi poste è

$$\big((a,\ \varepsilon)(b,\ \varepsilon)\big)(c,\ \varepsilon) = (a,\ \varepsilon)\big((b,\ \varepsilon)(c,\ \varepsilon)\big) = (d,\ \delta_2) = (d,\ \varepsilon)(e,\ \delta_2).$$

Quindi

$$(a \cdot b) \cdot c = d = a \cdot (b \cdot c).$$

Pertanto il suddetto prodotto è associativo.

Poichè

$$(a,\ \varepsilon)(e,\ \varepsilon) = (a,\ \varepsilon)$$

l'unità rispetto al prodotto ora introdotto è proprio e.

Infine, in quanto i laterali $(a,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}$ formano un gruppo, per ogni $(a,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}$ vi è un laterale $(x,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}$ per cui $\big((a,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}\big)\big((x,\ \varepsilon)\Lambda_{\Gamma_2}\big) = \Lambda_{\Gamma_2}$ e quindi per ogni $a \in G$ vi è un $x \in G$ per cui

$$a \cdot x = e.$$

Così, nelle ipotesi poste, l'insieme G forma un gruppo in relazione al prodotto sopra definito.

Ora

$$(a_2, \varepsilon)(b_2, \varepsilon) = (c_2, \varepsilon)$$

e quindi la struttura di gruppo già introdotta in G_2 (v. n. 3) è tale che G_2 risulta sottogruppo del gruppo G ora considerato (proprio in relazione alla legge di prodotto ivi definita).

Si possono poi enunciare altri teoremi analoghi al teorema 25 supponendo verificate alcune altre fra le suddette ipotesi $A_{G_1})$, $A_{G_2})$, $A_{\Gamma_1})$, $A_{\Gamma_2})$, $B_{G_1})$, $B_{\Gamma_1})$, ma per ragioni di brevità omettiamo i loro enunciati che il lettore può facilmente immaginare.

7. Notiamo infine, esplicitamente che i precedenti teoremi 23 e 24 e le considerazioni del n. 6 esprimono sostanzialmente la possibilità di scomporre il prodotto sghembo $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ in prodotti di gruppi di tipo più semplice e noto: prodotti di gruppi permutabili, ampliamenti di Schreier e prodotti diretti, e ciò quando valgono talune delle ipotesi $A_{G_1})$, $A_{G_2})$, $A_{\Gamma_1})$, $A_{\Gamma_2})$, $B_{G_1})$, $B_{\Gamma_1})$.

A titolo d'esempio enunciamo per disteso come si realizza una di tali scomposizioni; il lettore può facilmente ritrovarne altre che seguono facilmente dai citati teoremi 23 e 24.

TEOREMA 25. *Quando per un gruppo prodotto sghembo $\Lambda_{G\Gamma} = G \circ \Gamma$ valgono le ipotesi $A_{G_2})$ ed $A_{\Gamma_2})$ esso risulta prodotto dei due gruppi permutabili $\Lambda_{G_2\Gamma}$ e $\Lambda_{G\Gamma_2}$ ove $\Lambda_{G_2\Gamma}$ è un ampliamento di Schreier di Λ_{G_2} per Γ, $\Lambda_{G\Gamma_2}$ è un ampliamento di Schreier di Λ_{Γ_2} per G ed i sottogruppi $\Lambda_{G_2\Gamma}$ e $\Lambda_{G\Gamma_2}$ hanno in comune il gruppo $\Lambda_{G_2\Gamma_2}$ che è il prodotto diretto di Λ_{G_2} e Λ_{Γ_2}.*

Questo teorema segue immediatamente dai teoremi 23 (proprietà 4) e 24 (proprietà 4), dalle considerazioni del n. 6, per cui G e Γ risultano avere struttura di gruppo, e dai teoremi 13 e 21.

OSSERVAZIONE. Ricordiamo infine che la scomposizione di certi prodotti sghembi di Rédei data in [2] e [3] rientra proprio, come caso particolare in quella presentata dal teorema 25.

Pervenuta in Redazione il 9 marzo 1960.

RIASSUNTO

Dati due insiemi G e Γ si considerano le coppie (a, α) con $a \in G$ ed $\alpha \in \Gamma$ e per queste una legge di prodotto di tipo affatto generico. L'insieme delle (a, α) risulta allora un «prodotto sghembo» $G \circ \Gamma$.

Si dimostra che l'essere $G \circ \Gamma$ un gruppo — con o senza l'aggiunta di ulteriori condizioni — porta all'esistenza di certi sottogruppi particolari in $G \circ \Gamma$; introduce delle strutture di gruppo in G e in Γ od in loro sottinsiemi; ed importa per $G \circ \Gamma$ una scomposizione in prodotti di gruppi permutabili ed in ampliamenti di Schreier.

RÉSUMÉ

Étant donnés deux ensembles G et Γ, on considère l'ensemble des couples (a, α) où $a \in G$ et $\alpha \in \Gamma$ et à propos de celles-ci une loi de produit, tout à fait générique. L'ensemble des (a, α) est alors un «produit gauche» $G \circ \Gamma$.

On démontre que, lorsque $G \circ \Gamma$ est un groupe (en ajoutant éventuellement quelques autres hypothèses) on a les propriétés suivantes: en $G \circ \Gamma$ existent certains sous-groupes; en G et en Γ. ou dans quelques luers sousensembles, on a des structures de groupe; le produit $G \circ \Gamma$ peut être décomposé en produits de groupes permutables et en extensions de Schreier.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. KÖCHENDÖRFFER, *Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte*, Journal f. d. reine u. angew. Math. **192** (1953), pag. 96.

[2] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei*, Rend. Sem. Matem. Università e Politecnico di Torino, **17** (1957-58), pag. 209.

[3] C. MARCHIONNA TIBILETTI, *Una scomposizione di un più generale prodotto sghembo di gruppi*, Rend. Sem. Matem. Università e Politecnico di Torino, **18** (1958-59), pag. 77.

[4] L. RÉDEI, *Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie*, Journal f. d. reine angew Math. **188** (1950), pag. 201.

[5] F. RÜHS, *Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Produkte*, Journal f. d. reine angew. Math. **198** (1957), pag. 81.

[6] F. RÜHS, *Über das allgemeine Rédeischen schiefe Produkt*, Journal f. d. reine u. angew. Math. **200** (1958), pag. 99.

[7] J. SZÉP, *Über allgemeine Erweiterung von Gruppen*, Publicationes mathematicae, Debrecen, **6** (1959).

[8] G. ZAPPA, *Gruppi, corpi, equazioni*, Liguori, Napoli (1954).

[9] H. ZASSENHAUS, *The Theory of groups*, Chelsea, New York (1949).