

SUR LES VALEURS PROPRES D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE PERTURBÉ

Par

ANNE BOUTET DE MONVEL-BERTHIER , LOUIS BOUTET DE MONVEL ET GILLES LEBEAU

Dedicated to Professor Shmuel Agmon

Si $H = H_0 + V$ est une perturbation d'un oscillateur harmonique H_0 , on montre, sous des hypothèses assez faibles sur le potentiel V , que les noyaux des opérateurs d'évolution e^{itH} , e^{itH_0} ont même microsupport (en un sens qui sera précisé). En particulier les points singuliers de $\text{Tr } e^{itH}$, considéré comme distribution de t , sont les périodes des trajectoires périodiques de l'hamiltonien de H_0 . L'idée d'une démonstration est d'adapter la démonstration maintenant classique pour une perturbation d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 comme par exemple $\exp it(\sqrt{-\Delta} + V)$ où l'erreur V est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre ≤ 0 . Mais ici les méthodes asymptotiques initiées par Chazarain [16], qui prolongent le calcul symbolique "standard" des opérateurs pseudodifférentiels ou intégraux de Fourier (méthodes WKB), ne marchent pas et on voit très vite qu'on ne peut en aucun cas se limiter au calcul symbolique "classique".

Pour contourner cette difficulté nous proposons deux méthodes, techniquement assez différentes, mais dont nous pensons qu'elles ont chacune son intérêt propre. La première s'inspire d'idées de R. Beals et exploite le fait que des inégalités L^2 qu'impliquent l'équation d'évolution pour les crochets successifs du "défaut" $e^{-itH_0}e^{itH}$ avec les opérateurs "classiques" produisent une forme de calcul symbolique suffisante pour majorer l'ensemble des singularités. La deuxième est inspirée des méthodes semi classiques, le rôle du "petit paramètre" étant joué par un rapport d'homothétie.

Ce problème nous a été suggéré par une étude faite avec S. Albeverio. Des problèmes similaires ont été étudiés par S. Zelditch, A. Weinstein et S. Zelditch, D. Robert et nous remercions le referee de nous avoir signalé leur travail.

Nous remercions enfin chaleureusement le referee pour la liste détaillée et précise de corrections et suggestions qu'il nous a fournies, qui a certainement contribué à améliorer cet article.

Nous dédions cet article à notre cher ami et maître S. Agmon.

0. Introduction

On se propose d'étudier un oscillateur harmonique perturbé:

$$(0.1) \quad H = H_V = \frac{1}{2}(-\Delta + q(x)) + V$$

où q est une forme quadratique réelle définie positive ($\gg 0$) et $V = V(x)$ un potentiel. Pour qu'il s'agisse vraiment d'une perturbation on suppose que V n'est pas "trop grand": $V = o(q(x))$; exemple typique $V = \lambda \sin(ax + b)$. On se propose de comparer certaines des propriétés spectrales, en particulier aux hautes énergies, de l'opérateur H_V à celles de l'opérateur non perturbé

$$(0.2) \quad H_0 = \frac{1}{2}(-\Delta + q(x)).$$

Nous montrerons que les distributions d'une variable t , $\text{Tr } e^{itH}$ et $\text{Tr } e^{itH_0}$ ont même ensemble singulier, et pour cela que les noyaux de Schwartz des opérateurs e^{itH} et e^{itH_0} ont en un certain sens même microsupport.

Nous donnons en fait de ceci deux démonstrations; l'une utilise le calcul des opérateurs pseudo-différentiels "polynomiaux" décrits dans Boutet de Monvel [11]; dans cette théorie on modifie le décompte des degrés des opérateurs définis globalement dans \mathbf{R}^n , de sorte qu'en particulier l'oscillateur harmonique apparaît elliptique d'ordre 1 (au lieu de 2); la définition de l'ellipticité n'est donc pas la définition usuelle, non plus que celle du microsupport qui lui est liée, et qui tient compte ici à la fois de la régularité et de l'ordre de grandeur à l'infini. La méthode consiste à adapter dans ce cadre la démonstration (maintenant classique) qui marche pour une perturbation d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 comme par exemple $\exp it(\sqrt{-\Delta} + V)$, où l'erreur V est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre ≤ 0 . La difficulté est que la perturbation V ci-dessus (qui est naturelle dans ce contexte) n'est pas l'analogie d'un opérateur pseudo-différentiel "classique" d'ordre 0, mais plutôt d'un opérateur "de type $\frac{1}{2}$ " ou pire et que, pour de tels opérateurs le calcul symbolique "standard" des opérateurs pseudo-différentiels ou intégraux de Fourier ne marche plus du tout. Néanmoins les inégalités L^2 qu'impliquent l'équation d'évolution pour e^{itH} produisent une forme de calcul symbolique suffisante pour estimer (comme Beals [6, 7]) les commutateurs itérés des opérateurs qui apparaissent dans la comparaison des deux opérateurs d'évolution e^{itH} et e^{itH_0} , et finalement de majorer l'ensemble du microsupport de e^{itH} .

L'autre méthode, suivant une indication de Sjöstrand, consiste à introduire un petit paramètre $h > 0$ jouant le rôle d'une constante de Planck et à effectuer la transformation unitaire $f(x) \rightarrow h^{-n/4}f(h^{-1/2}x)$ sur L^2 . On se ramène ainsi à l'étude d'un problème semi-classique asymptotique ($h \rightarrow 0$) faisant intervenir une classe

convenable d'opérateurs pseudo-différentiels (voir le paragraphe 3.2); problème qu'on localise près des surfaces d'énergie du problème non perturbé.

Notre assertion résulte alors d'un théorème de propagation de singularités pour un opérateur de type principal réel, de degré 1, perturbé par un terme de degré zéro appartenant à une classe de symbole assez bonne pour qu'une preuve utilisant les opérateurs de degré variable s'applique (paragraphe 3.4).

0.1 L'opérateur non perturbé

Si on choisit une base orthonormale dans laquelle la forme quadratique q est diagonale: $q(x) = \sum \lambda_j^2 x_j^2$ ($\lambda_j > 0$), les valeurs propres de H_0 sont les nombres

$$(0.3) \quad \alpha \cdot \lambda + \frac{1}{2} |\lambda|$$

(avec $\alpha \cdot \lambda = \sum \alpha_j \lambda_j$ pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, et $|\lambda| = \sum \lambda_j$).

Notons que par l'ordre de grandeur de ses valeurs propres H_0 se comporte comme un opérateur elliptique d'ordre 1 (plutôt que 2) à n variables. L'opérateur d'évolution e^{itH_0} se comporte comme un "opérateur intégral de Fourier" associé au flot intégral du hamiltonien de H_0 (c'est à dire le champ de vecteurs $\sum \xi_j \partial / \partial x_j - q_{j,k} x_j \partial / \partial \xi_k$). La quantité $\text{Tr } e^{itH_0}$ est bien définie comme distribution sur \mathbb{R} : on a

$$(0.4) \quad \text{Tr } e^{itH_0} = e^{it|\lambda|/2} \prod (1 - e^{it\lambda_j})^{-1}$$

(valeur au bord du prolongement holomorphe pour $\text{Im } t \geq 0$), et l'ensemble des singularités de $\text{Tr } e^{itH_0}$ est donc exactement l'ensemble des périodes du flot hamiltonien de H_0 (c'est à dire l'ensemble des nombres de la forme $2k\pi/\lambda_j$, $k \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n$).

0.2 L'opérateur perturbé

On fera dans toute la suite l'hypothèse suivante (qui sera renforcée plus loin):

$$(0.5) \quad V \text{ est continu, } V = o(\|x\|^2) \text{ pour } x \rightarrow \infty \text{ et } |\text{Im } V| \leq c^{ste}.$$

Les opérateurs H et H_0 ont alors même domaine, à savoir l'espace hilbertien des fonctions $f \in L^2$ telles que $\|x\|^2 f \in L^2$ et $D^2 f \in L^2$. En outre la différence $V = H - H_0$ est un opérateur compact $\text{Dom}(H) \rightarrow L^2$. Il s'ensuit que le spectre de H est discret et que les valeurs propres de H ont le même ordre de grandeur que

celles de H_0 .¹ En outre l'opérateur e^{itH} est bien défini, en vertu du théorème de Hille–Yosida (puisque l'on a $|\operatorname{Im} V| \leq c^{ste}$). On s'attend en fait à des analogies plus fines entre les propriétés spectrales de H et de H_0 . Ici nous nous intéressons à la question de savoir si e^{itH} et e^{itH_0} ont le même microsupport (en un sens à préciser) lorsque H n'est pas une trop grosse perturbation de H_0 ; dans ce cas l'ensemble des points singuliers de $\operatorname{Tr} e^{itH}$ est lui aussi contenu dans l'ensemble des périodes du flot hamiltonien de H_0 . C'est ce que nous montrons ci-dessous, sous une hypothèse assez faible sur V (il faut que $\operatorname{Im} V$ soit borné, et que V et ses dérivées ne soit pas trop grands—voir §2). Comme il a été indiqué plus haut, il convient de modifier la définition "usuelle" du microsupport (wave-front) des distributions et opérateurs sur \mathbf{R}^n pour l'adapter à l'oscillateur harmonique. La définition que nous utilisons tient compte à la fois de la régularité et de la croissance à l'infini. Elle est décrite au §1 ci-dessous. Elle donne lieu à un calcul symbolique essentiellement identique au calcul usuel, sauf qu'il convient pour une bonne analogie de diviser les degrés des opérateurs par 2: x et D_x sont de degré $\frac{1}{2}$ dans ce contexte (cf. Boutet de Monvel [11]), et H_0 apparaît comme un opérateur elliptique d'ordre 1. Pour comparer les deux opérateurs d'évolution e^{itH_0} et e^{itH} , on introduit l'opérateur

$$(0.6) \quad P = e^{-itH_0} e^{itH}$$

qui vérifie une équation différentielle (opératoire)

$$(0.7) \quad dP/dt = iV_t P \quad \text{avec} \quad V_t = e^{-itH_0} V e^{itH_0}$$

où par abus on a noté V l'opérateur de multiplication par V . Le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels permettrait de résoudre symboliquement cette équation si V appartenait à un des 'bons' espaces de symboles, du type S_δ^m avec $\delta < \frac{1}{2}$, pour lesquels le degré des termes successifs dans les développements asymptotiques du calcul symbolique tend vers $-\infty$. Ici ce n'est jamais le cas: si on compte que x et ξ sont tous deux homogènes de degré $\frac{1}{2}$ et si l'opérateur de multiplication par $V = V(x)$ appartient à un espace de symboles S_δ^m , on a nécessairement $\delta \geq \frac{1}{2}$ (à moins que V ne soit un polynôme). Néanmoins, si $\operatorname{Im} V$ est borné et $V \in S_\delta^\gamma$ avec $\nu = \gamma + \delta < 1$ (ce qui est certainement le cas si V est de classe C^∞ , périodique ou presque périodique), nous montrerons que la solution P , même si elle n'est pas un opérateur pseudodifférentiel d'une des classes de Hörmander, jouit des propriétés suivantes:

$$(0.8) \quad P \text{ est "d'ordre 0" i.e. continu } \mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^s \text{ pour tout } s$$

¹ I.e. le nombre $N_{H_0}(s)$ de valeurs propres $\leq s$ de H_0 est équivalent à $N_H(s)$.

(où \mathcal{H}^s est l'analogie dans notre situation de l'espace de Sobolev, cf. §1);

(0.9) si Q_1, \dots, Q_N sont N "OPD classiques" d'ordre 1,

le commutateur $[Q_1 \cdots [Q_N, P].]$ est d'ordre $\leq N\nu$.

Comme on verra au §1.2 ceci implique que P est microlocal (avec la notion modifiée de microsupport), donc que e^{itH_0} et e^{itH} ont même microsupport, ainsi que les distributions de t : $\text{Tr } e^{itH_0}$ et $\text{Tr } e^{itH}$.

1. Modèles d'Opérateurs Microlocaux

1.1 Modèle des OPD "polynomiaux"

On se place sur \mathbf{R}^n . Le cotangent $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ est muni de la forme symplectique canonique $\sum d\xi_j dx_j$, qui est homogène de degré 1 si on compte que x et ξ sont homogènes de degré $\frac{1}{2}$. On note \mathcal{H}^∞ , resp. $\mathcal{H}^{-\infty}$, l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, resp. des distributions tempérées sur \mathbf{R}^n . Le noyau de Schwartz d'un opérateur continu $\mathcal{H}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^{-\infty}$ est une distribution tempérée sur \mathbf{R}^{2n} . Si $a \in \mathcal{H}^{-\infty}(\mathbf{R}^{2n})$ on note $a(x, D)$ le composé de la transformation de Fourier et de l'opérateur de noyau $(x, \xi) \rightarrow (2\pi)^{-n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi)$. Ainsi, si a est une fonction à croissance polynomiale en (x, ξ) on a la formule usuelle:

$$(1.1) \quad a(x, D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

On introduit l'analogie des espaces de symboles de Hörmander tenant compte que dans notre contexte les dérivations $\partial/\partial x, \partial/\partial \xi$ sont de degré $-\frac{1}{2}$ plutôt que 0 (resp. -1): pour m, δ réels on note

$$(1.2) \quad S_\delta^m \text{ l'ensemble des fonctions } a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$$

telles qu'on ait pour tout multi - indice α :

$$|\partial_{x\xi}^\alpha a| \leq c^{ste} (1 + |x| + |\xi|)^{2m+2(\delta-1/2)|\alpha|}.$$

Pour abrégé on notera $S^m = S_0^m$ (comme dans Hörmander [19], on peut généraliser en prenant des poids plus variés pour définir le degré m , ou des "métriques" plus générales pour définir les longueurs des dérivations $\partial/\partial x, \partial/\partial \xi$, nous n'aurons pas besoin de ceci ici). L'espace correspondant d'opérateurs est noté OPS_δ^m . Nous ne le considérerons que dans le cas $0 \leq \delta < 1$ (on vérifie élémentairement qu'un élément de S_δ^m est somme d'un polynôme et d'un symbole de degré $-\infty$ si $\delta < 0$; et les estimées qui définissent S_δ^m n'ont plus grand-chose à voir avec la microlocalisation si $\delta \geq 1$). Dans le cas $\delta = 0$, les éléments de OPS_0^m

sont l'analogie des opérateurs pseudodifférentiels "classiques" d'ordre m . Ces opérateurs satisfont au calcul symbolique usuel: si $a \in S_\delta^m, b \in S_{\delta'}^{m'}$ avec $\delta + \delta' < 1$, on a $a(x, D)B(x, D) = c(x, D)$, où $c \in S_{\delta''}^{m+m'}$ ($\delta'' = \sup(\delta, \delta')$) a pour développement asymptotique:

$$(1.3) \quad c \sim \sum \frac{i^{-\alpha}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a \partial_x^\alpha b. \quad 2$$

En particulier pour le symbole principal³ on a

$$(1.4) \quad \sigma_{m+m'}(AB) = \sigma_m(A)\sigma_{m'}(B),$$

$$(1.5) \quad \sigma_{m+m'+\delta+\delta'-1}([A, B]) = -i\{\sigma_m(A), \sigma_{m'}(B)\}$$

où $\{ , \}$ est le crochet de Poisson associé à la forme symplectique canonique.

Ce calcul est entièrement analogue au calcul pseudo-différentiel usuel, avec la différence que x et ξ sont ici tous deux de degré $\frac{1}{2}$ (pour que $\sum d\xi_j dx_j$ soit de degré 1). Il convient donc de diviser les degrés "usuels" par 2. Ainsi l'oscillateur harmonique

$$(1.6) \quad H_0 = \frac{1}{2}(-\Delta + q(x)) \quad (q \text{ forme quadratique } \gg 0 \text{ sur } \mathbf{R}^n)$$

se comporte comme un opérateur elliptique de degré 1 (et non 2), et dans le mélange $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^n$ et $d/dt - iH_0$ se comporte dans ce contexte comme un opérateur hyperbolique de degré 1, comme l'opérateur d'évolution $(d/dt - i\sqrt{-\Delta})$ dans le contexte usuel.

(1.7) **Echelle des espaces de Sobolev.** Il y a un analogue de l'échelle des espaces de Sobolev: $\mathcal{H}^s = A^{-1}(L^2)$ où A est n'importe quel opérateur elliptique d'ordre s (et de type $\delta \leq \frac{1}{2}$)⁵, par exemple A^s où $A = (-\Delta + x^2)/2$; l'espace

² Ceci signifie que pour tout k l'erreur $c -$ (les termes de degré $\geq k$ du membre de droite) est de degré $\leq k$; pour des opérateurs \sim signifie = mod. les opérateurs ou les symboles de degré $-\infty$ ($A \sim B \Leftrightarrow \deg(A - B) = -\infty$).

³ Le symbole principal de $A = a(x, D) \in \text{OPS}_\delta^m$ est la classe de a mod les symboles de degré $\leq m - \delta$, ou encore, si a a un développement asymptotique en fonctions homogènes ($\delta = 0$), le terme de plus haut degré de ce développement.

⁴ Comme dans Boutet de Monvel [11], $\mathbf{R}_{\text{pol}}^n$ désigne \mathbf{R}^n muni de l'algèbre des opd. de degré modifié comme ci-dessus, dont les prototypes sont les opérateurs polynomiaux en x et D , et $\mathbf{R}_{\text{usuel}}$ désigne \mathbf{R} muni de l'algèbre des opd. usuels (cette notation est à améliorer).

⁵ A est elliptique d'ordre s signifie que A , ou de façon équivalente son symbole ($\delta < 1/2$), possède un inverse d'ordre $-s$ modulo les opérateurs de degré $< s$.

$\mathcal{H}^\infty = \cap \mathcal{H}^s$ est l'analogue de C^∞ , et $\mathcal{H}^{-\infty} = \cup \mathcal{H}^s$ est l'analogue de l'espace des distributions. Il est commode, pour certains calculs, de faire des développements en fonctions de Hermite (fonctions propres de A): rappelons que celles-ci sont indexées par les multi-indices α :

$$h_\alpha = c_\alpha \left(x - \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha e^{-x^2/2} \quad \text{où la constante } c_\alpha > 0 \text{ est telle que } \|h_\alpha\|_{L^2} = 1.$$

On a $Ah_\alpha = (|\alpha| + n/2)h_\alpha$.

Les espaces \mathcal{H}^s sont invariants par transformation de Fourier, et plus généralement par le groupe métaplectique, qui opère d'ailleurs sur toute la situation (cf. Leray [24]).

(1.8) **Microsupport.** Il y a un analogue du microsupport (alias: spectre singulier, wavefront): dans ce paragraphe, si f est une distribution tempérée, $(x_0, \xi_0) \notin \text{SS}f$ signifie qu'il existe $A \in \text{OPS}_0^m$ elliptique en (x_0, ξ_0) ⁶ tel que $Af \in \mathcal{H}^\infty$. Le calcul symbolique montre que tous nos opérateurs sont "microlocaux": $\text{SS}(Af) \subset \text{SS}(f)$ si $A \in \text{OPS}_\delta^m$ si $\delta < 1$. Au §3 on utilisera une version "avec petit paramètre" du microsupport. Le microsupport défini ici se manipule comme le microsupport usuel, en particulier vis à vis des restrictions ou des projections, cf §2.

1.2. Continuité L^2

On sait qu'un opérateur $A \in \text{OPS}_\delta^0$ opère continûment dans L^2 si $\delta \leq \frac{1}{2}$: cela résulte simplement du calcul symbolique si $\delta < \frac{1}{2}$, qui montre qu'il existe dans ce cas des opérateurs $B \in \text{OPS}_\delta^0$ et $R \in \text{OPS}^{-\infty}$ tels que $A^*A + B^*B = c^{ste}(\text{Id} + R)$, ou du théorème de Calderon–Vaillancourt dans le cas $\delta = \frac{1}{2}$. Dans le cas $\delta > \frac{1}{2}$, l'assertion ci-dessus est fautive et on remplace l'espace S_δ^0 par un espace mieux adapté aux inégalités L^2 , en s'inspirant de Beals [6, 7].

Définition 1.1 Soit m un nombre réel. On note $\text{OP}\Sigma_1^m$ l'espace des opérateurs A réguliers d'ordre m , i.e. tels que A se prolonge en un opérateur continu $\mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^{s-m}$ pour tout s . Pour $0 \leq \delta < 1$, on note $\text{OP}\Sigma_\delta^m$ l'espace des $A \in \text{OP}\Sigma_1^m$ tels que pour toute suite finie Q_1, \dots, Q_N d'opérateurs "classiques" de degré 1 ($Q_j \in \text{OPS}_0^1$), on ait

$$[Q_1 \cdots [Q_N, A] \cdot] \in \text{OP}\Sigma_1^{m+N\delta}.$$

⁶ La notion d'ellipticité est évidemment microlocale et on peut parler d'opérateur elliptique en un point (x, ξ) (i.e. dans un voisinage conique de ce point); rappelons qu'ici conique signifie stable par les homothéties $(x, \xi) \rightarrow \lambda^{1/2}(x, \xi)$. Si $(x, \xi) = (0, 0)$ on convient que A est elliptique en (x, ξ) si c'est une constante inversible, et $(x, \xi) \notin \text{SS}(f)$ signifie $f = 0$.

On notera Σ_δ^m l'espace des symboles correspondant (le symbole d'un opérateur $A \in L(S^{-\infty}, S^\infty)$ est la distribution tempérée a telle que $e^{ix \cdot \xi} a$ soit le noyau de Schwartz de $A F^{-1}$; il est déterminé de façon unique d'après le théorème des noyaux de Schwartz). Il résulte aussitôt de la définition qu'on a $AB \in \text{OP}\Sigma_\delta^{m+m'}$ si $A \in \text{OP}\Sigma_\delta^m$ et $B \in \text{OP}\Sigma_\delta^{m'}$, et aussi $[A, B] \in \text{OP}\Sigma_\delta^{m+m'-1+\delta}$ si $A \in \text{OP}\Sigma_\delta^m$ et $B \in \Sigma_\delta^{m'}$.

Les opérateurs $A \in \text{OP}\Sigma_\delta^m$ sont "microlocaux", i.e. diminuent le microsupport, i.e. on a $BAC \sim 0$ si $B, C \in \text{OPS}_0^0$ ont des supports disjoints (il existe alors $Q_1 \cdots Q_N$ de support disjoint de C , de degré 0, tels que $BQ_1 \cdots Q_N \sim B$, donc $BAC \sim BQ_1 \cdots Q_N AC \sim [B[Q_1 \cdots [Q_N, A] \cdots]]C$ qui est de degré $\leq \text{deg}(B) + \text{deg}(A) + \text{deg}(C) - (N+1)(1-\delta)$, aussi petit qu'on veut. En outre si F est l'analogue d'un "opérateur intégral de Fourier classique" elliptique, on a $F \text{OP}\Sigma_\delta^m F^{-1} \subset \text{OP}\Sigma_\delta^m$ puisque $F \text{OP}\Sigma_0^1 F^{-1} \subset \text{OP}\Sigma_0^1$: c'est par exemple le cas si $F = e^{tA}$ où $A \in \text{OPS}_0^1$ a un symbole réel homogène (A déplace alors le microsupport comme le flot du champ hamiltonien du symbole de A).

Proposition 1.2 *Pour $\delta \leq \frac{1}{2}$, on a $\text{OP}\Sigma_\delta^m = \text{OPS}_\delta^m$.*

Examinons d'abord le cas $\delta = \frac{1}{2}$. Il suffit de démontrer la proposition pour $m = 0$. On note $a^{(\alpha)}$ la dérivée $(\partial_{x\xi})^\alpha a$; c'est le symbole du commutateur itéré $A^{(\alpha)} = i^{|\alpha|} (\text{Ad}(D, -x))^\alpha A$. Notons \mathcal{L} l'espace des distributions sur \mathbf{R}^{2n} noyaux d'opérateurs continus $L^2 \rightarrow L^2$. Si $a \in \mathcal{L}$ la suite de ses coefficients (de Hermite) est bornée et par suite $a \in \mathcal{H}^k(\mathbf{R}^{2n})$ pour $k < -n$. Par suite si $a \in \Sigma_{1/2}^0$ on a $a^{(\alpha)} \in e^{-ix \cdot \xi} \mathcal{L} \subset \mathcal{H}^{-n}$ pour tout α donc a est C^∞ et on a une inégalité

$$|a^{(\alpha)}(0, 0)| \leq c \|A^{(N)}\|_{\mathcal{L}} \quad \text{pour } N \text{ assez grand } (N > 3n + 2|\alpha|)$$

($A^{(N)}$ désigne la collection des dérivées d'ordre $\leq N$). Pour $(u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, notons T_{uv} l'opérateur $f \mapsto e^{-i(v \cdot x + u \cdot D)} f = e^{-iv \cdot x} f(x + u)$: les T_{uv} engendrent un groupe de transformations unitaires de \mathcal{H}^0 isomorphe au groupe de Heisenberg (on a $T_{uv} \in \text{OPS}_{1/2}^0 \cap \text{OP}\Sigma_{1/2}^0$). On a $\mathcal{F}(T_{uv} f) = e^{iu \cdot (x+v)} \hat{f}(\xi + v)$ et par suite $T_{uv} a(x, D) T_{uv}^{-1} = a(x+u, D+v)$ (à la limite, on retrouve $[u \cdot D - v \cdot x, a(x, D)] = b(x, D)$ avec $b(x, \xi) = (u \cdot D_x + v \cdot D_\xi) a(x, \xi)$). Or la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ est invariante par translation en x, ξ ($a(x+u, \xi+v)$ est le noyau de $T_{uv} A T_{uv}^{-1}$); donc on a aussi

$$|a^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq c \|(T_{uv} A T_{uv}^{-1})^{(N+|\alpha|)}\|_{\mathcal{L}} = c \|T_{uv} A^{(N+|\alpha|)} T_{uv}^{-1}\|_{\mathcal{L}}$$

autrement dit toutes les dérivées $a^{(\alpha)}$ sont bornées, ce qui signifie qu'on a $a \in S_{1/2}^0$. Comme on sait, la réciproque est vraie et résulte du théorème de Calderón-Vaillancourt. Dans le cas $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$, on observe que la condition $a \in S_\delta^m$ implique $a^{(\alpha)} \in \Sigma_{1/2}^{m-\varepsilon\alpha}$ pour tout α , avec $\varepsilon = \frac{1}{2} - \delta$, et que ceci équivaut à $a \in S_\delta^m$. Dans le cas $\delta > \frac{1}{2}$, il n'y a pas de relation d'inclusion aussi simple entre S_δ^m et Σ_δ^m . Néanmoins

Proposition 1.3 Soit $V = V(x)$ un symbole indépendant de ξ . Alors pour $m \geq 0, \delta \geq \frac{1}{2}, V \in S_\delta^m$ implique $V \in \Sigma_\delta^m$.

En effet, si $V \in S_\delta^m$, la formule de Leibniz montre que, pour tout $\alpha, V^{(\alpha)}$ opère continûment $\mathcal{H}^s \rightarrow \mathcal{H}^{s-m-|\alpha|}$ pour tout $s \geq 0$, donc aussi par dualité pour tout $s \leq 0$.

Remarque On peut montrer qu'on a $S_\delta^{m-k} \subset \Sigma_\delta^m \subset S_\delta^{m+k}$ pour k assez grand; mais ceci n'est pas d'une grande utilité pour la continuité L^2 .

2. Perturbation de l'Oscillateur Harmonique

On se place toujours sur \mathbf{R}^n avec les conventions ci-dessus. Notre opérateur non perturbé est $H_0 = \frac{1}{2}(-\Delta + q(x))$, où $q(x)$ est une forme quadratique réelle $\gg 0$ sur \mathbf{R}^n . L'opérateur perturbé est

$$(2.1) \quad H = H_0 + V$$

où $V = V(x)$ est un potentiel. On fait sur V l'hypothèse suivante: $V \in S_\delta^\gamma$ (donc aussi $V \in \Sigma_\delta^\gamma$) où γ, δ sont deux nombres réels ≥ 0 tels que $\gamma \geq 0, \delta \geq 1/2$ et $\nu = \gamma + \delta < 1$. Autrement dit

$$(2.2) \quad |\partial_x^\alpha V| \leq c_\alpha (1 + |x|^2)^{\gamma + \varepsilon|\alpha|} \quad (\text{avec } \varepsilon = \delta - 1/2).$$

Le symbole des "opérateurs polynomiaux" H et H_0 (cf. note 4) est

$$(2.3) \quad \sigma(H) = \sigma(H_0) = (\xi^2 + q(x))/2.$$

En particulier H est elliptique de degré 1, comme H_0 ; il a une paramétrix $H^{-1} \in \text{OPS}_\delta^{-1}$ (ou aussi dans ce cas $H^{-1} \in \text{OPS}_\delta^{-1}$).

Soit $K_0 = K_0(t, x, y)$ (resp. $K = K(t, x, y)$) le noyau de Schwartz de l'opérateur d'évolution $\exp itH_0$ (resp. $\exp itH$) considéré comme noyau d'opérateur sur $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^n$. On a

$$(2.4) \quad (\partial_t - iH_x)K = (\partial_t - iH_y)K = 0.$$

Si on mesure l'asymptotique de K comme celle des distributions de $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^n$, comme indiqué ci-dessus (cf. note 4), on voit que le microsupport $\text{SS}(K)$ est contenu dans la variété d'équations $\tau - \sigma_H(x, \xi) = \tau - \sigma_H(y, -\eta) = 0$ (en dehors de

⁷ Si ces conditions ne sont pas remplies il faut remplacer ν par $\sup(\gamma, 0) + \sup(\delta, 1/2)$ dans la suite.

laquelle $\partial_t - iH_x$ et $\partial_t - i'H_y$ sont elliptiques; on a posé $\sigma_H = \sigma(H)$). On se propose maintenant de comparer K et K_0 et on introduit le "quotient":

$$(2.5) \quad P = \exp(-itH_0) \exp(itH)$$

qui vérifie l'équation

$$(2.6) \quad \partial_t P = iV_t P \quad \text{avec } V_t = e^{-itH_0} V e^{itH_0}, \quad P(0) = \text{Id.}$$

Ici H_0 se comporte comme un opérateur "classique" elliptique d'ordre 1 et V_t est une famille C^∞ d'opérateurs pseudodifférentiels de type OPS_δ^γ .

Théorème 2.1 *On suppose $\text{Im } V$ borné, et $\nu = \gamma + \delta < 1$. Alors la solution P de (2.6) est un opérateur pseudo-différentiel $P \in \text{OPS}_\nu^0$ ($\text{Im } V = (V - V^*)/2i$).*

Démonstration L'équation (2.6) définit une famille continue d'opérateurs bornés dans $L^2 = \mathcal{H}^0$. En fait $P \in \text{OPS}_1^0$ (i.e. P est borné dans \mathcal{H}^s pour tout s), car $P_s = H_0^s P H_0^{-s}$ est la solution de l'équation similaire

$$(2.6)_s \quad \partial_t P_s = iV_{ts} P_s \quad \text{avec } V_{ts} = H_0^s V_t H_0^{-s} (= V_s(t))$$

or $\text{Im } V_{ts} = (V_{ts} - V_{ts}^*)/2i$ est borné puisqu'on a $V_{ts} = V_t + [H_0^s, V_t] H_0^{-s}$, que $\text{Im } V_t$ est borné par hypothèse et que, comme V_t est de degré γ et de type δ et H_0^s est de degré s et de type 0, $[H_0^s, V_t] H_0^{-s}$ est de degré $\leq \gamma + \delta - 1 < 0$.

Examinons les crochets successifs $[Q_k \cdots [Q_1, P] \cdots]$ où $Q_j \in \text{OPS}_0^1$. Notons $P^{(q)}$ un crochet d'ordre q : $[Q_{i_q} \cdots [Q_{i_1}, P] \cdots]$ et montrons par récurrence qu'on a $P^{(k)} \in \text{OP} \sum_\delta^{k\nu}$. En effet $P^{(k)}$ vérifie une équation

$$(2.6)_k \quad \partial_t P^{(k)} - iV_t P^{(k)} = R_k$$

où le deuxième membre R_k est somme de $2^n - 1$ termes de la forme $iV_t^{(p)} P^{(q)}$ ($p + q = k, q < k$) et $H_0^s P^k H_0^{-s}$ vérifie une équation analogue $(2.6)_{k,s}$. Comme $V_t^{(p)} \in \text{OPS}_\delta^{\gamma+p\delta} \subset \text{OPS}_1^{p(\gamma+\delta)}$ et par récurrence $P^{(q)} \in \text{OPS}_1^{q(\gamma+\delta)}$, le deuxième membre de $(2.6)_{k,s}$ est continu $\mathcal{H}^{k(\gamma+\delta)} \rightarrow \mathcal{H}^0$ donc aussi la solution $H_0^s P^{(k)} H_0^{-s}$. Ceci est vrai pour tout k et tout s et donc par définition $P \in \text{OP} \sum_{\gamma+\delta}^0$.

Corollaire 2.2 *Les distributions K et K_0 ont le même microsupport (au sens de $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^n$). L'ensemble des singularités de la distribution $\text{Tr } e^{itH} = \int K(t, x, x) dx$ est contenu dans l'ensemble des périodes du flot hamiltonien de H_0 .⁸*

⁸ Lorsque V est un symbole classique, comme fonction de x , ce résultat est implicitement contenu dans les résultats de A. Weinstein et S. Zelditch.

Le théorème 2.1 implique que P est microlocal donc préserve les microsoutports, en tant qu'opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbf{R}_{\text{pol}}^n$ dépendant de façon C^∞ de t , ou aussi bien en tant qu'opérateur sur $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^{2n}$ parcequ'il vérifie l'équation (2.6). Il en résulte aussitôt que K_0 et $K = {}^tP(K_0)$ ont même microsoutport.

On a par ailleurs pour le microsoutport (au sens de cette section) d'une restriction ou d'une image directe les mêmes règles qu'en général (avec essentiellement la même démonstration, que nous ne recopions pas):

–Si $Y \subset X$ est un sous objet la restriction $f|_Y$ est définie si $\text{SS}f$ ne rencontre pas le fibré conormal $T^*_Y X$ —i.e. si la projection $\text{SS}f \cap (T^*X|_Y) \rightarrow T^*Y$ est propre; $\text{SS}(f|_Y)$ est alors contenu dans l'image de cette projection.

–Si $X \rightarrow Y$ est une fibration $\int_{Y|X} f$ est bien défini si la projection $\text{SS}f \cap H \rightarrow T^*Y$ est propre, où $H \subset T^*X$ est l'ensemble des covecteurs horizontaux. $\text{SS}(f|_Y)$ est alors contenu dans l'image de cette projection.⁹

Si alors $f(t, x, y)$ est une distribution sur $\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^{2n}$ et si $Z = \text{SS}f \subset T^*(\mathbf{R}_{\text{usuel}} \times \mathbf{R}_{\text{pol}}^{2n})$ la "trace" $\text{Tr} f = \int f(t, x, x) dx$ est la projection de la restriction de f à $\mathbf{R} \times$ la diagonale $x = y$. Le microsoutport $\text{SS} \text{Tr} f$ est majoré par la règle ci-dessus: il est contenu dans l'ensemble des (t, τ) tels qu'il existe $(t, \tau, x, \xi, y, \eta) \in \text{SS}f$ avec $x = y, \xi + \eta = 0$ (pourvu que $\text{SS}f$ ne rencontre pas le fibré conormal de $\mathbf{R} \times$ la diagonale).

Dans le cas qui nous intéresse $\text{SS}K_0$ est le graphe du flot hamiltonien de H_0 : ensemble des $(t, \tau, x, \xi, y, \eta)$ tels que $\tau = \sigma_{H_0}(x, \xi), (x, \xi) = \Phi_t(y, -\eta)$ où Φ_t est le flot hamiltonien de H_0 . La règle précédente montre que $\text{SS}(\text{Tr} e^{itH_0})$ est contenu dans l'ensemble des (t, τ) tels que t soit période d'une courbe intégrale périodique et $\tau > 0$. Il y a en fait égalité dans ce cas puisque les valeurs propres de H_0 sont les nombres $\sum \lambda_j(\alpha_j + \frac{1}{2})$, avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ (si $H_0 = \frac{1}{2}(-\Delta + q(x))$, avec $q(x) = \sum \lambda_j^2 x_j^2$) et la distribution $\text{Tr} e^{itH_0}$ est valeur au bord de la fonction holomorphe pour $\text{Im}t \geq 0$: $\text{Tr} e^{itH_0} = e^{it|\lambda|/2} \prod (1 - e^{it\lambda_j})^{-1}$. Le microsoutport de $\text{Tr} e^{itH_0}$ est donc égal à l'ensemble (t, τ) tels que $\tau > 0$ et t soit une période du flot hamiltonien de H_0 (c'est à dire un des nombres de la forme $2k\pi/\lambda_j, k \in \mathbf{Z}, j = 1, \dots, n$).

Comme les distributions K et K_0 ont même microsoutport, la remarque ci-dessus montre que $\text{SS}(\text{Tr} e^{itH})$ est contenu dans l'ensembles des périodes ci-dessus (cette méthode fournit une inclusion, pas une égalité).

⁹ Ces énoncés sont cas particuliers de l'énoncé pour un composé: si f est une distribution et A un opérateur de X vers $Y, A(f)$ est bien défini si la projection $\text{SS}A \times_{T^*X} \text{SS}f \rightarrow T^*Y$ est propre, et on a alors $\text{SS}A f \subset \text{SS}A(\text{SS}f)$, $\text{SS}A$ désignant le symétrique du microsoutport du noyau de Schwartz de A .

3. Deuxième Méthode: Comportement Asymptotique Pour Les Petites Valeurs d'Un Paramètre

Dans ce paragraphe le microsupport est étudié d'après le comportement des distributions pour les petites valeurs d'un paramètre (ici un rapport d'homothétie) qui joue un rôle analogue à celui de la constante de Planck. Nous revenons aux conventions et notations usuelles concernant les opérateurs sur \mathbf{R}^n , en particulier leurs degrés.

3.1 Choix d'un petit paramètre

On note encore $K(t, x, y)$ le noyau de Schwartz de e^{itH} . Si $H = H_V$ et $K = K_V$ on a

$$(3.1) \quad (e^{itH_V})^* = e^{-itH_V} \quad \text{autrement dit} \quad \overline{K_V(t, y, x)} = K_V(-t, x, y).$$

On a aussi

$$\left(\frac{1}{i} \partial_t - H_V(x, D_x) \right) K_V(t, x, y) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{i} \partial_t - H_V(y, D_y) \right) K_V(t, x, y) \equiv 0.$$

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ on pose

$$(3.2) \quad K(\varphi; x, y) = \int \varphi(t) K(t, x, y) dt,$$

noyau de Schwartz de l'opérateur $\int \varphi(t) e^{itH} dt$.

Pour pouvoir étudier la trace du groupe e^{itH} on est amené à faire les hypothèses suivantes sur les dérivées du potentiel V :

$$(3.3) \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\gamma + |\alpha|\theta}. \quad 10$$

On suppose

$$(3.4) \quad \theta \in [0, 1[\quad \text{et} \quad 0 \leq \gamma < 1 - \theta.$$

Sous les hypothèses $|\text{Im } V| < c^{\text{ste}}$ et (3.3), l'application $\varphi \rightarrow \text{Tr}(K(\varphi))$ est une distribution que l'on notera comme plus haut $\text{Tr}(e^{itH})$. On prouvera que cette distribution est C^∞ en dehors des périodes de l'oscillateur harmonique H_0 si

¹⁰ Avec les notations des §1 et §2 ceci signifie $V \in S_\delta^{\gamma/2}$ avec $\delta = (1 + \theta)/2$.

$\gamma < 1 - \theta$. Pour cela suivant une indication de Sjöstrand, on introduit un petit paramètre h (avec $0 < h < h_0$) et on étudie le noyau

$$(3.5) \quad K(t, x, y; h) = h^{-n/2} K(t, h^{-1/2}x, h^{-1/2}y).$$

Remarquons que, si on pose $K(\varphi; h) = \int \varphi(t)K(t, x, y; h)$, on a $\text{Tr}(K(\varphi; h)) = \text{Tr}(K(\varphi))$, car on a simplement effectué la transformation unitaire sur $L^2 : f(x) \rightarrow h^{-n/4}f(xh^{-1/2})$. De plus $K(t, x, y, h)$ est le noyau de Schwartz du groupe $\exp(i\frac{t}{h}H_h)$ avec

$$(3.6) \quad H_h = \frac{1}{2}(-h^2\Delta + q(x)) + hV(h^{-1/2}x)$$

associé à l'opérateur de Schrödinger $-ih\partial_t - H_h$. La preuve des résultats sur la trace va se faire en suivant essentiellement les techniques d'analyse microlocale et le calcul pseudo-différentiel. Ici le rapport d'homothétie h joue le rôle de la constante de Planck.

Dans la suite on fixe un niveau d'énergie $E > 0$ et on désigne par U un petit voisinage de la surface S_E d'énergie E de l'oscillateur harmonique

$$(3.7) \quad S_E = \{(x, \xi) \mid \frac{1}{2}(\xi^2 + q(x)) = E\}.$$

3.2 Calcul pseudo-différentiel avec paramètre

Dans ce paragraphe, on décrit les classes d'O.P.D. naturellement associés à l'oscillateur perturbé H . On pose $\delta = (1 + \theta)/2 \in [1/2, 1[$, et on rappelle que V vérifie (3.3). Soit $S(m, m')$ l'espace des symboles (fonctions) $q(x, \xi, h)$ vérifiant les estimations suivantes:

$$(3.8) \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha, \beta} h^{-m' - \delta|\beta|} (1 + |x| + |\xi|)^{m - |\alpha|} (1 + |x|)^{\delta|\beta|}.$$

On notera $\text{OPS}(m, m')$ l'ensemble correspondant des opérateurs de la forme $q(x, hD, h)$

$$(3.9) \quad q(x, hD, h)u = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi/h} q(x, \xi, h)u(y)dyd\xi.$$

Les opérateurs $\text{OPS}(0, 0)$ sont bornés (uniformément en h) sur L^2 ; si $q_j \in \text{OPS}(m_j, m'_j)$, $j = 1, 2$, alors $q = q_1 \circ q_2 \in \text{OPS}(m_1 + m_2, m'_1 + m'_2)$ et on a pour le symbole le développement asymptotique:

$$(3.10) \quad q \sim \sum_{\alpha} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha q_1 \partial_x^\alpha q_2.$$

\sim signifie que l'erreur a même ordre de grandeur que le premier terme négligé; plus précisément qu'on a $q - \sum_{\alpha < N} \in S(m - (1 - \delta)N, m' - (1 - \delta)N)$. En fait, pour $|\alpha| = N$, le terme d'indice α du développement asymptotique est majoré par

$$(3.11) \quad c^{ste} h^{-m'_1 - m'_2 + N(1-\delta)} (1 + |x| + |\xi|)^{m_1 + m_2 - N(1-\delta)}$$

qui, pour N grand, est à la fois petit en h et en $(1 + |x| + |\xi|)$ et la preuve de (3.10) s'obtient comme dans le cas usuel (voir l'appendice). De même, si $q \in OPS(m, m')$, son adjoint q^* appartient aussi à $OPS(m, m')$ et on a pour le symbole:

$$q^* \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|} \alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\alpha} \bar{q}.$$

Posons $p = \frac{1}{2}(\xi^2 + q(x)) + hV(h^{-1/2}x) - E = \frac{1}{2}(\xi^2 + Z(x))$. On a

$$(3.12) \quad |\partial^{\beta} hV(h^{-1/2}x)| \leq c_{\beta} h^{1-\gamma/2-\delta|\beta|} (1 + |x|)^{\gamma+\theta|\beta|}.$$

Comme $q(x)$ est quadratique, $\gamma < 2$ et $\theta < \delta$, ceci implique

$$(3.13) \quad |\partial^{\beta} Z(x)| \leq C_{\beta} h^{-\delta|\beta|} (1 + |x|)^{2+\delta|\beta|}.$$

Lemme 3.1 Soit $W = \mathbf{R}^{2n} \setminus U$ (où comme plus haut U est un petit voisinage de la surface d'énergie S_E). Pour $h \in]0, h_0]$, h_0 assez petit, on a $|p(x, \xi, h)| \geq c^{ste} (1 + x^2 + \xi^2)$ pour $(x, \xi) \in W$ (avec une constante > 0) et la paramétrix de p définie par

$$\begin{cases} G \sim \sum h^k G_k \\ G_0(x, \xi, h) = \frac{1}{p(x, \xi, h)} \\ G_k(x, \xi, h) = -\frac{1}{p(x, \xi, h)} \sum_{\substack{j+|\alpha|=k \\ j \neq k}} i^{-|\alpha|} \partial_{\xi}^{\alpha} G_j \partial_x^{\alpha} p \end{cases}$$

vérifie $G_k \in OPS(-2 - (1 - \delta)k, \delta k)$ sur W .

Preuve On a $|hV(h^{-1/2}x)| \leq Ch^{1-\gamma/2}(1 + |x|)^{\gamma}$ et $\gamma < 2$ d'où la première assertion. La deuxième assertion résulte par récurrence sur n du fait que $p^{-1} \in S(-2, 0)$ et $p^{-1} \partial_x^{\alpha} p \in S(\delta|\alpha|, \delta|\alpha|)$ pour $|\alpha| \geq 1$. Pour vérifier ce dernier point, on remarque que $\partial_{\xi}^{\alpha} (\frac{1}{\xi^2 + Z(x)})$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $\frac{P_j(\xi)}{[\xi^2 + Z(x)]^j}$ où les P_j sont des polynômes de degré $\leq 2j - 2 - |\alpha|$; puis que $\partial_x^{\beta} \partial_{\xi}^{\alpha} (\frac{1}{\xi^2 + Z(x)})$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$P_j(\xi) \frac{\partial_x^{\beta_1} Z(x) \cdots \partial_x^{\beta_k} Z(x)}{[\xi^2 + Z(x)]^{j+k}}$$

avec $|\beta_i| \geq 1$, $|\beta_1| + \dots + |\beta_k| \leq |\beta|$. Or on a

$$[\xi^2 + Z(x)] \geq c^{ste} (1 + |x| + |\xi|)^2$$

sur W et l'assertion $p^{-1} \in S(-2, 0)$ résulte de (3.13).

De même $\partial_x^\beta \partial_\xi^{\beta'} (p^{-1} \partial_x^\alpha Z)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$P_l(\xi) \frac{\partial_x^{\beta_0} Z(x) \cdots \partial_x^{\beta_k} Z(x)}{[\xi^2 + Z(x)]^{l+k}}, \quad \text{avec } |\beta_0| + \dots + |\beta_k| \leq |\alpha| + |\beta| \text{ d'où aussi}$$

$$p^{-1} \partial_x^\alpha p = p^{-1} \partial_x^\alpha Z \in S(\delta|\alpha|, \delta|\alpha|).$$

L'opérateur $H_h = \frac{1}{2}(-h^2 \Delta + q(x)) + hV(h^{-1/2}x)$ a pour symbole $p + E$. Soit alors $\varphi \in C_0^\infty$ et $K_{\varphi, h}(x, y)$ le noyau de l'opérateur $\int \varphi(s) e^{i(s/h)H_h} ds$. On a

$$(3.14) \quad \begin{aligned} H_h(x, D_x) K_{\varphi, h}(x, y) &= ih K_{\varphi', h}(x, y), \\ H_h(y, D_y) K_{\varphi, h}(x, y) &= ih K_{\varphi', h}(x, y). \end{aligned}$$

Comme, pour h fixé, l'opérateur différentiel H_h est elliptique dans la classe $OPS^{2,0}$ pour $x^2 + \xi^2 \geq c^{ste}$, on déduit des identités précédentes que le noyau $K_{\varphi, h}(x, y)$ est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ en (x, y) . Par conséquent $K_{\varphi, h}$ est un opérateur à trace et l'application $\varphi \rightarrow K_{\varphi, h}$ est une distribution.

3.3 Localisation

Dans cette partie on s'intéresse à localiser l'étude du spectre de la distribution $\text{Tr}(e^{itH}) = \text{Tr}(e^{i(t/h)H_h})$. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty$; on cherche à quelles conditions sur le support de φ la fonction $\tau \rightarrow \langle e^{-it\tau}, \varphi(t) \text{Tr}(e^{itH}) \rangle$ est à décroissance rapide en $\tau \rightarrow +\infty$ (le cas $\tau \rightarrow -\infty$ se traite de la même façon avec H^*). Pour cela, on pose $\tau = E/h$ où E désigne un niveau d'énergie (c'est à dire un nombre) > 0 comme plus haut, et on est ramené à vérifier que l'application $h \rightarrow \langle \varphi(t), \text{Tr}(e^{i(t/h)(H_h - E)}) \rangle$ est $O(h^\infty)$ si le support de φ ne contient pas de période de l'oscillateur harmonique. On pose donc

$$(3.15) \quad R_{\varphi, h}(x, y) = \text{le noyau de } \int \varphi(t) e^{i(t/h)(H_h - E)} dt$$

et on remarque que comme précédemment

$$(3.16) \quad (H_h - E)(x, D_x, h) R_{\varphi, h}(x, y) = ih R_{\varphi', h}(x, y)$$

et une formule symétrique en y .

La variété caractéristique de $H_h - E$ est par définition la surface d'énergie S_E d'équation (3.7). Soit $T(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ telle que $T \equiv 0$ au voisinage de S_E , $T \equiv 1$ sur $W = \mathbf{R}^n \setminus U$ (U petit voisinage de S_E), et soit $T = T(x, hD_x)$ l'opérateur tel que

$$(3.17) \quad (T \cdot f)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(x-y) \cdot \xi / h} T(x, \xi) f(y) dy d\xi.$$

Le noyau de l'opérateur $\int \varphi(s) T(x, hD_x) \circ e^{isH_h/h} ds$ est $T(x, hD_x) R_{\varphi, h}(x, y)$. Pour tout entier N on a

$$(3.18) \quad (H_h - E)^N \circ T = \sum_{k=0}^N C_{k,N} (H_h - E)^k$$

avec $C_{k,N} \in \text{OPS}(0, -(N-k)(1-\delta))$, $C_{N,N} = T$ et, pour $k < N$, $C_{k,N} \in \text{OPS}(-\infty, -\infty)$ pour (x, ξ) en dehors d'un compact.

En utilisant la paramétrix fournie par le lemme et en écrivant

$$T \equiv G^N \circ (H_h - E)^N \circ T,$$

on obtient $\text{Tr}(T \circ R_h(\varphi)) \in O(h^\infty)$. De même, on a $\text{Tr}(R_h(\varphi) \circ T) \in O(h^\infty)$ et on est donc ramené à étudier l'intégrale

$$\int e^{isE/h} \varphi(s) \{L(x, hD_x) L(y, hD_y) K(s, x, y, h)\}_{y=x} dx ds,$$

où $L = 1 - T$ "localise la singularité" près de S_E . L'intégration en x est à présent à support compact. A ce stade on est ramené au problème d'analyse microlocale standard, avec des fonctions $u(x, h)$, avec $x \in \mathbf{R}^n$, h petit paramètre réel, et la définition du front d'onde: $(x_0, \xi_0) \notin \text{SS}(u)$ si, et seulement si, il existe une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ avec $\psi \equiv 1$ au voisinage de ξ_0 telle que

$$(3.19) \quad \int |\Psi(\xi)|^2 |\widehat{\varphi u}(\xi/h, h)|^2 d\xi \in O(h^\infty).$$

On ne s'intéresse pas aux problèmes à l'infini du fibré cotangent en supposant que u est spectralement bien localisé, ou ce qui revient au même qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel $A(x, hD_x)$ avec $a(x, \xi) \equiv 1$ pour $|x, \xi|$ assez grand et $A \cdot u = O(h^\infty)$ dans l'espace de Schwartz, c'est-à-dire

$$(3.20) \quad |x^\beta \partial_x^\alpha A u| \leq C_{\alpha, \beta}(h), \quad C_{\alpha, \beta} \in O(h^\infty).$$

Pour les microsupports dépendant d'un petit paramètre on a encore les théorèmes classiques sur la trace et l'image directe propre rappelés au § 2, et qu'on peut résumer dans les formules suivantes:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \text{SS}\left[\int u(x, y, h)dy\right] &\subset \{(x, \xi); \exists y, (x, y, \xi, 0) \in \text{SS}(u)\}, \\ \text{SS}[u(x, y, h)|_{y=0}] &\subset \{(x, \xi); \exists \eta, (x, 0, \xi, \eta) \in \text{SS}(u)\}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède on a

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \text{SS}\left[\int L(x, hD_x)L(y, hD_y)K(t, x, y, h)e^{-uE/h}\varphi(t)dt\right] \\ \subset \{(x, y; \xi, \eta)|E = \frac{1}{2}(\xi^2 + q(x)) = \frac{1}{2}(\eta^2 + q(y))\} \end{aligned}$$

et on est ramené à prouver le résultat de propagation des singularités suivant:

$$(3.23) \quad \text{SS}(K(t, x, y, h)) \cap \{\tau = E\}$$

est contenu dans l'ensemble des $(t, x, y; \tau, \xi, \eta)$ tels que $\tau = E$ et

- (i) $\tau = \frac{1}{2}(\xi^2 + q(x)) = \frac{1}{2}(\eta^2 + q(y)) = \tilde{q}(x, \xi) = E$,
- (ii) $(x, \xi) = \exp tH_{\tilde{q}}(y, -\eta)$.

On a déjà vu (i); reste à voir (ii), ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

3.4 Propagation des singularités

Rappelons qu'on a posé $\tilde{q}(x, \xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + q(x))$, que $H_{\tilde{q}}$ est réel et non nul sur la variété caractéristique $\tilde{q}(x, \xi) = \tilde{q}(y, \eta) = E$ et que $K(t, x, y, h)$ vérifie

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \frac{h}{i}\partial_t K &= \left[\frac{1}{2}(-h^2\Delta + q(x)) + hV(h^{-1/2}x)\right]K, \\ K|_{t=0} &= \delta_{(x=y)}. \end{aligned}$$

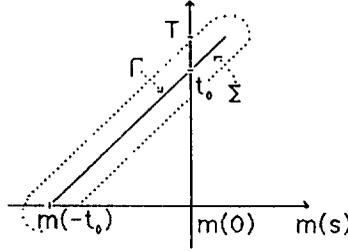
On pose $P_0 = \frac{1}{2}(-h^2\Delta + q(x))$, $R = hV(h^{-1/2}x)$ et $P = P_0 + R$; P_0 est à caractéristiques simples réelles près de S_E de degré zéro et la perturbation R est de degré $\leq \gamma/2 - 1 < 0$ en h ; plus précisément $R \in \text{OPS}(\gamma, \gamma/2 - 1)$. On fixe $m_0 = (x_0, \xi_0, y_0, \eta_0)$, avec $(x_0, \xi_0) \in S_E$, $(y_0, \eta_0) \in S_E$ et on note Γ_0 la bicaractéristique de $\tilde{q}(x, \xi)$ d'origine m_0 :

$$(3.25) \quad \Gamma_0 = \{(x, \xi, y_0, \eta_0)|\exists s, (x, \xi) = \exp sH_{\tilde{q}}(x_0, \xi_0)\}.$$

On note $m(s) = (\exp sH_{\tilde{q}}(x_0, \xi_0), (y_0, \eta_0))$.

Il s'agit de prouver que si $t_0 \in \mathbf{R}$, $m(-t_0) \neq (y_0, -\eta_0, y_0, \eta_0)$ et si $C(t, x, hD_x, y, hD_y)$ est un opérateur pseudodifférentiel classique ($\delta = 0$ dans les définitions du §3.2) on a

$$(3.26) \quad \int \|CK\|^2 dt \in O(h^\infty) \quad \text{si le support de } C \text{ est voisin de } (t_0, m(0)).$$



Soit Σ un petit voisinage de $\{(t, m(-t_0 + t)), t \in [0, T]\} = \Gamma$ où $T > t_0$ et $g(t, x, \xi, y, \eta)$ est une fonction C^∞ sur Σ telle que

$$(3.27) \quad \frac{\partial g}{\partial t} - \{\tilde{q}, g\} = -1, \quad g|_{t=0} = g_0; \quad g|_{t=T} < 0, \quad g(t_0, m_0) = 0$$

où $g_0(\alpha) = c_0 - c_1|\alpha - \alpha_0|^2$, $\alpha_0 = m(-t_0)$, $c_0 > 0$ et c_1 assez grand pour que $g|_{\partial\Sigma \cap \{t \geq 0\}} < 0$. Soit B_t l'opérateur h -pseudo-différentiel de degré variable (cf. aussi Hörmander [19], Unterberger [30]) de symbole

$$(3.28) \quad b(t, x, \xi, y, \eta, h) = h^{-C_0 g} \chi_\Sigma(t, x, \xi, y, \eta)$$

où $C_0 > 0$ est une grande constante positive et $\chi_\Sigma \in C_0^\infty(\Sigma)$, $\chi_\Sigma \equiv 1$ au voisinage de $\{g \geq 0\} \cap \{t \geq 0\}$. On pose $Q_t = B_t^* B_t$. On a

$$(3.29) \quad 0 = \int_0^T \left\langle \left(\left(\frac{h}{i} \right) \partial_t - P \right) K, Q_t K \right\rangle_{L^2} dt = \left[\left\langle \frac{h}{i} K, Q_t K \right\rangle \right]_0^T + \int_0^T \langle K, AK \rangle dt,$$

$$A = \frac{h}{i} Q_t' - [P_0, Q_t] + Q_t R - R^* Q_t.$$

On fixe $N_0 > 0$ grand. En choisissant C_0 grand, b est de degré aussi négatif qu'on veut au voisinage de $\{\chi_\Sigma < 1\}$. Par le calcul symbolique on obtient donc

$$(3.30) \quad A = B_t^* 2 \frac{h}{i} S B_t + J_1,$$

$$S = C_0 \log h - \text{Im } V(h^{-1/2} x) + J_2 + J_3,$$

où

$$J_1 \in \text{OPS}(0, -N_0), J_2 \in \text{OPS}\left(0, \frac{\theta + \gamma - 1}{2} + \varepsilon\right), J_3 \in \text{OPS}(0, -1 + \varepsilon) \text{ et } S^* = S$$

(les erreurs à l'autoadjonction de S étant absorbées dans J_1), $\varepsilon > 0$ arbitraire provenant des puissances de $\log h$ dans le calcul symbolique des opérateurs de degré variable.

On a donc $S = C_0 \log h (\text{Id} + K)^2$ où $K = K^*$ et K est borné sur L^2 de norme $\theta((\log h)^{-1})$ puisque $\text{Im } V$ est borné et $\theta + \gamma < 1$. Comme on a, avec N_1 indépendant de N_0 ,

(3.31)

$$\left\langle \frac{h}{i} K, Q_t K \right\rangle_{t=0} \in O(h^\infty), \left\langle \frac{h}{i} K, Q_t K \right\rangle_{t=T} \in O(h^{N_0}), \int_0^T \langle K, J_1 K \rangle \in O(h^{N_0 - N_1}),$$

on déduit de (3.31) que $\int_0^T \|B_t K\|_{L^2}^2 \in O(h^{N_0 - N_1})(h \log h)^{-1}$ d'où le résultat puisque N_0 est arbitrairement grand et $g(t_0, m_0) = 0$.

3.5 Appendice

Nous démontrons ici l'estimation du reste dans la formule de composition 3.10; bien qu'elle soit modélisée sur les démonstrations standard de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels nous n'avons pas trouvé pour celle-ci de référence précise. La majoration dans la formule d'adjonction se démontre de manière analogue.

L'opérateur composé $q = q_1 \circ q_2$ a pour symbole

$$(3.32) \quad q(x, \xi, h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{-it\theta/h} q_1(x, \xi + \theta, h) q_2(x + t, \xi, h) dt d\theta$$

(il s'agit d'une intégrale oscillante).

Soit r_N le reste du développement asymptotique d'ordre N de q :

$$(3.33) \quad q = \sum_{j < N} a_j + r_N,$$

avec

$$a_j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{(-ih)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha q_1 \partial_x^\alpha q_2 :$$

il s'agit de vérifier qu'on a $r_N \in S(m - (1 - \delta)N, m' - (1 - \delta)N)$ avec $m = m_1 + m_2, m' = m'_1 + m'_2$.

Compte tenu qu'on a $a_j \in S(m - (1 - \delta)j, m' - (1 - \delta)j)$ et

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_N = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left[\sum_{j=N}^{M-1} a_j + r_M \right]$$

si $M > N$, on voit qu'il suffit de vérifier qu'il existe, pour tous multi-indices α, β et tout nombre $A > 0$, un entier N tel que $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_N| \leq C^{ste} h^A (1 + |x| + |\xi|)^{-A}$.

Si on applique la formule de Taylor à q_2 à partir du point $x(t = 0)$, on voit qu'on a

$$(3.34) \quad r_N = \sum_{|\gamma|=N} c_\gamma \int_0^1 (1 - \sigma)^{N-1} r_{\gamma, \sigma} d\sigma,$$

avec

$$r_{\gamma, \sigma} = (2\pi h)^{-n} \int e^{-it \cdot \theta / h} q_1(x, \xi + \theta, h) t^\gamma \partial_x^\gamma q_2(x + \sigma t, \xi, h) dt d\theta.$$

On notera dans la suite $f^{(\alpha, \beta)} = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta f$. Une succession d'intégrations par parties dans l'intégrale oscillante (3.34), utilisant les opérateurs $(1 - \Delta_\theta)$ et $(1 - \Delta_t)$ déduits des laplaciens en θ, t montre que $r_{\gamma, \sigma}^{(\alpha, \beta)}$ est, pour $|\gamma| = N$, une combinaison linéaire d'intégrales de la forme

$$(3.35) \quad h^{N-n} \int e^{-it \cdot \theta / h} F_1 F_2 dt d\theta$$

avec

$$F_1 = (1 - h^2 \Delta_\theta)^{\ell'} [(1 + \theta^2)^{-\ell} (q_1^{(\alpha_1 + \gamma, \beta_1)})(x, \xi + \theta, h)],$$

$$F_2 = (1 + t^2)^{-\ell'} (1 - h^2 \Delta_t)^\ell q_2^{(\alpha_2, \beta_2 + \gamma)}(x + \sigma t, \xi, h)$$

($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \beta_1 + \beta_2 = \beta$, les entiers ℓ, ℓ' , qui repèrent le nombre d'intégrations par partie, restent à choisir).

Comme σ est borné ($0 \leq \sigma \leq 1$) les F_i vérifient les inégalités

(3.37)

$$|F_1| \leq C^{ste} h^{-m'_1 - \delta|\beta_1|} (1 + |x| + |\xi + \theta|)^{m_1 - |\alpha_1| - N} \frac{(1 + |x|^{\delta|\beta_1|})}{(1 + |\theta|)^{2\ell}},$$

$$|F_2| \leq C^{ste} h^{-m'_2 - \delta|\beta_2| - \delta N} (1 + |x + \sigma t| + |\xi|)^{m_2 - |\alpha_2|} \frac{(1 + |x + \sigma t|)^{\delta(|\beta_2| + N + 2\ell)}}{(1 + |t|)^{2\ell'}}.$$

En choisissant $2\ell' > n + |m_2 - |\alpha_2|| + \delta(|\beta_2| + N + 2\ell)$, on obtient:

$$\int |F_1 F_2| dt d\theta \leq C^{ste} h^{-m' - \delta|\beta| - \delta N} (1 + |x| + |\xi|)^{m_2 - |\alpha_2|} (1 + |x|)^{\delta(|\beta| + N + 2\ell)} J$$

avec

$$J = \int \frac{(1 + |x| + |\xi + \theta|)^{m_1 - |\alpha_1| - N}}{(1 + |\theta|)^{2\ell}} d\theta$$

$$\leq C^{ste} \left[(1 + |x| + |\xi|)^{m_1 - |\alpha_1| - N} + \frac{(1 + |x|)^{m_1 - |\alpha_1| - N}}{(1 + |\xi|)^{2\ell - n}} \right].$$

On obtient alors l'inégalité cherchée en choisissant d'abord ℓ grand, puis N tel que $N(1 - \delta) - 2\delta\ell$ soit grand.

REFERENCES

- [1] S. Albeverio, Ph. Blanchard and R. Hoegh-Krohn, *Feynman path integral and the trace formula for the Schrödinger operator*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 49–76.
- [2] S. Albeverio, A. Boutet de Monvel-Berthier and G. Lebeau, *Green's function and the trace formula for the Schrödinger operator*, en préparation.
- [3] R. Balian and C. Bloch, *Solutions of the Schrödinger equation in terms of classical paths*, Annals of Physics **85** (1974), 514–545.
- [4] R. Beals, C. Fefferman, *Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators I*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 1–24.
- [5] R. Beals, *A general calculus of pseudodifferential operators*, Duke Math. J. **42** (1975), 1–42.
- [6] R. Beals, *Characterization of pseudo-differential operators and applications*, Duke Math. J. **44** (1977), 45–57; correction **46** (1979), 215.
- [7] R. Beals, *Propagation des singularités du type $D_1^2 - \square_b$* , Journées de St Jean de Monts, 1980.
- [8] M. V. Berry and K. E. Mount, *Semi-classical approximations in wave mechanics*, Rep. Prog. Phys. **35** (1972), 315–397.
- [9] A. Boutet de Monvel-Berthier, *On the eigenvalues of a perturbed harmonic oscillator*, in *Recent Developments in Quantum Mechanics*, Poiana Brasov 1989, Kluwer Mathematical Studies No. 12, pp. 209–222.
- [10] L. Boutet de Monvel, *Hypoelliptic operators with doubles characteristics and related pseudo-differential operators* Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 585–639.
- [11] L. Boutet de Monvel, *Opérateurs à coefficients polynomiaux, espace de Bargman, et opérateurs de Toeplitz*, Séminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz, 1980–81, exposé No. 2 bis.
- [12] L. Boutet de Monvel, *Revue sur la théorie des \mathcal{D} -modules et Modèles d'opérateurs pseudo-différentiels*, in *Recent Developments in Quantum Mechanics*, Poiana Brasov 1989, Kluwer Mathematical Studies No. 12, pp. 1–31.
- [13] Y. Colin de Verdière, *Quasi-modes sur les variétés Riemanniennes compactes*, Invent. Math. **43** (1977), 15–52.
- [14] Y. Colin de Verdière, *Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques périodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1978), 1195–1197.
- [15] J. Chazarain, *Formule de Poisson pour les variétés Riemanniennes*, Invent. Math. **24** (1974), 65–82.
- [16] J. Chazarain, *Spectre d'un Hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. Partial Differ. Equ. **5** (6) (1980), 595–644.
- [17] J. J. Duistermaat and V. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics*, Proc. Am. Math. Soc. Summer Inst. Diff. Geom., Stanford, 1973.
- [18] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Am. Math. Soc., 1977.
- [19] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, Am. Math. Soc. Symp. on Singular Integrals, 1966, pp. 138–183.
- [20] L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. **121** (1968), 193–218.
- [21] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math. **127** (1971), 79–183.
- [22] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III–IV*, Grundlehren der Math. Wiss. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [23] B. Helffer and D. Robert, *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur \mathbf{R}^n* , Comm. Partial Differ. Equ. **7** (1982), 795–882.

- [24] J. Leray, *Solutions asymptotiques et groupe métaplectique*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1973–74, Collège de France, Paris.
- [25] J. Leray, *Analyse Lagrangienne et mécanique quantique*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1976–77, Collège de France, Paris.
- [26] V. P. Maslov, *Théorie des perturbations*, Dunod, Paris, 1972.
- [27] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Math 68, Birkhäuser, Basel, 1987.
- [28] D. Robert, *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, Asymptotic Analysis **3** (1991), 301–320.
- [29] J. Sjöstrand, *Communication orale*
- [30] A. Unterberger, *Résolution d'équations aux dérivées partielles dans les espaces de distributions d'ordre de régularité variable*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **21** (1971), 85–128.
- [31] A. Voros, *Développements semi-classiques*, Thèse, Orsay, 1972.
- [32] A. Weinstein, *Asymptotic of the eigenvalue clusters of the Laplacian plus a potential*, Duke Math. J. **44** (1972), 883–892.
- [33] A. Weinstein and S. Zelditch, *Singularities of solutions of Schrödinger equations on \mathbf{R}^n* , Bull. Am. Math. Soc. **6** (1982), 449–452.
- [34] S. Zelditch, *Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger equations*, PhD Berkeley and Comm. Math. Phys. **90** (1983), 1–26.

Anne Boutet de Monvel-Berthier

UNIVERSITÉ PARIS VII
UFR DE MATHÉMATIQUES
2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Louis Boutet de Monvel

UNIVERSITÉ PARIS VI
UA 213
4 PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Gilles Lebeau

UNIVERSITÉ PARIS SUD
MATHÉMATIQUES, BÂT. 425
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

(Received March 24, 1991 and in revised form December 25, 1991)