FORMULES DE POISSON AVEC RESTE

Par

J. DELSARTE

à Nancy, France

Les généralisations connues de la formule de Poisson sont fondées sur l'existence de certaines distributions presque périodiques sur la droite (1)

$$T = \sum_n a_n \delta_{\lambda_n} = \sum_m b_m e^{-2\pi i \mu_m x}. \tag{1}$$

Si f est une fonction à décroissance rapide, et si $\hat{f}$ est sa transformée de Fourier, on en déduit la formule de Poisson généralisée

$$\sum_n a_n f(\lambda_n) = \sum_m b_m \hat{f}(\mu_m). \tag{2}$$

Il est possible qu'on n'ait jamais remarqué l'existence de formules de Poisson un peu plus générales, dans lesquelles figure, au second membre, un reste explicite. Il est à noter, comme nous le verrons, que de telles formules permettent de reprendre, sans modifications sensibles, le calcul classique de Riemann-Hamburger. Nous en donnons ici un exemple élémentaire.

Soient la variable complexe $s = \sigma + it$ et $\mathscr{B}$ la bande verticale fermée $-1 \leqq \sigma \leqq 2$.

Soit $\mathscr{F}(s)$ une fonction holomorphe dans $\mathscr{B}$ à décroissance rapide (par rapport à t), dans $\mathscr{B}$, et cela uniformément par rapport à σ. On posera $f(t) = \mathscr{F}(\frac{1}{2} + it)$ pour t réel, et on notera $\hat{f}$ l'image de Fourier de f.

On obtient un exemple intéressant de formules de Poisson avec reste en appliquant le théorème de Cauchy à la fonction

$$\mathscr{F}(s) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

dans la bande $\mathscr{B}$.

(1) Cf. en particulier: J. P. Kahane et S. Mandelbrojt: "l'Equation Fonctionnelle de Riemann et la Formule Sommatoire de Poisson" (Ann. Ec. Norm. (3) LXXV — Fasc. 1)

La décroissance rapide de $\mathscr{F}(s)$ pour $|t|$ grand, dans $\mathscr{B}$, la majoration classique du module de ζ'/ζ sur certaines horizontales, dans cette bande, permettent l'application directe du théorème.

1. Intégration sur $\sigma = 2$.

On peut intégrer, terme à terme, la série donnant le développement de Dirichlet de ζ'/ζ sur la verticale $\sigma = 2$:

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\mathscr{F}(2+it)\frac{ds}{n^s},$$

mais dans la bande en question, le coefficient différentiel est holomorphe et se comporte convenablement pour $|t|$ grand. On peut donc aussi intégrer chaque terme sur $\sigma = \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\hat{f}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right). \tag{3}$$

La convergence absolue est évidente.

2. Intégration sur $\sigma = -1$.

On utilise ici l'équation fonctionelle de la fonction ζ qui donne

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \Phi(s) \tag{4}$$

où $\Phi(s)$ a une expression bien connue.

Il en résulte, sur le côté descendant de $\mathscr{B}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1+i\infty}^{-1-i\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathscr{F}(s)ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-1+i\infty}^{-1-i\infty}\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\mathscr{F}(s)ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1+i\infty}^{-1-i\infty}\Phi(s)\mathscr{F}(s)ds.$$

Le premier terme du second membre s'écrit aussi: $(s \to 1-s)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\mathscr{F}(1-s)ds.$$

On peut évaluer cette intégrale, comme pour le côté ascendant, en intégrant terme à terme la série donnant ζ'/ζ , et en se remenant comme plus haut, à la verticale $\sigma = \frac{1}{2}$. On trouve, pour ce terme, l'expression suivante

$$(5) \qquad -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\hat{f}\left(\frac{-\log n}{2\pi}\right)$$

la convergence absolue étant évidente.

3. Terme Complémentaire.

Il faut calculer l'intégrale

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-1+i\infty}^{-1-i\infty}\Phi(s)\mathscr{F}(s)ds.$$

On constate facilement que le seul pôle de $\Phi(s)$ situé dans la bande $-1 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$ est le pôle 0 avec le résidu 1. On peut donc, toujours en raison du comportement convenable du coefficient différentiel dans (6) pour $|t|$ grand, remplacer cette intégrale par

$$(7) \qquad \mathscr{F}(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\Phi(\tfrac{1}{2}+it)dt$$

avec

$$(8) \qquad \Phi(\tfrac{1}{2}+it) = \frac{\zeta'(\frac{1}{2}+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+it)} + \frac{\zeta'(\frac{1}{2}-it)}{\zeta(\frac{1}{2}-it)}$$

qui est une fonction réelle, paire, de la variable t, régulière et indéfiniment différentiable pour toute valeur de cette variable.

Nous noterons cette fonction

$$\Phi(\tfrac{1}{2}+it) = \Psi(t).$$

4. Finalement, l'application du théorème de Cauchy donne la formule suivante:

$$\sum_{\rho} \mathscr{F}(\rho) = \mathscr{F}(0) + \mathscr{F}(1) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left[\hat{f}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{f}\left(\frac{-\log n}{2\pi}\right) \right] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(t) dt \tag{9}$$

où on désigne comme de coutume, par ρ, les zéros non triviaux de la fonction ζ.

Si on admet l'hypothèse de Riemann, on a

$$\rho = \tfrac{1}{2} + i\tau, \tag{10}$$

où les τ sont réels et la formule (9) s'écrit

$$\sum_{\rho} f(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left[\hat{f}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{f}\left(\frac{-\log n}{2\pi}\right) \right] + \mathscr{R}(\mathscr{F}) \text{(2)} \tag{11}$$

qui a exactement l'aspect d'une formule de Poisson avec reste, ce dernier étant:

$$\mathscr{R}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}(0) + \mathscr{F}(1) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(t) dt. \tag{12}$$

La formule (11) peut aussi s'écrire, en utilisant la notation des distributions dans le plan complexe:

$$2\pi \left[\left(\sum_{\rho} \delta_\rho\right) - \delta_0 - \delta_1 \right] = 2 \,\text{part. réelle} \left\{ -\frac{\zeta'(\frac{1}{2} + it)}{\zeta(\frac{1}{2} + it)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} \right\}.$$

Au second membre figure la différence entre $\zeta'(s)/\zeta(s)$ pris sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$ et le développement formel de cette même expression en série de Dirichlet, lequel converge au sens des distributions.

5. Formule modulaire.

Soit T un nombre réel positif. Prenons

(2) Une formule plus générale a été donnée par André Weil: "Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers" (Reprinted from communications du séminaire mathématique de l'Université de Lund, 1952, dédié à Marcel Riesz). Cependant, l'aspect "formules de Poisson" et les conséquences qu'on en peut tirer, ne sont pas signalés dans ce travail.

$$\mathscr{F}(s) = \exp[\pi x(s - \tfrac{1}{2} - iT)^2].$$

Alors

$$f(t) = \exp[-\pi x(t - T)^2].$$

Et on a

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left[\frac{-\pi u^2}{x} - 2\pi i u T\right].$$

Appliquons toujours la formule (10) (où τ peut être éventuellement complexe); on a, par la formule (11)

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\rho} e^{-\pi x(\tau - T)^2} = \frac{-1}{\pi\sqrt{x}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left[\frac{-(\log n)^2}{4\pi x}\right] \cos(T \log n) \\ \displaystyle + 2e^{\pi x(\frac{1}{4} - T^2)} \cos(\pi x T) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x t^2} \Psi(t + T) dt. \end{cases}$$

laquelle donne, en particulier, pour $T = 0$,

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\rho} e^{-\pi x \tau^2} = \frac{-1}{\pi\sqrt{x}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left[\frac{-(\log n)^2}{4\pi x}\right] \\ \displaystyle + 2e^{\pi x/4} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x t^2} \Psi(t) dt. \end{cases}$$

6. Première application de la formule (13).

Posons

$$(15)\qquad P(T) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left[\frac{-(\log n)^2}{4\pi x}\right] \cos(T \log n).$$

Comme $P(0)$ est donnée par une série absolument convergente, on voit que $P(T)$ est une fonction presque périodique de Bohr, et que

$$(16)\qquad |P(T)| \leqq P(0).$$

On peut alors écrire, au lieu de (13),

$$\sqrt{x}\sum_{\rho} e^{-\pi x(\tau-T)^2} = P(T)+R(T) \tag{17}$$

avec

$$R(T) = 2\sqrt{x}\,e^{\pi x(\frac{1}{4}-T^2)}\cos(\pi x T) - \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x t^2}\,\Psi(t+T)dt. \tag{18}$$

Par ailleurs, la fonction $\Psi(t)$ a une valeur explicite

$$\Psi(t) = \log 2\pi + \frac{\pi}{2\mathrm{ch}\pi t} - \mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}+it)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it)}\right] \tag{19}$$

et on sait que, pour t positif grand, on a:

$$\Psi(t) \sim -\log(t) \tag{20}$$

donc, si x est très grand, le second terme de (18) a pour partie principale

$$\frac{1}{2\pi}\log T$$

tandis que le premier terme de $R(T)$ est négligeable puisque T est grand, (en particulier $> \frac{1}{2}$). On a donc

$$R(T) \sim \frac{1}{2\pi}\log T \tag{21}$$

pour T et x grands.

D'après la formule bien connue qui donne le nombre de zéros non triviaux de ζ dont l'ordonnée est comprise entre 0 et T,

$$\frac{1}{2\pi}\log T$$

est la dérivée de la partie principale pour T grand, de ce nombre de zéros. On peut donc considérer

(22) $$\Delta(T) = \frac{1}{2\pi} \log T$$

comme une sorte de "densité moyenne" des zéros au voisinage de l'ordonnée T, (supposée grande).

Posons encore

(23) $$\Delta_x(T) = \sqrt{x} \sum_\rho e^{-\pi x(\tau - T)^2}.$$

Alors, la formule (17) s'écrit

(24) $$\Delta_x(T) - \Delta(T) = P(T) + \varepsilon(x, T)$$

où le second terme du second membre est négligeable quand x et T sont grands.

Par ailleurs, la formule (14) montre que le maximum $P(0)$ de la fonction presque périodique $P(T)$ est, pour x grand, très voisin de

$$2\sqrt{x}\, e^{\pi x/4} .$$

La discussion repose donc sur la comparaison entre $\Delta(T)$ et ce maximum. On voit que si x est grand, mais négligeable devant $\log.\log T$, alors la partie principale de $\Delta_x(T)$ est $\Delta(T)$. C'est-à-dire la "densité moyenne". Au contraire, si x et T sont grands, x étant de l'ordre de grandeur de $\log.\log T$ ou d'un ordre supérieur, la formule (24) montre que la *fluctuation*

$$\Delta_x(T) - \Delta(T),$$

est, en première approximation, égale à la fonction presque périodique $P(T)$.

On peut considérer $\Delta_x(T)$ comme donnant une idée de la densité réelle des zéros au voisinage de l'ordonné T. D'après les propriétés bien connues de la courbe de Gauss, ceci sera d'autant plus vrai que x sera grand. Cependant, si T est très grand par rapport à x, c'est la densité moyenne $\Delta(T)$ qui donne la meilleure approximation de la densité réelle.

7. Conséquences de l'équation modulaire.

Reprenons l'équation (14). On a posé $\rho = \frac{1}{2} + i\tau$. Si l'hypothèse de Riemann est valide, les τ sont réels. Sinon, $|\mathrm{Im}.\tau| < \frac{1}{2}$. De plus, par symétrie, les τ sont en tous cas, deux à deux opposés. On peut se borner à prendre $(\operatorname{Re}\tau) > 0$, et diviser la sommation par deux; alors (14) devient

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum_{\operatorname{Re}\tau>0} e^{-\pi x\tau^2} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{x}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left[\frac{-(\log n)^2}{4\pi x}\right] \\ &\quad + e^{\pi x/4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\pi x t^2} \Psi(t)\,dt \end{aligned}\right.$$

car $\Psi(t)$ est une fonction paire.

Par ailleurs, reprenons la variable complexe $s = \sigma + it$ et considérons la série

$$(26)\qquad \phi(s) = \sum_{\operatorname{Re}\tau>0} \frac{1}{\tau^s}$$

en prenant les déterminations naturelles. Il est facile de voir que cette série converge dans le demi-plan $\sigma > 1$.

On a, suivant le procède classique

$$(27)\qquad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\phi(s)\pi^{-s/2} = \int_0^{+\infty} x^{s/2-1}\left(\sum_{\operatorname{Re}\tau>0} e^{-\pi x\tau^2}\right) dx\,.$$

On partage, suivant la méthode de Riemann-Hamburger, l'intégrale en deux parties:

$$(28)\qquad A(s) = \int_0^1\,; \qquad B(s) = \int_1^{+\infty}\,.$$

$B(s)$ est une fonction entière de s.

On transforme $A(s)$ par la formule modulaire, ce qui donne, compte-tenu du reste, $A(s) = A_1(s) + A_2(s) + A_3(s)$, avec

$$(29)\qquad A_1(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 x^{s/2-3/2}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{-[\log n]^2}{4\pi x}\right)\right] dx$$

(30) $$A_2(s) = \int_0^1 x^{s/2-1} e^{\pi x/4} dx$$

(31) $$A_3(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 x^{s/2-1} \left[\int_0^\infty e^{-\pi x t^2} \Psi(t) dt \right] dx;$$

dans $A_1(s)$, on fait le changement de variable

$$x \to 1/x$$

ce qui donne

(32) $$A_1(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty x^{-1/2-s/2} \left[\sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{-x[\log n]^2}{4\pi} \right) \right] dx$$

et il apparaît sous cette forme que $A_1(s)$ est aussi une fonction entière de s. Il en est de même de

(33) $$\chi(s) = A_1(s) + B(s)$$

dont l'expression explicite montre qu'elle ne change pas quand on change s en $1-s$, en permuttant aussi les doublets

$$(1\,;\tau) : (\operatorname{Re} \tau > 0)$$

et

$$\left(-\frac{\Lambda(n)}{2\pi\sqrt{n}}; \frac{\log n}{2\pi} \right) \qquad (n \geqq 2)$$

on écrit finalement

(34) $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \phi(s) \pi^{-s/2} = \chi(s) + A_2(s) + A_3(s).$$

Comme $\chi(s)$ est entière, tandis que $A_2(s)$ et $A_3(s)$ sont explicites, on a, en (34) une véritable formule de prolongement de la fonction ϕ.

On peut, en effet, par des intégrations par parties, prolonger dans tout le plan les fonctions $A_2(s)$ et $A_3(s)$. On vérifie par exemple que

$$\frac{s}{2} A_2(s) = \int_0^1 d(x^{s/2}) e^{\pi x/4} = e^{\pi/4} - \frac{\pi}{4} \quad A_2(s+2)$$

ce qui permet de prolonger A_2 et prouve que c'est une fonction méromorphe dont les pôles simples sont ceux de $\Gamma(s/2)$.

On traite de même $A_3(s)$, en décomposant préalablement $\Psi(t)$. La méthode consiste à faire apparaître des intégrales de la forme

$$\int_0^1 x^{s/2-k} G(x) dx \tag{35}$$

où $G(x)$ est indéfiniment dérivable dans $[0,1]$. On a d'abord

$$\Psi(t) = \log 2\pi - \log t + \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \pi t} + \Psi_1(t) \tag{36}$$

où $\Psi_1(t)$ admet un développement asymptotique pour t infiniment grand positif

$$\Psi_1(t) = \frac{\beta_1}{t^2} + \frac{\beta_2}{t^4} + \frac{\beta_3}{t^6} + \cdots \tag{37}$$

On a alors

$$A_3(s) = A_4(s) + A_5(s) + A_6(s) + A_7(s) \tag{38}$$

avec

$$\begin{cases} A_4(s) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^1 x^{s/2-1} F(x) dx \\ \text{et} \\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\pi x t^2} \Psi(t) dt \end{cases} \tag{39}$$

$$(40)\qquad \begin{cases} A_5(s) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 x^{s/2-1}F_1(x)dx \\ \text{avec} \\ F_1(x) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_1^\infty e^{-\pi x t^2}\dfrac{dt}{\operatorname{ch}\pi t} \end{cases}$$

$$(41)\qquad A_6(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 x^{s/2-1}\left[\int_1^{+\infty} e^{-\pi x t^2}\Psi_1(t)dt\right]dx$$

$$(42)\qquad A_7(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 x^{s/2-1}\left[\int_1^{\infty}(\log 2\pi - \log t)e^{-\pi x t^2}\,dt\right]dx\,.$$

Il est clair que $A_4(s)$ et $A_5(s)$ sont des intégrales de la forme (35). Ces fonctions se comportent donc, dans le plan s, comme $A_2(s)$ et la contribution

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)}\,[A_4(s) + A_5(s)]$$

est une fonction entière.

Pour $A_6(s)$, on a

$$(43)\qquad \frac{s}{2}A_6(s) = \beta_0 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{s/2}\left[\int_1^\infty e^{-\pi x t^2}t^2\Psi_1(t)dt\right]dx$$

où β_0 est une constante finie, et où

$$(44)\qquad t^2\Psi_1(t) = \beta_1 + \Psi_2(t) = \beta_1 + \frac{\beta_2}{t^2} + \frac{\beta_3}{t^4} + \cdots$$

donc

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{s}{2}A_6(s) &= \beta_0 - \frac{\beta_1}{2}\int_0^1 x^{s/2}\left[\int_1^\infty e^{-\pi x t^2}dt\right]dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{s/2}\left[\int_1^\infty e^{-\pi x t^2}\Psi_2(t)dt\right]dx .
\end{aligned}
\right.
$$

Le troisième terme aura le même comportement que $A_6(s+2)$. Le second s'écrit

$$
\frac{-\beta_1}{2(s+1)} - \frac{\beta_1}{2}\int_0^1 x^{s/2}\left[\int_0^1 e^{-\pi x t^2}dt\right]dx
$$

la dernière intégrale étant de la forme (35). Il résulte de là que $A_6(s)$ est une fonction méromorphe dont les pôles simples sont

$$
0;\ -1;\ -2;\ -3, \cdots, -m, \cdots .
$$

La contribution apportée par $A_6(s)$ sera donc une fonction méromorphe dont les pôles, tous simples, sont les entiers impairs négatifs.

Arrivons enfin à $A_7(s)$, qu'on écrira

$$
(46)\qquad A_7(s) = A_8(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 x^{s/2-1}\left[\int_0^{+\infty}[\log 2\pi - \log t]e^{-\pi x t^2}dt\right]ds
$$

($A_8(s)$ a le même coefficient différentiel que $A_7(s)$, mais les limites pour t sont $(0;1)$). Le changement de variable $t \to u/\sqrt{\pi x}$ permet le calcul élémentaire du second terme de (46), qui vaut

$$
\frac{1}{2\pi(s-1)^2} + \frac{\alpha}{s-1}
$$

où α est une constante finie. On a, par le même changement de variable $t \to \dfrac{u}{\sqrt{\pi x}}$,

(47) $$A_8(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^1 x^{s/2-3/2} F_2(x)\,dx$$

avec

(48) $$F_2(x) = \int_0^{\sqrt{\pi x}} [\log(2\pi\sqrt{\pi}) + \frac{1}{2}\log x - \log u] e^{-u^2} du;$$

ce qui conduit à la formule

(49) $$\frac{1}{2}(s-1)A_8(s) = \alpha_1 - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 x^{s/2-1} F_3(x)\,dx$$

où α_1 est une constante finie et où

(50) $$F_3(x) = e^{-\pi x}(\log 2\pi) + \int_0^1 e^{-\pi x t^2} dt$$

est une fonction indéfiniment dérivable dans $[0,1]$. L'intégrale figurant dans (49) est donc du type (35). Il en résulte que $A_7(s)$ admet $s=1$ comme pôle double, puis

$$s = 0, \ -2; \ -4; \ \cdots; \ -2m, \cdots$$

comme pôles simples.

En définitive, la fonction $\phi(s)$ est une fonction méromorphe de s, dans tout le plan; elle admet uniquement les pôles suivants:

$$s = 1\text{: pôle double}$$

$$s = -1; \ -3; \ -5; \ \cdots -(2m+1); \ \cdots \text{(pôles simples).}$$

Donc $\dfrac{(s-1)^2\phi(s)}{\Gamma(s)}$ est une fonction entière.

(Reçu le 13 février 1966)