# APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ET VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES DE DIMENSION INFINIE

PAR
ANDRÉE BASTIANI
*à Paris, France*

TABLE DES MATIÈRES

## INTRODUCTION

L'objet de ce travail est la définition et l'étude des applications différentiables d'un espace localement convexe dans un autre et des variétés de dimension infinie. Dans le cas des espaces de Banach, la notion de différentiabilité au sens de Fréchet [1a] donne une théorie satisfaisante; de même les applications différentiables d'un espace numérique dans un espace localement convexe ont été complètement étudiées. Certaines définitions ont été données dans le cas général; elles se répartissent principalement dans les classes suivantes:

1) Point de vue géométrique selon l'idée de [1b], développée en particulier dans [2a, *b*] et [3]: Une application $f$ de $E$ dans $F$, où $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels topologiques sur le corps des réels $R$, est différentiable en $x$ si, quelle que soit l'application différentiable $g$ de $R$ dans $E$, l'application $f \circ g$ est différentiable en $t$ où $g(t) = x$. Cette définition n'entraîne pas la continuité de $f$ en $x$.

2) Etude au point $x$ d'une application $f$ d'un groupe topologique $E$ dans un autre $F$ [4a]; si $E$ et $F$ sont des espaces localement convexes, $f$ est différentiable en $x$ au sens de [4a] si et seulement si $f$ est régulièrement différentiable en $x$ (Définition 3.2, Chapitre I).

3) Point de vue analytique [5], [6]: Une application $f$ de $E$ dans $F$, où $E$ et $F$ sont des espaces localement convexes, est différentiable sur un ouvert $X$ de $E$ si elle est dérivable sur $X$ (Définition 3.1, Chapitre I) et si l'application: $x \to Df(x)$ est une application continue de $X$ dans l'espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence bornée. Si $E$ est métrisable et tonnelé, cette définition équivaut à dire que $f$ est $b$-différentiable sur $X$ (Définition 3.2, Chapitre II). En général

$f$ peut être différentiable dans ce sens sans être continue sur $X$; la composée de deux applications différentiables en ce sens peut ne plus être différentiable.

Le présent article a pour but de définir une notion tout-à-fait différente d'application $n$ fois différentiable, plus adaptée à l'étude de certaines questions d'Analyse (distributions généralisées, distructures [7a]) et de Géométrie différentielle (théorie des prolongements [8a]), c'est-à-dire jouissant des propriétés suivantes:

I) Si $E$ et $F$ sont des espaces numériques, une application $f$ de $E$ dans $F$ est $n$ fois différentiable si, et seulement si, elle est $n$ fois continuement différentiable (dans le sens classique).

II) La classe des applications $n$ fois différentiables est contenue dans la classe des applications continues et stable par rapport aux principales opérations de l'Analyse (composée, produit, $\cdots$).

III) On peut définir des variétés $n$ fois différentiables de dimension infinie ayant des propriétés analogues à celles des variétés $n$ fois différentiables de dimension finie; en particulier le théorème de transitivité des prolongements [8a] est encore valable.

Dans [7a] j'ai introduit la notion d'application $n$ fois différentiable d'un espace localement convexe dans un autre utilisée ici et j'ai montré qu'elle vérifie les conditions I et II; de plus j'ai étudié diverses topologies sur l'espace des applications $n$ fois différentiables de $X$ dans $F$; le troisième chapitre de a 1ère partie de [7a] est un court exposé sur les variétés différentiables de dimension infinie. Malheureusement, en utilisant seulement des structures topologiques il était impossible de vérifier la condition III.

En effet, la théorie des variétés différentiables de dimension finie utilise essentiellement les faits suivants:

$E$, $F$ et $G$ sont des espaces numériques, $\mathscr{C}(F,E)$ (resp. $\mathscr{L}(F,E)$) désigne l'espace des applications continues (resp. linéaires) de $E$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence compacte.

a) $\mathscr{C}(G,F \times E)$ est isomorphe à $\mathscr{C}(\mathscr{C}(G,F),E)$.

b) L'application: $(x,f) \to f(x)$, où $x \in E$ et $f \in \mathscr{C}(F,E)$, est continue; l'application: $(g,f) \to g \circ f$, où $f \in \mathscr{L}(F,E)$ et $g \in \mathscr{L}(G,F)$, est continue,

lc) Si $f$ est une application $n$ fois différentiable de $E$ dans $F$, on a:

$$D^n f(x) \approx D^m(D^{n-m} f)(x),$$

où $D^n f(x)$ désigne la $n$-ième différentielle de $f$ en $x \in E$.

Si $E$ et $F$ sont des espaces localement convexes de dimension infinie, il n'existe généralement pas de topologie sur $\mathscr{C}(F, E)$ et $\mathscr{L}(F, E)$ telle que les conditions a et b, et par suite la condition c, soient vérifiées (Chapitre II, §1). C'est pourquoi beaucoup de théorèmes de [7a] utilisaient des hypothèses supplémentaires (condition $(P)$, espaces bornologiques, $\cdots$) et le théorème de transitivité des prolongements n'était valable que sous des conditions très restrictives. Pourtant il était naturel de penser que ces hypothèses supplémentaires étaient superflues; les définitions mêmes de [7a] suggéraient qu'il fallait munir $\mathscr{C}(F, E)$ d'une structure telle que l'on ait: a') $f \in \mathscr{C}(F, X \times E)$, où $X$ est un ouvert de $E$, si, et seulement si, l'application: $x \to [v \to f(x, v)]$, où $x \in X$ et $v \in E$, est continue. Mais il n'existe pas de *topologie* vérifiant a'), et le respect des structures consacrées de [9] m'a retenue d'introduire dans [7a] la structure appropriée.

Le présent travail remédie à cet inconvénient, en utilisant la notion "plus fine" de quasi-topologie (d'une façon précise, les quasi-topologies forment une espèce de superstructures des topologies). Une quasi-topologie sur un ensemble $X$ est définie par une application $f$ de $X$ dans l'ensemble des ensembles de filtres sur $X$ telle que $f(x)$ soit un idéal pour tout $x \in X$ (c'est la définition de "Limesraum" de [10] et [4b]); dans [10], cette notion est étudiée sous un angle purement algébrique; dans [4b], elle est adaptée à la structure de groupe. Ici je définis la notion de *quasi-topologie localement convexe* $\pi$ qui généralise la notion d'espace localement convexe ($\pi$ admet une topologie localement convexe $\tau(\pi)$ sous-jacente). En particulier je munis l'espace $\mathscr{C}'(F, X)$ des applications quasi-continues d'un espace quasi-topologique $(X, \pi)$ dans un espace quasi-localement convexe $(F, \pi_F)$ de la quasi-topologie de la convergence locale $\lambda$ qui est la quasi-topologie la moins fine rendant quasi-continue l'application $(x, f) \to f(x)$, de $X \times \mathscr{C}'(F, X)$ dans $F$. Les principaux théorèmes valables dans le cas d'espaces localement compacts en utilisant la topologie de la convergence compacte (par exemple le théorème d'Ascoli) se généralisent en utilisant $\lambda$; de plus, $\lambda$ intervient naturellement dans plusieurs questions d'Analyse (dans le dual d'un espace vectoriel topologique, un filtre $\mathscr{F}$ converge vers 0 pour $\lambda$ si, et seulement si, $\mathscr{F}$ converge simplement vers 0 et si $\mathscr{F}$ contient un ensemble équicontinu; cette condition est implicitement employée dans certains théorèmes de [13a]). La quasi-topologie $\lambda$ est l'outil essentiel de ce travail, car elle permet de vérifier les conditions a, b, c, énoncées ci-dessus pour des espaces localement convexes $E$, $F$ et $G$, en remplaçant continue par quasi-continue.

En munissant l'espace $\mathscr{D}^n$ des applications $n$ fois différentiables d'un ouvert $X$ de $E$ dans $F$, où $E$ et $F$ sont des espaces localement convexes, de la quasi-topologie de la convergence locale pour les fonctions et toutes leurs différentielles, les propriétés de régularité de $F$ (complet, quasi-complet, de Montel, $\cdots$) se transportent à $\mathscr{D}^n$. De plus, les notions d'espace fibré quasi-topologique et d'espaces fibrés quasi-topologiques associés peuvent être définies comme dans le cas topologique [8a], ce qui permet de transposer au cas de dimension infinie la théorie des variétés différentiables de dimension finie de [8a] et d'obtenir en particulier le théorème de transitivité des prolongements.

# CHAPITRE I

# APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES EN UN POINT

Ce chapitre reprend, à quelques modifications près, le texte du Chapitre I de [7a], mais en remplaçant les structures d'espace vectoriel par des structures d'espace affine, qui sont seules à intervenir dans la théorie de la différentiabilité. Ce chapitre préliminaire cherche à donner une idée "géométrique" du problème; les chapitres suivants n'en dépendent pratiquement pas.

## 1. Espaces localement convexes.

Nous appelons espace *localement convexe* un espace vectoriel $E$ sur le corps $R$ des réels, muni d'une topologie séparée compatible avec la structure vectorielle (c'est-à-dire les applications:

$$(x, y) \to x + y \quad \text{et} \quad (k, x) \to kx, \quad \text{où} \quad x \in E, \ y \in E, \ k \in R,$$

sont continues) et telle que tout point admette un système fondamental de voisinages convexes. L'origine de $E$ sera toujours notée 0. Sauf indication contraire, voisinage de 0 signifiera voisinage convexe symétrique de 0. A un tel voisinage $U$ correspond sur $E$ une semi-norme continue $p$, jauge de $U$ [9a], telle que $U$ soit l'ensemble des points $x$ de $E$ pour lesquels on a $p(x) < 1$. La topologie de $E$ est aussi définie par la donnée de l'ensemble des semi-normes correspondant à un système fondamental de voisinages de 0. Par semi-norme, ou norme, sur un espace localement convexe, nous entendrons semi-norme, ou norme, continue.

Soient $E$ un espace localement convexe et $M$ un ensemble contenu dans $E$. Rappelons que $M$ est *équilibré* [9a] si, pour tout $k \in R$ tel que $-1 \leqq k \leqq 1$, on a $kM \subset M$. On dit que $M$ absorbe $M' \subset E$ s'il existe $k > 0$ tel que $M' \subset kM$; si $M$ absorbe tout ensemble réduit à un point, $M$ est *absorbant* [9a]; $M$ est *pseudo-borné* (voir [7b]) si sa trace sur tout sous-espace de dimension finie est bornée. Pour qu'un ensemble convexe (resp. un ensemble fermé et équilibré) $M$ soit pseudo-borné, il faut et il suffit qu'il ne contienne pas de demi-droite. Pour que la topologie de $E$ admette un système fondamental de voisinages de 0 pseudo-bornés, il faut et il suffit qu'elle puisse être définie par la donnée d'un ensemble de normes; dans ce cas, nous dirons que $E$ est *pseudo-normé*.

Soit $E$ un espace localement convexe; soit $A$ un ensemble équilibré et absorbant qui contient avec tout point différent de 0 un voisinage de ce point. Ces ensembles $A$ forment une base de filtre; soit $\mathscr{F}_0$ le filtre qu'ils engendrent. Un ensemble $B$ de $\mathscr{F}_0$ est un ensemble contenant 0 et tel que toute demi-droite $D$ issue de 0 soit intérieure à un cône pointé de sommet 0 sur lequel la trace de $B$ soit un voisinage de 0 pour la topologie induite par la topologie de $E$ sur ce cône.

**Définition 1.1.** *On appelle "topologie radiale associée à l'espace $E$ localement convexe" la topologie sur $E$ telle que le filtre des voisinages de $x \in E$ soit le filtre $x + \mathscr{F}_0$, qui est déduit par translation du filtre $\mathscr{F}_0$ construit ci-dessus. Un voisinage de $x$ pour la topologie radiale sera appelé "voisinage radial de $x$."*

La topologie radiale associée à l'espace localement convexe $E$ est plus fine que la topologie localement convexe de $E$; les applications: $x \to x + y$ et $(k, x) \to kx$, où $x \in E$, $y \in E$ et $k \in R$, sont continues pour la topologie radiale, mais la topologie radiale n'est généralement pas compatible avec la struc ure de groupe additif de $E$. Sur tout compact de $E$ (pour la topologie localement convexe), la topologie localement convexe et la topologie radiale associée induisent la même topologie.

**Proposition 1.1.** *Soit $M$ un sous-espace fermé équilibré de l'espace localement convexe $E$; soit $U$ un voisinage radial de* 0. *Pour toute demi-droite $D$ issue de* 0 *sur laquelle la trace de $M$ est un segment $I$, il existe un cône $C$ de sommet* 0 *à l'intérieur duquel appartient $D$ et tel que $M \cap C$ soit absorbé par $U \cap C$.*

**Démonstration.** Soit $x$ une extrémité de $I$ et soit $k > 0$ tel que $x \in \frac{k}{2} U$. Soient $x'$ un point de $D \cap \complement M \cap kU$ et $V$ un voisinage ouvert de $x'$ contenu dans $2kU$; l'ensemble $W = V \cap \complement M$ est ouvert et le cône $C$ de sommet 0 engendré par $W$ contient $D$ dans son intérieur. Pour tout $m \in M \cap C$, l'intersection de $\complement M$ avec la demi-droite $D'$ issue de 0 passant par $m$ contient un point $y$. Puisque $M$ est équilibré, $M \cap D'$ est contenu dans le segment $[0, y]$ donc dans $2kU$. Par suite $M \cap C$ est absorbé par $U \cap C$.

Si un voisinage radial $A$ est convexe, sa jauge $p(A)$ (voir [9a], p. 103, ex. 5) sera appelée *norme radiale* sur $E$. L'application $p(A)$ est continue pour la topologie radiale.

**Exemples. 1.1.** Si $E$ est un espace de dimension finie, la topologie radiale associée à la topologie de $E$ est identique à cette topologie.

**1.2.** Si $E$ est muni de la topologie fine (voir [7b]), un voisinage radial dans $E$ est l'analogue, dans le cas où $E$ est un espace vectoriel sur $R$, d'un ensemble localement borné au sens de [14] (où $E$ est un espace vectoriel sur le corps des complexes).

**1.3.** Soit $E$ un espace de Hilbert complet, admettant une base orthonormale dénombrable $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$; soit $g$ l'application de la sphère unité de $E$ dans $E$ telle que:

$$g(x) = \sum_{i \in N} (x_i/2^i)x, \quad \text{où} \quad \|x\| = 1 \quad \text{et} \quad x_i = (x \mid e_i).$$

L'ensemble $A$ formé des points $y$ de $E$ tels que:

$$\|y\| < \|g(ky)\|, \quad \text{où} \quad \|ky\| = 1 \quad \text{et} \quad k \in R,$$

est un voisinage radial convexe de $E$ ne contenant aucune boule. La norme radiale correspondante est l'application $p$ définie par:

$$p(x) = \|x\| / \|g(x')\| \quad \text{où} \quad x' = kx \quad \text{et} \quad \|x'\| = 1.$$

Soit $E$ un espace localement convexe; nous désignerons par $S_E$ *l'espace* sphérique associé à $E$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence $\rho$:

$$x \sim y \text{ si, et seulement si, } y = kx, \text{ où } k \in R \text{ et } k > 0.$$

La classe d'équivalence de $x$ modulo $\rho$ sera appelée *direction* de $x$. Si $F$ est aussi un espace localement convexe, $E \times F$ désignera l'espace localement convexe produit de $E$ par $F$.

Soit $E'$ un ensemble muni d'un groupe de transformations $\mathscr{G}$ simplement transitif appelé *groupe des translations*. Un élément $x$ de $E'$ sera appelé *point*; nn couple $(x, y)$ de points, *vecteur lié* d'origine $x$, d'extrémité $y$; la classe d'équivalence $\overrightarrow{xy}$ de $(x, y)$ relativement au groupe $\mathscr{G}$ est appelée *vecteur libre*. Rappelons [7c] que $E'$ est un *espace affine réel* si l'ensemble des vecteurs libres est muni d'une structure d'espace vectoriel telle que $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$; cet espace vectoriel sera noté $\vec{E}'$.

On appellera *espace affine localement convexe* un espace affine réel $E'$ muni d'une topologie telle que l'espace $\vec{E}'$ des vecteurs libres soit un espace localement convexe et que, pour tout point $x$ de $E'$ les voisinages de $x$ soient les ensembles $x + U$, où $U$ est un voisinage de 0 dans $\vec{E}'$; l'ensemble $x + U$ est formé des points $y$ tels que $\overrightarrow{xy} \in U$. Alors les vecteurs liés d'origine $x$ forment un espace localement convexe isomorphe à $\vec{E}'$ pour l'application $(x, y) \to \overrightarrow{xy}$; cet espace sera appelé *espace tangent à $E'$ en $x$* et noté $E'_x$. Si $M$ est un ensemble de $E'$, le *cône d'appui* [7b] de $M$ en $x \in M$ est l'ensemble obtenu par saturation de $M$ relativement à la relation $\rho_x$ qui définit l'espace sphérique associé à $E'_x$.

Soient $E$ et $F$ deux espaces topologiques, $f$ une application d'une partie de $E$ dans $F$; la restriction de $f$ à un ensemble $C$ de $E$ sera notée $f / C$. L'ensemble des applications $f$ continues en un point $x$ de $E$ sera noté $\mathscr{C}(F, E, x)$. Supposons que $E$ et $F$ sont deux espaces localement convexes. Si $U$ est un ouvert de $E$, nous désignerons par $\mathscr{C}(F, U)$ l'espace vectoriel des applications continues de $U$ dans $F$. L'espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ sera noté $\mathscr{L}(F, E)$; si $T \in \mathscr{L}(F, E)$, nous écrirons $T(x) = \langle T, x \rangle$, où $x \in E$. Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de parties de $E$, $\mathscr{C}(F, U)$ (resp. $\mathscr{L}(F, E)$) muni de la topologie de la $\mathscr{S}$-convergence sera noté $\mathscr{C}_{\mathscr{S}}(F,U)$ (resp. $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(F,E)$). Soit $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ l'espace localement convexe défini par récurrence de la manière suivante: $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{1}(F,E)=\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(F,E)$; $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p+1}(F,E)=\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E),E)$. Une application $\mathscr{S}$-hypocontinue de $E^p$ dans $F$ est une application $g$ de $E^p$ dans $F$, séparément continue, et telle que, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $F$ et toute famille finie $(s_i)_{i\leqq p}$ d'éléments de $\mathscr{S}$, il existe un voisinage $U$ de 0 dans $E$ tel que l'on ait:

$$g(U\times s_1\times\cdots\times s_p)\subset V.$$

Soit $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ l'ensemble des applications multilinéaires $\mathscr{S}$-hypocontinues de $E^p$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme $s_1\times\cdots\times s_p$, où $s_i\in\mathscr{S}$ pour tout $i\leqq p$. $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ admet pour sous-espace l'espace $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ des applications multilinéaires $\mathscr{S}^p$-hypocontinues de $E^p$ dans $F$, c'est-à-dire les applications multilinéaires symétriques $g$ telles que, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $F$ et toute famille finie $(s_i)_{i\leqq p-1}$ d'ensembles de $\mathscr{S}$, il existe un voisinage $U$ de 0 dans $E$ tel que l'on ait:

$$g(s_1\times\cdots\times s_{j-1}\times U\times s_{j+1}\times\cdots\times s_p)\subset V$$

pour tout $j$ compris entre 1 et $p$. L'application $a_p$ qui associe à $g'\in\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ l'application:

$$(v_1,\cdots,v_p)\to\langle\cdots\langle g',v_1\rangle,\cdots,v_p\rangle$$

est un isomorphisme de $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ sur $\mathscr{H}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$. L'inverse de $a_p$ détermine un isomorphisme canonique de $\tilde{\mathscr{H}}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$ sur un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}^{p}(F,E)$.

Soit $(E_i)_{i\leqq n}$ une famille finie d'espaces localement convexes. Nous noterons $L(F,\prod_{i\leqq n}E_i)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $\prod_{i\leqq n}E_i$ dans $F$ et, si $T'$ est un élément de cet espace, nous écrirons:

$$T'((x_i)_{i\leqq n})=\langle T',(x_i)_{i\leqq n}\rangle=\langle T',(x_1,\cdots,x_n)\rangle,\text{ où } x_i\in E_i.$$

Si $\mathscr{S}_i$ désigne un ensemble de parties de $E_i$, la topologie de la $\mathscr{S}_i$-convergence sur cet espace est la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme $\prod_{i \leqq n} s_i$, où $s_i \in \mathscr{S}_i$. L'espace topologique ainsi défini sera noté $L_{\mathscr{S}_i}(F, \prod_{i \leqq n} E_i)$. On a un isomorphisme canonique $b_n$ de $L_{\mathscr{S}}(F, E^n)$ sur un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}{}^n(F, E)$, si $\mathscr{S}_i = \mathscr{S}$ pour tout $i \leqq n$.

## 2. Applications lipschitziennes et tangentes à 0

Soient $E'$ et $F'$ deux espaces affines localement convexes, $f$ une application d'un ouvert de $E'$ dans $F'$. Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement de $f$ au voisinage d'un point $x$ de $A$. En nous plaçant dans les espaces tangents $E'_x$ et $F'_{f(x)}$, et en identifiant les espaces $\vec{E}'$ et $\vec{F}'$ des vecteurs libres de $E'$ et $F'$ aux espaces $E'_x$ et $F'_{f(x)}$ resp., nous nous ramènerons à la situation suivante: $E$ et $F$ sont deux espaces localement convexes, $f$ une application d'un voisinage ouvert $A$ de 0 dans $E$, à valeurs dans $F$, telle que $f(0)=0$.

Pour généraliser au cas où $E$ et $F$ ne sont pas normés les notions classiques d'applications lipschitziennes et 0-lipschitziennes, il semble naturel de poser:

**Définition 2.1.** *Soient $p$ et $q$ des semi-normes sur $E$ et $F$ resp· et $k$ un nombre positif. On dit que $f$ est* lipschitzienne en 0 de rapport $k$ relativement à $p$ et $q$ *s'il existe un voisinage $U'$ de 0 dans $E$ tel que, pour tout $x \in U'$, on ait*: $q(f(x)) \leqq kp(x)$. *On dit que $f$ est* 0-lipschitzienne relativement à $p$ et $q$ *si, pour tout $k>0$, $f$ est lipschitzienne de rapport $k$ relativement à $p$ et $q$. On dit que $f$ est* lipschitzienne (*resp.* 0-lipschitzienne) en 0 *si, pour toute semi-norme $q$ sur $F$ il existe une semi-norme $p$ sur $E$ telle que $f$ soit lipschitzienne (resp. 0-lipschitzienne) relativement à $p$ et $q$.*

Si $p$ n'est pas une norme, soit $D$ une droite telle que $p(D) = 0$. Si $f$ est lipschitzienne relativement à $p$ et $q$, on a $q(f(D \cap A)) = 0$.

**Interprétation géométrique.**

Soient $B$ un ensemble contenant 0 dans $E$ et $B'$ un ensemble équilibré de $F$; nous désignerons par $c(B, B')$ le cône dans $E \times F$ formé des demi-droites issues de $(0,0)$ et dont les points $(x, y)$ sont tels que $y \in B'$ lorsque $x \in B$; si $B$ est équilibré, soit $B^*$ le bord de $B$, c'est-à-dire l'ensemble des extrémités des segments traces sur $B$ des demi-droites issues de 0; soit $B^\infty$ l'ensemble des demi-droites contenues dans $B$. Le cône $c(B, B')$ est le cône d'appui en

$(0,0)$ de l'ensemble $(B^* \times B') \cup (B^\infty \times \{0\})$. Pour tout voisinage $U'$ de 0 dans $E$, soit $C(f/U')$ le cône d'appui en $(0,0)$ du graphe de $f/U'$; ce cône est l'ensemble des points $(z,z') \in E \times F$ tels qu'il existe $k > 0$ pour lequel on ait $f(kz) = kz'$ et $kz \in U'$. Soient $U$ un voisinage de 0 dans $E$ de jauge $p$ et $V$ un voisinage de 0 dans $F$ de jauge $q$. Pour que $f$ soit lipschitzienne de rapport $k$ relativement à $p$ et $q$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage $U'$ tel que $C(f/U') \subset c(U,kV)$. Pour que $f$ soit lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que, pour tout $V$, il existe $U$ et $U'$ tels que: $C(f/U') \subset c(U,V)$. Pour que $f$ soit 0-lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que, pour tout $V$, il existe $U$ vérifiant la condition: pour tout $k > 0$, il existe $U'$ tel que $C(f/U') \subset c(U,kV)$.

**Proposition 2.1.** *Pour que $f$ soit lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que l'application $m$, définie sur l'ensemble $A'$ des couples $(t,v)$ tels que $t \geqq 0$, $v \in E$ et $tv \in A$ par:*

$$m(tv) = f(tv)/t \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad m(0,v) = 0$$

*soit continue en* $(0,0.)$

**Proposition 2.2.** *Pour que $f$ soit 0-lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $q$ sur $F$, il existe une semi-norme $p$ sur $E$ telle que $q(f(h)) = p(h)a(h)$, où $h \in A$ et $a$ est une fonction continue de $A$ dans $F$.*

(En abrégé: $a(h) \to 0$ si $h \to 0$).

**Remarque 2.1.** Si dans la Définition 2.1, on remplace "voisinage $U'$" par "voisinage $U'$ pour la topologie définie sur $E$ par la semi-norme $p$", on obtient la notion d'application *régulièrement lipschitzienne* ou *régulièrement 0-lipschitzienne en* 0. Une application lipschitzienne en 0 est aussi régulièrement 0-lipschitzienne en 0; mais si $E$ n'est pas normé, $f$ peut être 0-lipschitzienne en 0 sans être régulièrement 0-lipschitzienne en 0. On pourrait aussi remplacer dans la Définition 2.1 voisinage $U'$ par voisinage radial $U'$; on obtient alors la notion d'application *radialement lipschitzienne* ou *radialement 0-lipschitzienne* en 0; une telle application peut ne pas être continue en 0. Pour que $f$ soit régulièrement (resp. radialement) 0-lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que pour toute semi-norme $q$ sur $F$ il existe une semi-norme

$p$ sur $F$ telle que l'on ait $q(f(h)) = p(h)\,a(h)$, où $a(h) \to 0$ si $p(h) \to 0$ (respectivement $a$ est continue pour la topologie radiale).

**Exemples: 2.1.** Toute fonction linéaire et continue est (régulièrement) lipschitzienne en 0.

**2.2.** Si $f$ est continue en 0 et telle que $f(ax) = a^n f(x)$, où $n$ est positif et $a \in R$, alors $f$ est 0-lipschitzienne en 0.

L'ensemble des applications (régulièrement) lipschitziennes en 0 forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(F, E, 0)$. La restriction d'une application (régulièrement) lipschitzienne à un sous-espace vectoriel de $E$ est une application (régulièrement) lipschitzienne en 0 sur ce sous-espace.

**Proposition 2.3.** *La composée de deux applications* (*régulièrement*) *lipschitziennes en* 0 *est* (*régulièrement*) *lipschitzienne en* 0. *La composée à droite ou à gauche d'une application* (*régulièrement*) *lipschitzienne en* 0 *et d'une application* (*régulièrement*) 0-*lipschitzienne en* 0 *est une application* (*régulièrement*) 0-*lipschitzienne en* 0.

**Démonstration.** Soient $f$ lipschitzienne en 0 et $g$ une application lipschitzienne en 0 d'un ouvert de $F$ dans un espace localement convexe $G$. Pour toute semi-norme $r$ sur $G$, il existe une semi-norme $q$ sur $F$ et un nombre $k > 0$ tels que $g$ soit lipschitzienne de rapport $k$ relativement à $q$ et $r$. A $q$ correspond une semi-norme $p$ sur $E$ telle que $f$ soit lipschitzienne de rapport $k'$ relativement à $p$ et $q$. Alors $g \circ f$ est lipschitzienne de rapport $kk'$ relativement à $p$ et $r$. La fin de la proposition est évidente.

**Proposition 2.4.** *Soit* $(F_i)_{i \in I}$ *une famille d'espaces localement convexes. Si pour tout* $i \in I$ *l'application* $f_i$ *de* $E$ *dans* $F_i$ *est* 0-*lipschitzienne en* 0, *alors l'application produit* $f = (f_i)_{i \in I}$ *de* $E$ *dans* $F = \prod_{i \in I} F_i$ *est* 0-*lipschitzienne en* 0.

**Démonstration.** Un système fondamental de semi-normes sur $F$ est obtenu en prenant les semi-normes: $q_{I'} = \sup_{i \in I'} (q_i \circ pr_i)$, où $I'$ est un sous-ensemble fini de $I$, où $pr_i$ est la projection canonique de $F$ sur $F_i$ et $q_i$ décrit un système fondamental de semi-normes sur $F_i$. A la semi-norme $q_i$ correspondent la semi-norme $p_i$ sur $F_i$ et la fonction $a_i$ (Proposition 2.2) telles que:

$$q_i(f_i(h)) = p_i(h)\, a_i(h), \text{ où } a_i(h) \to 0 \text{ si } h \to 0.$$

On a alors:

$$q_{I'}(f(h)) = (\sup_{i \in I'} p_i(h))\, a(h), \quad \text{où } a(h) \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0;$$

donc $f$ est 0-lipschitzienne en 0.

En pratique, la notion d'application 0-lipschitzienne est trop restrictive dans beaucoup de questions qui interviennent en Analyse, lorsque les espaces ne sont pas normés. Il est donc utile d'introduire une notion plus maniable, celle d'application *tangente à* 0 *en* 0, dont nous nous servirons principalement dans la suite.

**Définition 2.2.** *Soit $D$ une demi-droite issue de* 0 *dans $E$. On dit que $f$ est* tangente à 0 dans la direction de *$D$ si, pour toute semi-norme $q$ sur $F$, il existe une semi-norme $p$ sur $E$ vérifiant la condition: Pour tout $k > 0$, il existe un cône $C$ de sommet* 0 *dont l'intérieur contient $D$ et un voisinage $U$ de* 0 *dans $E$ tels que, pour tout $h \in C \cap U$, on ait: $q(f(h)) \leqq kp(h)$. Si $f$ est lipschitzienne en* 0 *et tangente à* 0 *dans toutes les directions, on dit que $f$ est* tangente à 0 en 0, *ou que* le 1-jet de $f$ en 0 est nul, *et on écrit* $j_0^1 f = 0$.

On ne change pas la notion d'application tangente à 0 en 0 si on remplace dans cette définition voisinage $U$ par voisinage radial $U$.

Si $f$ est tangente à 0 en 0, sa restriction à tout sous-espace vectoriel de $E$ est tangente à 0 en 0. L'ensemble des applications de $A$ dans $F$ tangentes à 0 en 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(F, A, 0)$.

**Remarque 2.2.** La considération du contingent [15] en 0 des graphes de deux applications ne permet pas de définir une bonne notion de tangence. En effet, soient $F$ un espace localement convexe admettant une base algébrique dénombrable $(e_n)_{n \in N}$ et muni de la topologie fine et $f$ l'application de $R$ dans $F$ définie par:

$$f(x) = 0 \text{ si } x \neq 1/2^n \quad \text{et} \quad f(1/2^n) = e_n/n.$$

Le contingent en 0 du graphe de $f$ est réduit au sous-espace $R \times \{0\}$ de $R \times F$ alors que pour tout voisinage de 0 dans $R$ le cône d'appui de la restriction de $f$ à ce voisinage contient une infinité de droites ne convergeant pas vers une droite du contingent.

**Théorème 2.1.** *Pour que $f$ soit tangente à 0 en 0, il faut et il suffit que l'application $m$, définie sur l'ensemble $A'$ des couples $(t, v)$ tels que $t \geqq 0$, $v \in E$ et $tv \in A$ par:*

$$m(t,v) = f(tv)/t \quad si \quad t \neq 0 \quad et \quad m(0,v) = 0$$

*soit continue en $(0, v)$ pour tout $v \in E$.*

**Démonstration.** La continuité de $m$ en $(0,0)$ signifie que $f$ est lipschitzienne en 0 d'après la Proposition 2.1. Soit $q$ une semi-norme sur $F$. Supposons $m$ continue en $(0, v)$ pour tout $v \in E$. Soit $D$ une demi-droite issue de 0 dans $E$. Choisissons un point $v$ sur $D$ et une semi-norme $p$ sur $E$ tels que $p(v) = 1$. Pour tout $k > 0$, soient $U'$ le voisinage ouvert de 0 dans $E$ et $a$ le nombre tels que les conditions $t < a$, $v' \in v + U'$ et $tv' \in A$ entraînent $q(f(tv')) < tk$. Le cône $C$ engendré par l'ensemble $B$ des points $v'$ tels que $v' \in v + U'$ et $p(v') > 1$ contient $D$ dans son intérieur et, pour tout $h \in C$ tel que $p(h) < a$, il existe $v' \in B$ tel que $h = tv'$. Alors on a: $t < p(h) < a$ et $q(f(h)) < kt < kp(h)$, donc $f$ est tangente à 0 dans la direction de $D$. Inversement si $j_0^1 f = 0$, soient $v \in E$ et $p$ la semi-norme sur $E$ associée par définition à $q$ et à la direction $D$ de $v$; on peut supposer $p(v) = a/2 > 0$. Soient $U$ le voisinage ouvert de 0 et $C$ le cône tels que l'on ait $q(f(h)) < p(h)/a$ pour tout $h \in U \cap C$. Soit $a' > 0$ tel que $v \in a'U$. L'ensemble $W$ des points $v' \in a'U \cap C$ tels que $p(v') < a$ est un voisinage de $v$; les conditions $t < 1/a'$, $v' \in W$ et $tv' \in A \cap C$ entraînent $tv' \in U$ et $p(tv') < ta$, d'où $q(f(tv')) < t$. Donc $m$ est continue en $(0, v)$.

**Corollaire.** *Si $f$ est tangente à 0 en 0, l'application $m$ est continue sur $A'$.*

**Théorème 2.2.** *Pour que $f$ soit tangente à 0 en 0, il faut et il suffit que, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $F$ et pour tout $v \in E$, il existe deux* *voisinages* $U(v)$ *et* $U'(v)$ *de* 0 *dans* $E$ *tels que les conditions*: $v' \in v + U'(v)$ *et* $tv' \in U(v)$ *entraînent*:

$$f(tv') \in tV.$$

**Démonstration.** Soit $V$ un voisinage de 0 dans $F$ et $v \in E$. Si $j_0^1 f = 0$, il existe d'après le Théorème 2.1 un voisinage $U'$ de 0 dans $E$ et un nombre $a > 0$ tels que les conditions $t < a$ et $v' \in v + U'$ entraînent $f(tv) \in tV$. On peut supposer qu'il existe un voisinage $U$ de 0 dans $E$ ne rencontrant pas $v + U'$. Alors les conditions $v' \in v + U'$ et $tv' \in aU \cap A$ entraînent $t < a$, donc $f(tv) \in tV$. Inversement, soient $U(v)$ et $U'(v)$ des voisinages ouverts tels que $f(tv') \in tV$ si $v' \in v + U'(v)$ et $tv' \in U(v)$. L'enveloppe convexe $M$ de 0 avec $v + U'(v)$ est un voisinage de $v$. Soit $a > 0$ tel que $v \in aU(v)$. Les conditions $t < 1/a$, $w \in M \cap aU(v)$ et $tw \in A$ entraînent $tw \in U(v)$ et $tw = t'v'$, où $t' < t$ et $v' \in v + U'(v)$, donc $f(tw) \in tV$. Ceci prouve que $m$ est continue en $(0, v)$ et, d'après le Théorème 2.1, que $j_0^1 f = 0$.

**Proposition 2.5.** *Pour que $f$ soit tangente à* 0 *en* 0, *il suffit que $f$ soit lipschitzienne en* 0 *et qu'il existe un voisinage radial $B$ de* 0 *dans $E$ vérifiant la condition*: *Pour tout voisinage $V$ de* 0 *dans $F$, il existe un voisinage radial $\tilde{U}$ de* 0 *dans $E$ tel que l'on ait*: $C(f/\tilde{U}) \subset c(B, V)$.

**Démonstration.** Soient $V$ un voisinage de 0 dans $F$ et $v \in E$. Soient $d$ un nombre $> 0$ tel que $v \in dB$, et $\tilde{U}$ le voisinage radial associé à $V/d$ par hypothèse. Il existe un cône $C$ tel que $C \cap dB$ soit un voisinage $U' + v$ de $v$ et que $\tilde{U} \cap C$ soit la trace sur $C$ d'un voisinage $U$ de 0 dans $E$. Alors les conditions $v' \in v + U'$ et $tv' \in U \cap A$ entraînent $f(tv') \in tV$ et $j_0^1 f = 0$ d'après le Théorème 2.2.

**Corollaire:** *Si $f$ est lipschitzienne et radialement* 0*-lipschitzienne en* 0, *alors* $j_0^1 f = 0$.

**Proposition 2.6.** *Si $f$ est tangente à* 0 *en* 0, *pour tout voisinage $V$ de* 0 *dans $F$ et pour tout ensemble $B$ fermé équilibré, absorbant et pseudo-borné dans $E$, il existe un voisinage radial $\tilde{U}$ de* 0 *dans $E$ tel que l'on ait*: $C(f/\tilde{U}) \subset c(B, V)$.

**Démonstration.** A une demi-droite $D$ dans $E$ et à une semi-norme $q$ sur $F$, jauge de $V$, est associée par définition une semi-norme $p$ sur $E$. D'après la Proposition 1.1, il existe $d > 0$ et un cône $C'$ tels que $p(B \cap C') < d$. Au nombre $1/d$ correspondent un voisinage $U$ et un cône $C$ tels que $q(f(h)) \leqq p(h)/d$ pour tout $h \in U \cap C$. La trace $B(D)$ de $U$ sur $C \cap C' \cap A$ est un voisinage de 0 dans $C \cap C'$ et la réunion $\tilde{U}$ des ensembles $B(D)$ lorsque $D$ balaye $E$ est un voisinage radial de 0 dans $E$. Pour tout $h \in \tilde{U}$, il existe $v \in B$ tel que $h = tv$; par suite $p(h) = tp(v) < td$ et $q(f(h)) < t$. Donc on a:

$$C(f/\tilde{U}) \subset c(B, V).$$

**Corollaire.** *Si $E$ est pseudo-normé, on a $j_0^1 f = 0$ si et seulement si $f$ est lipschitzienne et radialement 0-lipschitzienne en 0.*

**Théorème 2.3.** *Si $f$ est tangente à 0 en 0 et si $g$ est une application lipschitzienne en 0, à valeurs dans un espace localement convexe $G$, alors $g \circ f$ est tangente à 0 en 0.*

**Démonstration.** Soit $r$ une semi-norme sur $G$ et $q$ la semi-norme sur $F$ telle que $g$ soit lipschitzienne de rapport $k$ relativement à $q$ et $r$. Soit $q'$ la semi-norme sur $F$ telle que l'on ait:

$$r(g(h')) \leqq kq(h') \quad \text{si} \quad q'(h') < 1.$$

Soit $a > 0$; à la semi-norme $q'' = \sup(q, q')$ correspond une semi-norme $p$ sur $E$ vérifiant la condition: A $a/k$ est associé un cône $C$ et un voisinage $U$ tels que $q''(f(h)) \leqq (a/k)p(h)$ pour tout $h \in U \cap C$. Alors les conditions: $h \in U \cap C$ et $p(h) < k/a$ entraînent $r(g \circ f(h)) \leqq ap(h)$. Donc $g \circ f$ est tangente à 0 dans la direction de $D$ et lipschitzienne en 0.

**Théorème 2.4.** *La Proposition 2.4 est vraie en remplaçant 0-lipschitzienne par tangente à 0.*

**Proposition 2.7.** *Si $E$ est de dimension finie, toute application tangente à 0 dans toutes les directions est 0-lipschitzienne en 0.*

**Démonstration.** Soit $q$ une semi-norme sur $F$; si $D$ est une demi-droite dans $E$ et $k$ un nombre $> 0$, il existe un cône $C(D)$ et $d > 0$ tels que si $h \in C(D)$ et $h < d$, on ait: $q(f(h)) \leqq k \| h \|$. Il existe un nombre fini de droites $D_i$, où $i < n$, telles que les cônes $C(D_i)$ correspondants recouvrent $E$. Par suite, si $\| h \| < \inf_{i<n} d_i$ on a: $q(f(h)) \leqq k \| h \|$.

**Remarque 2.3.** Si $E$ est de dimension infinie, la proposition n'est évidemment plus vraie. Par exemple, avec les notations de l'exemple 1.3, l'application: $x \rightarrow \| x \| p(x)$ est tangente à 0 dans toutes les directions mais n'est pas continue en 0. L'application: $x \rightarrow \| x \| \inf (p(x), a)$, où a est une constante positive donnée, est tangente à 0 en 0 sans être 0-lipschitzienne en 0.

**Définition 2.3.** *Soient $f$ et $g$ deux applications définies sur un voisinage $A$ de* 0 *dans $E$. On dira que $f$ et $g$ sont* tangentes en 0, *ou* ont même 1-jet en 0 *si $j_0^1(f - g) = 0$. On dira que $f$ et $g$ sont* uniformément (*resp.* régulièrement) tangentes en 0 *si $f - g$ est* 0-*lipschitzienne* (*resp. régulièrement* 0-*lipschitzienne*) *en* 0.

## 3. Applications différentiables en un point.

Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces affines localement convexes, $\vec{E}$, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ les espaces des vecteurs libres de $E$, $F$ et $G$ resp., $A$ une partie de $E$ d'intérieur non vide et $x$ un point de l'intérieur de $A$. Nous désignerons par $f$ une application de $A$ dans $F$.

**Définition 3.1.** *On dit que $f$ est* dérivable en $x$ dans la directions de $v$, *où $v \in \vec{E}$ et $v \neq 0$, si la restriction de $f$ à la demi-droite issue de $x$ et passant par $x + v$ est différentiable en $x$. La dérivée à droite en* 0 *de l'application: $t \rightarrow f(x + tv)$, où $t \in R$, $t \geqq 0$ et $x + tv \in A$, sera notée $\partial_v f(x)$ et appelée* dérivée de $f$ en $x$ par rapport à $v$. *Si $f$ est dérivable en $x$ dans toutes les directions et si l'application $Df(x)$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ définie par*:

$$0 \rightarrow 0 \quad et \quad v \rightarrow \partial_v f(x) \quad si \quad v \neq 0,\ v \in \vec{E},$$

*est linéaire* (*resp. linéaire et continue*), *on dit que $f$ est* dérivable (*resp.* continuement dérivable) en $x$ *et on appelle $Df(x)$* la différentielle de $f$ en $x$.

Si $f$ est dérivable dans la direction de $v$, on a:

$$\partial_{v'}f(x) = k\partial_v f(x), \text{ où } v' = kv \text{ et } k \in R.$$

**Définition 3.2.** *On dit que $f$ est* différentiable (*resp.* uniformément différentiable *resp.* régulièrement différentiable) en $x$ *s'il existe une application linéaire continue $Df(x)$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ qui soit tangente (resp. uniformément tangente, resp. régulièrement tangente) en* 0 *à l'application*:

$$v \to (f(x+v) - f(x)), \quad \textit{où } v \in \vec{E}.$$

Alors, la restriction de $Df(x)$ à toute droite $D$ de $\vec{E}$ passant par 0 est la différentielle de la restriction de $f$ à $x + D$. Ainsi $f$ est dérivable en $x$ et $Df(x)$ est unique. On appelle $Df(x)$ la *différentielle de $f$ en $x$*.

**Exemples 3.1.** Toute application linéaire et continue est différentiable. Toute application régulièrement différentiable est uniformément différentiable. Toute application uniformément différentiable est différentiable.

**3.2.** Si $E$ et $F$ sont normés, il y a identité entre applications régulièrement différentiables, uniformément différentiables et différentiables au sens de Fréchet. Par contre une application peut être différentiable sans être différentiable au sens de Fréchet. La notion de différentiabilité introduite ici est plus forte que celle de différentiabilité au sens de Gâteaux [14].

**3.3.** Toute application tangente à 0 (resp. 0-lipschitzienne) en 0 est différentiable (resp. uniformément différentiable) en 0 et sa différentielle en 0 est l'application identiquement nulle.

**Remarque 3.1.** Les notions de différentiabilité régulière et uniforme s'introduisent d'une manière analytiquement très naturelle et c'est pourquoi elles sont définies ici. Mais dans le cas où les espaces ne sont pas normés, c'est la notion de différentiabilité en un point qui est la meiux adaptée à l'étude des problèmes que nous considérerons. Nous utiliserons en particulier le fait qu'une condition simple de continuité des dérivées partielles (voir Chapitre II, §2) entraîne la différentiabilité en un point (et non la différentiabilité uniforme).

Les notions de différentiabilité en un point dépendent des topologies de $E$ et $F$. Il y a d'autant plus d'applications différentiables de $E$ dans $F$ que la topologie de $E$ est plus fine et celle de $F$ moins fine. Par suite si $\vec{E}'$ et $\vec{F}'$ désignent les duaux topologiques de $\vec{E}$ et $\vec{F}$ munis des topologies données, toute application de $E$ dans $F$ différentiable pour les topologies initiales est diifférentiable si $\vec{E}$ est muni de la topologie de Mackey $\tau(\vec{E},\vec{E}')$ et $\vec{F}$ de la topologie faible $\sigma(\vec{F}',\vec{F})$ (voir [9a]).

Les résultats du paragraphe 2 donnent différentes caractérisations des applications différentiables en $x$. La proposition suivante rappelle les principales.

**Proposition 3.1.** *Pour que $f$ soit différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en $x$, il faut et il sufit qu'il existe une application linéaire et continue $Df(x)$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ et que la condition $C$ (resp. $C'$, resp. $C''$) soit vérifiée.*

$C$: Pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$ et pour tout $v \in \vec{E}$, il existe deux voisinages $U(v)$ et $U'(v)$ de 0 dans $\vec{E}$ tels que les conditions: $v' \in v + U'(v)$ et $tv' \in U(v)$ entraînent:

$$f(x + tv) - f(x) - \langle Df(x), tv \rangle \in tV.$$

$C'$ (resp. $C''$): Pour toute semi-norme $q$ sur $F$, il existe une semi-norme $p$ sur $E$ telle que l'on ait:

$$q(f(x + h) - f(x) - \langle Df(x), h \rangle) = p(h)\,a(h),$$

où $a$ est une fonction continue en 0 pour la topologie de $\vec{E}$ (resp. pour la topologie définie sur $\vec{E}$ par la semi-norme $p$).

Remarquons que, pour que $f$ soit régulièrement différentiable en $x$, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme $q$ sur $\vec{F}$, il existe une semi-norme $p$ sur $\vec{E}$ telle que $f$ soit différentiable au sens de Fréchet en $x$ si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont munis resp. des topologies définies par $p$ et $q$.

**Théorème 3.1.** *L'ensemble des applications de $A$ dans $F$ qui sont différentiables en $x$ est un sous-espace affine $\mathscr{D}(F,A,x)$ de $\mathscr{C}(F,A,x)$. Il en* *est de même des ensembles d'applications uniformément ou régulièrement différentiables en $x$.*

La différentielle en $x$ de l'application $kf + k'f'$, où $k \in R$ et $k' \in R$, est l'application: $kDf(x) + k'Df(x)$.

Les notions de différentiabilité se conservent par restriction à un sous-espace vectoriel.

**Théorème 3.2.** *La composée de deux applications différentiables (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiables) en un point est différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en un point, sa différentielle étant la composée des différentielles.*

**Démonstration.** On se ramène au cas suivant: $f$ est une application de $\vec{A} \subset \vec{E}$ dans $\vec{F}$, différentiable en 0, et $g$ une application de $f(\vec{A})$ dans $\vec{G}$, différentiable en $f(0)$, de sorte que l'on a: $f = Df(0) + a$ et $g = Dg(0) + b$, $a$ et $b$ étant des applications tangentes à 0 en 0. On a:

$$g \circ f = Dg(0) \circ Df(0) + Dg(0) \circ a + b \circ f.$$

D'après le Théorème 2.3, $Dg(0) \circ a$ est tangente à 0 en 0. Montrons que $b \circ f$ est aussi tangente à 0 en 0. En effet, soient $v \in \vec{E}$ et $W$ un voisinage de 0 dans $\vec{G}$. A $W$ et à $\langle Df(0), v \rangle$ correspondent deux voisinages $V$ et $V'$ de 0 dans $\vec{F}$ tels que les conditions: $w' \in \langle Df(0), v \rangle + V'$ et $tw' \in V$ entraînent: $b(tw') \in tW$. A $V'$ et à $v$ correspondent deux voisinages $U$ et $U'$ de 0 dans $\vec{E}$ tels que les conditions: $v' \in v + U'$ et $tv' \in U$ entraînent $a(tv') \in tV'/2$ et $\langle Df(0), v' - v \rangle \in V'/2$. Puisque $f$ est continue en 0, à $V$ est associé un voisinage $U''$ de 0 dans $\vec{E}$ tel que $f(tv') \in V$ pour tout $tv' \in U''$. Les conditions: $v' \in v + U'$ et $tv' \in U \cap U''$ entraînent: $f(tv') = tw' \in V$ et $w' \in \langle Df(0), v \rangle + V'$, donc $b \circ f(tv') \in tW$. Il en résulte que $g \circ f$ est différentiable en 0, sa différentielle étant l'application continue $Dg(0) \circ Df(0)$. Le reste du théorème se déduit de la Proposition 2.3.

**Théorème 3.3.** *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces affines localement convexes. Soit $f_i$ une application différentiable en $x$ de $A$ dans $F_i$, pour tout $i \in I$. Alors l'application produit $(f_i)_{i \in I}$ de $A$ dans $F = \prod_{i \in I} F_i$ est différentiable en $x$, sa différentielle étant l'application $(Df_i(x))_{i \in I}$.*

Résulte de la Proposition 2.4 et du Théorème 2.4.

**Corollaire.** *Si $T$ est une application multilinéaire de $F = \prod_{i \in I} F_i$ dans un espace localement convexe $\vec{G}$, continue, alors l'application $T \circ (f_i)_{i \leqq n}$ est différentiable en $x$, sa différentielle étant: $\sum_{j \leqq n} (T \circ g_j)(x)$, où $g_j$ est l'application*:

$$x \to (f_1(x), \cdots, f_{j-1}(x), Df_j(x), f_{j+1}(x), \cdots, f_n(x)).$$

**Exemples. 3.4.** Si $f$ est une application différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ et si $f'$ est une application différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x$ de $\vec{E}$ dans $R$, alors l'application $f'f: x \to f'(x)f(x)$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x$ et sa différentielle est donnée par:

$$D(f'f(x)) = f'(x)Df(x) + Df'(x)f(x).$$

**3.5.** Soit $B$ une algèbre topologique commutative (voir [9b], p. 9) et $(f_i)_{i \leqq n}$ une famille d'applications $f_i$ de $E$ dans $B$ différentiables en $x$. Alors l'application:

$$\bigtimes_{i \leqq n} (f_i): \ x \to f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)$$

de $E$ dans $B$ est différentiable en $x$ et, en considérant $Df_i(x)$ comme une application de $\vec{E}$ dans $B$, on a:

$$D(\bigtimes_{i \leqq n} f_i)(x) = \sum_{i \leqq n} f_1(x) \cdot \cdots \cdot f_{i-1}(x) \cdot Df_i(x) \cdot f_{i+1}(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x).$$

**Théorème 3.4.** *Soit $B$ une algèbre topologique commutative dans aquelle l'ensemble $B'$ des éléments inversibles est ouvert. Si l'application $I$: $x \to x^{-1}$ est continue sur $B'$, alors elle est uniformément différentiable en tout point $x$ de $B'$ et on a*:

$$\langle DI(x), h \rangle = -x^{-1} \cdot h \cdot x^{-1}, \ \textit{pour tout } h \in B.$$

**Démonstration.** Tous les points considérés sont dans $B'$. On a:

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}\cdot h\cdot x^{-1} = -x^{-1}\cdot h\cdot((x+h)^{-1} - x^{-1}).$$

Soit $q$ une semi-norme sur $B$ et soit $k > 0$. L'application: $(x, y) \to x\cdot y$ étant continue, il existe une semi-norme $p$ sur $B$ et $k' > 0$ tels que l'on ait:

$$q(x\cdot y\cdot z) < p(x)\,p(y)\,p(z)\,k'.$$

L'application $I$ étant continue, à $p$ et à $k'' = k/(k'p(x^{-1}))$ correspond une semi-norme $p'$ sur $B$ telle que, pour tout $h$ pour lequel $p'(h) < 1$, on ait:

$$p((x+h)^{-1} - x^{-1}) < k''.$$

Il en résulte que, si $p'(h) < 1$, on a:

$$q((x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}\cdot h\cdot x^{-1}) < p(h)\,p(x^{-1})\,k''k' < p(h)k,$$

ce qui prouve le théorème.

**Corollaire.** *Si $f$ est une application de $A$ dans $B$, différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x$, alors l'application: $x \to (f(x))^{-1}$ est différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x \in f^{-1}(B')$ et sa différentielle est l'application: $-(f(x))^{-1}\cdot Df(x)\cdot (f(x))^{-1}$, où $Df(x)$ est considérée comme une application de $\vec{E}$ dans $B$.*

## CHAPITRE II

## APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES SUR UN OUVERT

### 1. Quasi-topologies localement convexes.

Soit $X$ un ensemble. La classe des filtres sur $X$ sera munie de sa structure de classe locale (voir [8b]) pour la relation d'ordre: $\mathscr{X} < \mathscr{X}'$ si, et seulement si, $\mathscr{X}$ est plus fin que $\mathscr{X}'$. Pour cette relation, la borne supérieure d'un ensemble de filtres sera appelée son agrégat (filtre qui correspond au filtre intersection de l'ensemble au sens de [9c]). Nous utiliserons les résultats suivants ([9c] exercices 3, 9, 10 pages 44–45):

1) Un filtre est l'agrégat des ultrafiltres plus fins que lui;

2) L'agrégat $\mathscr{X} \cup \mathscr{X}'$ de deux filtres $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ est le filtre formé des ensembles $\xi \cup \xi'$, où $\xi \in \mathscr{X}$ et $\xi' \in \mathscr{X}'$;

3) Un ultrafiltre plus fin que $\mathscr{X} \cup \mathscr{X}'$ est plus fin que $\mathscr{X}$ ou que $\mathscr{X}'$.

Les filtres seront notés avec des capitales de ronde $\mathscr{X}$, $\mathscr{F}$, etc.; un élément d'un filtre $\mathscr{X}$ sera désigné par la minuscule grecque $\xi$ correspondante. Le filtre formé de tous les ensembles contenant un point $x$ de $X$ sera désigné par le symbole $x^{\bullet}$.

**Définition 1.1.** *On appellera* quasi-topologie *sur un ensemble $X$ une relation $\pi$ entre filtres $\mathscr{X}$ sur $X$ et points $x$ de $X$ vérifiant les conditions suivantes*:

1) *Pour tout $x \in X$, on a $x^{\bullet} \pi x$;*

2) *Si $\mathscr{X}' < \mathscr{X}$ et $\mathscr{X} \pi x$, alors on a aussi $\mathscr{X}' \pi x$;*

3) *Les relations $\mathscr{X} \pi x$ et $\mathscr{X} \pi x'$ entraînent $x = x'$;*

4) *Si $\mathscr{X} \pi x$ et $\mathscr{X}' \pi x$, on a $(\mathscr{X} \cup \mathscr{X}') \pi x$.*

*Le couple $(X,\pi)$ sera appelé* espace quasi-topologique. *Si $\mathscr{X} \pi x$, on dira que $\mathscr{X}$* quasi-converge vers $x$.

*Si $\pi$ vérifie seulement les conditions* 1, 2, 4, *on dira que $\pi$ est une* quasi-topologie non séparée *et $(X,\pi)$ sera appelé* espace quasi-topologique non séparé.

La condition 1 de la Définition 1.1 signifie que la restriction de $\pi$ aux ultrafiltres de $X$ est une pseudo-topologie [11]; d'après la condition 2, si $\mathscr{X}$ quasi-converge vers $x$, alors $\mathscr{X}$ pseudo-converge [11] pour cette pseudo-topologie.

Soit $(X,\pi)$ un espace quasi-topologique (resp. non séparé). Si $\pi'$ est une quasi-topologie (resp. non séparée) sur $X$ telle que $\mathscr{X} \pi x$ entraîne $\mathscr{X} \pi' x$, on dira que $\pi'$ est une quasi-topologie (resp. non séparée) *moins fine que* $\pi$. Tout ensemble de quasi-topologies (resp. non séparées) sur $X$ admet une borne inférieure pour la relation d'ordre ainsi définie.

**Remarques: 1.1.** Une quasi-topologie non séparée $\pi$ peut aussi être définie comme une fonction de $X$ dans l'ensemble des ideaux [16] du treillis de tous les filtres sur $X$; cette fonction associe à $x$ l'ensemble des filtres $\mathscr{X}$ tels que $\mathscr{X} \pi x$. On retrouve ainsi la définition des "Limesräume" de [10] ou [4b].

**1.2.** Deux quasi-topologies sur $X$ peuvent avoir la même pseudo-topologie sous-jacente. La quasi-topologie définie par:

$\mathscr{X}\pi' x$ si, et seulement si, on a $\mathscr{X}'\pi x$ pour tout ultrafiltre $\mathscr{X}'$ plus fin que $\mathscr{X}$,

est la plus fine des quasi-topologies admettant même pseudo-topologie sous-jacente que $\pi$; rappelons [11] que la donnée de $\pi'$ équivaut à la donnée de la pseudo-topologie sous-jacente à $\pi$.

**1.3.** Si $\tau$ est une topologie sur $X$, la relation:

$\mathscr{X}\tau x$ si, et seulement si, $\mathscr{X}$ converge vers $x$,

est une quasi-topologie. C'est toujours de cette quasi-topologie qu'il s'agira lorsque nous considérerons, sans préciser, un espace topologique comme un espace quasi-topologique.

Soit $(X, \pi)$ un espace quasi-topologique (resp. non séparé).

Si $\mathscr{X}$ est un filtre sur $X$ tel qu'il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ plus fin que $\mathscr{X}$ qui quasi-converge vers $x$, on dira que $x$ est un *point pseudo-adhérent* à $\mathscr{X}$. Une partie $X'$ de $X$ sera dite *pseudo-fermée* [11] si elle contient tout point pseudo-adhérent à un filtre admettant une base formée d'ensembles de $X'$. On sait [11] que les ensembles pseudo-fermés sont les ensembles fermés pour une topologie sur $X$, appelée topologie associée à la pseudo-topologie déduite de $\pi$: cette topologie est la topologie la plus fine telle que tout filtre qui quasi-converge vers $x$ converge vers $x$; elle est séparée (resp. non séparée).

Si $X'$ est une partie de $X$, la relation $\pi/X'$ définie par:

$\mathscr{X}'(\pi/X')x'$ si, et seulement si, le filtre engendré par $\mathscr{X}'$ dans $X$ quasi-converge vers $x' \in X'$,

est une quasi-topologie (resp. non séparée) sur $X'$, que nous appellerons *quasi-topologie* (resp. *non séparée*) *induite par* $\pi$ sur $X'$. Si $X'$ est pseudo-fermé dans $(X, \pi)$, la topologie associée à la pseudo-topologie sous-jacente à $\pi/X'$ est la topologie induite sur $X'$ par la topologie associée à la pseudo-topologie sous-jacente à $\pi$.

Soient $(X, \pi)$ et $(X', \pi')$ deux espaces quasi-topologiques (resp. non séparés), $f$ une application de $X$ dans $X'$. On dira que $f$ est *quasi-continue* en $x$ si la relation $\mathscr{X}\pi x$ entraîne $f(\mathscr{X})\pi' f(x)$, où $f(\mathscr{X})$ désigne le filtre ayant pour base les ensembles $f(\xi)$, $\xi \in \mathscr{X}$. Si $f$ est quasi-continue en tout point $x$, on dira que $f$ est *quasi-continue sur* $X$. Si $f$ est quasi-continue sur $X$, elle est continue pour les topologies associées aux pseudo-topologies sous-jacentes à $\pi$ et à $\pi'$. Mais une application continue pour ces topologies peut ne pas être quasi-continue. Si $f$ est une application biunivoque et si $f$ et $f^{-1}$ sont quasi-continues, alors $f$ est un *quasi-homéomorphisme* de $(X, \pi)$ sur $(X', \pi')$.

**Remarques: 1.4.** Si $\pi$ et $\pi'$ sont des pseudo-topologies, une application quasi-continue est une application pseudo-continue au sens de [11]. Si $\pi$ est une pseudo-topologie, une application pseudo-continue peut ne pas être quasi-continue. Si $\pi'$ est une pseudo-topologie, une application quasi-continue peut ne pas être pseudo-continue.

**1.5.** Si $\pi'$ est la quasi-topologie définie par la relation de convergence dans l'espace topologique $X'$, il y a identité entre applications quasi-continues et applications continues pour la topologie sur $X$ associée à la pseudo-topologie sous-jacente à $\pi$.

La classe $P$ (resp. $\bar{P}$) des triplets $((X', \pi'), f, (X, \pi))$, où $f$ est une application quasi-continue de l'espace quasi-topologique (resp. non séparé) $(X, \pi)$ dans l'espace quasi-topologique (resp. non séparé) $(X', \pi')$ est une catégorie [8b] pour la loi de composition:

$$((X'', \pi''), f', (X', \pi'))((X', \pi'), f, (X, \pi)) = ((X'', \pi''), f' \circ f, (X, \pi));$$

le groupoïde des éléments inversibles est la classe des triplets tels que $f$ soit un quasi-homéomorphisme de $(X, \pi)$ sur $(X', \pi')$; la classe de tous les espaces quasi-topologiques (resp. non séparés) est une classe d'objets pour $P$ (resp. $\bar{P}$). Les applications:

$$((X', \pi'), f, (X, \pi)) \to (X', f, X)$$

et

$$((X', \pi'), f, (X, \pi)) \to (\theta_{X'}, f, \theta_X),$$

où $\theta_{X'}$ et $\theta_X$ désignent les topologies associées aux pseudo-topologies sous-jacentes à $\pi$ et à $\pi'$, sont des foncteurs de $P$ (resp. $\bar{P}$) dans la catégorie $\tilde{\mathscr{E}}$ des applications d'un ensemble dans un autre et dans la catégorie $\tilde{\mathscr{T}}$ des applications continues d'un espace topologique dans un autre (voir [8b]). Ces foncteurs définissent $P$ (resp. $\bar{P}$) comme catégorie d'homomorphismes [8b] au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$ et de $\tilde{\mathscr{T}}$ resp.

La catégorie $P$ (resp. $\bar{P}$) est une catégorie avec produits [22], le produit de la famille $((X_i, \pi_i))_{i \in I}$ étant l'espace quasi-topologique $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \pi_i)$, où $\prod_{i \in I} \pi_i$ désigne la relation définie par:

$$\mathscr{H}(\prod_{i \in I} \pi_i)(x_i)_{i \in I} \text{ si et seulement si, } \mathscr{H}_i \pi_i x_i \text{ pour tout } i \in I,$$

$$\mathscr{H}_i \text{ étant la projection de } \mathscr{H} \text{ sur } X_i.$$

**Définition 1.2.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $R$; une quasi-topologie $\pi_E$ sur $E$ sera dite* localement convexe *si les applications*:

$$(v, v') \to v + v' \quad et \quad (t, v) \to tv, \quad où \ v \in E, \ v' \in E \ et \ t \in R,$$

*sont des applications quasi-continues* de $(E \times E, \pi_E \times \pi_E)$ *dans* $(E, \pi_E)$ *et de* $R \times E$ *dans* $(E, \pi_E)$ *resp. et s'il existe une topologie localement convexe sur $E$ pour laquelle tout filtre quasi-convergent converge. On dira que* $\pi_E$ vérifie la condition $(R)$ *si de plus*:
$(R)$ $\mathscr{N} \pi_E 0$ *entraîne* $\tilde{\mathscr{N}} \pi_E 0$ *où* $\tilde{\mathscr{N}}$ *désigne le filtre sur $E$ engendré par les enveloppes équilibrées $\tilde{v}$ des $v \in \mathscr{N}$.*

Soit $\pi_E$ une quasi-topologie localement convexe sur l'espace vectoriel $E$. On a:

$$\mathscr{N} \pi_E v \text{ si, et seulement si, } (\mathscr{N} - v) \pi_E 0,$$

où $\mathscr{N} - v$ désigne le filtre engendré par les ensembles $v - v$, $v \in \mathscr{N}$.

Ainsi $\pi_E$ est déterminée par la donnée des filtres qui quasi-convergent vers 0. Sur $E$, la topologie borne supérieure des topologies localement convexes pour lesquelles tout filtre quasi-convergent est convergent est une topologie localement convexe. Nous appellerons cette topologie la *topologie localement convexe sous-jacente* à $\pi_E$ et la désignerons toujours par le symbole $\tau(\pi_E)$; muni de cette topologie, $E$ sera appelé *espace quasi-localement convexe.*

Un système fondamental de voisinages de 0 pour $\tau(\pi_E)$ est formé des ensembles convexes symétriques absorbants qui appartiennent à tout filtre quasi-convergeant vers 0.

**Proposition 1.1.** *Soit $\pi_E$ une quasi-topologie localement convexe sur l'espace vectoriel $E$; alors $\pi_E$ induit sur tout sous-espace linéaire $V$ de dimension finie la topologie compatible avec la structure vectorielle de $V$.*

**Démonstration.** Soit $x \in V$; la relation $\mathscr{F}(\pi_E/V)x$ entraîne que $\mathscr{F}$ converge vers $x$ pour la topologie induite par $\tau(\pi_E)$. Inversement soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base algébrique de $V$; puisque l'application: $(k_1, \cdots, k_n; x_1, \cdots, x_n) \to \sum_{i \leq n} k_i x_i$, de $R^n \times (E^n, \pi_E^n)$ dans $(E, \pi_E)$ est quasi-continue, le filtre des voisinages de 0 dans $V$, qui est plus fin que le filtre $\sum_{i \leq n} \mathscr{K} e_i^\varepsilon$, où $\mathscr{K}$ est le filtre des voisinages de 0 dans $R$, quasi-converge vers 0 dans $E$.

**Définition 1.3.** *Une quasi-topologie $\pi_E$ sur un espace affine $E$ sera dite* localement convexe *si la quasi-topologie $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ sur l'espace $\vec{E}$ des vecteurs libres de $E$ définie par:*

$$\vec{\mathscr{N}} \vec{\pi}_{\vec{E}} 0 \text{ si, et seulement si, } (x + \vec{\mathscr{N}}) \vec{\pi}_{\vec{E}}\, x,$$

*où $x \in E$, est indépendante de $x$ et localement convexe.*

A la quasi-topologie localement convexe $\pi_E$ sur l'espace affine $E$ correspond la topologie $\tau(\pi_E)$ associée à la topologie $\tau(\vec{\pi}_{\vec{E}})$ sur $\vec{E}$; muni de cette topologie. $E$ est un espace affine localement convexe, que nous appellerons *espace affine quasi-localement convexe.* Dans $E$, on a:

$$\mathscr{X} \pi_E x \text{ si, et seulement si, } (\mathscr{X} - x) \vec{\pi}_E\, 0;$$

l'application: $(x, v) \to x + v$ de $(E \times \vec{E}, \pi_E \times \vec{\pi}_{\vec{E}})$ dans $(E, \pi_E)$ est quasi-continue.

Soient $(E, \pi_E)$ et $(E', \pi_{E'})$ deux espaces affines quasi-localement convexes. Toute application affine quasi-continue de $E$ dans $E'$ est continue pour les topologies $\tau(\pi_E)$ et $\tau(\pi_{E'})$. En particulier, pour qu'une variété affine de codimension 1 soit fermée, il faut et il suffit qu'elle soit pseudo-fermée.

La classe des applications affines quasi-continues d'un espace affine quasi-localement convexe dans un autre est une sous-catégorie de $P$, qui est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de la catégorie des applications affines continues d'un espace affine localement convexe dans un autre. Le produit d'une famille de quasi-topologies localement convexes est une quasi-topologie localement convexe; muni de la topologie localement convexe sous-jacente à la quasi-topologie produit, l'ensemble produit sera appelé *quasi-produit* de la famille; sa topologie est alors plus fine que la topologie produit des topologies sous-jacentes à chacune des quasi-topologies.

Dans la fin de ce paragraphe, nous désignerons par $(X,\pi)$ et $(X',\pi')$ deux espaces quasi-topologiques, par $(E,\pi_E)$ et $(F,\pi_F)$ deux espaces affines quasi-localement convexes, par $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ et $\vec{\pi}_{\vec{F}}$ les quasi-topologies localement convexes correspondant aux quasi-topologies $\pi_E$ et $\pi_F$ sur les espaces des vecteurs libres $\vec{E}$ et $\vec{F}$ (Définition 1.3). Le symbole $\mathscr{C}'(F,X)$ désignera le sous-espace affine de l'espace affine de toutes les applications de $X$ dans $F$ formé des applications quasi-continues de $(X,\pi)$ dans $(F,\pi_F)$; ce sous-espace pourra aussi être noté $\mathscr{C}'((F,\pi_F),(X,\pi))$ quand plusieurs quasi-topologies sont utilisées. L'espace des vecteurs libres de $\mathscr{C}'(F,X)$ s'identifie à $\mathscr{C}'(\vec{F},X)$.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux filtres sur $\mathscr{C}'(F,X)$, $\mathscr{X}$ un filtre sur $X$ et $\mathscr{K}$ un filtre sur $R$. Nous désignerons par $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ le filtre sur $F$ admettant pour base les ensembles $\phi(\xi)=\bigcup_{f'\in\phi} f'(\xi)$, où $\phi\in\mathscr{F}$ et $\xi\in\mathscr{X}$. Le filtre engendré sur $F$ par les ensembles $k\phi(\xi)$, où $k\in\mathscr{K}$ et $\phi\in\mathscr{F}$, sera noté $\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{X})$; le filtre engendré par les ensembles $\phi+\phi'$, où $\phi'\in\mathscr{F}'$, par $\mathscr{F}+\mathscr{F}'$.

Sur $\mathscr{C}'(F,X)$ la relation:

$\mathscr{F}\,\sigma f$ si, et seulement si, on a $\mathscr{F}(x^{\cdot})\pi_F f(x)$ pour tout $x\in X$, est une quasi-topologie localement convexe, appelée *quasi-topologie* de la convergence simple. Muni de cette quasi-topologie, $\mathscr{C}'(F,X)$ sera noté $\mathscr{C}'_\sigma(F,X)$; la topologie $\tau(\sigma)$ correspondante sera appelée *topologie de la convergence simple.* Si $\pi_F=\tau(\pi_F)$, la quasi-topologie $\sigma$ est une topologie.

**Définition 1.4.** *On appellera* quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{C}'(F,X)$ *la quasi-topologie définie par: $\mathscr{F}\lambda f$ si, et seulement si, $\mathscr{X}\pi x$ entraîne $\mathscr{F}(\mathscr{X})\pi_F f(x)$. Muni de cette quasi-topologie, $\mathscr{C}'(F,X)$ sera noté $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$.*

**Proposition 1.2.** *La quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{C}'(F,X)$ est localement convexe.*

**Démonstration.** Puisque $\mathscr{F}\,\lambda f$ entraîne $\mathscr{F}\,\sigma f$, la topologie de la convergence simple est une topologie localement convexe pour laquelle tout filtre quasi-convergeant dans $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ converge. Soit $\vec{f}\in\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F},X)$; si $\mathscr{X}\,\pi\,x$, le filtre $(\mathscr{F}+\vec{f})(\mathscr{X})$ admet pour base les ensembles $\phi(\xi)+\vec{f}(\xi)$, qui forment aussi une base du filtre image de $(\mathscr{F}(\mathscr{X}),\vec{f}(\mathscr{X}))$ par l'application quasi-continue:

$$(y,v)\to y+v, \quad \text{où} \quad y\in F \quad \text{et} \quad v\in\vec{F};$$

par suite on aura $(\mathscr{F}+\vec{f})(\mathscr{X})\,\pi_F(f+\vec{f})(x)$ si $\mathscr{F}\,\lambda f$. Supposons $\vec{\mathscr{F}}\,\lambda\vec{f}$ et $\vec{\mathscr{F}}'\,\lambda\vec{f}'$; le filtre $(\vec{\mathscr{F}}+\vec{\mathscr{F}}')(\mathscr{X})$, admettant pour base l'image par l'application: $(\vec{f},\vec{f}')\to\vec{f}+\vec{f}'$ du filtre quasi-convergent $(\vec{\mathscr{F}},\vec{\mathscr{F}}')$ de $\vec{F}\times\vec{F}$, quasi-converge vers $\vec{f}(x)+\vec{f}'(x)$; de même si $\mathscr{K}$ converge dans $R$ vers $k$, on a $\mathscr{K}\vec{\mathscr{F}}(\mathscr{X})\,\lambda\,k\vec{f}\,(x)$. Donc $\lambda$ est localement convexe.

**Définition 1.5.** *La topologie localement convexe $\tau(\lambda)$ sous-jacente à la quasi-topologie $\lambda$ sur $\mathscr{C}'(F,X)$ sera appelée* topologie de la convergence locale.

**Cas particuliers.** Si $\pi$ et $\pi_F$ sont les relations de convergence définies par des topologies sur $X$ et $F$, les notions de quasi-convergence simple et locale sont définies dans [11]. La relation $\mathscr{F}\,\lambda f$ équivaut alors à la relation: $\mathscr{F}(\mathscr{V}(x))\,\pi_F f(x)$, pour tout $x\in X$, où $\mathscr{V}(x)$ désigne le filtre des voisinages de $x$ dans $X$. On voit aisément que la topologie de la convergence locale est plus fine que la topologie de la convergence compacte et moins fine que la topologie de la convergence uniforme. Si $X$ est localement compact, les topologies de la convergence locale et de la convergence compacte sont identiques.

Le sous-espace de $\mathscr{C}'_\lambda(F,E)$ (resp. de $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F},\vec{E})$) formé des applications quasi-continues affines de $(E,\pi_E)$ dans $(F,\pi_F)$ (resp. linéaires de $(\vec{E},\pi_{\vec{E}})$ dans $(\vec{F},\pi_{\vec{F}})$) est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}'_\lambda(F,E)$ (resp. de $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F},\vec{E})$); muni de la quasi-topologie induite par $\lambda$, nous le noterons $\mathscr{L}'_\lambda(F,E)$ (resp. $\mathscr{L}'_\lambda(\vec{F},\vec{E})$).

**Proposition 1.3.** *Un système fondamental de voisinages de* 0 *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ *est formé des ensembles convexes* $W$ *qui appartiennent à tout filtre qui quasi-converge vers* 0.

**Démonstration.** Soient $\mathscr{W}$ la base de filtre formée des ensembles $W$ et $\mathscr{V}$ le filtre engendré par $\mathscr{W}$. La relation: $\mathscr{F}\lambda 0$ entraîne $(-\mathscr{F})\lambda 0$ et $\tilde{\mathscr{F}}\lambda 0$, où $-\mathscr{F}$ est le filtre ayant pour éléments les ensembles $-\phi$, $\phi\in\mathscr{F}$, et $\tilde{\mathscr{F}}$, le filtre agrégat de $\mathscr{F}$ et de $-\mathscr{F}$; par conséquent $\mathscr{V}$ admet aussi pour base les ensembles $W\in\mathscr{W}$ qui sont symétriques. Montrons que si $W\in\mathscr{W}$, alors $W$ est absorbant. En effet, soient $f\in\mathscr{C}'(\vec{F},X)$ et $\mathscr{K}$ un filtre sur $R$ convergent vers 0. Les applications $f$ et $(k,y)\to ky$, où $k\in R$ et $y\in\vec{F}$, étant quasi-continues, la relation $\mathscr{X}\pi x$ entraîne $\mathscr{K}f^e(\mathscr{X})\pi_F 0$. Par suite $\mathscr{K}f^e\lambda 0$ et $W$ contient un élément $kf^e\in\mathscr{K}f^e$. Donc $W$ est absorbant et $\mathscr{W}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie de la convergence locale.

**Théorème 1.1.** $\lambda$ *est la quasi-topologie la moins fine sur* $\mathscr{C}'(F,X)$ *pour laquelle l'application:* $(x,f)\to f(x)$ *de* $(X\times\mathscr{C}'(F,X),\pi\times\lambda)$ *dans* $(F,\pi_F)$ *soit quasi-continue. De plus l'application:*

$$(g,f)\to g\circ f$$

*de* $\mathscr{C}'_\lambda(G,F)\times\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(G,X)$ *est quasi-continue.*

**Démonstration.** La première partie du théorème résulte des définitions. Les relations $\mathscr{X}\pi x$, $\mathscr{F}\lambda f$ et $\mathscr{G}\lambda g$, où $f\in\mathscr{C}'(F,X)$ et $g\in\mathscr{C}'(G,F)$, entraînent $\mathscr{F}(\mathscr{X})\pi_F f(x)$, donc $\mathscr{G}(\mathscr{F}(\mathscr{X}))$ quasi-converge vers $g\circ f(x)$ et $\mathscr{G}(\mathscr{F})\lambda g\circ f$.

**Corollaire.** *Pour tout* $f\in\mathscr{C}'(F,X)$, *l'application:* $g\to g\circ f$ *de* $\mathscr{C}'_\lambda(G,F)$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(G,X)$ *est continue pour les topologies de la convergence locale. Si* $g\in\mathscr{L}'_\lambda(G,F)$, *l'application:* $f\to g\circ f$ *de* $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(G,X)$ *est continue.*

**Remarque 1.6.** Il ne résulte pas du Théorème 1.1 que l'application $(x,f)\to f(x)$ de $E\times\mathscr{L}'_\lambda(F,E)$ dans $F$ est continue, même si $E$ et $F$ sont munis des quasi-topologies définies par des topologies, car la topologie quasi-produit est généralement plus fine que la topologie produit. En particulier, si $F = R$, il résulte du théorème suivant et de l'exercice 12, page 25, [9d] que si $E$ est métrisable la continuité de cette application entraînerait que $E$ est de dimension finie.

**Théorème 1.2.** *$\mathscr{C}'_\lambda(F, X \times Y)$ est quasi-homéomorphe à $\mathscr{C}'_\lambda(\mathscr{C}'_\lambda(F, Y), X)$.*

**Démonstration.** Soit $T$ une application de $X \times Y$ dans $F$; pour tout $x \in X$, soit $T_x$ l'application: $y \to T(x, y)$ de $Y$ dans $F$; désignons par $\tilde{T}$ l'application: $x \to T_x$ et par $i$ l'application $T \to \tilde{T}$. L'application $T$ est la composée des applications: $(x, y) \to (T_x, y)$ et $(T_x, y) \to T_x(y) = T(x, y)$; si $\tilde{T}$ est une application quasi-continue de $(X, \pi)$ dans $\mathscr{C}'_\lambda((F, \pi_F), (Y, \pi'))$, il en résulte que $T$ est quasi-continue. Soient $\mathscr{X} \pi x$ et $\mathscr{Y} \pi' y$; si $T$ est quasi-continue, $\tilde{T}(\mathscr{X})(\mathscr{Y})$ admettant pour base les ensembles $T(\xi \times \upsilon)$, on a $\tilde{T}(\mathscr{X})(\mathscr{Y})\ \pi_F T(x, y)$ donc $\tilde{T}(\mathscr{X})\, \lambda\, T_x$ et $\tilde{T}$ est quasi-continue de $(X, \pi)$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(F, Y)$. Ceci montre que $i$ est une bijection de $\mathscr{C}'(F, X \times Y)$ sur $\mathscr{C}'(\mathscr{C}'_\lambda(F, Y), X)$. La relation $\mathscr{F}\, \lambda\, T$ entraîne:

$$i(\mathscr{F})(\mathscr{X})(\mathscr{Y})\, \pi_F\, T(x, y), \quad \text{d'où} \quad i(\mathscr{F})(\mathscr{X})\, \lambda\, T_x \quad \text{et} \quad i(\mathscr{F}) \lambda \tilde{T}.$$

Par suite $i$ est quasi-continue. Enfin, si $\tilde{\mathscr{F}}\, \lambda\, \tilde{T}$, on a $\tilde{\mathscr{F}}(\mathscr{X})\, \lambda\, \tilde{T}(\mathscr{X})$ c'est-à-dire $\tilde{\mathscr{F}}(\mathscr{X})(\mathscr{Y})\, \pi_F\, \tilde{T}(x)(y)$, ou encore $i^{-1}(\tilde{\mathscr{F}})\, \lambda\, \tilde{T}$. Ainsi $i$ est un quasi-homéomorphisme.

**Corollaire.** *Si $X$ et $Y$ sont deux espaces topologiques séparés et $F$ un espace affine localement convexe, $\mathscr{C}_\lambda(F, X \times Y)$* et *$\mathscr{C}'_\lambda(\mathscr{C}_\lambda(F, Y), X)$ sont isomorphes pour les topologies de la convergence locale.*

En particulier si $X$ et $Y$ sont localement compacts, ce corollaire signifie que $\mathscr{C}_c(F, X \times Y)$ et $\mathscr{C}_c(\mathscr{C}_c(F, Y), X)$ sont isomorphes (voir [9a]).

**Définition 1.6.** *Soit $(X, \pi_E/X)$ un sous-espace de $(E, \pi_E)$. On appellera* $\pi_E$-filtre de Cauchy *sur $X$ un filtre $\mathscr{F}$ sur $X$ tel que le filtre engendré par $\mathscr{F} - \mathscr{F}$ dans $\vec{E}$ quasi-converge vers 0. Si tout $\pi_E$-filtre de Cauchy quasi-converge dans $(X, \pi_E/X)$, on dira que $X$ est* $\pi_E$-complet

**Exemple 1.1.** Si $\pi_E = \tau(\pi_E)$, un $\pi_E$-filtre de Cauchy sur $E$ est un filtre de Cauchy au sens ordinaire; alors $E$ est $\pi_E$-complet si, et seulement si $E$ est complet. Mais dans le cas général la structure uniforme définie par $\tau(\pi_E)$ peut être complète sans que $E$ soit $\pi_E$-complet et inversement.

Soit $g$ une application affine quasi-continue de $(E, \pi_E)$ dans $(F, \pi_F)$; l'image par $g$ d'un $\pi_E$-filtre de Cauchy sur $E$ est base d'un $\pi_F$-filtre de Cauchy sur $F$. Si $g$ est biunivoque et si $g^{-1}$ est quasi-continue, l'image réciproque par $g$ d'un $\pi_F$-filtre de Cauchy est une base d'un $\pi_E$-filtre de Cauchy sur $E$, si c'est une base de filtre sur $E$. En particulier, si un $\pi_E$-filtre de Cauchy sur $E$ induit un filtre sur un sous-espace $X$, ce filtre est un $\pi_E$-filtre de Cauchy sur $X$. Si $(E, \pi_E)$ est quasi-homéomorphe à $(F, \pi_F)$ et si $E$ est $\pi_E$-complet, alors $F$ est $\pi_F$-complet.

**Proposition 1.4.** *Tout sous-espace pseudo-fermé d'un espace $\pi_E$-complet est $\pi_E$-complet. Le produit d'une famille d'espaces $(\pi_{E_i})$-complets, où $i \in I$, est un espace $\prod_{i \in I} \pi_{E_i}$-complet.*

Démonstration analogue à la proposition correspondante dans les espaces complets.

**Théorème 1.3.** *Si $F$ est un espace affine localement convexe complet alors $\mathscr{C}'_\lambda(F, X)$ est $\lambda$-complet.*

**Démonstration.** Soit $\mathscr{F}$ un $\lambda$-filtre de Cauchy dans $\mathscr{C}'(F, (X, \pi))$ et $\mathscr{X} \pi x$ dans $X$. Le filtre $(\mathscr{F} - \mathscr{F})(\mathscr{X}) = \mathscr{F}(\mathscr{X}) - \mathscr{F}(\mathscr{X})$ quasi-convergeant dans $F$, le filtre $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ est un filtre de Cauchy et converge vers $g_{\mathscr{X}} \in F$. En particulier, $\mathscr{F}(x^e)$ converge vers $g_x$. Par conséquent, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $F$, il existe $\phi \in \mathscr{F}$ et $\xi \in \mathscr{X}$ tels que l'on ait $\phi(\xi) \subset g_{\mathscr{X}} + V/2$ et $\phi(x) \subset g_x + V/2$; soit $f' \in \phi$; puisque $f'$ est quasi-continu, il existe $\xi' \in \mathscr{X}$ tel que $f'(\xi') \subset f'(x) + V/2$, d'où:

$$f'(\xi \cap \xi') \subset g_{\mathscr{X}} + V \text{ et } f'(\xi \cap \xi') \subset g_x + V;$$

ceci entraîne $g_{\mathscr{X}} = g_x$ et $\mathscr{F}$ quasi-converge vers l'application $g\colon x \to g_x$. Soit

$x' \in \xi \cap \xi'$; puisque $\mathscr{F}(x'^{\varepsilon})$ converge vers $g(x')$ il existe $\phi' \in \mathscr{F}$ tel que $(\phi \cap \phi')(x') \subset g(x') + V/2$; par suite:

$$g(x') - g(x) \in (-(\phi \cap \phi')(x') + g(x')) + (\phi \cap \phi')(\xi) - g(x) \subset V$$

et $g(\xi) \subset g(x) + V$. Donc $g$ est quasi-continue et $\mathscr{C}'_\lambda(F, X)$ est $\lambda$-complet.

**Corollaire.** *Si $F$ est un espace affine localement convexe complet, les espaces $\mathscr{C}'_\lambda(\mathscr{C}'_\lambda(F, Y), X)$ et $\mathscr{L}'_\lambda(F, E)$ sont $\lambda$-complets.*

En effet, $\mathscr{C}'_\lambda(F, X \times Y)$ étant $\lambda$-complet, il en est de même pour $\mathscr{C}'_\lambda(\mathscr{C}'_\lambda(F, Y), X)$ qui lui est quasi-homéomorphe. Par ailleurs, $\mathscr{L}'_\lambda(F, E)$ étant pseudo-fermé dans $\mathscr{C}'_\lambda(F, E)$ il est $\lambda$-complet.

**Définition 1.7.** *On dira que $(X, \pi)$ est* $\pi$-compact *si tout ultrafiltre sur $X$ quasi-converge et si tout filtre qui admet un seul point pseudo-adhérent quasi-converge. Un sous-espace $X'$ de $X$ est dit* $\pi$-compact (*resp.* relativement $\pi$-compact) *si $(X', \pi/X')$ (resp. si la pseudo-adhérence de $X'$ dans $X$) est $\pi/X'$-compact.*

Un sous-espace $(X', \pi/X')$ de $(X, \pi)$ est $\pi$-compact si, et seulement si, tout filtre sur $X'$ admet un point pseudo-adhérent et si $\pi/X'$ est une pseudo-topologie.

**Exemples 1.2.** Si $X$ est un espace topologique séparé, il y a identité entre sous-espaces compacts et sous-espaces $\tau$-compacts, où $\tau$ est la topologie de $X$. Si $(E, \pi_E)$ est un espace quasi-localement convexe, un sous-espace $\pi_E$-compact est compact pour la topologie induite par $\tau(\pi_E)$, mais un sous-espace peut être compact pour cette topologie sans être $\pi_E$-compact.

Comme pour les espaces compacts, on démontre aisément les propriétés suivantes:

1) Un sous-espace d'un espace $\pi$-compact est relativement $\pi$-compact.

2) Un sous-espace $\pi/X'$-compact de l'espace quasi-topologique $(X, \pi)$ est pseudo-fermé.

3) Supposons que $X$ est $\pi$-compact et soit $f$ une application quasi-continue de $(X, \pi)$ dans $(X', \pi')$; si $f$ est biunivoque (resp. si $\pi'$ est une topologie,) alors $f(X')$ est $\pi'$-compact (resp. compact).

4) Le produit d'une famille d'espaces $\pi_i$-compacts est un espacc $\prod_{i \in I} \pi_i$-compact.

5) Un espace affine quasi-localement convexe et $\pi_E$-compact est $\pi_E$-complet.

**Remarque 1.7.** L'image d'un espace $\pi$-compact par une application quasi-continue peut ne pas être $\pi'$-compact. Une application biunivoque d'un espace $\pi$-compact sur un espace quasi-topologique peut ne pas être un quasi-homéomorphisme.

**Proposition 1.5.** *Soient $F$ un espace affine localement convexe et $H$ un sous-espace $\lambda$-compact de $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$. Alors les quasi-topologies $\sigma/H$ et $\lambda/H$ sont identiques et on a : $\tau(\lambda/H) = \lambda/H$.*

En effet, $(H, \sigma/H)$ étant $\sigma$-compact, un filtre sur $H$ est quasi-convergent pour $\sigma/H$ et $\lambda/H$ si, et seulement si, tout ultrafiltre plus fin quasi-converge vers un point $f$. Puisque $\sigma/H$ est une topologie, on a aussi $\tau(\lambda/H) = \lambda/H$.

**Définition 1.8.** *Un ensemble $H$ d'applications de $(X, \pi)$ dans $(F, \pi_F)$ est dit* équi-quasicontinu en $x$ *si la relation $\mathscr{X} \pi x$ entraîne $\tilde{H}(\mathscr{X}) \vec{\pi}_F 0$, où $\tilde{H}(\mathscr{X})$ est le filtre admettant pour base les ensembles $\tilde{H}(\xi) = \bigcup_{h \in H} (h(\xi) - h(x))$, $\xi \in \mathscr{X}$. Si $H$ est équi-quasicontinu en tout point $x$ de $X$, on dira que $H$ est* équi-quasicontinu sur $X$.

Cette définition entraîne que tout élément $h$ de $H$ est quasi-continu en $x$.

**Exemples. 1.3.** Si $\pi$ et $\pi_F$ sont des topologies, il y a identité entre ensembles équicontinus et équi-quasicontinus d'applications.

**1.4.** Pour qu'un sous-ensemble de $\mathscr{L}'_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$ soit équi-quasicontinu sur $\vec{E}$, il faut et il suffit qu'il soit équi-quasicontinu en 0.

**Proposition 1.6.** *Soit $H$ un ensemble équi-quasicontinu d'applications de $(X, \pi)$ dans $(F, \pi_F)$; sur $H$ les quasi-topologies $\sigma$ et $\lambda$ induisent la même quasi-topologie et la pseudo-adhérence $\tilde{H}$ de $H$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ est identique à sa pseudo-adhérence dans $\mathscr{C}'_\sigma(F,X)$.*

**Démonstration.** Soit $\mathscr{H}$ un filtre sur $H$ tel que $\mathscr{H}\sigma f$. La relation $\mathscr{X}\pi x$ entraîne $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{X})\pi_F 0$ puisque le filtre $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{X})$ qui a pour base les ensembles $\tilde{\eta}(\xi) = \bigcup_{h'\in\eta} (h'(\xi) - h'(x))$, où $\eta \in \mathscr{H}$ et $\xi \in \mathscr{X}$, est plus fin que le filtre quasi-convergent $\tilde{H}(\mathscr{X})$. Pour tout $\xi \in \mathscr{X}$ et $h' \in \eta$, on a:

$$h'(\xi) - f(x) \subset (h'(\xi) - h'(x)) + (h'(x) - f(x)) \subset \tilde{\eta}(\xi) + \eta(x) - f(x)$$
$$\text{d'où } \eta(\xi) - f(x) \subset \tilde{\eta}(\xi) + \eta(x) - f(x);$$

ceci montre que le filtre $\tilde{\mathscr{H}}(\mathscr{X}) + (\mathscr{H}(x) - f(x))$ est moins fin que $\mathscr{H}(\mathscr{X}) - f(x)$; comme le premier de ces filtres quasi-converge vers 0, on en déduit $\mathscr{H}\lambda f$ et la proposition en résulte.

**Corollaire 1.** *L'application*: $(h,x) \to h(x)$ *de* $(H,\sigma)\times(X,\pi)$ *dans* $(F, \pi_F)$ *est quasi-continue ainsi que l'application*: $(f, h) \to f \circ h$ *de* $\mathscr{C}'_\lambda(G,F)\times(H,\sigma)$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(G,X)$.

**Corollaire 2.** *Sur un ensemble équicontinu d'applications d'un espace topologique séparé dans un espace affine localement convexe, les topologies de la convergence simple et de la convergence locale coïncident.*

**Corollaire 3.** *Un groupe d'automorphismes équicontinu d'un espace localement convexe est une algèbre topologique* (voir définition [9 b]) *pour la topologie de la convergence locale.*

**Proposition 1.7.** *Soit* $H$ *un ensemble d'applications équi-quasi-continu de* $(X,\pi)$ *dans un espace affine localement convexe* $F$; *la pseudo-adhérence* $\bar{H}$ *de* $H$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ *est équi-quasicontinue.*

**Démonstration.** Soit $\mathscr{X}\pi x$; pour tout $\bar{h}\in\bar{H}$, soit $\mathscr{H}$ un filtre admettant une base formée d'ensembles contenus dans $H$ et tel que $\mathscr{H}\lambda\bar{h}$. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\vec{F}$; il existe $\xi\in\mathscr{X}$ tel que $\tilde{H}(\xi)\subset V/3$; soit $x'\in\xi$; il existe $\eta\in\mathscr{H}$ tel que l'on ait: $-\eta(x') + \bar{h}(x') \subset V/3$ et $\eta(x) - \bar{h}(x) \subset V/3$; par suite, si $h\in\eta$, on aura:

$$\bar{h}(x') - \bar{h}(x) = (\bar{h}(x') - h(x')) + (h(x') - h(x)) + h(x) - \bar{h}(x) \in V.$$

il en résulte: $\bar{h}(\xi) - \bar{h}(x) \subset V$ pour tout $\bar{h}\in\bar{H}$, donc $\bar{H}$ est équi-quasicontinu.

**Théorème 1.4.** (*Théorème d'Ascoli généralisé*): *Soit $H$ un ensemble d'applications quasi-continues de $(X,\pi)$ dans l'espace affine localement convexe $F$. Pour que $H$ soit relativement $\lambda$-compact dans $\mathscr{C}'(F,X)$, il faut et il suffit que $H$ soit équi-quasicontinu et que $H(x) = \bigcup_{h\in H} h(x)$ soit relativement compact pour tout $x \in X$.*

**Démonstration.** Supposons que $H$ est relativement $\lambda$-compact; sur la pseudo-adhérence $\bar{H}$ de $H$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ les quasi-topologies de la convergence simple et de la convergence locale sont identiques d'après la Proposition 1.6; par conséquent l'application:

$$(x,h) \to h(x) \text{ de } (X,\pi) \times (\bar{H},\sigma) \text{ dans } F$$

est quasi-continue; il en résulte que $\bar{H}(x)$ est compact dans $F$ pour tout $x \in X$ et que, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$, il existe un voisinage $U'(h)$ de $h \in \bar{H}$ tel que $U'(h)(x) - h(x) \subset V/2$. De plus, si $\mathscr{X} \pi x$, à $V$ correspondent $\xi_h \in \mathscr{X}$ et un voisinage $U''(h)$ tels que $U''(h)(\xi_h) - h(x) \subset V/2$. Comme $\bar{H}$ est compact pour la topologie $\sigma/\bar{H}$, du recouvrement ouvert $(U'(h) \cap U''(h))_{h\in\bar{H}}$ de $\bar{H}$ on peut extraîre un recouvrement fini $(U(h_i))_{i\leq n}$; soit $\xi = \bigcap_{i\leq n} \xi_{h_i}$; pour tout $h' \in U(h_i)$, on aura:

$$h'(\xi) - h'(x) = h'(\xi) - h_i(x) + h_i(x) - h'(x) \subset V,$$

d'où $\bar{H}(\xi) \subset V$; ainsi $\bar{H}$ est équi-quasicontinu. Inversement, soit $H$ équi-quasicontinu; alors l'adhérence $\bar{H}$ de $H$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(F,X)$ est équi-quasicontinu d'après la Proposition 1.7 et sur $\bar{H}$ les quasi-topologies $\bar{H}/\sigma$ et $\bar{H}/\lambda$ sont identiques; l'application: $(x,h) \to h(x)$ étant quasi-continue, l'adhérence de $H(x)$ contient $\bar{H}(x)$ pour tout $x \in X$; on en déduit que $H$ est relativement $\sigma$-compact, donc aussi relativement $\lambda$-compact dans $\mathscr{C}'(F,X)$.

**Corollaire.** *Si $X$ est un espace topologique séparé et $F$ un espace affine localement convexe, pour qu'un ensemble $H$ d'applications de $X$ dans $F$ soit relativement compact dans $\mathscr{C}_\lambda(F,X)$, il faut et il suffit que $H$ soit équicontinu et que $H(x)$ soit relativement compact pour tout $x \in X$.*

En appliquant ce corollaire au cas où $X$ est localement compact, on retrouve le théorème d'Ascoli.

**Remarque 1.8.** Les différents théorèmes que nous venons de démontrer prouvent que les résultats valables dans l'ensemble des applications continues d'un espace localement compact dans un espace uniforme s'étendent au cas général en remplaçant la topologie de la convergence compacte par la quasi-topologie de la convergence locale. Nous montrerons dans un article ultérieur les conséquences de cette constatation dans différentes branches d'Analyse fonctionnelle.

**Définition 1.9.** *On dira qu'un ensemble $C$ de $(\vec{E}, \pi_{\vec{E}})$ est $\pi_{\vec{E}}$-borné si pour tout filtre $\mathscr{K}$ sur $R$ convergeant vers 0, on a: $\mathscr{K}\tilde{C}\pi_{\vec{E}}\, 0$, où $\tilde{C}$ est le filtre formé de tous les ensembles contenant $C$.*

**Exemples 1.5.** Un ensemble $\pi_{\vec{E}}$-borné est $\tau(\pi_{\vec{E}})$-borné. Si $\pi_{\vec{E}} = \tau(\pi_{\vec{E}})$ un ensemble est $\tau(\pi_{\vec{E}})$-borné si, et seulement si, il est borné.

Pour qu'un sous-ensemble $C$ de $\mathscr{C}'_\lambda(F, X)$ soit $\lambda$-borné, il faut et il suffit que, pour tout filtre $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{X}\pi x$, on ait $\mathscr{K}\tilde{C}(\mathscr{X})\ \pi_F\ 0$.

**Proposition 1.8.** *Si $E$ est un espace localement convexe, il y a identité entre ensembles équi-quasicontinus d'applications linéaires de $E$ dans $(\vec{F}, \pi_{\vec{F}})$ et ensembles $\lambda$-bornés de $\mathscr{L}'_\lambda(\vec{F}, E)$.*

**Démonstration.** Soit $\mathscr{K}$ un filtre dans $R$ convergeant vers 0; nous désignerons par $\mathscr{U}$ le filtre des voisinages de 0 dans $E$. Si $H$ est un ensemble équi-quasicontinu d'applications linéaires, on a $\tilde{H}(\mathscr{U})\pi_{\vec{F}}\, 0$, où $\tilde{H}(\mathscr{U})$ est le filtre ayant pour base les éléments $H(U)$, $U \in \mathscr{U}$, d'où $\mathscr{K}\tilde{H}(\mathscr{U})\pi_{\vec{F}}\, 0$; le filtre $\mathscr{K}x^{\varepsilon}$ étant, pour tout $x \in X$, plus fin que $\mathscr{U}$, on a aussi $\tilde{H}(\mathscr{K}x^{\varepsilon})\pi_{\vec{F}}\, 0$, donc $\mathscr{K}\tilde{H}(x + \mathscr{U})\pi_{\vec{F}}\, 0$ et $H$ est $\lambda$-borné. Inversement, supposons $H$ $\lambda$-borné; la relation $kU \in \mathscr{U}$ pour tout $k \in R$ entraîne que $\mathscr{U}$ est plus fin que $\mathscr{K}\mathscr{U}$; par conséquent $\mathscr{K}\tilde{H}(\mathscr{U})\pi_{\vec{F}} 0$ entraîne $\tilde{H}(\mathscr{K}\mathscr{U})\pi_{\vec{F}} 0$ et $\tilde{H}(\mathscr{U})\pi_{\vec{F}} 0$; c'est-à-dire, $\tilde{H}$ est équi-quasicontinu.

**Corollaire.** *Si $E$ et $F$ sont deux espaces localement convexes et si $\mathscr{F}$ est un filtre dans $\mathscr{L}(F, E)$ qui contient un ensemble $\lambda$-borné, les relations $\mathscr{F}\sigma f$ et $\mathscr{F}\lambda f$ sont équivalentes.*

Ce corollaire résulte des Propositions 1.6 et 1.8.

**Compléments.** Les résultats suivants ne seront pas utilisés dans cet article. Soient $E$ un espace localement convexe, $E'$ son dual topologique et $E'_\lambda = \mathscr{C}_\lambda(R, E)$.

**1.1.** Du Théorème 1.2 résulte: *$\mathscr{L}'_\lambda(\mathscr{C}'_\lambda(R, X), E)$ est quasi-isomorphe à $\mathscr{C}'_\lambda(E'_\lambda, X)$.*

**1.2.** *Dans $E'_\lambda$, on a $\mathscr{F}\lambda 0$ si, et seulement si, $\mathscr{F}\sigma 0$ et si $\mathscr{F}$ contient un ensemble équicontinu.* La démonstration utilise le fait que le polaire d'un voisinage de 0 dans $E$ est équicontinu [9a]. Par suite:

**1.3.** *Sur $E'$, la topologie $\tau(\lambda)$ est la topologie localement convexe la plus fine qui induise la topologie de la convergence simple sur tout ensemble équicontinu* (voir [17]).

**1.4.** *Soient $F$ un espace localement convexe et $u \in \mathscr{L}(F, E)$; alors la transposée ${}^t u$ de $u$ appartient à $\mathscr{L}'(F'_\lambda, E'_\lambda)$.*

**Définition 1.10.** *On appelle* algèbre quasi-topologique *une algèbre $B$ munie d'une quasi-topologie localement convexe $\beta$ telle que les applications: $(x, y) \to x.y$ et $x \to x^{-1}$ soient quasi-continues, où $x.y$ désigne le produit des éléments $x$ et $y$ et $x^{-1}$ l'inverse de $x$.*

Si $B$ est une algèbre et $\beta$ une quasi-topologie localement convexe sur $B$ telle que l'application $(x, y) \to x.y$ de $(B, \beta) \times (B, \beta)$ dans $(B, \beta)$ soit quasi-continue, $(B, \beta')$ est une algèbre quasi-topologique, où:

$$\mathscr{X}\beta' x \text{ si, et seulement si, } \mathscr{X}\beta x \text{ et } \mathscr{X}^{-1}\beta x^{-1}.$$

## 2. Applications différentiables dans un espace quasi-topologique.

Soient $(E, \pi_E)$, $(F, \pi_F)$ et $(G, \pi_G)$ trois espaces affines quasi-localement convexes; les espaces des vecteurs libres $\vec{E}$, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont munis des quasi-topologies $\pi_{\vec{E}}$, $\pi_{\vec{F}}$ et $\pi_{\vec{G}}$ resp. (Définition 1.3). La droite numérique $R$ est munie de la quasi-topologie $\rho$ définie par la relation de convergence pour sa topologie d'espace vectoriel. Les conventions sont les mêmes qu'au Paragraphe 1. Soit $X$ un sous-espace de $E$, muni de la quasi-topologie $\pi_E/X$ que nous noterons $\pi$.

Nous supposerons que le sous-espace linéaire engendré par $X - x$ dans $\vec{E}$ est indépendant du point $x$ choisi dans $X$; ce sous-espace sera noté $\vec{X}$ et muni de la quasi-topologie $\vec{\pi}$ induite par $\vec{\pi}_{\vec{E}}$. De plus $X$ est supposé ouvert pour la topologie sous-jacente à la quasi-topologie induite par $\pi_E$ sur $x + \vec{X}$. $\mathscr{X}$, $\mathscr{K}$ et $\mathscr{N}$ désigneront resp. des filtres sur $X$, sur $R$ et sur $\vec{X}$. Soit $f$ une application de $X$ dans $F$.

**Définition 2.1.** *On dira que $f$ est* différentiable *sur une partie $X'$ de $X$ si, pour tout $x \in X'$, il existe une application linéaire quasi-continue $Df(x)$ de $\vec{X}$ dans $\vec{F}$, appelée* différentielle *de $f$ sur $X$ en $x$, vérifiant la condition suivante:*

(D) *Soient $\tilde{X}'$ l'ensemble des triplets $(x,t,v)$, où $x \in X'$, $t \in R$, $v \in \vec{X}$ et $x + tv \in X$, et $\Delta f$ l'application de $\tilde{X}'$ dans $\vec{F}$ définie par:*

$$\begin{cases} \Delta f(x,t,v) = (f(x+tv) - f(x))/t - \langle Df(x), v\rangle & si\ t \neq 0 \\ \Delta f(x,0,v) = 0. \end{cases}$$

*Alors $\Delta f$ est une application quasi-continue de $(\tilde{X}', (\pi \times \rho \times \vec{\pi})/\tilde{X}')$ dans $(\vec{F}, \vec{\pi}_{\vec{F}})$.*

La condition (D) signifie que, si $\mathscr{X}'$ est un filtre sur $X'$ et $\mathscr{X}' + \mathscr{K}\mathscr{N}$ un filtre admettant une base formée d'éléments de $X$, les relations: $\mathscr{X}' \pi x$, $\mathscr{K} \rho t$ et $\mathscr{N} \vec{\pi} v$ entraînent:

$$\Delta f(\mathscr{X}', \mathscr{K}, \mathscr{N})\ \vec{\pi}_{\vec{F}}\ \Delta f(x,t,v),$$

en désignant par $\Delta f(\mathscr{X}', \mathscr{K}, \mathscr{N})$ le filtre ayant pour base les ensembles $\Delta f(\xi' \times \kappa \times v)$, où $\xi' \in \mathscr{X}'$, $\kappa \in \mathscr{K}$, $v \in \mathscr{N}$, $\xi' + \kappa v \subset X$.

D'après le Théorème 1.2, la condition (D) est équivalente à: (D') L'application: $x \to [(t,v) \to \Delta f(x,t,v)]$ est une application quasi-continue de $(X', \pi/X')$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F}, R \times \vec{X})$.

**Exemples: 2.1.** Toute application affine quasi-continue de $(E, \pi_E)$ dans $(F, \pi_F)$ est différentiable sur $E$.

**2.2.** Supposons $\pi_E = \tau(\pi_E)$ et $\pi_F = \tau(\pi_F)$. Une application différentiable sur l'ensemble ayant pour seul élément $x \in X$ est une application différentiable en $x$ (Chapitre I). Si $X$ est une droite de $E$, une application différentiable sur $X$ est une application dérivable dans la direction de $X$.

**2.3.** Si $f$ est différentiable sur $X$, $f$ est aussi différentiable sur $X$ si on munit $F$ de la topologie $\tau(\pi_F)$.

Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où $X$ est un ouvert de la topologie $\tau(\pi_E)$ et où $X' = X$. On aura donc: $\vec{X} = \vec{E}$.

**Théorème 2.1.** *Si $f$ est différentiable sur $X$, alors $f$ est quasi-continue sur $X$ et l'application $D \cdot f$: $(x,v) \to \langle Df(x), v \rangle$ est une application quasi-continue de $(X \times \vec{E}, \pi \times \vec{\pi})$ dans $(\vec{F}, \vec{\pi}_{\vec{F}})$.*

**Démonstration.** Soit $x \in X$; la relation $\mathcal{N} \vec{\pi}_{\vec{F}} 0$ entraîne:

$$\Delta f(x^\varepsilon, 1^\varepsilon, \mathcal{N}) \vec{\pi}_{\vec{F}} 0 \quad \text{et} \quad Df(x)(\mathcal{N}) \vec{\pi}_{\vec{F}} 0$$

d'où $(f(x + \mathcal{N}) - f(x)) \vec{\pi}_{\vec{F}} 0$; donc $f$ est quasi-continue en $x$. Les relations $\mathcal{X} \pi x$ et $\mathcal{N} \vec{\pi} v$ entraînent: $\Delta f(\mathcal{X}, \alpha^\varepsilon, \mathcal{N}) \pi_F \Delta f(x, \alpha, v)$, où $x + \alpha v \in X$ d'après ce qui précède, $\mathcal{X} + \alpha \mathcal{N}$ admettant une base formée d'ensembles de $X$, on a: $f(\mathcal{X} + \alpha \mathcal{N}) \pi_F f(x + \alpha v)$ et $f(\mathcal{X}) \pi_F f(x)$. Par suite $\alpha D \cdot f(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \vec{\pi}_{\vec{F}} \alpha D \cdot f(x,v)$ et $D \cdot f(\mathcal{X}, \mathcal{N}) \vec{\pi}_{\vec{F}} D \cdot f(x,v)$.

**Corollaire 1.** *L'ensemble $\mathcal{D}^1(F,X)$ des applications différentiables de $(X,\pi)$ dans $(F,\pi_F)$ est un espace affine qui est un sous-espace affine de $\mathcal{C}'(F,X)$.*

**Corollaire 2.** *Si $f$ est différentiable sur $X$, l'application:*

$$Df : x \to Df(x) \quad \text{de} \quad (X,\pi) \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}'_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$$

*est quasi-continue.*

**Théorème 2.2.** *La composée de deux applications différentiables est une application différentiable.*

**Démonstration.** Soit $Y$ un ouvert de $\tau(\pi_F)$ muni de la quasi-topologie $\pi'$ induite par $\pi_F$. Supposons $f$ différentiable sur $X$, $f(X) \subset Y$ et soit $g$ une application différentiable sur $Y$, à valeurs dans $(G, \pi_G)$. Montrons que l'application $g \circ f$ est différentiable sur $X$, sa différentielle en $x$ étant l'application $Dg(f(x)) \circ Df(x)$, qui est quasi-continue en vertu des Théorèmes 1.1 et 2.1. On a:

$$f(x + tv) = f(x) + ta(x, t, v),$$

où $a(x, t, v) = \langle Df(x), v \rangle + \Delta f(x, t, v)$, c'est-à-dire $a$ est une application quasi-continue de $\tilde{X}'$ dans $\vec{F}$ d'après le Théorème 2.1. Puisque $f$ est quasi-continue sur $X$ et $g$ différentiable sur $f(X)$, l'application:

$$(x, t, v) \to \langle Dg(f(x)), a(x, t, v) \rangle$$

est une application quasi-continue de $\tilde{X}'$ dans $\vec{G}$. Par suite on a:

$$\Delta g(f(x), t, a(x, t, v)) - (g \circ f(x + tv) - g \circ f(x))/t + \langle Dg(f(x)), \langle Df(x), v \rangle \rangle =$$
$$= - \langle Dg(f(x)), \Delta f(x, t, v) \rangle = b(x, t, v),$$

où $b$ est une application quasi-continue de $\tilde{X}'$ dans $\vec{G}$. Il en résulte:

$$\Delta(g \circ f)(x, t, v) = \Delta g(f(x), t, a(x, t, v)) - b(x, t, v)$$

donc $\Delta(g \circ f)$ est une application quasi-continue de $\tilde{X}'$ dans $\vec{G}$ et $g \circ f$ est différentiable sur $X$.

**Théorème 2.3.** *Soit $(F_i, \pi_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces quasi-localement convexes; pour tout $i \in I$, soit $f_i$ une application de $X$ dans $F_i$ différentiable sur $X$. Alors l'application produit $f = (f_i)_{i \in I}$ de $(X, \pi)$ dans $(\prod_{i \in I} F_i, \prod_{i \in I} \pi_i)$ est différentiable sur $X$.*

Réciproquement, si $f$ est différentiable sur $X$, l'application $f_i = pr_i \circ f$ est différentiable sur $X$ pour tout $i \in I$, où $pr_i$ désigne la projection canonique de $\prod_{i \in I} F_i$ sur $F_i$.

La réciproque résulte du Théorème 2.2. Inversement, $f$ admet pour différentielle en $x$ l'application $(Df_i(x))_{i \in I}$ car la quasi-continuité des applications $\Delta f_i$ pour tout $i \in I$ entraîne la quasi-continuité de l'application $\Delta f$:

$$(x, t, v) \to [(f(x + tv) - f(x))/t - \langle (Df_i(x))_{i \in I}, v \rangle].$$

Ce théorème admet un corollaire analogue à celui du Théorème I.3.3, en remplaçant différentiable en $x$ par différentiable sur $X$ et continu par quasi-continu. Il s'applique à des exemples semblables.

**Théorème 2.4.** *Soit $g$ une application du sous-espace $(Z, \pi_G/Z)$ de $(G, \pi_G)$, où $Z$ est ouvert pour $\tau(\pi_G)$, dans $F$; l'application $f+g:(x,y) \to f(x) + g(y)$ est différentiable sur $X \times Z$ si et seulement si les applications $f$ et $g$ sont différentiables sur $X$ et sur $Z$.*

En effet, si $f$ et $g$ sont différentiables, la différentielle de $f+g$ en $(x, y)$ est l'application $Df(x) + Dg(y)$ puisque l'on a:

$$t\Delta(f+g)((x,y),t,(v,w)) =$$

$$= (f+g)(x+tv, y+tw) - (f+g)(x,y) - t[\langle Df(x)v\rangle + \langle Dg(y), w\rangle]$$

$$= t(\Delta f + \Delta g)((x,t,v),(y,t,w))$$

$$= t\Delta f(x,t,v) + t\Delta g(y,t,w).$$

La réciproque est évidente.

**Théorème 2.5.** *Soit $(B, \beta)$ une algèbre quasi-topologique commutative. Les applications $\gamma:(z,z') \to z \,.\, z'$ de $B \times B$ dans $B$ et $I: z \to z^{-1}$ de $B'$ dans $B$ sont différentiables, $B'$ étant le sous-espace des éléments inversibles de $B$, supposé ouvert dans $\tau(\beta)$.*

**Démonstration.** La différentielle de $\gamma$ en $(z', z)$ est l'application: $(v', v) \to z \cdot v' + z' \cdot v$ car on a:

$$(z' + tv') \cdot (z + tv) - z' \cdot z - t(z \cdot v' + z' \cdot v) = t^2 v' \cdot v$$

et l'application: $(t, v, v') \to tv' \cdot v$ est quasi-continue par définition. Montrons que la différentielle de $I$ en $z \in B'$ est l'application quasi-continue $v \to -z^{-1} \cdot v \cdot z^{-1}$. En effet, on trouve:

$$t\Delta I(z,t,v) = (z+tv)^{-1} - z^{-1} + z^{-1} \cdot tv \cdot z^{-1}$$

$$= z^{-1} \cdot z \cdot (z+tv)^{-1} - z^{-1} \cdot (z+tv) \cdot (z+tv)^{-1} + z^{-1} \cdot tv \cdot z^{-1}$$

$$= -z^{-1} \cdot tv \cdot [(z+tv)^{-1} - z^{-1}].$$

Les applications $\gamma$, $I$ et $(z, t, v) \to z + tv$ étant quasi-continues par définition, l'application $\Delta I$ est aussi quasi-continue et $I$ est différentiable sur $B'$.

**Théorème 2.6.** *Si $\pi_{\vec{E}}$ vérifie la condition* (R) (Définition 1.2) *et si $\pi_F = \tau(\pi_F)$, pour que $f$ soit différentiable sur $X$, il faut et il suffit que $f$ admette une dérivée $\langle Df(x), v\rangle$ dans toute direction en $x \in X$ et que l'application: $x \to Df(x)$ soit une application quasi-continue de $(X, \pi)$ dans $\mathscr{L}'_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$.*

**Démonstration.** Les conditions sont nécessaires d'après le Théorème 2.1. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit $x \in X$ et $v \in \vec{E}$; des définitions résulte que l'application: $t \to f(x + tv) - f(x)$, où $t \in R$ et $x + tv \in X$, est une application vectorielle continuement différentiable à valeurs dans $\vec{F}$, sa dérivée en $t'$ étant $\langle Df(x + t'v), v\rangle$. En utilisant les propriétés des applications vectorielles différentiables, on obtient:

$$f(x + tv) - f(x) = \int_0^t \langle Df(x + t'v), v\rangle dt',$$

où l'intégrale est une intégrale vectorielle faible sur $\vec{F}$. En posant:

$$\begin{cases} \Delta f(x, t, v) = (f(x + tv) - f(x))/t - \langle Df(x), v\rangle & \text{si } t \neq 0 \\ \Delta f(x, 0, v) = 0 \end{cases}$$

on a:

$$\Delta f(x, t, v) = (1/t) \int_0^t \langle Df(x + t'v) - Df(x), v\rangle dt'.$$

Soient $x_0 \in X$, $v_0 \in \vec{E}$ et $x_0 + v_0 \in X$; supposons $\mathscr{X} \pi x_0$, $\mathscr{N} \vec{\pi} 0$; soit $\mathscr{K}$ le filtre des voisinages de 0 dans $R$. Alors le filtre $\mathscr{X} + \mathscr{K}(v_0 + \mathscr{N})$ admet une base formée d'ensembles de l'ouvert $X$ et quasi-converge vers $x_0$. L'application $D \cdot f$: $(x, v) \to \langle Df(x), v\rangle$ étant quasi-continue d'après le Théorème 1.2, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$, il existe $\xi \in \mathscr{X}$, $\kappa \in \mathscr{K}$ et $\nu \in \mathscr{N}$, $\kappa$ convexe $\subset [-1, +1]$ et $\xi + \nu \subset X$ tels que: $D \cdot f((x_0 + \widetilde{(\xi - x_0)}) \times (\xi - x_0)) \subset V$,

$$D \cdot f(\xi \times (v_0 + \nu)) - D \cdot f(x_0, v_0) \subset V/2$$

$$\text{et } D \cdot f((\xi + \kappa(v_0 + \nu)) \times (v_0 + \nu))\,' - Df(x_0, v_0) \subset V/2.$$

En supposant $V$ fermé et en appliquant la Proposition 1, p. 80, [9d], on trouve si $x \in \xi$, $t \in \kappa$ et $v \in v_0 + \nu$:

$$\Delta f(x,t,v) =$$

$$= (1/t) \int_0^t [\langle Df(x + t'v), v\rangle - \langle Df(x_0), v_0\rangle - (\langle Df(x), v\rangle - \langle Df(x_0), v_0\rangle)] \, dt'$$

$$\subset (1/t)(tV) \subset V.$$

Donc $\Delta f(\mathscr{X}, \mathscr{K}, v_0 + \mathscr{N})$ converge vers 0 dans $\vec{F}$; de même $f(x) - f(x_0) \in V$ et $f$ est quasi-continue. Soit $t_0 \in R$; on aura aussi:

$$(1/(t_0 + \mathscr{K}))(f(\mathscr{X} + (t_0 + \mathscr{K})(v_0 + \mathscr{N}))\tau(\pi_F)f(x_0 + t_0 v_0)/t_0$$

et $(1/(t_0 + \mathscr{K}))f(\mathscr{X})\tau(\pi_F)(f(x_0))/t_0$ donc

$$\Delta f(\mathscr{X}, t_0 + \mathscr{K}, v_0 + \mathscr{N})\tau(\pi_{\vec{F}})\Delta f(x_0, t_0, v_0)$$

et $f$ est différentiable sur $X$.

### 3. Applications différentiables dans un espace localement convexe.

Soient $E$ et $F$ deux espaces affines localement convexes, $X$ un ouvert de $E$ et $f$ une application de $X$ dans $F$. Le Théorème 2.6 permet de poser:

**Définition 3.1.** *On dira que $f$ est* différentiable sur $X$ *si $f$ est dérivable pour tout point $x \in A$ et si l'application*

$$D \cdot f : (x, v) \to \langle Df(x), v\rangle,$$

*où $Df(x)$ est la différentielle en $x$, est une application continue de $A \times \vec{E}$ dans $\vec{F}$.*

Du paragraphe 2 résultent:

**Théorème 3.1.** *Si $f$ est différentiable sur $X$, alors $f$ est continue sur $X$, différentiable en tout point de $X$. La composée de deux applications différentiables et le produit d'une famille d'applications différentiables sont des applications différentiables.*

**Théorème 3.2.** *Si $f$ est différentiable sur $X$ et si $K$ est un compact de $X$, l'ensemble des applications $m_x:(t,v)\to\Delta f(x,t,v)$, où $x\in K$, est un ensemble équicontinu.*

En effet, d'après le Théorème 1.2 l'application $m:x\to m_x$ est une application quasi-continue de $X$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F},R\times\vec{E})$; l'image $m(K)$ étant $\lambda$-compact, il résulte du corollaire du Théorème 1.4 que $m(K)$ est un ensemble équicontinu d'applications.

Pour que $f$ soit différentiable sur $X$, il faut et il suffit que $f$ soit dérivable pour tout $x\in X$ et que l'application $Df:x\to Df(x)$ soit une application quasi-continue (et continue) de $X$ dans $\mathscr{L}_\lambda(\vec{F},\vec{E})$. Il semble naturel de chercher si la quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{L}(\vec{F},\vec{E})$ ne peut pas être remplacée par une topologie de $\mathscr{S}$-convergence, où $\mathscr{S}$ est un ensemble de parties bornées de $\vec{E}$ tel que tout point de $\vec{E}$ appartienne à un élément de $\mathscr{S}$ au moins. Aussi poserons-nous:

**Définition 3.2.** *On dit que $f$ est* $\mathscr{S}$-différentiable sur *$X$ si $f$ est différentiable en tout point $x$ de $X$ et si l'application $Df:x\to Df(x)$ de $X$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ est continue pour la topologie de la $\mathscr{S}$-convergence sur $\mathscr{L}(\vec{F},\vec{E})$. L'application $Df$ est appelée* différentielle de $f$ sur $X$.

Si $\mathscr{S}'$ est un ensemble de parties de $\vec{E}$ appartenant à $\mathscr{S}$ et dont la réunion est totale dans $\vec{E}$, alors une application $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ est aussi $\mathscr{S}'$-différentiable sur $X$. Une application $s$-différentiable sur $X$, où $s$ désigne l'ensemble des parties finies de $\vec{E}$, est simplement une application différentiable en tout point de $X$.

La notion d'application $\mathscr{S}$-différentiable a les inconvénients suivants:

1) L'application: $(T,T')\to T\circ T'$ de $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{G},\vec{F})\times\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{G},\vec{E})$ n'est généralement pas continue, sauf par exemple si $\vec{E}$, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des espaces de Banach et $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ les ensembles de tous les bornés de $\vec{E}$ et $\vec{F}$ respectivement. Par suite, dans le cas général, la notion de $\mathscr{S}$-différentiabilité ne se conserve pas par composition, ce qui la rend impropre à l'étude des prolongements des variétés de dimension infinie (Chapitre IV).

2) La seule continuité de l'application $Df$ de $X$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ n'implique pas la continuité de $f$ en $x$ sauf par exemple si $\vec{E}$ est métrisable. La

condition "différentiable en $x$" que nous devons donc introduire pour obtenir des fonctions différentiables assez régulières rend cette définition plus lourde que celle d'applications différentiables.

Nous allons étudier sommairement la notion d'applications $\mathscr{S}$-différentiables dans certains cas particuliers et la comparer avec celle d'applications différentiables.

L'ensemble des applications $\mathscr{S}$-différentiables de $X$ dans $F$ est muni d'une structure d'espace affine; il sera noté $\mathscr{D}^1\mathscr{S}(F,X)$.

**Théorème 3.3.** [1] *Si $\vec{E}$ est normé, alors $f$ est $b$-différentiable sur $X$ si, et seulement si, $f$ est dérivable en tout point $x$ de $X$, l'application $Df: x \to Df(x)$ étant une application continue de $X$ dans $\mathscr{L}_b(\vec{F},\vec{E})$, où $b$ désigne l'ensemble de tous les bornés de $\vec{E}$.*

**Démonstration.** La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$, il existe $k > 0$ tel que l'on ait $\langle Df(x') - Df(x), v\rangle \in V$ pour tout $v \in \vec{E}$ pour lequel $\|v\| < 1$ et pour tout $x'$ tel que $\|x' - x\| < k$. Une démonstration analogue à celle du Théorème 2.6 (utilisation des intégrales vectorielles faibles) prouve que l'on a:

$$f(x+v) - f(x) - \langle Df(x), v\rangle \in \|v\|\, V$$

pour tout $v$ tel que $\|v\| < k$. Donc $f$ est (régulièrement) différentiable en $x \in X$ et $b$-différentiable sur $X$.

**Proposition 3.1.** *Si $f$ est différentiable sur $X$, alors $f$ est $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, si tous les éléments de $\mathscr{S}$ sont supposés compacts.*

En effet, la topologie de la convergence compacte sur $\mathscr{L}(\vec{F},\vec{E})$ est moins fine que la quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{L}(\vec{F},\vec{E})$, donc si $Df$ est une application quasi-continue de $X$ dans $\mathscr{L}_\lambda(\vec{F},\vec{E})$, c'est une application continue de $X$ dans $\mathscr{L}_c(\vec{F},\vec{E})$.

**Corollaire 1.** *Si $E$ est métrisable, $f$ est différentiable sur $X$ si et seulement si $f$ est dérivable en tout point de $X$ et si l'application $Df$ de $X$ dans*

1. Rapprocher des théorèmes de [18].

*$\mathscr{L}_c(\vec{F},\vec{E})$ est continue sur $X$. Il y a alors identité entre applications différentiables et applications c-différentiables sur $X$.*

**Démonstration.** Soient $(x_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ des suites dans $X$ et $\vec{E}$ resp. tendant vers $x \in X$ et $v \in \vec{E}$. La continuité de l'application $Df$ de $X$ dans $\mathscr{L}_c(\vec{F},\vec{E})$ entraîne que pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$ il existe un nombre $m$ tel que, pour tout $n > m$, on ait:

$$D\cdot f(x_n, v_n) - D\cdot f(x, v_n) \in V/2$$

et

$$D\cdot f(x, v_n) - D\cdot f(x, v) \in V/2.$$

Donc $D\cdot f(x_n, v_n)$ tend vers $D\cdot f(x,v)$ lorsque $n$ tend vers l'infini, et, puisque $\vec{E}$ est métrisable, l'application $D\cdot f$ est continue sur $X \times \vec{E}$. Par suite $f$ est différentiable et $c$-différentiable sur $X$.

**Corollaire 2.** *Si $\vec{E}$ est métrisable et tonnelé, $f$ est différentiable sur $X$ si, et seulement si, $f$ est dérivable sur $X$, l'application $Df$ étant continue pour la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{L}(\vec{F},\vec{E})$.*

En effet, l'application $D\cdot f$ étant séparément continue sur $X \times \vec{E}$, elle est continue d'après le Théorème 3, p. 28 [9a].

**Corollaire 3.** *Soient $\vec{E}'_c$ le dual topologique de $\vec{E}$ muni de la topologie de la convergence dans les parties compactes de $\vec{E}$ et $\vec{\varepsilon}$ l'ensemble des parties équicontinues de $\vec{E}$. Si $\vec{E}$ est un espace quasi-complet tel que $(\vec{E}'_c)'_c = \vec{E}$, alors il y a identité entre applications c-différentiables et $\vec{\varepsilon}$-différentiables sur $X$.*

**Démonstration.** L'enveloppe convexe fermée équilibrée d'un compact étant compacte, $\mathscr{L}_c(\vec{F},\vec{E})$ est canoniquement isomorphe à $\vec{E}'_c\,\vec{\varepsilon}\,\vec{F}$ (Corollaire p. 36 [19]). De plus $\vec{E}'_c\,\vec{\varepsilon}\,\vec{F}$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{L}_{\vec{\varepsilon}}(\vec{F},\vec{E})$ (Corollaire 2 p. 34 [19]). Par suite toute application $c$-différentiable sur $X$ est $\vec{\varepsilon}$-différentiable sur $X$ et réciproquement.

**Corollaire 4.** *Si $E$ est métrisable et complet, il y a identité entre applications différentiables et $\vec{\varepsilon}$-différentiables sur $X$.*

Résulte des Corollaires 1 et 3 puisque $\vec{E}$ a alors la topologie de Mackey.

**Corollaire 5.** *Si $\vec{E}$ est un espace quasi-complet et tel que $(\vec{E}'_c)'_c = \vec{E}$ et que $\vec{E}'_c$ soit tonnelé, il y a identité entre applications c-différentiables et b-différentiables sur $X$. En particulier, il en est ainsi si $\vec{E}$ est un espace de Banach réflexif.*

En effet, il y a identité entre parties équicontinues et parties bornées de $\vec{E}$ et le corollaire résulte du Corollaire 3.

**Remarques: 3.1.** Si $\vec{E}$ est un espace de Banach et si $\vec{E}'_c$ est tonnelé, il y a identité entre parties bornées et faiblement compactes de $\vec{E}$, donc $\vec{E}$ est réflexif.

**3.2.** Dans le cas général, une application peut être $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ sans être différentiable sur $X$. Une application différentiable sur $X$ peut ne pas être $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ si $\mathscr{S}$ contient des parties de $E$ non compactes.

**3.3.** Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont normés, une application $b$-différentiable est une application différentiable au sens de Fréchet; on a: $\mathscr{D}^1 b(F, X) \subset \mathscr{D}^1(F, X)$.

**Théorème 3.4.** *La composée d'une application $\mathscr{S}$-différentiable et d'une application différentiable est une application $\mathscr{S}$-différentiable.*

**Démonstration.** Supposons $f$ $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$; soit $g$ une application différentiable d'un ouvert $Y$ de $F$ contenant $f(X)$ dans un espace affine localement convexe $G$. D'après le Théorème 3.2 (Chapitre I) l'application $g \circ f$ est différentiable en tout point de $X$. Montrons que l'application:

$$x \to (v \to \langle Dg(f(x)), \langle Df(x), v \rangle \rangle)$$

de $X$ dans $\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{G}, \vec{E})$ est continue sur $X$. Soient $S \in \mathscr{S}$ et $x \in E$. Pour tout voisinage $W$ de 0 dans $\vec{G}$, il existe deux voisinages $V$ et $V'$ de 0 dans $\vec{F}$ tels que les conditions:

$$f(x') \in f(x) + V \quad \text{et} \quad \langle Df(x'), v' \rangle \in \langle Df(x), v \rangle + V'$$

entraînent:

$$\langle Dg(f(x')), \langle Df(x'), v' \rangle \rangle - \langle Dg(f(x)), \langle Df(x), v \rangle \rangle \in W.$$

On peut associer à $V$ un voisinage $U$ de 0 dans $\vec{E}$ tel que l'on ait: $f(x+U) \subset f(x)+V$. A $V'$ et à $S$ correspond un voisinage $U'$ de 0 dans $\vec{E}$ tel que les relations: $x' \in x+U'$ et $v \in S$ entraînent:

$$\langle Df(x+U), v\rangle \subset \langle Df(x), v\rangle + V'.$$

Il en résulte:

$$\langle [Dg(f(x')) \circ Df(x') - Dg(f(x)) \circ Df(x)], v\rangle \in W$$

pour tout $x' \in x + U \cap U'$ et tout $v \in S$. Donc $g \circ f$ est $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$.

## CHAPITRE III

## ESPACES D'APPLICATIONS $n$ FOIS DIFFÉRENTIABLES

### 1. Différentielles d'ordre supérieur.

Soient $E$ et $F$ deux espaces localement convexes, $f$ une application d'une partie $X$ de $E$ dans $F$. On peut supposer 0 intérieur à $X$ et $f(0)=0$.

**Définition 1.1.** *On dit que le* jet d'ordre $n$ de $f$ est nul en $x$, *et on écrit* $j_0^n f = 0$, *si les conditions suivantes sont vérifiées*:

*Pour toute semi-norme $q$ sur $F$*

1) *et pour toute demi-droite $D$ de $E$, il existe une semi-norme $p$ sur $E$ vérifiant les conditions: Pour tout $a > 0$, il existe un cône $C$ de sommet 0 dont l'intérieur contient $D$ et un voisinage $U$ de 0 dans $E$ tels que l'on ait:*

$$q(f(h)) < a(p(h))^n \quad \textit{pour tout} \quad h \in U \cap C.$$

2) *il existe une semi-norme $p'$ sur $E$ et un voisinage $U'$ de 0 dans $E$ tels que, pour tout $h \in U'$, on ait:*

$$q(f(h)) < (p'(h))^n.$$

La relation: $j_0^n f = 0$ entraîne:

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad j_0^m f = 0$$

pour tout $m \leqq n$. On a $j_0^1 f = 0$ si, et seulement si, $f$ est tangente à 0 en 0.

Une démonstration analogue à celle des Théorèmes 2.1 et 2.2 du Chapitre I prouve:

**Théorème 1.1.** *On a* $j_0^n f = 0$ *si et seulement si l'application* $\delta^n f$ *définie sur l'ensemble* $X'$ *des couples* $(t, v)$, *où* $t \geqq 0$, $v \in E$ *et* $tv \in X$ *par*:

$$\delta^n f(t, v) = f(tv)/t^n \quad si \quad t \neq 0 \quad et \quad \delta^n f(0, v) = 0$$

*est continue sur* $X'$.

**Théorème 1.2.** *Pour que l'on ait* $j_0^n f = 0$, *il faut et il suffit que, pour tout voisinage* $V$ *de* 0 *dans* $F$ *et pour tout* $v \in E$, *il existe deux voisinages* $U$ *et* $U'$ *de* 0 *dans* $E$ *tels que les conditions*:

$$v' \in v + U \quad et \quad tv' \in U'$$

*entraînent*: $f(tv') \in t^n V$.

**Corollaire.** *Si* $j_0^n f = 0$, *pour tout compact* $K$ *de* $E$ *et pour tout voisinage* $V$ *de* 0 *dans* $F$, *il existe une semi-norme* $p$ *sur* $E$ *telle que les conditions*: $v \in K$ *et* $p(tv) < 1$ *entraînent*:

$$f(tv) \in t^n V.$$

**Démonstration.** Soient $U(v)$ et $U'(v)$ les voisinages de 0 dans $E$ correspondant au voisinage $V$ de 0 dans $F$ et à $v \in K$. On peut recouvrir $K$ par un nombre fini de voisinages $U(v_i)$ correspondant aux points $v_i$, où $i \leqq n$. Pour tout $v \in K$, il existe $i$ tel que $v \in v_i + U(v_i)$, donc:

$$f(tv) \in t^n V \quad \text{si} \quad p(tv) < 1,$$

où $p$ est la jauge de l'intersection des $U'(v_i)$, où $i \leqq n$.

**Théorème 1.3.** *Si* $j_0^n f = 0$ *et si* $g$ *est une application lipschitzienne en* 0 *d'un ouvert de* $F$ *dans un espace localement convexe* $G$, *alors on a*: $j_0^n(g \circ f) = 0$.

Démonstration analogue à celle du Théorème 2.3, Chapitre I.

Soient $E$ et $F$ deux espaces affines localement convexes, $\vec{E}$ et $\vec{F}$ les espaces localement convexes des vecteurs libres de $E$ et $F$ resp., $f$ une application d'un ouvert $X$ de $E$ dans $F$ et $x$ un point de $X$.

**Définition 1.2.** *On dit que $f$* est $n$ fois différentiable en $x$ *si $f$ est $(n-1)$ fois différentiable en $x$ et s'il existe une application $D^n f(x)$ multilinéaire symétrique et séparément continue de $\vec{E}^n$ dans $\vec{F}$ telle que le jet d'ordre $n$ en $x$ de l'application*:

$$v \to \Delta^n f(x, v) = f(x + v) - f(x) - \langle Df(x), v \rangle - \cdots - (1/n!) \langle D^n f(x), (v, \cdots, v) \rangle$$

*soit nul. L'application $D^n f(x)$ est appelée* $n$-ième différentielle de $f$ au point $x$.

D'après le corollaire du Théorème 1.2, si $f$ est $n$ fois différentiable en $x$ sa restriction à tout sous-espace de dimension finie est $n$ fois différentiable en $x$ au sens habituel. En particulier, pour tout $n$-uple $(v_1, \cdots, v_n)$ l'application:

$$g:\ (k_1, \cdots, k_n) \to f(x + k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n)$$

est $n$ fois différentiable en $(0, \cdots, 0)$ et on a:

$$\langle D^n f(x), (v_1, \cdots, v_n) \rangle = \frac{\partial^n g(0, \cdots, 0)}{\partial k_1 \cdots \partial k_n}.$$

Il en résulte que l'application $D^n f(x)$ est unique.

Les applications $n$ fois différentiables en $x$ ont des propriétés analogues à celles des applications différentiables en $x$. Nous ne les expliciterons pas ici car les énoncés sont plus compliqués et ne serviront pas dans la suite.

**Remarque: 1.1.** On pourrait encore définir les notions d'applications $n$ fois régulièrement différentiables en $x$ ou $n$ fois uniformément différentiables en $x$.

**Définition 1.3.** *On dit que $f$ admet $\partial^n_{v_1 \cdots v_n} f(x)$* pour dérivée en $x$ relativement au $n$-uple $(v_1, \cdots, v_n)$, *où $v_i \in \vec{E}$ et $v_i \neq 0$ pour tout $i \leqq n$ si la restriction $f/V$ de $f$ à la variété $V$ engendrée par les droites $(x, x + v_i)$ est $n$ fois différentiable en $x$ et si l'on a*:

$$\langle D^n f/V(x), (v_1, v_2, \cdots, v_n) \rangle = \partial^n_{v_1 \cdots v} f(x).$$

Si $f$ est $n$ fois différentiable en $x$, alors $f$ admet une dérivée en $x$ par rapport à tout $n$-uple et est $n$ fois dérivable en $x$, selon la définition suivante:

**Définition 1.4.** *On dit que $f$ est $n$* fois dérivable (*resp.* continuement dérivable) en $x$ *si $f$ est $(n-1)$ fois dérivable (resp. continuement dérivable) en $x$ et si $f$ admet une dérivée en $x$ relativement à tout $n$-uple, l'application:* $D^n f(x)$:

$$\begin{cases} (v_1, \cdots, v_n) \to \partial^n_{v_1 \cdots v_n} f(x) & si \quad v_i \neq 0 \ pour\ tout\ i \leqq n \\ (0, \cdots, v_n) \to 0 & s'il\ existe\ i\ tel\ que\ v_i = 0 \end{cases}$$

*de $\vec{E}^n$ dans $\vec{F}$ étant multilinéaire et séparément continue (resp. continue). Si $f$ est $n$ fois dérivable (resp. continuement dérivable) en tout $x \in X$, $f$ est dit $n$* fois dérivable (*resp.* continuement dérivable) sur $X$.

**Proposition 1.1.** *Si $f$ est $n$ fois (resp. continuement) dérivable sur $X$, ses dérivées relativement à un $m$-uple, où $m < n$, sont $(n - m)$ fois (resp. continuement) dérivables sur $X$.*

**Démonstration.** Supposons la proposition démontrée si $f$ est $(n-1)$ fois (continuement) dérivable sur $X$ et supposons que $f$ est $n$ fois (continuement) dérivable sur $X$. L'application $\partial^m_{v_1 \dots v_m} f$ est $(n-m-1)$ fois (continuement) dérivable sur $X$ et pour tout $(n-m)$-uple on a:

$$\partial^{n-m}_{v_{m+1} \dots v_n}(\partial^m_{v_1 \dots v_m} f(x)) = \partial^n_{v_1 \dots v_n} f(x),$$

donc l'application $D^{n-m}(\partial^m_{v_1 \cdots v_m} f(x))$, restriction de $D^n f(x)$ au sous-espace engendré par $(v_{m+1}, \dots v_n)$ est séparément continue (resp. est continue).

## 2. Applications $n$ fois différentiables sur un ouvert.

Soient $(E, \pi_E)$ et $(F, \pi_F)$ deux espaces affines quasi-localement convexes, $(\vec{E}, \vec{\pi}_{\vec{E}})$ et $(\vec{F}, \vec{\pi}_{\vec{F}})$ les espaces quasi-localement convexes des vecteurs libres correspondants. Nous désignerons par $\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$ l'espace quasi-localement convexe défini par récurrence de la manière suivante:

$\mathscr{L}'^{1}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}) = \mathscr{L}'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E})$ = espace des applications linéaires quasi-continues de $(\vec{E},\pi_{\vec{E}})$ dans $(\vec{F},\pi_{\vec{F}})$ muni de la quasi-topologie de la convergence locale $\lambda$.

$\mathscr{L}'^{m}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}) := \mathscr{L}'_{\lambda}(\mathscr{L}'^{m-1}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}),\vec{E})$.

Soit $L'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^m)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires quasi-continues de $(\vec{E}^m, \pi_{\vec{E}}^m)$ dans $(\vec{F},\pi_{\vec{F}})$, muni de la quasi-topologie $\lambda$ induite par la quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{C}'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^m)$; soit $T \in L'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^m)$. En utilisant le Théorème 1.2 du Chapitre II, on associe à $T$ les applications $T^{(n)}_{v_1\dots v_{m-n}} \in \mathscr{L}'^{n}(\vec{F},\vec{E})$ où $n$ est $\leqq m$, définies par récurrence comme suit:

$$T^{(1)}_{v_1\dots v_{m-1}} \text{ est l'application: } v_m \to T(v_1\cdots,v_m), \text{ où } v_i \in \vec{E},$$

$$T^{(n)}_{v_1\dots v_{m-n}} \quad \text{est l'application:} \quad v_{m-n+1} \to T^{(n-1)}_{v_1\dots v_{m-n+1}} \in \mathscr{L}'^{n-1}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}).$$

L'application $b_m : T \to T^{(m)}$ est un quasi-isomorphisme de $L'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^m)$ sur $\mathscr{L}'^{m}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E})$, pour tout entier $m$. De plus, quels que soient les entiers $n$ et $m$, on a des quasi-isomorphismes canoniques:

$$L'_{\lambda}(L'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^m),\vec{E}^n) \quad \approx \quad L'_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}^{m+n})$$

et

$$\mathscr{L}'^{n}_{\lambda}(\mathscr{L}'^{m}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}) \quad \approx \quad \mathscr{L}'^{n+m}_{\lambda}(\vec{F},\vec{E}).$$

Dans ce paragraphe, les conventions sont les mêmes qu'au §2 du Chapitre II. $(X,\pi)$ est donc un sous-espace de $(E,\pi_E)$, ouvert pour la topologie sous-jacente à la quasi-topologie induite par $\pi_E$ sur le sous-espace affine qu'il engendre dans $E$. Soit $(\vec{X},\vec{\pi})$ le sous-espace de $(\vec{E},\pi_{\vec{E}})$ engendré par $X-x$ dans $\vec{E}$, qui est indépendant de $x \in X$. Soit $f$ une application de $X$ dans $F$.

**Définition 2.1.** *On dira que $f$ est $n$* fois différentiable sur $X$, sa $n$-ième différentielle sur $X$ étant $D^{(n)}f \in \mathscr{L}'^{n}_{\lambda}(\vec{F},\vec{X})$, *si $f$ est $(n-1)$ fois différentiable sur $X$ et si $D^{(n-1)}f$ est une application différentiable de $X$ dans $\mathscr{L}'^{n-1}_{\lambda}(\vec{F},\vec{X})$ de différentielle $D(D^{(n-1)}f) = D^{(n)}f$. L'application $f$ est 1 fois différentiable sur $X$ si et seulement si $f$ est différentiable sur $X$ et on pose $D^{(1)}f = Df$. Si $X' \subset X$ et si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, nous dirons que $f/X'$ est* $n$ fois différentiable sur $X'$.

Pour simplifier nous supposerons désormais que $X$ est ouvert pour $\tau(\pi_E)$, d'où $\vec{X} = \vec{E}$. Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, nous poserons

$$D^m f = (b_m)^{-1} \circ D^{(m)} f \text{ pour tout entier } m \leqq n.$$

**Proposition 2.1.** *Pour que $f$ soit $n$ fois différentiable sur $X$, il faut et il suffit que $f$ soit $(n-1)$ fois différentiable sur $X$ et que l'application $D^{n-1}f$ de $X$ dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$ soit différentiable sur $X$.*

En effet, d'après le Théorème 2.2 du Chapitre II l'application $D^{n-1}f$ est différentiable sur $X$, sa différentielle étant l'application: $v \to b_{n-1}^{-1} \circ (\langle D^{(n)}f, v \rangle)$, c'est-à-dire $D^n f$.

**Corollaire.** *Pour tout entier $m \leqq n$, si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$,*

$$D^m \cdot f : (x, v_1, \cdots, v_m) \to \langle D^m f(x), (v_1, \cdots, v_m) \rangle$$

*est une application quasi-continue de $(X \times \vec{E}^m, \pi \times \vec{\pi}^m)$ dans $(\vec{F}, \pi_{\vec{F}})$.*

**Proposition 2.2.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, les applications $D^{(m)}f$ de $X$ dans $\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$ et $D^m f$ de $X$ dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m)$ sont $(n-m)$ fois différentiables sur $X$, pour tout entier $m < n$, et on a:*

$$D^{(m')}(D^{(m)}f) \approx D^{(m'+m)}f \quad et \quad D^{m'}(D^m f) \approx D^{m'+m}f \quad ,$$

*si $m' + m \leqq n$.*

En effet, supposons la proposition démontrée si $f$ est $(n-1)$ fois différentiable sur $X$; alors $D^{(m)}f$ est $(n-m-1)$ fois différentiable sur $X$, sa $(n-m-1)$-ième différentielle étant $D^{(n-1)}f$. Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, $D^{(n-1)}f$ est différentiable, ce qui prouve la proposition puisque $\mathscr{L}'^{m'}_\lambda(\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F}, \vec{E}), \vec{E}) \approx \mathscr{L}'^{m+m'}_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$, la deuxième partie résultant de la Proposition 2.1.

**Proposition 2.3.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, sa restriction au sous-espace affine $x + V$, où $x \in X$ et $V$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\vec{E}$, est une application $n$ fois continuement dérivable de $X \cap (x + V)$ dans $(F, \tau(\pi_F))$.*

**Démonstration.** Supposons démontré que $T(x) = \langle D^{m-1}f(x), (v_1, \cdots, v_{m-1}) \rangle$ est la dérivée de $f$ par rapport au $(m-1)$-uple $(v_1, \cdots, v_{m-1})$, où $v_i \in V$ et $m < n$. Soit $v_m \in V$; l'application $D^{m-1}f$ étant une application différentiable de $X$ dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^{m-1})$, l'application $\Delta(D^{m-1}f)$ est quasi-continue (Définition 2.1, Chapitre II). Par conséquent l'application:

$$t \rightarrow \langle \Delta(D^{m-1}f)(x, t, v_m), (v_1, \cdots, v_{m-1}) \rangle,$$

qui est quasi-continue de $R$ dans $(\vec{F}, \vec{\pi}_{\vec{F}})$, est une application continue de $R$ dans $\tau(\vec{\pi}_{\vec{F}})$. Donc $T$ admet $\partial_{v_m} T(x) = \langle D^m f(x), (v_1, \cdots, v_{m-1}, v_m) \rangle$ pour dérivée dans la direction de $v_m$. Puisque $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ induit sur $V$ la topologie de l'espace vectoriel de dimension finie $V$, la restriction de $D^m f(x)$ à $V^m$ est une application continue de $V^m$ dans $\tau(\vec{\pi}_{\vec{F}})$, donc $f$ admet $\partial_{v_m} T$ pour dérivée par rapport à $(v_1, \cdots, v_m)$ et la restriction $f/X \cap (x + V)$ est $n$ fois continuement dérivable, la topologie sur $F$ étant $\tau(\pi_F)$.

**Corollaire 1.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, alors les applications $D^m f(x)$ sont des applications multilinéaires symétriques quasi-continues pour tout entier $m \leqq n$ et tout $x \in X$.*

**Corollaire 2.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, ses dérivées par rapport à tout m-uple sont $(n-m)$ fois différentiables sur $X$.*

En effet $D^m f$ étant $(n-m)$ fois différentiable sur $X$, à valeurs dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m)$, cette application est aussi $(n-m)$ fois différentiable si $L'(\vec{F}, \vec{E}^m)$ est muni de la topologie de la convergence simple.

L'ensemble des applications $m$ fois différentiables de $X$ dans $F$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^1(F, E)$ que nous noterons $\mathscr{D}^m(F, E)$.

**Théorème 2.1.** *La composée de deux applications $n$ fois différentiables est une application $n$ fois différentiable.*

**Démonstration.** Soit $f$ une application $n$ fois différentiable sur $X$ et $g$ une application $n$ fois différentiable d'un ouvert $Y$ de $\tau(\pi_F)$, contenant $f(X)$, dans $(G, \pi_G)$. Nous allons montrer par récurrence que $g \circ f$ est $n$ fois différentiable sur $X$ et que l'on a:

$$\langle D^n(g\circ f)(x),(v_1,\cdots,v_n)\rangle =$$

$$\Sigma\langle D^{j_1+\cdots+j_k}g(f(x)),[\langle D^{j_1}f(x),(v_{i_1},\cdots,v_{i_1+j_1-1})\rangle,$$

$$\langle D^{j_2}f(x),(v_{i_2},\cdots,v_{i_2+j_2-1}\rangle,\cdots,\langle D^{j_k}f(x),(v_{i_k},\cdots,v_{i_k+j_k-1})\rangle]\rangle,$$

où $j_m$ varie entre 1 et $n$, chaque terme de la somme correspondant à une permutation $(v_{i_1},\cdots,v_{i_1+j_1-1},\ v_{i_2},\cdots,v_{i_k+j_k-1})$ de $(v_1,\cdots,v_n)$. La formule est vraie pour $n=1$ d'après le Théorème 2.2 Chapitre II. Supposons-la démontrée si $g$ et $f$ sont $(n-1)$ fois différentiables. Les applications $D^{j_m}f$ et $D^{j_1+\cdots+j_k}g(f)$ sont différentiables, si $f$ et $g$ sont $n$ fois différentiables; $D^{n-1}(g\circ f)$ étant somme des composées des applications $D^{j_1+\cdots+j_k}g(f)$ et $(D^{j_m}f)_{m\leqq k}$, qui sont différentiables en vertu du Théorème 2.3 du Chapitre II, il résulte du Théorème 2.2 du Chapitre II que $D^{n-1}(g\circ f)$ est différentiable sur $X$. La formule exacte est conséquence du Corollaire 3.3 du Chapitre I et du Théorème 2.2 du Chapitre II.

**Théorème 2.2.** *Les Théorèmes* 2.3, 2.4 *et* 2.5 *du Chapitre II sont encore vrais en remplaçant différentiable par n fois différentiable dans leurs énoncés.*

Dans la fin de ce paragraphe nous supposerons que $\pi_F=\tau(\pi_F)$.

Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, nous désignerons par $\Delta^n f$ l'application définie sur l'ensemble $\tilde{X}$ des triplets $(x,t,v)$ tels que $x\in X$, $t\in R$, $v\in\vec{E}$ et $x+tv\in X$ par:

$$\begin{cases}\Delta^n f(x,t,v) = (f(x+tv)-f(x))/t^n - \sum\limits_{m\leqq n}(1/m!\,t^{n-m})\langle D^m f(x),(v,\cdots,v)\rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } t\neq 0 \\ \Delta^n f(x,0,v) = 0.\end{cases}$$

**Théorème 2.3.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, l'application $\Delta^m f$ est une application quasi-continue de $(\tilde{X},\pi\times\rho\times\vec{\pi}^m)$ dans $\vec{F}$ pour tout $m\leqq n$.*

**Démonstration.** Le théorème est vrai si $m=1$; supposons démontré que $\Delta^{n-1}f$ est quasi-continue et montrons que $\Delta^n f$ est quasi-continue, ce qui prouvera le théorème par récurrence. La restriction de $f$ à toute droite étant $n$ fois différentiable d'après la Proposition 2.3, on a:

$$\Delta^{n-1}f(x,t,v) = (1/n!) \int_0^t \langle D^n f(x+t'v),(v,\cdots,v)\rangle dt'$$

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x,t,v) &= (1/t)\ \Delta^{n-1}f(x,t,v) - (1/n!)\langle D^n f(x),(v,\cdots,v)\rangle \\ &= (1/n!t) \int_0^t \langle D^n f(x+t'v) - D^n f(x),(v,\cdots,v)\rangle dt',\end{aligned}$$

où les intégrales sont des intégrales vectorielles faibles sur $\vec{F}$. Soient $x_0 \in X$, $v_0 \in \vec{E}$, $x_0 + v_0 \in X$. Désignons par $\mathscr{K}$ le filtre des voisinages de 0 dans $R$. Les conditions $\mathscr{X}\pi x_0$ et $\mathscr{N}\vec{\pi}v_0$ entraînent que le filtre $\mathscr{X} + \mathscr{K}\mathscr{N}$ admet une base formée de parties de $X$. Puisque $D^n\cdot f$ est quasi-continue d'après le corollaire de la Proposition 2.1, pour tout voisinage fermé $V$ de 0 dans $\vec{F}$, il existe $\xi \in \mathscr{X}$, $\kappa \in \mathscr{K}$, $v \in \mathscr{N}$ tels que $\kappa$ soit convexe, que $\xi + \kappa v \subset X$ et:

$$D^n\cdot f((\xi + \kappa v) \times v^n) - D^n\cdot f(x_0, v_0, \cdots, v_0) \subset V/2$$

$$D^n\cdot f(\xi \times v^n) - D^n\cdot f(x_0, v_0, \cdots, v_0) \subset V/2.$$

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du Théorème 2.6 du Chapitre II montre que l'on a: $\Delta^n f(\xi,\kappa,v) \subset V$ et, puisque $\Delta^{n-1}f$ est quasi-continue, que $\Delta^n f$ est quasi-continue.

Comme $\vec{\pi}$ induit sur tout sous-espace $V$ de dimension finie sa topologie d'espace vectoriel, la notion de dérivée d'une application par rapport à un $n$-uple définie au §1 s'étend sans changement au cas où $E$ est un espace affine quasi-localement convexe. On dira que $f$ est *n fois quasi-continuement dérivable sur X* si $f$ est $(n-1)$ fois quasi-continuement dérivable sur $X$ et si, pour tout $x \in X$, $f$ admet une dérivée en $x$ relativement à tout $n$-uple, l'application $D^n f(x)$ définie par:

$$\begin{cases} (v_1, \cdots, v_n) \to \partial_{v_1 \cdots v_n} f(x), & \text{si } v_i \in \vec{E} \text{ et } v_i \neq 0 \text{ pour } i \leqq n \\ (v_1, \cdots, 0, \cdots, v_n) \to 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

étant une application multilinéaire quasi-continue de $(\vec{E}^n, \vec{\pi}^n)$ dans $\vec{F}$. Dans ce cas, nous désignerons encore par $D^n \cdot f$ l'application:

$$(x, v_1, \cdots, v_n) \to \langle D^n f(x), (v_1, \cdots, v_n) \rangle$$

de $(X \times \vec{E}^n, \pi \times \vec{\pi}^n)$ dans $\vec{F}$. La Proposition 1.1 est encore valable en remplaçant continuement par quasi-continuement.

**Théorème 2.4.** *Si $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ vérifie la condition (R), pour que f soit n fois différentiable sur X, il faut et il suffit que f soit n fois quasi-continuement dérivable sur X et que $D^n \cdot f$ soit une application quasi-continue de $(X \times \vec{E}^n, \pi \times \vec{\pi}^n_{\vec{E}})$ dans $\vec{F}$.*

**Démonstration.** Les conditions sont nécessaires d'après les Propositions 2.1 et 2.3. Inversement, supposons que $f$ soit $n$ fois quasi-continuement dérivable sur $X$, l'application $D^n \cdot f$ étant quasi-continue. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ un $n$-uple donné; l'application:

$$t \to \partial^{n-1}_{v_1 \dots v_{n-1}} f(x + tv_n)$$

est continuement dérivable sur l'ensemble des $t \in R$ tels que $x + tv_n \in X$. Par suite, on a:

$$\langle D^{n-1} f(x + tv_n) - D^{n-1} f(x), (v_1, \cdots, v_{n-1}) \rangle = \int_0^t \langle D^n f(x + t'v_n), (v_1, \cdots, v_n) \rangle dt'$$

$$t \Delta D^{n-1} f(x, t, v_1, \cdots, v_n) =$$

$$= \langle D^{n-1} f(x + tv_n) - D^{n-1} f(x), (v_1, \cdots, v_{n-1}) \rangle - t \langle D^n f(x), (v_1, \cdots, v_n) \rangle$$

$$= \int_0^t \langle D^n f(x + t'v_n) - D^n f(x), (v_1, \cdots, v_n) \rangle dt'.$$

Soient $\bar{v}_i \in \vec{E}$, $i \leqq n$, $\mathscr{X} \pi \bar{x}$ et $\mathscr{N} \vec{\pi} 0$ tels que $\bar{x} + \bar{v}_n \in X$. Soit $\mathscr{K}$ le filtre des voisinages de 0 dans $R$; soit $V$ un voisinage fermé de 0 dans $\vec{F}$. En utilisant un raisonnement analogue à celui du Théorème 2.6 du Chapitre II, la quasi-continuité de $D^n \cdot f$ entraîne que $\Delta D^{n-1}f$ est une application quasi-continue en $(\bar{x}, 0, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n)$. De plus il existe $\xi \in \mathscr{X}$ et $v_i \in \mathscr{N}$, où $i < n$, tels que l'on ait:

$$\langle D^{n-1}f(x) - D^{n-1}f(\bar{x}), (v_1 + \bar{v}_1, \cdots, v_{n-1} + \bar{v}_{n-1}) \rangle \in V/2$$

pour tout $x \in \xi$, et tout $v_i \in v_i$. Par ailleurs, $f$ étant $(n-1)$ fois quasi-continuement dérivable, $D^{n-1}f(x)$ est quasi-continue et, pour tout $i \leqq n$, il existe $v_i' \in \mathscr{N}$ tel que l'on ait:

$$\langle D^{n-1}f(\bar{x}), (v_1 + \bar{v}_1, \cdots, v_{n-1} + \bar{v}_{n-1}) \rangle - \langle D^{n-1}f(\bar{x}), (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{n-1}) \rangle \in V/2$$

si $v_i \in v_i \cap v_i'$. De ces relations, on déduit que $D^{n-1} \cdot f$ est quasi-continue sur $X \times \vec{E}^{n-1}$ et que $\Delta D^{n-1}f$ est quasi-continue sur $\tilde{X}'$. Donc $D^{n-1}f$ est une application différentiable de $X$ dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$ et les conditions supposées vérifiées par $f$ pour l'entier $n$ le sont aussi pour l'entier $(n-1)$. Si ces conditions sont vérifiées pour $(n - m)$, le même raisonnement prouve qu'elles sont aussi vérifiées pour l'entier $(n-m-1)$. Une démonstration par récurrence prouve alors que, pour tout $m \leqq n$, $D^m \cdot f$ est quasi-continue et $D^m f$ est une application différentiable de $X$ dans $L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m)$. On en déduit que $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$.

Supposons maintenant que l'on a: $\pi_E = \tau(\pi_E)$ et $\pi_F = \tau(\pi_F)$. Le Théorème 2.4 permet de poser:

**Définition 2.2.** *On dira que $f$ est $n$* fois différentiable *sur $X$ si $f$ est $n$ fois continuement dérivable sur $X$ et si $D^n \cdot f$ est une application continue de $X \times \vec{E}^n$ dans $\vec{F}$.*

C'est le plus souvent sous cette forme qu'il sera facile de vérifier qu'une application est $n$ fois différentiable.

**Théorème 2.5.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, alors $f$ est $n$ fois différentiable en tout point de $X$; si $K$ est un compact de $E$, l'ensemble des applications $m_x : (t, v) \to \Delta^n f(x, t, v)$, où $x \in K$, $t \in R$, $v \in \vec{E}$ et $K + tv \subset X$, est un ensemble équicontinu.*

La première partie résulte du Théorème 2.3; la deuxième se démontre comme le Théorème 3.2 du Chapitre II.

Comme au Chapitre II, nous allons introduire une autre notion de différentiabilité d'ordre $n$, qui sera surtout intéressante dans des cas particuliers. Nous désignerons par $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ des ensembles de parties de $\vec{E}$ dont la réunion est totale dans $\vec{E}$. Pour les notations, voir Chapitre I, §1.

**Définition 2.3.** *On dira que $f$ est $n$* fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ *si $f$ est $(n-1)$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ et si l'application: $x \to D^{(n-1)}f(x)$ de $X$ dans $\mathscr{L}^{n-1}_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ est $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$; on a posé: $D^{(1)}f(x) = Df(x)$; $D^{(n)}f(x) = D(D^{(n-1)}f(x))$.*

L'application $D^{(n)}f(x)$ sera appelée $n$-ième différentielle de $f$ en $x$ et l'application: $D^{(n)}f : x \to D^{(n)}f(x)$, $n$-ième différentielle de $f$ sur $X$. Si $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, alors $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}'$-différentiable sur $X$, si $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$

**Théorème 2.6.** *Pour que $f$ soit $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, il faut et il suffit que $f$ soit $n$ fois dérivable sur $X$ et que, pour tout entier $m < n$, l'application $D^m f$ soit une application $\mathscr{S}$-différentiable de $X$ dans $\tilde{\mathscr{H}}^m_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$.* (Chapitre I, §1).

**Démonstration.** Si $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, alors $f$ est $n$ fois dérivable sur $X$, sa dérivée relativement au $n$-uple $(v_1,\cdots,v_n)$ étant $\langle a_n \circ D^{(n)}f,(v_1,\cdots,v_n)\rangle$. Comme les dérivées relativement à un $m$-uple sont indépendantes de l'ordre de cet $m$-uple, on a: $D^m f = a_m \circ D^{(m)}f \in \tilde{\mathscr{H}}^m_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ et, en vertu du Théorème 3.4 du Chapitre II, $D^m f$ est $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, pour tout $m < n$. Inversement supposons le théorème démontré si $f$ est $(n-1)$ fois dérivable sur $X$ et montrons qu'il est vérifié pour l'entier $n$; l'application $D^{n-1}f$ étant $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, l'application $D^{(n-1)}f = a^{-1}_{n-1} \circ D^{n-1}f$ est une application $\mathscr{S}$-différentiable de $X$ dans $\mathscr{L}^{n-1}_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$, donc $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$.

**Théorème 2.7.** *Si $f$ est $n$ fois dérivable sur $X$ et si l'application $D^m f : x \to D^m f(x)$ est une application continue de $X$ dans $\mathscr{L}^m_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ pour tout entier $m \leqq n$, pour tout $s \in \mathscr{S}$ et tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$, il existe* *un voisinage $U$ de 0 dans $\vec{E}$ tel que les conditions: $v \in s$, $tv \in U$ et $x + tv \in X$ entraînent $\Delta^m f(x,t,v) \in V$.*

($\Delta^m f$ est défini formellement par la même formule que plus haut).

**Démonstration.** La restriction de $f$ à toute droite étant $n$ fois différentiable, on a:

$$\Delta^m f(x,t,v) = (1/m!t) \int_0^t \langle D^m f(x + t'v) - D^m f(x), (v, \cdots, v) \rangle \, dt'.$$

Comme $D^m f$ est continue, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$ et tout $s \in \mathscr{S}$, il existe $U$ tel que les conditions: $v \in s$, $tv \in U$ et $x + tv \in X$ entraînent:

$$\langle D^m f(x + tv) - D^m f(x), (v, \cdots, v) \rangle \in V$$

et par suite $\Delta^m f(x,t,v) \in (1/m!) V$, en utilisant un raisonnement analogue à celui du Théorème 3.3.

**Corollaire.** *Si $\vec{E}$ est normé, si $f$ est $(n-1)$ fois b-différentiable et si l'application $D^{(n-1)}f$ de $X$ dans $\mathscr{L}_b^{n-1}(\vec{F}, \vec{E})$ est dérivable sur $X$, l'application $x \to D(D^{(n-1)}f)(x)$ étant continue dans $\mathscr{L}_b^n(\vec{F}, \vec{E})$, alors $f$ est $n$ fois b-différentiable sur $X$.*

En effet, on appliquant le Théorème 2.7 à un ensemble $s$ borné ouvert, une démonstration analogue à celle du Théorème 3.3 du Chapitre II montre que $D^{(n-1)}f$ est différentiable en tout point de $X$, donc que $f$ est $n$ fois $b$-différentiable sur $X$.

**Proposition 2.4.** *Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, alors $f$ est $n$ fois c-différentiable sur $X$* ($c$ représentant l'ensemble des compacts de $\vec{E}$).

En effet, la quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{L}^m(\vec{F}, \vec{E})$ étant plus fine que la topologie de la convergence compacte, $D^{(m)}f$ est aussi une application différentiable de $X$ dans $\mathscr{L}_c^m(\vec{F}, \vec{E})$.

**Théorème 2.8.** *Si $E$ est métrisable, pour que $f$ soit $n$ fois différentiable sur $X$, il suffit que $f$ soit $(n-1)$ fois différentiable sur $X$ et que l'application $D^{n-1}f$ de $X$ dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$ soit différentiable sur $X$; de plus, il y a identité entre applications $n$ fois différentiables et applications $n$ fois c-différentiables sur $X$.*

**Démonstration.** Si $D^{n-1}f$ est une application différentiable de $X$ dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$, elle est aussi différentiable pour la topologie de la convergence simple sur $L(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$; par suite $f$ admet $\langle D^n f(x), (v_1, \cdots, v_n)\rangle$ pour dérivée relativement au $n$-uple $(v_1, \cdots, v_n)$. Puisque $E$ est métrisable, la continuité de l'application $(x, v_n) \to \partial_{v_n}(D^{n-1}f)(x)$ de $X \times \vec{E}$ dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^{n-1})$ entraîne la continuité de l'application:

$$(x, v_1, \cdots, v_n) \to \langle \partial_{v_n}(D^{n-1}f)(x), (v_1, \cdots, v_{n-1})\rangle,$$

donc $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$. L'application $b_m$ étant un isomorphisme de $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$ sur $\mathscr{L}_c^m(\vec{F}, \vec{E})$ puisque $E$ est métrisable, si $f$ est $n$ fois $c$-différentiable sur $X$, l'application $D^{n-1}f = b_{n-1}^{-1} \circ D^{(n-1)}f$ est $c$-différentiable sur $X$; il résulte alors du Corollaire 1 de la Proposition 3.1 du Chapitre II que $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$.

### 3. Quasi-topologies et topologies sur $\mathscr{D}^n(F, X)$.

Soient $(E, \pi_E)$ et $(F, \pi_F)$ deux espaces affines quasi-localement convexes, $(X, \pi)$ un sous-espace de $(E, \pi_E)$ tel que $X$ soit ouvert pour $\tau(\pi_E)$. Nous désignerons par $\mathscr{D}^n$ l'espace affine $\mathscr{D}^n(F, X)$ des applications $n$ fois différentiables de $X$ dans $F$; l'espace $\vec{\mathscr{D}}^n$ des vecteurs libres de $\mathscr{D}^n$ s'identifie à $\mathscr{D}^n(\vec{F}, X)$. La lettre $\mathscr{F}$ désignera toujours un filtre dans $\mathscr{D}^n$. Les conventions sont les mêmes que précédemment.

Soit $D^0$ l'homomorphisme canonique de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}'(F, X)$; nous poserons: $\mathscr{C}'(F, X) = \mathscr{C}'(\vec{F}, X \times \vec{E}^0)$. Pour tout entier $m \leqq n$, nous désignerons par:

$D^m.$ l'application: $f \to D^m.f$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}'(\vec{F}, X \times \vec{E}^m)$,

$D^m$ l'application: $f \to D^m f$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}'(L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$,

$D^{(m)}$ l'application: $f \to D^{(m)}f$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}'(\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F}, \vec{E}), X)$,

$d_n.$ l'application: $f \to (D^m.f)_{0 \leqq m \leqq n}$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\prod_{m=0}^{n} \mathscr{C}'(\vec{F}, X \times \vec{E}^m)$

$d_n$ l'application: $f \to (D^m f)_{0 \leqq m \leqq n}$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\prod_{m=0}^{n} \mathscr{C}'(L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$

où $D^0 f = D^0.f = f$ et $\mathscr{C}'(L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^0), X) = \mathscr{C}'(F, X)$.

**Définition 3.1.** *On appellera* quasi-topologie de la convergence locale sur $\mathscr{D}^n$ *la quasi-topologie* $\delta_n$ *la moins fine telle que les applications* $D^m$. *soient des applications quasi-continues de* $(\mathscr{D}^m, \delta_m)$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F}, X \times \vec{E}^m)$, *pour tout entier* $m$: $0 \leqq m \leqq n$.

La Définition 3.1 signifie que $\delta_n$ est la quasi-topologie image réciproque par $d_n$. de la quasi-topologie produit $\prod_{m=0}^{n} \mathscr{C}'_\lambda(\vec{F}, X \times \vec{E}^m)$. Par suite $\delta_n$ est une quasi-topologie localement convexe. D'après le Théorème 1.2 du Chapitre II la relation $\mathscr{F}\delta_n f$ est équivalente à chacune des relations suivantes:

1) $D^m.\mathscr{F}\lambda D^m.f$ pour tout $m$: $0 \leqq m \leqq n$;

2) $\mathscr{F}\lambda f$ et $D^m\mathscr{F}\lambda D^m f$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$ si $m \leqq n$;

3) $\mathscr{F}\lambda f$ et $D^{(m)}\mathscr{F}\lambda D^{(m)}f$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F}, \vec{E}), X)$ si $m \leqq n$.

Pour simplifier, nous supposerons désormais: $\pi_E = \tau(\pi_E)$ et $\pi_F = \tau(\pi_F)$. Nous désignerons par $\mathscr{U}$ le filtre des voisinages de 0 dans $\vec{E}$, par $\mathscr{K}$ le filtre des voisinages de 0 dans $R$.

**Théorème 3.1.** *Soit* $\mathscr{F}$ *un filtre sur* $\mathscr{D}^n$ *tel que* $D^n\mathscr{F}\lambda T^n$ *dans* $\mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$ *et* $D^m\mathscr{F}\sigma T^m$ *dans* $\mathscr{C}'_\sigma(L_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$, *où* $\sigma$ *désigne la quasi-topologie de la convergence simple, pour tout* $m$: $0 \leqq m < n$. *Alors on a*: $D^m\mathscr{F}\lambda T^m$ *pour* $0 \leqq m \leqq n$.

**Démonstration.** Soient $x \in X$, $(v_1, \cdots, v_n) \in \vec{E}^n$ et $V$ un voisinage fermé de 0 dans $\vec{F}$. La relation $D^{n-1}\mathscr{F}\sigma T^{n-1}$ signifie qu'il existe $\phi \in \mathscr{F}$ et $U_m \in \mathscr{U}$, $m < n$, tels que l'on ait:

$$D^{n-1}\phi(x)((v_1 + U_1) \times \cdots \times (v_{n-1} + U_{n-1})) - T^{n-1}(x)(v_1, \cdots, v_{n-1}) \subset V/2.$$

Si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, sa dérivée par rapport à un $(n-1)$-uple $(v'_1, \cdots, v'_{n-1})$ est différentiable sur $X$ et on a:

$$\langle D^{n-1}f(x + v'_n) - D^{n-1}f(x), (v'_1, \cdots, v'_{n-1})\rangle = \int_0^1 \langle D^n f(x + tv'_n), (v'_1, \cdots, v'_n)\rangle\, dt.$$

Puisque $D^n \mathscr{F} \lambda T^n$, il existe $\phi' \in \mathscr{F}$, $U_n \in \mathscr{U}$ et $U'_m \in \mathscr{U}$, $m \leqq n$, tels que l'on ait:

$$D^n.\phi'((x + U_n) \times (v_1 + U'_1) \times \cdots \times (v_{n-1} + U'_{n-1}) \times U'_n) \in V/2.$$

En utilisant un raisonnement analogue à celui de Théorème 2.4, on en déduit que les conditions: $f' \in \phi \cap \phi'$, $v'_n \in U_n \cap U'_n$, $v'_m \in v_m + U_m \cap U'_m$ pour tout $m < n$, entraînent:

$$D^{n-1}f'(x + v'_n)(v'_1, \cdots, v'_{n-1}) - T^{n-1}(x)(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in V,$$

c'est-à-dire $D^{n-1}\mathscr{F} \lambda T^{n-1}$. Un raisonnement par récurrence démontre le théorème.

**Corollaire.** *$\delta_n$ est la quasi-topologie image réciproque par $d_n$ de la quasi-topologie produit:*

$$\prod_{m=0}^{n-1} \mathscr{C}'_\sigma(L_\lambda(\vec{\mathrm{F}}, \vec{E}^m), X) \times \mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^n), X).$$

Nous désignerons par:

$\Delta^0$ l'application: $f \to [(x, t, v) \to f(x + tv) - f(x)]$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}(\vec{F}, \tilde{X})$

$\Delta^m$ l'application: $f \to \Delta^m f$ de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}(\vec{F}, \tilde{X})$ pour tout $m \leqq n$

(voir §2 pour la définition de $\tilde{X}$ et de $\Delta^m f$).

**Théorème 3.2.** *Supposons les conditions du Théorème* 3.1 *vérifiées. Alors on a $T^0 \in \mathscr{D}^n$.*

**Démonstration.** Par hypothèse, on a $\Delta^0 \mathscr{F} \lambda \Delta^0 T^0$. Posons:

$$\begin{cases} \Delta^1 T^0(x, t, v) = (T^0(x + tv) - T^0(x))/t - T^1(x)(v) \text{ si } (x, t, v) \in \tilde{X}, t \neq 0, \\ \Delta^1 T^0(x, 0, v) = 0 \quad \text{si} \quad (x, 0, v) \in \tilde{X}. \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'on a: $\Delta^1 \mathscr{F} \lambda \Delta^1 T^0$. Soient $V$ un voisinage de 0 fermé dans $\vec{F}$, $x \in X$ et $v \in \vec{E}$ tels que $x + v \in X$. Si $f$ est différentiable sur $X$, on a:

$$\Delta^1 f(x', t, v') = (1/t) \int_0^t \langle Df(x' + t'v') - Df(x'), v' \rangle \, dt'.$$

La relation $D^1\mathscr{F}\lambda T^1$ signifie qu'il existe $\phi \in \mathscr{F}$, $U \in \mathscr{U}$ et $U' \in \mathscr{U}$ tels que l'on ait:

$$D^1\phi(x + U)(v + U') - T^1(x)(v) \subset V/2.$$

Le raisonnement utilisé dans la démonstration du Théorème 2.4 montre que les conditions: $f \in \phi$, $x' \in x + U/2$, $v' \in v + U'$ et $tv' \in U/2$ entraînent $\Delta^1 f(x', t, v') \in V$. Une démonstration analogue à celle du Théorème 2.2 du Chapitre I prouve que le filtre $\Delta^1\mathscr{F}(x + \mathscr{U}, \mathscr{K}, v + \mathscr{U})$ converge vers 0 dans $\vec{F}$. Soit $t_0 \in R$; la relation $\Delta^0\mathscr{F}\lambda\Delta^0 T^0$ entraîne $\Delta^0\mathscr{F}/(t_0 + \mathscr{K})\lambda\Delta^0 T^0/t_0$; comme:

$$\Delta^1 f(x, t, v) = (1/t)\Delta^0 f(x, t, v) - D.f(x, v),$$

il en résulte: $\Delta^1\mathscr{F}(x + \mathscr{U}, t_0 + \mathscr{K}, v + \mathscr{U})$ converge vers $\Delta^1 T^0(x, t_0, v)$. Donc $\Delta^1\mathscr{F}\lambda\Delta^1 T^0$ et par suite $\Delta^1 T^0$ est continue, c'est-à-dire $T^0$ est différentiable sur $X$. Soit $(v_1, \cdots, v_n) \in \vec{E}^n$; soit $\mathscr{F}_m$ le filtre sur $\mathscr{D}^{n-m}$ formé des ensembles:

$$\phi_m = \bigcup_{f' \in \phi} \{\partial^m_{v_1 \cdots v_m} f'\} \quad \phi \in \mathscr{F}.$$

Des relations: $D^m\mathscr{F}\lambda T^m$ et $D^{m+1}\mathscr{F}\lambda T^{m+1}$, on déduit $\mathscr{F}_m\lambda T'^m$ et $D.\mathscr{F}_m\lambda T'^{m+1}$, où $T'^m$ est l'application: $x \to T^m(x)(v_1, \cdots, v_m)$ et $T'^{m+1}$ l'application: $(x, v) \to T^{m+1}(x)(v_1, \cdots, v_m, v)$. Le début de la démonstration prouve que $T'^m$ est différentiable sur $X$ et admet $T'^{m+1}$ pour différentielle. Un raisonnement par récurrence entraîne que $T^0$ est dérivable par rapport à tout $n$-uple et que $D^n T^0 = T^n$. D'après le Théorème 1.2 du Chapitre II, l'application:

$$(x, v_1, \cdots, v_n) \to T^n(x)(v_1, \cdots, v_n)$$

de $X \times \vec{E}^n$ dans $\vec{F}$ est continue, donc $T^0$ est $n$ fois différentiable sur $X$ et $\mathscr{F}\delta_n T^0$.

**Corollaire.** *$d_n(\mathscr{D}^n)$ est pseudo-fermé dans $\prod_{m=0}^{n} \mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F},\vec{E}^m),X)$ et $\Delta^m$ est une application quasi-continue de $\mathscr{D}^n$ dans $\mathscr{C}_\lambda(\vec{F},\tilde{X})$, pour tout $m \leqq n$.*

Démonstration par récurrence analogue à celle du Théorème 3.2.

**Théorème 3.3.** *Si $F$ est complet, alors $\mathscr{D}^n$ est $\delta_n$-complet.*

**Démonstration.** D'après le Théorème 1.3 du Chapitre II, $\mathscr{C}_\lambda(\vec{F}, X \times \vec{E}^m)$ est $\lambda$-complet, pour tout $m: 0 \leqq m \leqq n$. Si $\mathscr{F}$ est un $\delta_n$-filtre de Cauchy sur $\mathscr{D}^n$, le filtre $D^m.\mathscr{F}$ est un $\lambda$-filtre de Cauchy, donc il existe $S^m \in \mathscr{C}(\vec{F}, X \times \vec{E}^m$ tel que $D^m.\mathscr{F} \lambda S^m$; de plus, pour tout $x \in X$ l'application:

$$T^m(x): (v_1, \cdots, v_m) \to S^m(x, v_1, \cdots, v_m)$$

est multilinéaire; par suite on a $D^m\mathscr{F} \lambda T^m$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F},\vec{E}^m),X)$. Il résulte des Théorèmes 3.1 et 3.2 que $T^0 \in \mathscr{D}^n$ et $\mathscr{F}\delta_n T^0$, donc $\mathscr{D}^n$ est $\delta_n$-complet.

**Théorème 3.4.** *Si $\vec{F}$ est un espace de Montel quasi-complet, alors tout ensemble $\vec{\delta}_n$-borné dans $\vec{\mathscr{D}}^n$ est relativement $\vec{\delta}_{n-1}$-compact dans $\vec{\mathscr{D}}^{n-1}$.*

**Démonstration.** Soit $B$ un ensemble $\vec{\delta}_n$-borné dans $\vec{\mathscr{D}}^n$, $x \in X$ et $(v_1, \cdots, v_n) \in \vec{E}^n$. La relation $\mathscr{K}D^m B \lambda 0$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F},\vec{E}^m),X)$ entraîne que le filtre $\mathscr{K}D^m.B(x,v_1,\cdots,v_m)$ converge dans $\vec{F}$, donc $D^m.B(x,v_1,\cdots,v_m)$ est borné dans $\vec{F}$ et par suite relativement compact. De plus $\mathscr{K}D^m B(x)(v_1 + \mathscr{U}, \cdots, v_m + \mathscr{U})$ converge vers 0 dans $\vec{F}$, c'est-à-dire $D^m B(x)$ est $\lambda$-borné dans $L_\lambda(\vec{F},\vec{E}^m)$ et $D^{(m)}B(x)$ est $\lambda$-borné dans $\mathscr{L}'^m_\lambda(\vec{F},\vec{E})$; de la Proposition 1.8 du Chapitre II résulte que $D^{(m)}B(x)$ est un ensemble équi-quasi-continu; on en déduit que $D^m B(x)$ est un ensemble équicontinu et, en vertu du Théorème II. 1.4, $D^m B(x)$ est relativement $\lambda$-compact. Pour tout $f \in B$, on a:
$\langle D^m f(x + v'_{m+1}) - D^m f(x), (v'_1, \cdots, v'_m)\rangle =$

$$\int_0^1 \langle D^{m+1} f(x + t'v'_{m+1}), (v'_1, \cdots, v'_{m+1})\rangle \, dt', \quad \text{si } m < n.$$

Soit $V$ un voisinage de 0 fermé dans $\vec{F}$. Puisque $\mathscr{K}D^{m+1}.B$ converge vers 0, il existe $\kappa \in \mathscr{K}$, $U \in \mathscr{U}$ et $U'_i \in \mathscr{U}$, $i \leqq m$, $\kappa$ convexe tels que:

$$D^{m+1}.B((x+U)\times(v_1+U_1)\times\cdots\times(v_m+U_m)\times\kappa U)\subset V$$

d'où: $$\langle D^m f(x+v'_{m+1})-D^m f(x),\ (v'_1,\cdots,v'_m)\rangle\in V$$

si $f\in B$, $v'_{m+1}\in\kappa U\cap U$ et $v'_i\in v_i+U_i$ pour tout $i\leqq m$, en utilisant le raisonnement du Théorème 2.4. Ceci prouve que l'ensemble des applications $D^m f$, où $f\in B$, est équi-quasicontinu; du Théorème 1.4, Ch. I on déduit alors que $D^m B$ est un ensemble relativement $\lambda$-compact, pour tout entier $m<n$. Il en résulte que $d_{n-1}(B)$ est relativement $\vec{\delta}_{n-1}$-compact et, $d_{n-1}(\vec{\mathscr{D}}^{n-1})$ étant pseudo-fermé dans $\prod_{m=0}^{n-1}\mathscr{C}'_\lambda(L_\lambda(\vec{F},\vec{E}^n),X)$ d'après le corollaire du Théorème 3.2, $B$ est relativement $\vec{\delta}_{n-1}$-compact dans $\vec{\mathscr{D}}^{n-1}$.

Soit $\mathscr{D}^n\mathscr{S}$ l'espace affine des applications $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiables de $X$ dans $F$. Les lettres $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}'_m$, où $m\leqq n$, désigneront des ensembles de parties bornées de $\vec{E}$ tels que tout point de $\vec{E}$ appartienne à au moins une de ces parties. Nous supposerons que $\mathscr{S}'\subset\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'_m\subset c$, où $c$ désigne l'ensemble de tous les compacts de $\vec{E}$. Soit $d^{\mathscr{S}'}_{(n)}$ l'application:

$$f\to(D^{(m)}f)_{0\leqq m\leqq n}\ \text{de}\ \mathscr{D}^n\mathscr{S}\ \text{dans}\ \mathscr{C}(F,X)\times\prod_{m=1}^{n}\mathscr{C}(\mathscr{L}^m_{\mathscr{S}'}(\vec{F},\vec{E}),X).$$

**Définition 3.2.** *On appellera* topologie de la $(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}'$ convergence sur $\mathscr{D}^n\mathscr{S}$ *la topologie* $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ *image réciproque par* $d^{\mathscr{S}'}_{(n)}$ *de la topologie*:

$$\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_0}(F,X)\times\prod_{m=1}^{n}\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_m}(\mathscr{L}^m_{\mathscr{S}'}(\vec{F},\vec{E}),X).$$

Muni de $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$, $\mathscr{D}^n\mathscr{S}$ sera noté $\mathscr{D}^n\mathscr{S}_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}'}$. Si $\mathscr{S}=\mathscr{S}'_m=c$ pour tout $m\leqq n$, nous écrirons: $\mathscr{D}^n c_{(c)-c}=\mathscr{D}^n c$. La topologie $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ est compatible avec la structure affine de $\mathscr{D}^n\mathscr{S}$, séparée et localement convexe. Nous désignerons par $\vec{\tau}((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ la topologie correspondante sur l'espace $\vec{\mathscr{D}}^n\mathscr{S}$ des vecteurs libres de $\mathscr{D}^n\mathscr{S}$. Un système fondamental de voisinages de 0 pour $\vec{\tau}((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ est obtenu de la façon suivante: Soient $s_m\in\mathscr{S}'$, où $m\leqq n$ et $s'_m\in\mathscr{S}'_m$; soit $V$ un voisinage de 0 dans $\vec{F}$. Alors l'ensemble $U(s_m,s'_m,V)$ des applications $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiables $f$ de $X$ dans $\vec{F}$ telles que:

$$f(s'_0) \subset V, \quad D^m f(s'_m)(s_1 \times \cdots \times s_m) \subset V \quad \text{si } m \leqq n,$$

est un voisinage de 0 pour $\tau((\mathscr{S}'_m), \mathscr{S}')$.

**Définition 3.3.** *On dira qu'un ensemble de parties $\mathscr{S}$ de $\vec{E}$ vérifie* la condition $(P)$ *si toute application de $\vec{E}$ dans un espace affine localement convexe $G$ est continue si sa restriction à tout ensemble $s \in \mathscr{S}$ est continue.*

**Exemple.** Si $\vec{E}$ est métrisable, $c$ vérifie la condition $(P)$. $\mathscr{S}^m$ désignera l'ensemble des parties de $\vec{E}^m$ de la forme $\prod_{i \leqq m} S_i$, où $S_i \in \mathscr{S}$.

**Théorème 3.5.** *Supposons que $\mathscr{S}^m$ vérifie la condition $(P)$ dans $\vec{E}^m$ pour tout $m \leqq n$. Alors $\mathscr{D}^n \mathscr{S} \subset \mathscr{D}^n$ et $\tau((\mathscr{S}'_m), \mathscr{S})$ est la topologie image réciproque par l'application:*

$$d_n^{\mathscr{S}} : f \to (D^m f)_{0 \leqq m \leqq n}$$

*de la topologie de l'espace* $\Gamma_n = \prod_{m=0}^{n} \mathscr{C}_{\mathscr{S}'_m}(L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$. *Si de plus* $\mathscr{S} = \mathscr{S}'_m = c$, *alors* $\mathscr{D}^n c = \mathscr{D}^n$ et $d_n^c(\mathscr{D}^n)$ *est fermé dans* $\Gamma_n$.

**Démonstration.** Si $T$ est une application continue de $X$ (resp. $\vec{E}$) dans $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$, la restriction de l'application:

$$\tilde{T} : (x, v_1, \cdots, v_m) \to T(x)(v_1, \cdots, v_m)$$

à tout ensemble de $\mathscr{S} \times \mathscr{S}^m$ est continue, donc $\tilde{T}$ est continue d'après la condition $(P)$. Par suite l'application canonique $b_m$ (Ch. I, §1) est un isomorphisme de $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$ sur $\mathscr{L}^m_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E})$ pour tout $m \leqq n$ et, si $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, alors $D^m f$ est une application $(n-m)$ fois $\mathscr{S}$-différentiable de $X$ dans $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$ et $D^n.f$ est continue, par conséquent $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$. Supposons $\mathscr{S} = \mathscr{S}'_m = c$. Si $g$ est adhérent à $L(\vec{F}, \vec{E}^m)$ dans l'ensemble de toutes les applications de $\vec{E}^m$ dans $\vec{F}$ muni de la topologie de la $c$-convergence, alors la restriction de $g$ à tout compact de $\vec{E}^m$ est continue et la condition $(P)$ entraîne que $g \in L(\vec{F}, \vec{E}^m)$. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur

$\mathscr{D}^1$ et $(T^0, T^1) \in \Gamma_1$ un point adhérent à $d_1^c(\mathscr{F})$. Soit $x \in E$, $v \in \vec{E}$ et $k \in R$ tels que $x + tv \in X$ pour tout $|t| \leqq k$. Pour tout $\phi \in \mathscr{F}$, soit $\phi'$ l'ensemble des applications: $t \to f(x + tv)$, où $|t| \leqq k$; le filtre $\mathscr{F}'$ ayant les $\phi'$ pour éléments converge vers $T'^0 : t \to T^0(x + tv)$ dans $\mathscr{C}_c(\vec{F}, [-k, +k])$ et $D^1\mathscr{F}'$ converge vers $T'^1 : t \to (t' \to T^1(x + tv)(t'v))$ dans $\mathscr{C}_c(L_c(\vec{F}, \vec{R}), [-k, +k])$. On en duit que $T'^0$ est différentiable et admet $T'^1$ pour différentielle en 0. Un raisonnement par récurrence analogue à celui utilisé au Théorème 3.2 montre que si $\mathscr{F}$ est un filtre sur $\mathscr{D}^n$ tel que $d_n^c(\mathscr{F})$ converge vers $(T^0, \cdots, T^n) \in \Gamma_n$, alors $T^0$ est dérivable par rapport à tout $n$-uple. D'après le début de la démonstration, il en résulte $T^n \in L(\vec{F}, \vec{E})$ et $\tilde{T}^n$ est continue. Donc $T^0 \in \mathscr{D}^n c$, ce qui prouve le théorème.

**Théorème 3.6.** *Supposons que $c$ vérifie la condition $(P)$ dans $\vec{E}$. Alors si $F$ est complet, $\mathscr{D}^n c$ est complet. Si $\vec{E}$ est tonnelé et $\vec{F}$ quasi-complet, $\vec{\mathscr{D}}^n c$ est quasi-complet.*

**Démonstration.** Puisque $c$ vérifie la condition $(P)$ dans $\vec{E}$, l'ensemble $c$ des compacts de $\vec{E}^m$ vérifie aussi la condition $(P)$ dans $\vec{E}^m$. Soit $\mathscr{F}$ un filtre de Cauchy dans $\mathscr{D}^n c$; les filtres $D^m\mathscr{F}$ et $D^{(m)}\mathscr{F}$ sont des filtres de Cauchy dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$ et $\mathscr{L}_c^m(\vec{F}, \vec{E})$ resp., pour tout $m \leqq n$. Puisque $L(\vec{F}, \vec{E}^m)$ est fermé dans l'ensemble de toutes les applications de $\vec{E}^m$ dans $\vec{F}$ muni de la topologie de la convergence compacte (voir Théorème 3.5), si $F$ est complet, $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$ est complet et $D^m\mathscr{F}$ converge vers $T^m \in L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$; il résulte du Théorème 3.5 que $T^0 \in \mathscr{D}^n$ et $\mathscr{F}$ converge vers $T^0$ dans $\mathscr{D}^n c$. Supposons $\vec{E}$ tonnelé et $\vec{F}$ quasi-complet. Soit $B$ un ensemble borné et fermé dans $\vec{\mathscr{D}}^n c$; pour tout $s'_m \in c$, il existe des bornés $M_m \subset \mathscr{L}_c^m(\vec{F}, \vec{E})$ tels que:

$$B(s'_0) \subset M_0 \quad \text{et} \quad D^{(m)}B(s'_m) \subset M_m$$

pour tout $m \leqq n$.

Soit $\mathscr{F}$ un filtre de Cauchy sur $B$. Comme $\vec{E}$, et par suite $\vec{E}^m$, est tonnelé, $\mathscr{L}_c^m(\vec{F}, \vec{E})$ et $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$ sont quasi-complets (Corollaire 2 page 31 [9b]). Le filtre $D^{(m)}\mathscr{F}/s'_m$ ayant pour base les ensembles $D^{(m)}\phi/s'_m$ formés des restrictions à $s'_m \in c$ des applications $D^{(m)}f$, où $f \in \phi$, est un filtre de Cauchy dans

$\mathscr{C}(\bar{M}_m, s'_m)$, où $\bar{M}_m$ est l'adhérence de $M_m$ dans $\mathscr{L}_c(\vec{F}, \vec{E})$. Puisque $\bar{M}_m$ est complet par hypothèse, $D^{(m)}\mathscr{F}/s'_m$ converge vers $T^{(m)}/s'_m$. L'application $T^{(m)}$, dont la restriction $T^{(m)}/s'_m$ à $s'_m$ appartient à $\mathscr{C}(\mathscr{L}^m_c(\vec{F}, \vec{E}), s'_m)$ pour tout compact $s'_m$, est continue sur $X$. Il résulte du Théorème 3.5 que $T^0 \in \mathscr{D}^n$ et que $\mathscr{F}$ converge vers $T^0$ dans $\mathscr{D}^n c$.

**Corollaire 1.** *Si $c$ vérifie la condition $(P)$, si $\vec{E}$ est bornologique et si $\vec{F}$ est quasi-complet, alors $\vec{\mathscr{D}}^n c$ est quasi-complet.*

En effet, un produit dénombrable d'espaces bornologiques est bornologique et par suite $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$ est complet si $\vec{F}$ est complet, quasi-complet si $\vec{F}$ est quasi-complet d'après l'exercice 18 page 37 [9b]. La démonstration du théorème prouve alors le corollaire.

**Corollaire 2.** *Si $E$ est métrisable et $\vec{F}$ complet (resp. quasi-complet) alors $\vec{\mathscr{D}}^n c$ est complet (resp. quasi-complet).*

En effet, $\vec{E}$ est bornologique et $c$ vérifie la condition $(P)$.

Si $\mathscr{S} \subset c$, on a $\mathscr{D}^n \subset \mathscr{D}^n \mathscr{S}$; la topologie induite par $\tau((\mathscr{S}'_m), \mathscr{S})$ sur $\mathscr{D}^n$ sera appelée *topologie de la* $(\mathscr{S}'_m)_-\mathscr{S}$ *convergence* sur $\mathscr{D}^n$. Muni de cette topologie, $\mathscr{D}^n$ sera noté $\mathscr{D}^n_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$. La topologie localement convexe $\tau(\delta_n)$ sous-jacente à la quasi-topologie $\delta_n$ sera appelée *topologie de la convergence locale* sur $\mathscr{D}^n$. Pratiquement, nous utiliserons toujours la quasi-topologie $\delta_n$, qui définit sur $\mathscr{D}^n$ une structure plus fine, sauf dans le cas d'espaces particuliers, où la topologie de la $(\mathscr{S}'_m)$-$\mathscr{S}$ convergence peut être intéressante.

**Théorème 3.7.** *Si $\vec{E}$ est un espace tonnelé et quasi-complet et $\vec{F}$ un espace de Montel, si $\mathscr{S} \subset c$ et $\mathscr{S}'_m \subset \mathscr{S}'_{m+1}$ pour tout $m < n$, alors tout borné dans $\vec{\mathscr{D}}^n_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$ est précompact dans $\vec{\mathscr{D}}^{n-1}_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$.*

**Démonstration.** Soit $B$ un borné dans $\vec{\mathscr{D}}^n_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$. Pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$ et pour toute famille $(s_m, s'_m)_{m \leqq n}$, où $s_m \in \mathscr{S}$ et $s'_m \in \mathscr{S}'_m$, il existe $k > 0$ tel que:

$$B(s'_0) \subset kV \quad \text{et} \quad D^m . B(s_m \times s_1 \times \cdots \times s_m) \subset kV, \qquad \text{si } m \leqq n.$$

Soit $B_m$ l'ensemble des applications $D^m f$ de $X$ dans $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$, où $f \in B$. Il suffit de prouver que, pour tout $m \leqq n$, l'ensemble $B^m$ est précompact dans $\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_m}(L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$. Pour tout $S'_m \in \mathscr{S}'_m$ et tout $m$-uple $(v_1, \cdots, v_m)$ l'ensemble des éléments:

$$\langle D^m f(x),\ (v_1, \cdots, v_m)\rangle,$$

où $x \in S'_m$ et $f \in B$, est borné dans $\vec{F}$ et par suite relativement compact. Donc l'ensemble $B_m(S'_m)$ des applications $D^m f(x)$, où $f \in B$ et $x \in S'_m$, est simplement borné dans $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$. L'espace $\vec{E}^m$ étant tonnelé, le théorème de Banach-Steinhaus prouve que l'ensemble $B_m(S'_m)$ est précompact. Montrons que les restrictions des applications de $B_m$ à un ensemble $S'_m \in \mathscr{S}'_m$ forment un ensemble équicontinu. En effet, on a:

$$\langle D^m f(x + v_{m+1}) - D^m f(x),\ (v_1, \cdots, v_m)\rangle$$

$$= \int_0^1 \langle D^{m+1} f(x + t' v_{m+1}),\ (v_1, \cdots, v_{m+1})\rangle\, dt',$$

où l'intégrale est une intégrale vectorielle faible sur $\vec{F}$, en appliquant la méthode déjà utilisée. Nous pouvons supposer $S'_m$ convexe car, $\vec{E}$ étant quasi-complet, l'enveloppe convexe d'un compact est relativement compacte. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\vec{F}$ et soit $(S_j)_{j \leqq m}$ une famille d'éléments de $\mathscr{S}$. D'après ce qui précède, il existe des voisinages $U_j$ de 0 dans $\vec{E}$, où $j \leqq m$, tels que les conditions:

$$f \in B, \quad v_j \in U_j \quad \text{pour tout } j \leqq m+1 \text{ et } x + t' v_{m+1} \in S'_m$$

entraînent:

$$\langle D^{m+1} f(x + t' v_{m+1}),\ (v_1, \cdots, v_{m+1})\rangle \in V.$$

Comme $S_j$ est compact pour tout $j \leqq m$, il existe des nombres $k'_j > 0$ tels que l'on ait:

$$k'_j S_j \subset U_j \quad \text{pour tout} \quad j \leqq m.$$

Il en résulte que, si $v_j \in S_j$ pour tout $j \leqq m$, si $v_{m+1} \in U_{m+1}/k'$, où $k' = k'_1 \cdots k'_m$, et si $x + t'v_{m+1} \in S'_m$, on a:

$$\langle D^{m+1}f(x + t'v_{m+1}), (v_1, \cdots, v_{m+1}) \rangle$$
$$= \langle D^{m+1}f(x + t'v_{m+1}), (v_1/k'_1, \cdots, v_m/k'_m, k'v_{m+1}) \rangle \in V.$$

On en déduit que, sous les mêmes conditions, on a:

$$\langle D^m f(x + v_{m+1}) - D^m f(x), (v_1, \cdots, v_m) \rangle \in V.$$

Ceci prouve que, pour tout $S'_m \in \mathscr{S}'$ et tout $m \leqq n$, les restrictions à $S'_m$ des applications de $B_m$ forment un ensemble équicontinu. Le théorème d'Ascoli démontre alors que $B_m$ est précompact dans

$$\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_m}(L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m), X) \quad \text{pour tout} \quad m \leqq n,$$

et par suite $B$ est précompact dans $\mathscr{D}^{n-1}_{(\mathscr{S}'_i)-\mathscr{S}}$.

Rappelons [13a] qu'un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ est un espace localement convexe $\vec{E}$ satisfaisant aux propriétés suivantes:

1) $\vec{E}$ admet une suite fondamentale de parties bornées.

2) Si $(U_i)_{i \in N}$ est une suite de voisinages de 0 dans $\vec{E}$ qui sont fermés et dont l'intersection est un ensemble absorbant $U$, alors $U$ est un voisinage de 0 dans $\vec{E}$.

En particulier, un espace normé et le dual fort d'un espace métrisable sont des espaces $(\mathscr{D}\mathscr{F})$. On voit facilement qu'un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ possède les propriétés suivantes:

1) Pour qu'une application linéaire de $\vec{E}$ dans un espace localement convexe $\vec{G}$ soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à tout borné soit continue.

2) Si $\vec{E}$ est quasi-complet, alors $\vec{E}$ est complet.

3) Un produit fini d'espaces $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ est un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$.

4) Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces $(\mathscr{D}\mathscr{F})$, tout ensemble d'applications bilinéaires séparément continues de $\vec{E} \times \vec{F}$ dans un espace localement convexe $\vec{G}$, borné pour la topologie de la convergence simple, est équicontinu.

**Théorème 3.8.** *Soient $\vec{E}$ un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ et $\vec{F}$ un espace quasi-complet; si pour tout $m \leqq n$, on a $\mathscr{S}'_m = c$ et si $c$ vérifie la condition $(P)$, alors $\vec{\mathscr{D}}^n b_{c-b}$ est quasi-complet. Si $\vec{E}$ est un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ complet et si $\vec{F}$ est un espace de Montel, tout borné de $\vec{\mathscr{D}}^n b_{(\mathscr{S}'_m)-c}$ est précompact dans $\vec{\mathscr{D}}^{n-1} b_{(\mathscr{S}'_m)-c}$.*

**Démonstration.** La première partie résulte de la démonstration du Théorème 3.6 et de la propriété 1, car on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{L}_b^{(m)}(\vec{F}, \vec{E})$ sur $L_b(\vec{F}, \vec{E}^m)$, pour tout $m < n$. Si $f \in \vec{\mathscr{D}}^n b$, on a alors $D^m f(x) \in L(\vec{F}, \vec{E}^m)$ pour tout $x \in X$. Soit $B$ un borné dans $\vec{\mathscr{D}}^n b_{(\mathscr{S}'_m)-c}$; c'est l'ensemble des applications $n$ fois $b$-différentiables telles que, pour tout voisinage $V$ de 0 dans $\vec{F}$ et toute famille $(S'_m, S_m)_{m \leqq n}$, où $S'_m \in \mathscr{S}'_m$ et $S_m \in c$, il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait:

$$f(S'_0) \subset kV; \; D^m f(S'_m)(S_1 \times \cdots \times S_m) \subset kV \text{ pour tout } m \leqq n.$$

La topologie de la $(\mathscr{S}'_m) - c$ convergence sur $\vec{\mathscr{D}}^n b$ est l'image réciproque de la topologie produit: $\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_0}(\vec{F}, X) \times \prod_{m \leqq n} \mathscr{C}_{\mathscr{S}'_n}(L_c(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$. Pour montrer que $B$ est précompact dans $\vec{\mathscr{D}}^{n-1} b_{(\mathscr{S}'_m)-c}$, il suffit de montrer que l'ensemble $B_m$ formé des applications $D^m f$, où $f \in B$, est précompact dans $\mathscr{C}_{\mathscr{S}'_m}(L_c(\vec{F}, \vec{E}^m), X)$ pour tout $m < n$. D'après le théorème d'Ascoli, et en vertu de la compacité des éléments de $S'_m$, il suffit de montrer que l'ensemble $B_m / S'_m$ des restrictions à $S'_m$ des applications de $B_m$ est équicontinu quel que soit $S'_m \in \mathscr{S}'_m$ et que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $B_m(x)$ des applications $D^m f(x)$, où $f \in B$, est précompact dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$. Or $B_m(x)$ est borné pour la topologie de la convergence simple, donc équicontinu en vertu de la propriété 4 et, pour tout $m$-uple $(v_1, \cdots, v_m) \in \vec{E}^m$, l'ensemble $\langle D^m f(x), (v_1, \cdots, v_m) \rangle$, où $f \in B$, est borné dans $\vec{F}$, donc relativement compact. Par suite $B_m(x)$ est précompact dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^m)$. Le même raisonnement que celui du Théorème 3.7 montre que $B_m / S'_m$ est équicontinu puisque l'ensemble des applications $D^{m+1} f(x)$, où $f \in B$ et $x \in S'_m$, est simplement borné dans $L_c(\vec{F}, \vec{E}^{m+1})$, et donc equicontinu.

## 4. Applications indéfiniment différentiables.

Soient $(E, \pi_E)$ et $(F, \pi_F)$ deux espaces affines quasi-localement convexes, $(X, \pi)$ un sous-espace de $(E, \pi_E)$ tel que $X$ soit ouvert pour $\tau(\pi_E)$. Soit $f$ une application de $X$ dans $F$.

**Définition 4.1.** *On dira que $f$ est* indéfiniment différentiable sur $X$ *si $f$ est $n$ fois différentiable sur $X$, pour tout entier naturel $n$.*

Si $f$ est indéfiniment différentiable sur $X$, alors $D^{(m)}f$ et $D^m f$ sont des applications indéfiniment différentiables de $X$ dans $\mathscr{L}'^{m}_{\lambda}(\vec{F}, \vec{E})$ et de $X$ dans $L'_{\lambda}(\vec{F}, \vec{E}^m)$ resp. pour tout entier $m$. La restriction de $f$ à toute variété affine $M$ de dimension finie est indéfiniment différentiable sur $X \cap M$.

**Théorème 4.1.** *La composée de deux applications indéfiniment différentiables et le produit d'une famille d'applications indéfiniment différentiables sont des applications indéfiniment différentiables.*

L'ensemble des applications indéfiniment différentiables de $X$ dans $F$ est un sous-espace affine $\mathscr{D}(F, X)$ de $\mathscr{D}^n(F, X)$, pour tout $n$. Dans ce paragraphe, nous poserons $\mathscr{D}(F, X) = \mathscr{D}$; l'espace $\vec{\mathscr{D}}$ des vecteurs libres de $\mathscr{D}$ s'identifie à $\mathscr{D}(\vec{F}, X)$.

**Définition 4.2.** *On appellera* quasi-topologie de la convergence locale *sur $\mathscr{D}$ la quasi-topologie $\delta$ la moins fine telle que l'injection canonique de $\mathscr{D}$ dans $(\mathscr{D}^n, \delta_n)$ soit quasi-continue, pour tout entier $n$.*

Puisque l'injection canonique de $(\mathscr{D}^n, \delta_n)$ dans $(\mathscr{D}^{n-1}, \delta_{n-1})$ est quasi-continue, pour tout $n$, on a $\mathscr{F}\ \delta f$ dans $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\mathscr{F}\ \delta_n f$ pour tout $n$. De plus, $\delta$ est une quasi-topologie localement convexe.

Nous supposerons désormais que $\pi_E = \tau(\pi_E)$ et $\pi_F = \tau(\pi_F)$.

Pour que $f$ soit indéfiniment différentiable sur $X$, il faut et il suffit que $f$ soit dérivable par rapport à tout $n$-uple, quel que soit $n$, et que l'application $D^n.f$ soit continue.

**Théorème 4.2.** *Si $F$ est complet, $\mathscr{D}$ est $\delta$-complet.*

En effet si $\mathscr{F}$ est un $\delta$-filtre de Cauchy, alors $\mathscr{F}$ est un $\delta_n$-filtre de Cauchy pour tout $n$, donc quasi-converge vers $T_n \in \mathscr{D}^n$ d'après le Théorème 3.3, et $\mathscr{F}$ quasi-converge dans $\mathscr{D}$ vers $T_n = T_m$.

**Théorème 4.3.** *Si $\vec{\mathrm{F}}$ est un espace de Montel, tout ensemble $\vec{\delta}$-borné dans $\vec{\mathscr{D}}$ est relativement $\vec{\delta}$-compact.*

En effet, si $B$ est $\vec{\delta}$-borné, alors $B$ est $\vec{\delta}_n$-borné pour tout $n$, donc relativement $\vec{\delta}_{n-1}$-compact d'après le Théorème 3.4. Par suite $B$ est relativement $\vec{\delta}$-compact.

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de parties bornées de $\vec{E}$ tel que tout point de $\vec{E}$ appartienne au moins à un élément de $\mathscr{S}$.

**Définition 4.3.** *On dira que $f$ est* indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$ *si $f$ est $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, pour tout $n$.*

Si $f$ est indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$, alors $D^{(m)}f$ est une application indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable de $X$ dans $\mathscr{L}^m_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E})$ pour tout $m$. L'ensemble des applications indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiables de $X$ dans $F$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^n\mathscr{S}(F,X)$ que nous noterons $\mathscr{D}\mathscr{S}$; l'espace de ses vecteurs libres $\vec{\mathscr{D}\mathscr{S}}$ s'identifie à $\mathscr{D}\mathscr{S}(\vec{F},X)$.

**Proposition 4.1.** *Supposons $\mathscr{S} \subset c$. Une application indéfiniment différentiable sur $X$ est indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable sur $X$; si $\mathscr{S}^m$ vérifie la condition (P) dans $\vec{E}^m$ quel que soit $m$, on a: $\mathscr{D}\mathscr{S} = \mathscr{D}$. En particulier, si $E$ est métrisable, alors $\mathscr{D}\ c = \mathscr{D}$.*

Soit $\mathscr{S}'_m$, quelque soit $m$, (resp. $\mathscr{S}'$) un ensemble de parties de $\vec{E}$ tel que tout point de $\vec{E}$ appartienne à un élément de $\mathscr{S}'_m$ (resp. $\mathscr{S}'$) au moins. Nous supposerons: $\mathscr{S}'_m \subset c$ pour tout $m$ et $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$.

**Définition 4.4.** *On appellera* topologie de la $(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}'$ convergence *sur $\mathscr{D}\mathscr{S}$ la topologie $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ la moins fine rendant continues les injections canoniques de $\mathscr{D}\mathscr{S}$ dans $(\mathscr{D}^n\mathscr{S},\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')_{m\leq n})$.*

$\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S}')$ est une topologie séparée localement convexe compatible avec la structure affine de $\mathscr{D}\mathscr{S}$. Si $\mathscr{S} = \mathscr{S}'_m = c$ pour tout $m$, nous noterons $\mathscr{D}c$ l'espace $\mathscr{D}c$ muni de $\tau((c),c)$.

Si $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}\mathscr{S}$, la topologie induite sur $\mathscr{D}$ par $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S})$ est la topologie limite projective des topologies induites sur $\mathscr{D}^n$ par $\tau((\mathscr{S}'_m),\mathscr{S})_{m\leq n}$, pour tout $n$.

Soient $V$ un voisinage de 0 dans $\vec{F}$, $s'_m \in \mathscr{S}'_m$ et $s_m \in \mathscr{S}'$ quel que soit $m$; soit $W(s'_m, s_m, V)$ l'ensemble des $f \in \vec{\mathscr{D}\mathscr{S}}$ tels que:

$$f(s'_0) \subset V, \qquad D^m f(s'_m)(s_1 \times \cdots \times s_m) \subset V \text{ pour tout } m,$$

où $D^m f$ est l'image canonique de $D^{(m)}f$ dans $L_{\mathscr{S}}(\vec{F}, \vec{E}^m)$ (voir §3). Les ensembles $W(s'_m, s_m, V)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 pour $\vec{\tau}((\mathscr{S}'_m), \mathscr{S}')$.

**Théorème 4.4.** *Supposons que c vérifie la condition (P) dans $\vec{E}$. Si F est complet, $\mathscr{D}c$ est complet; si $\vec{E}$ est tonnelé et $\vec{F}$ quasi-complet, $\vec{\mathscr{D}}c$ est quasi-complet.*

Résulte du Théorème 3.6.

**Corollaire.** *Si E est métrisable et $\vec{F}$ complet (resp. quasi-complet), $\vec{\mathscr{D}}c$ est complet (resp. quasi-complet)*

**Théorème 4.5.** *Si $\vec{E}$ est tonnelé et quasi-complet, si $\mathscr{S} \subset c$ et si $\mathscr{S}'_m \subset \mathscr{S}'_{m+1}$ pour tout entier m, alors tout borné de $\vec{\mathscr{D}}_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$ est précompact, si $\vec{F}$ est un espace de Montel.*

Résulte du Théorème 3.7.

**Corollaire 1.** *Si on supoose de plus dans le Théorème 4.5 que $\mathscr{S}'_m$ et $\mathscr{S}^m$ vérifient la condition (P) dans $\vec{E}$ et $\vec{E}^m$ resp. pour tout m, alors $\vec{\mathscr{D}}_{(\mathscr{S}'_m)\cdot\mathscr{S}}$ est un espace de Montel, si $\vec{F}$ est quasi-complet.*

En effet, tout borné de $\vec{\mathscr{D}}_{(\mathscr{S}'_m)\cdot\mathscr{S}}$ est précompact et son adhérence est compacte puisque $\vec{\mathscr{D}}_{(\mathscr{S}'_m)-\mathscr{S}}$ est quasi-complet.

**Corollaire 2.** *Si E est métrisable et complet et si $\vec{F}$ est un espace de Montel quasi-complet, alors $\vec{\mathscr{D}}c$ est un espace de Montel quasi-complet.*

**Théorème 4.6.** *Si $\vec{E}$ est un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ et si $\vec{F}$ est un espace de Montel, tout borné de $\vec{\mathscr{D}}b_{(c)-c}$ est précompact.*

Résulte de la démonstration du Théorème 3.8.

**Compléments**

**4.1.** Si $(E, \pi_E)$ et $(F, \pi_F)$ sont des espaces affines quasi-localement convexes, et si $(X, \pi)$ est un sous-espace de $(E, \pi_E)$ tel que $X$ soit ouvert pour $\tau(\pi_E)$, on pourrait définir la notion d'application analytique (réelle) sur $X$ de la façon suivante:

Soit $f$ une application de $X$ dans $F$; on dira que $f$ est *analytique* si $f$ est indéfiniment différentiable sur $X$ et si l'ensemble des applications quasi-continues:

$$(x, v) \to D^p . f(x, v, \cdots, v) \quad \text{de } (X \times \vec{E}, \pi \times \pi_{\vec{E}}) \text{ dans } (\vec{F}, \pi_{\vec{F}})$$

est $\lambda$-borné.

Si $f$ est analytique sur $X$ et si $\pi_E = \tau(\pi_E)$, pour tout $x \in X$ on a $(t^n \Delta^n f(x))$ $\lambda 0$ dans $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F}, R \times E)$. La restriction de $f$ à toute variété affine de dimension finie est analytique.

Les fonctions analytiques ainsi définies ont des propriétés analogues à celles des fonctions analytiques ordinaires. Nous reviendrons sur cette question dans un autre article.

**4.2.** Dans les paragraphes 2, 3, 4, l'hypothèse: $\pi_E = \tau(\pi_E)$ utilisée dans les principaux théorèmes peut être remplacée par la condition plus faible:

$\pi_{\vec{E}}$ vérifie la condition (R) (voir Définition 1.2, Chapitre II).

Cette condition est en particulier satisfaite par $\mathscr{C}'_\lambda(\vec{F}, X)$.

**Problème.** L'hypothèse $\pi_F = \tau(\pi_F)$ peut-elle être complètement supprimée?

**4.3.** Si $E$ et $F$ sont des espaces affines localement convexes, il peut être intéressant dans certaines questions (théorème des fonctions implicites) de considérer des fonctions *régulièrement différentiables sur* $X$, c'est-à-dire différentiables sur $X$ et régulièrement différentiables en tout point de $X$. Ces fonctions jouissent de propriétés analogues à celles des fonctions différentiables sur $X$, en particulier la composée de deux applications régulièrement différentiables est régulièrement différentiable. Toutefois, cette notion présente certains inconvénients (difficulté de vérifier si une fonction est régulièrement différentiable sur $X$ en particulier) et ne semble pas adaptée à l'étude des variétés de dimension infinie et de leurs prolongements que nous avons en vue (Chapitre IV); aussi ne l'emploierons-nous pas.

**4.4.** Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel sur $R$. On dira qu'une quasi-topologie $\pi_{\vec{E}}$ sur $\vec{E}$ est *vectorielle* si les applications:

$$(k, v) \to kv \quad \text{et} \quad (v, v') \to v + v', \quad \text{où } k \in R, \ v \in \vec{E} \text{ et } v' \in \vec{E},$$

sont quasi-continues. Dans ce cas, la topologie $\theta_{\vec{E}}$ associée à la pseudo-topologie sous-jacente à $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ est compatible avec la structure vectorielle de $\vec{E}$. Une quasi-topologie sur l'espace affine $E$ sera dite *affine* s'il existe une quasi-topologie vectorielle $\vec{\pi}_{\vec{E}}$ sur $\vec{E}$ telle que les applications:

$$(x,v) \to x + v \quad \text{et} \quad (x,x') \to x - x', \quad \text{où} \quad x \in E,\ x' \in E \text{ et } v \in \vec{E},$$

soient quasi-continues. Les définitions et résultats du Chapitre II et du Chapitre III sont encore valables en remplaçant partout les quasi-topologies localement convexes par des quasi-topologies affines et la topologie localement convexe $\tau(\pi_E)$ par la topologie $\theta_E$. En particulier, on définit ainsi les applications $n$ fois différentiables d'un espace vectoriel topologique séparé dans un autre.

## CHAPITRE IV

## VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES DE DIMENSION INFINIE

### 1. Variétés quasi-topologiques et différentiables.

Soient $(E,\pi_E),(F,\pi_F)$ et $(G,\pi_G)$ trois espaces affines quasi-localement convexes, $(X,\pi)$ un sous-espace de $(E,\pi_E)$ tel que $X$ soit ouvert pour $\tau(\pi_E)$. Les notations sont celles du Chapitre III.

**Théorème 1.1.** *L'application $\gamma:(g,f) \to g \circ f$ de $(\mathscr{D}^n(G,F) \times \mathscr{D}^n(F,X), \delta_n \times \delta_n)$ dans $(\mathscr{D}^{n-m}(G,X), \delta_{n-m})$ est $m$ fois différentiable, pour tout $m < n$.*

**Démonstration.** Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ des filtres sur

$$\mathscr{D}^n(F,X),\ \mathscr{D}^n(\vec{F},X),\ \mathscr{D}^n(G,F) \text{ et } \mathscr{D}^n(\vec{G},F)$$

resp. tels que l'on ait:

$$\mathscr{F}\delta_n f,\quad \mathscr{F}'\vec{\delta}_n f',\quad \mathscr{G}\delta_n g \quad \text{et} \quad \mathscr{G}'\vec{\delta}_n g'.$$

Pour tout $t \in R$, on a:

$$(g + tg') \circ (f + tf') - g \circ f = g \circ (f + tf') - g \circ f + tg' \circ (f + tf')$$

$$= t[\langle Dg(f),f'\rangle + g' \circ f] + t\Delta g(f,t,f') + t^2[\Delta g'(f,t,f') + \langle Dg'(f),f'\rangle]$$

où $\langle Dg(f), f' \rangle$ désigne l'application: $x \to Dg(f(x))(f'(x))$ et $\Delta g(f, t, f')$ est l'application: $x \to \Delta g(f(x), t, f'(x))$. D'après le Théorème 2.2 du Chapitre III, l'application:

$$D\gamma(g,f)\colon (g',f') \to [\langle Dg(f), f' \rangle + g' \circ f]$$

est une application linéaire de $\mathscr{D}^n(\vec{G}, F) \times \mathscr{D}^n(\vec{F}, X)$ dans $\mathscr{D}^{n-1}(\vec{G}, X)$; la $(n-1)$-ième différentielle de l'application:

$$x \to \langle D\gamma(g,f), (g',f') \rangle (x)$$

est une combinaison linéaire d'applications de la forme:

$$\langle D^{m'} g(f), (D^{i_1} f, \cdots, D^{i_m} f') \rangle \text{ et } \langle D^{m'} g'(f), (D^{i_1} f, \cdots, D^{i_m} f') \rangle;$$

en vertu des Théorèmes 1.1 et 1.2 du Chapitre II et des relations: $D^m \mathscr{F}' \lambda D^m f'$ et $D^m \mathscr{G}' \lambda D^m g'$, on aura:

$$D^m(D\gamma(g,f)(\mathscr{G}' \times \mathscr{F}')) \;\lambda\; D^m(D\gamma(g,f)(g',f'))$$

pour tout entier $m < n$, donc,

$$D\gamma(g,f)(\mathscr{G}' \times \mathscr{F}') \;\delta_{n-1} D\gamma(g,f)(g',f');$$

ceci prouve que $D\gamma(g,f)$ est une application quasi-continue. Par ailleurs l'application $\Delta g(f, t, f')$ est une application $(n-1)$ fois différentiable, sa $(n-1)$-ième différentielle étant une combinaison linéaire d'applications de la forme:

$$\langle \Delta D^{m'} g(f, t, f'), (D^{i_1} f, \cdots, D^{i_m} f') \rangle + t\phi.$$

En vertu du Théorème 1.1 du Chapitre II, on a:

$$\Delta D^{m-1} \mathscr{G}(\mathscr{F}, t_0 + \mathscr{K}, \mathscr{F}') \;\lambda\; \Delta D^{m-1} g(f, t_0, f').$$

En posant:

$$\begin{cases} \Delta\gamma((g,f), t, (g',f')) = ((g + tg') \circ (f + tf') - g \circ f)/t - \langle D\gamma(g,f), (g',f') \rangle \\ \hfill \text{si } t \neq 0 \\ \Delta\gamma((g,f), 0, (g',f')) = 0 \end{cases}$$

on obtient: $\Delta\gamma(\mathscr{G} \times \mathscr{F}, t + \mathscr{K}, \mathscr{G}' \times \mathscr{F}')\delta_{n-1}\Delta\gamma((g,f), t, (g',f'))$, ce qui montre que $\gamma$ est une application différentiable de $\mathscr{D}^n(G,F) \times \mathscr{D}^n(F,X)$ dans $\mathscr{D}^{n-1}(G,X)$. Il en résulte que l'application: $((g,f),(g',f')) \to [\langle Dg(f),f'\rangle - g'\circ f]$ est une application différentiable à valeurs dans $\mathscr{D}^{n-2}(\vec{G},X)$; par conséquent l'application: $D\gamma:(g,f) \to D\gamma(g,f)$ est une application différentiable de

$$\mathscr{D}^n_{\delta_n}(G,F) \times \mathscr{D}^n_{\delta_n}(F,X) \text{ dans } \mathscr{L}'_\lambda(\vec{\mathscr{D}}^{n-2}_{\delta_{n-2}}(G,X), \vec{\mathscr{D}}^n_{\delta_n}(G,F) \times \vec{\mathscr{D}}^n_{\delta_n}(F,X))$$

dont la différentielle en $(g,f)$ est l'application:

$$(g',f') \to [(g'',f'') \to (\langle D^2g(f),(f',f'')\rangle - \langle Dg'(f),f''\rangle + \langle Dg''(f),f'\rangle)].$$

Par récurrence on montre: $\gamma \in \mathscr{D}^m(\mathscr{D}^{n-m}_{\delta_{n-m}}(G,X), \mathscr{D}^n_{\delta_n}(G,F) \times \mathscr{D}^n_{\delta_n}(F,X))$.

**Corollaire 1.** *L'application* $\gamma:(g,f) \to g\circ f$ *de* $(\mathscr{D}(G,F) \times \mathscr{D}(F,X), \delta \times \delta)$ *dans* $(\mathscr{D}(G,X),\delta)$ *est une application indéfiniment différentiable.*

**Corollaire 2.** *L'application*: $(x,f) \to f(x)$ *de* $X \times \mathscr{D}^n(F,X)$ *dans* $F$ *est* $n$ *fois différentiable.*

Dans la suite nous supposerons connue la théorie des catégories inductives (voir [8b] et [8c] dont nous utilisons les notations). La classe des unités d'une catégorie $\mathscr{C}$ sera désignée par $\mathscr{C}_0$; les unités à droite et à gauche de $f\in\mathscr{C}$, par $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ resp.

Soit $P$ (resp. $\bar{P}$) la catégorie des applications quasi-continues d'un espace quasi-topologique (resp. non séparé) dans un autre, considérée comme catégorie au-dessus de la sous-catégorie pleine $\tilde{\mathscr{T}}'$ de $\tilde{\mathscr{T}}$ dont les unités sont les topologies séparées (resp. au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}$) relativement au foncteur $\theta$ (resp. $\bar{\theta}$):

$$((X',\pi'),f(X,\pi)) \to (\theta_{X'},f,\theta_X) \quad \text{(Chapitre II, §1).}$$

Nous munirons $P$ (resp. $\bar{P}$) de la relation d'ordre:

$((X_2,\pi_2),f,(X_1,\pi_1)) < ((X'_2,\pi'_2),f',(X'_1,\pi'_1))$ si, et seulement si, $X_i$ est ouvert pour $\theta(X'_i,\pi'_i)$ et $\pi_i = \pi'_i/X_i$, où $i = 1,2$, et si $f$ est la restriction de $f'$ à $X_1$.

Soit $\Pi$ (resp. $\mathscr{T}$) le groupoïde des éléments inversibles de $P$ (resp. $\mathscr{T}$).

**Proposition 1.1.** *$P$ (resp. $\bar{P}$) est une catégorie inductive complète au-dessus de $\tilde{\mathcal{T}}'$ (resp. $\tilde{\mathcal{T}}$) relativement à $\theta$ (resp. $\bar{\theta}$).*

**Démonstration.** Montrons seulement que $P$ (resp. $\bar{P}$) est complète au-dessus de $\tilde{\mathcal{T}}'$ (resp. $\tilde{\mathcal{T}}$), le reste de la proposition résultant des définitions. Soit $C$ une sous-classe complète de $\bar{P}_0$ compatible relativement à $\bar{\theta}$, c'est-à-dire une sous-classe de $\bar{P}$ saturée par induction et agrégation et telle que, si $(X,\pi) \in C$ et $(X',\pi') \in C$, on ait: $\pi/X \cap X' = \pi'/X \cap X'$ et $X \cap X'$ ouvert pour $\bar{\theta}(X,\pi)$ et pour $\bar{\theta}(X',\pi')$ et qu'il existe $\bar{q}\ (C) = \cup X$, où $(X,\pi) \in C$; soient $x \in \bar{q}(C)$ et $\mathscr{X}$ un filtre sur $\bar{q}(C)$. Soit $\nu$ la relation définie par:

$\mathscr{X}\,\nu\, x$ si, et seulement si, il existe $(X,\pi) \in C$ tel que $x \in X$, $x \in \mathscr{X}$ et $\mathscr{X}\,\pi\, x$.

Comme $X \cap X'$ est ouvert pour $\bar{\theta}(X,\pi)$ et $\bar{\theta}(X',\pi')$, les relations $x \in X'$ et $\mathscr{X}\,\nu\, x$ entraînent que $X \cap X'$ contient un élément de $\mathscr{X}$, d'où $\mathscr{X}(\pi/X \cap X')x$ et $\mathscr{X}\,\pi'\, x$. Donc $(\bar{q}(C), \nu)$ est l'agrégat de $C$ dans $\bar{P}_0$ et $\bar{P}$ est complète relativement à $\bar{\theta}$. Si de plus $C \subset P_0$ et si $\cup\, \theta(C)$ est séparée, les relations $\mathscr{X}\,\nu\, x$ et $\mathscr{X}\,\nu\, x'$ entraînent $x = x'$, d'où $(\bar{q}(C), \nu) = \cup\, C$ dans $P_0$ et $P$ est complète.

Soit $P_0'$ la classe formée de tous les couples $(X,\pi)$, où $(X,\pi)$ est un sous-espace d'un espace affine quasi-localement convexe $(E,\pi_E)$ et où $X$ est ouvert pour la topologie localement convexe $\tau(\pi_E)$ sous-jacente à $\pi_E$. Soit $\tau(\pi)$ la topologie induite sur $X$ par $\tau(\pi_E)$, $j(\pi)$ la quasi-topologie sous-jacente à $(X,\pi) \in P_0'$. Nous munirons $P_0'$ de la relation d'ordre:

$(X_1,\pi_1) < (X,\pi)$ si, et seulement si, $X_1$ est ouvert pour $\tau(\pi)$ et si $\pi_1 = \pi/X$.

Soit $P'$ la catégorie ayant $P_0$ pour classe de ses unités, formée des $\bar{f} = ((X',\pi'),f,(X,\pi))$ tels que $j(\bar{f}) = (j(\pi'),f,j(\pi)) \in P$, munie de la relation d'ordre:

$((X_1',\pi_1'),f_1,(X_1,\pi_1)) < ((X',\pi'),f,(X,\pi))$ si, et seulement si,

$(X_1',\pi_1') < (X',\pi')$ et $(X_1,\pi_1) < (X,\pi)$ dans $P_0'$ et si $f_1$ est la restriction de $f$ à $X_1$.

**Proposition 1.2.** *$P_0'$ est une espèce de structures locales au-dessus de $\mathcal{T}'$ pour $\tau:(X,\pi) \to \tau(\pi)$; $P'$ est une catégorie inductive au-dessus de $\tilde{\mathcal{T}}'$ relativement à $\bar{\theta}' = \bar{\theta} j$.*

Résulte des définitions, le groupoïde distingué dans $P'$ étant le groupoïde $\Pi'$ de tous les éléments inversibles de $P'$.

**Corollaire.** *La complétion $\tilde{P}'$ (resp. $\bar{P}'$) de $P'$ au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$ (resp. $\tilde{\mathscr{T}}$) relativement à $\theta'$ est une catégorie inductive au-dessus de $P$ (resp. $\bar{P}$). Si $\Gamma$ est un groupoïde inductif au-dessus de $P'$ relativement au foncteur $T$, l'élargissement complet de $\Gamma$ au-dessus de $\mathscr{T}'$ est un groupoïde inductif au-dessus de $P$.*

**Démonstration.** Rappelons [8b] qu'un élément de $\tilde{P}'$ (resp. $\bar{P}'$) est une classe complète $K$ d'éléments de $P'$, compatible au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$ (resp. $\tilde{\mathscr{T}}$) relativement à $\theta'$, c'est-à-dire une sous-classe de $P'$ saturée par induction et agrégation, telle que $\cup\,\theta'(K) \in \tilde{\mathscr{T}}'$ (resp. $\in \tilde{\mathscr{T}}$) et que, si $f \in K$ et $f' \in K$, on ait:

$$\theta'(f' \cap f) = \theta'(f') \cap \theta'(f).$$

Alors $j(K)$ est aussi complète dans $P$ (resp. $\bar{P}$), donc admet un agrégat $\cup\, j(K)$ dans $P$ (resp. $\bar{P}$); l'application: $K \to \cup\, j(K)$ définit $\tilde{P}'$ (resp. $\bar{P}'$) comme catégorie inductive au-dessus de $P$ (resp. $\bar{P}$). Une structure de l'élargissement complet $\tilde{\Gamma}$ de $\Gamma$ au-dessus de $\mathscr{T}'$, relativement au foncteur $\theta' T$, s'identifie à un couple $(V, A)$, où $V$ est un ensemble et $A$ un atlas complet sur $V$ compatible avec $\Gamma$ au-dessus de $\mathscr{T}'$; rappelons [8b] qu'un tel atlas est un ensemble d'éléments $(g, e)$, où $e \in \Gamma_0$ et $g$ est une application biunivoque de $\theta' T(e)$ sur $\beta(g) \subset V$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $V = \cup\, \beta(g)$ et la topologie $\tau(A)$ sur $V$ ayant pour base d'ouverts les ensembles $\beta(g)$ est séparée.

2) $A$ est saturé par induction et agrégation pour l'ordre produit des ordres de $\Gamma_0$ et $\mathscr{T}'$.

3) $A A^{-1} = \Gamma$ et $A\,\Gamma = A$, où $A A^{-1}$ (resp. $A\,\Gamma$) désigne l'ensemble des éléments $(e', g' g^{-1}, c)$ (resp. $(g' f, e)$), où $(g, e) \in A$, $(g', e') \in A$ et $(e', f, e) \in \Gamma$.

Alors la classe des quasi-topologies $v(\beta(g))$, images par $g$ de $\theta'(T(e))$, où $(g, e) \in A$, est une sous-classe complète dans $P$ et l'application $v: (V, A) \to (V, v(A))$, où $v(A) = \cup\, v(\beta(g))$, définit $\tilde{\Gamma}$ comme groupoïde inductif au-dessus de $P$ d'après le théorème de transitivité des élargissements complets [8b].

**Définition 1.1.** *Une structure C de $\tilde{P}'$ (resp. $\bar{P}'$) sera appelée* variété quasi-topologique (*resp.* non séparée) *et identifiée au couple* $(V,v) = \cup j(C)$ *dans P (resp. dans $\bar{P}$); on posera* $\tau(v) = \cup \theta'(C)$.

Soit $\Delta^n$ (resp. $\bar{\Delta}^n$) la sous-catégorie de $P'$ (resp. de $P$)*) dont les éléments sont les triplets $((Y,\pi'),f,(X,\pi))$, où $(X,\pi)$ est un sous-espace de $(E,\pi_E) \in P_0'$, $(Y,\pi')$, un sous-espace de $(F,\pi_F) \in P_0'$, et $f$, considérée comme application de $(X,\pi)$ dans $(F,\pi_F)$, est $n$ fois différentiable sur $X$. Soient $\Delta = \Delta^\infty$et $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^\infty$.

**Proposition 1.3.** *$\Delta^n$ et $\Delta$ (resp. $\bar{\Delta}^n$ et $\bar{\Delta}$) sont des sous-catégories in-inductives (resp. inductives faibles) de $P'$ (resp. de $P$).*

L'ensemble des morphismes de $\Delta^n$ (resp. $\Delta$) de source $(X,\pi)$ et de but $(Y,\pi')$ sera muni de la quasi-topologie induite par $(\mathscr{D}^n(F,X),\delta_n)$ (resp. $(\mathscr{D}(F,X),\delta)$). D'après le Théorème 1.1, la loi de composition dans la sous-catégorie pleine de $\Delta$ ayant pour unités les espaces affines localement convexes est indéfiniment différentiable.

Le groupoïde $\Lambda^n$ (resp. $\Lambda^\infty$) des éléments inversibles de $\Delta^n$ (resp. $\Delta$) est le groupoïde inductif formé des triplets tels que $f$ soit une application biunivoque de $X$ sur $Y$ et que $f$ et $f^{-1}$ soient $n$ fois (resp. indéfiniment) différentiables sur $X$ et $Y$ resp.; on a alors, pour tout $x \in X$, $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

Nous désignerons par $\Lambda^n(E)$ (resp. $\Lambda^\infty(E)$) le sous-groupoïde plein de $\Delta^n$ (resp. $\Delta$) ayant pour unités les éléments induits de $(E,\pi_E)$; ce sous-groupoïde est un sous-pseudogroupe [8c] de $\Lambda^n$ (resp. $\Lambda^\infty$).

**Définition 1.2.** *On appelle* automorphisme local d'ordre *n (resp.* d'ordre infini) *de E un élément de $\Lambda^n(E)$ (resp. $\Lambda^\infty(E)$). Une unité du groupoïde $\tilde{\Lambda}^n$ (resp. $\tilde{\Lambda}^\infty$) obtenu par élargissement complet de $\Lambda^n$ (resp. $\Lambda^\infty$) au-dessus de $\mathscr{T}'$ sera appelée* variété *n* fois (*resp.* indéfiniment) différentiable; *une unité de l'élargissement complet $\bar{\Lambda}^n$ (resp. $\bar{\Lambda}^\infty$) de $\Lambda^n$ (resp. $\Lambda^\infty$) au-dessus de $\mathscr{T}$,* variété non séparée *n* fois (*resp.* indéfiniment) différentiable.

$\tilde{\Lambda}^n$ (resp. $\bar{\Lambda}^n$) est un groupoïde inductif au-dessus de $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{T}'$) une structure de variété $n$ fois différentiable s'identifie à un couple $(V, A)$, où $V$ est un ensemble et $A$ un atlas complet sur $V$ compatible avec $\Lambda^n$ tel que la topologie sous-jacente $\tau(A)$ soit séparée; d'après le corollaire de la Proposition 1.2, il lui est associée canoniquement une quasi-topologie $v$ sur $V$.

*) Voir Note à la fin du Mémoire, p. 114.

Si $V$ est connexe pour $\tau(A)$, et si $(g,(X,\pi)) \in A$, où $(X,\pi) < (E,\pi_E)$, la structure $(V,A)$ est entièrement déterminée par la donnée de l'atlas complet $A'$ formé par les cartes locales de $A$ dont la source $(X',\pi')$ est majorée par $(E,\pi_E)$ dans $P'_0$; c'est-à-dire $(V,A)$ s'identifie au couple $(V,A')$, où $A'$ est un atlas complet compatible avec $\Lambda^n(E)$. Nous poserons donc:

**Définition 1.3.** *Soit $(E,\pi_E)$ un espace affine quasi-localement convexe; on appelle $(E,\pi_E)$-*variété $n$ fois (*resp.* indéfiniment) différentiable *un couple $(V,A)$, où $V$ est un ensemble et $A$ un atlas complet, compatible avec $\Lambda^n(E)$ (resp. $\Lambda^\infty(E)$) et tel que la topologie $\tau(A)$ sous-jacente à $A$ soit séparée.*

Dans la suite, une carte locale $(g,(X,\pi)) \in A$, où $g$ est une application biunivoque de $X$ sur $\beta(g) \subset V$ et $(X,\pi) < (E,\pi_E)$ sera souvent notée seulement $g$. Si $\pi_E = \tau(\pi_E)$, une $(E,\pi_E)$-variété $n$ fois différentiable sera appelée *E-variété n fois différentiable.* Si $E$ est de dimension finie, on retrouve les définitions de [8a].

**Définition 1.4.** *Soient $(V,A)$ et $(V',A')$ deux structures de variétés $n$ fois (resp. indéfiniment) différentiables et $U < (V,A)$ dans $\tilde{\Lambda}^n$ (resp. $\Lambda^\infty$), un élément $((V',A'),f,U)$ de la catégorie inductive $\tilde{\Delta}^n$ (resp. $\tilde{\Delta}$) obtenue par élargissement complet de $\Delta^n$ (resp. $\Delta$) au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$ sera appelé* application $n$ fois (*resp.* indéfiniment) différentiable de $U$ dans $(V',A')$. *Un élément de la catégorie $\bar{\Delta}^n$ (resp. $\bar{\Delta}^\infty$) élargissement complet de $\Delta^n$ (resp. $\Delta^\infty$) au-dessus de $\mathscr{T}$ sera appelé* application $n$ fois (*resp.* indéfiniment) différentiable au sens large.

Rappelons [8b] que l'élément $((V',A'),f,U) \in \tilde{\Delta}^n$ peut être caractérisé de la façon suivante: pour tout $g \in A$ et tout $g' \in A'$, l'application $g'^{-1}fg$ est $n$ fois différentiable sur sa source. Si $A_1$ et $A'_1$ sont des sous-ensembles de $A$ et $A'$ resp. tels que $U = \cup\,\beta(A_1)$ et $f(U) = \cup\,\beta(A'_1)$, il résulte du Théorème 2.1 du Chapitre III que la condition: $g_1'^{-1}fg_1 \in \Delta^n$ pour tout $g_1 \in A_1$ et $g'_1 \in A'_1$ entraîne $((V',A'),f,U) \in \tilde{\Delta}^n$.

Pour tout entier $m < n$, l'injection canonique de $\Delta^n$ dans $\Delta^m$ définit $\Delta^n$ comme catégorie inductive au-dessus de $\Delta^m$; par suite si $(V,A) \in \tilde{\Lambda}^n$, l'atlas $\Lambda$ peut être complété en un atlas complet sur $V$ compatible avec $\Lambda^m$, ce qui détermine une structure de variété $m$ fois différentiable sur $V$, sous-jacente à $(V, A)$ et que nous noterons encore $(V, A)$ pour simplifier. Si $f$ est une application $n$ fois différentiable de $(V, A)$ dans $(V', A')$, elle est aussi $m$ fois différentiable pour tout $m < n$.

Soient $(V, A)$ une $(E, \pi_E)$-variété $n$ fois différentiable et $(V', A')$ une $(F, \pi_F)$-variété $n$ fois différentiable; nous désignerons par $\nu(A)$ et $\nu(A')$ les quasi-topologies sous-jacentes à $A$ et $A'$, par $\tau(A)$ et $\tau(A')$ les topologies sous-jacentes à $A$ et $A'$. Si $x \in V$, $U(x)$ désignera un ensemble contenant $x$, ouvert pour $\tau(A)$, muni de la quasi-topologie induite par $\nu(A)$.

**Remarques: 1.1.** Soient $f$ une application de $U(x)$ dans $V'$, $g \in A$ et $g' \in A'$ tels que $x \in \beta(g)$ et $x' = f(x) \in \beta(g')$; on dira que $f$ est *différentiable en* $x$ si l'application $g'^{-1}fg$ est différentiable en $g^{-1}(x)$. Cette notion ne faisant intervenir que le comportement de $g$ et $g'$ aux points $g^{-1}(x)$ et $g'^{-1}f(x)$, elle pourrait être définie dans le cas suivant: $V$ est un ensemble, $x \in V$, et $B$ est un atlas complet dans $\mathscr{T}'$ tel que, si $b \in B$ et $b' \in B$, l'application $b^{-1} b'$ soit $n$ fois différentiable au point $b'^{-1}(x)$. Si les cartes de $B$ sont définies sur un espace vectoriel de dimension finie, on retrouve la notion de variété $n$ fois différentiable en $x$, au sens de [20].

**1.2.** En utilisant la définition d'application analytique indiquée dans les compléments du Chapitre III, on pourrait définir la notion d'application analytique d'une variété analytique dans une autre par un procédé analogue à celui décrit dans le cas différentiable.

Soit $\mathscr{D}^n_x(V', V)$ l'ensemble des couples $(f, x)$, où $f$ est une application $n$ fois différentiable d'un voisinage $U(x)$ de $x$, dans $V'$. Soit $\rho_n$ la relation d'équivalence:

$(f, x) \sim (f', x)$ si, et seulement si, $f(x) = f'(x)$ et si, pour tout entier $m \leqq n$, il existe $g \in A$ et $g' \in A'$ tels que l'on ait:

$$D^m(g'^{-1}fg)(g^{-1}(x)) = D^m(g'^{-1}f'g)(g^{-1}(x)).$$

Si $(f, x) \sim (f', x)$, il résulte du Théorème 2.1 du Chapitre III que les applications $g_1'^{-1}fg_1$ et $g_1'^{-1}f'g_1$ ont même $m$-ième différentielle en $g_1^{-1}(x)$, quelles que soient les cartes locales $g_1 \in A$ et $g_1' \in A_1$, si $x \in \beta(g_1)$ et $f(x) \in \beta(g_1')$.

**Définition 1.5.** *La classe d'équivalence modulo* $\rho_n$ *de* $f \in \mathscr{D}^n_x(V', V)$ *est appelée* jet infinitésimal d'ordre $n$, *ou* $n$-jet, de $f$ en $x$ *et notée* $j^n_x f$; *le point* $x$ *est appelé* source de $j^n_x f$ *et le point* $f(x)$, but. *L'ensemble des n-jets en* $x$ *sera noté* $J^n_x(V', V)$ *et on posera:*

$$J^n(V', V) = \bigcup_{x \in V} J^n_x(V', V).$$

Si $f$ est une application d'un ouvert $U$ de $\tau(A)$ dans $(V', A')$ qui est $n$ fois différentiable sur $U$, l'application:

$$j^n f: \quad x \to j^n_x f \quad \text{de } U \quad \text{dans } J^n(V', V)$$

sera appelée *flot d'ordre* $n$ de $f$ sur $U$.

**Cas particuliers: 1.1.** Si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, cette définition coïncide avec la définition de jet infinitésimal d'ordre $n$ au sens de [8a].

**1.2.** Un $n$-jet $j^n_x f$ de $(E, \pi_E)$ dans $(F, \pi_F)$ s'identifie à chacune des suites $(f(x), D^m f(x))_{m \leqq n} \in F \times \prod_{m \leqq n} L'(\vec{F}, \vec{E}^m)$ et $(f(x), D^{(m)} f(x))_{m \leqq n}$ élément de $F \times \prod_{m \leqq n} \mathscr{L}'^m(\vec{F}, \vec{E})$. Nous noterons ${}_yJ^n_x(F, E)$ l'espace des $n$-jets de $(E, \pi_E)$ dans $(F, \pi_F)$ de source $x$ et de but $y$, muni de la structure vectorielle quasi-localement convexe induite par $\prod_{m \leqq n} L'_\lambda(\vec{F}, \vec{E}^m)$. Cet espace est quasi-isomorphe à l'espace ${}_0J^n_0(\vec{F}, \vec{E})$, que nous noterons $M^n_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$.

**Proposition 1.4.** *L'application:* $(j^n_0 g, j^n_0 f) \to j^n_0(g \circ f)$ *de* $M^n_\lambda(\vec{G}, \vec{F}) \times M^n_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$ *dans* $M^n_\lambda(\vec{G}, \vec{E})$ *est indéfiniment différentiable.*

**Démonstration.** D'après le Théorème 2.2 du Chapitre III, il suffit de montrer que l'application: $(j^n_0 g, j^n_0 f) \to D^m(g \circ f)(0)$ est une application indéfiniment différentiable de $M^n_\lambda(\vec{G}, \vec{F}) \times M^n_\lambda(\vec{F}, \vec{E})$ dans $L'_\lambda(\vec{G}, \vec{E}^m)$ pour tout entier $m \leqq n$. D'après le Théorème 2.1 du Chapitre III, $D^m(g \circ f)(0)$ est combinaison linéaire d'applications:

$$T = \langle D^{i'} g(0), (D^{i_1} f(0), \cdots, D^{j} f(0)) \rangle .$$

La proposition en résulte.

Nous poserons $M_\lambda^n(\vec{E}) = M_\lambda^n(\vec{E},\vec{E}) \cap \Lambda^n$ et appellerons $M_\lambda^n(\vec{E})$ le *groupe d'isotropie d'ordre n* de $\vec{E}$ (en 0). D'après la Proposition 1.4 la loi de composition dans $M_\lambda^n(\vec{E})$ est indéfiniment différentiable.

Comme dans le cas des variétés de dimension finie, on aura à considérer les éléments suivants:

**Définition 1.6.** *Un élément de $J^n(V,F)$ de source* 0 *et de but x sera appelé* $(F,\pi_F)^n$-vitesse sur $(V,A)$, d'origine $x$; *un élément de $J^n(F,V)$, de source x et de but* 0, *une* $(F,\pi_F)^n$-covitesse de source $x$.

Nous désignerons par $T^n_{(F,\pi_F)}(V,A)$, ou simplement $T^n_F(V)$, (resp. $T^{n*}_F(V)$) l'ensemble des $(F,\pi_F)^n$-vitesses (resp. covitesses) sur $(V,A)$. L'ensemble des $(F,\pi_F)^n$-covitesses de source $x$ est un espace vectoriel isomorphe à $M^n(\vec{F},\vec{E})$. Si $F$ est de dimension finie $k$, nous poserons: $T^n_F(V) = T^n_k(V)$ et $T^{n*}_F(V) = T^{n*}_k(V)$ et appellerons les éléments de ces ensembles *$k^n$-vitesses* et *$k^n$-covitesses* resp. On écrira aussi: $T^n_1(V) = T^n(V)$, $T^{n*}_1(V) = T^{n*}(V)$, $T^1_1(V) = T(V)$ et $T^{1*}_1(V) = T^*(V)$.

**Définition 1.7.** *Un élément de $T(V)$ (resp. $T^*(V)$) sera appelé un* vecteur (*resp.* covecteur); *l'ensemble $T_x(V)$ des vecteurs d'origine x, l'espace* tangent à $(V,A)$ en $x$.

En particulier, $T_0(E)$ étant isomorphe à $\mathscr{L}'(\vec{E},\vec{R})$, c'est-à-dire à $\vec{E}$, $T_x(V)$ et l'ensemble $T^*_x(V)$ des covecteurs de source $x$ sont resp. isomorphes à $\vec{E}$ et à $\mathscr{L}'(\vec{R},\vec{E})$. Remarquons que $T^*_x(V)$ est isomorphe au dual (topologique) de l'espace obtenu en munissant $\vec{E}$ de la topologie $\tau(\vec{\pi_E})$. Si $\mathscr{L}'(\vec{E},\vec{R})$ est muni de la topologie de la convergence locale, $T_x(V)$ s'identifie à un sous-espace du dual de $T^*_x(V)$. Toutefois les espaces localement convexes $T_x(V)$ et $T^*_x(V)$ ainsi obtenus ne sont en dualité que si la topologie de $T^*_x(V)$ est identique à la topologie de Mackey.

**Définition 1.8.** *Un n-jet inversible de $(E,\pi_E)$ dans $(V,A)$ de source* 0, *de but x sera appelé* repère d'ordre $n$ de $(V,A)$ en $x$; *l'inverse d'un tel repère sera appelé* corepère d'ordre $n$ de $(V,A)$ en $x$.

L'ensemble des repères (resp. corepères) d'ordre $n$ de $(V,A)$ sera noté $H^n(V,A)$ (resp. $H^{n*}(V,A)$).

**Proposition 1.5.** *Le sous-ensemble* $H_x^n(V,A)$ *de* $H^n(V,A)$ *formé des repères en* $x$ *s'identifie à* $(j_0^n f)M^n(\vec{E})$, *où* $f\in A$ *et* $f(0)=x$.

En effet, $(j_0^n f)M^n(\vec{E})\subset H_x^n(V,A)$; si $\xi\in H_x^n(V,A)$, on a:

$$(j_0^n f)^{-1}\xi = g\in M^n(\vec{E}), \quad \text{d'où} \quad \xi = j_0^n f g.$$

Soient $(V,A)\in\tilde{\Lambda}^\infty$ et $(V',A')\in\tilde{\Lambda}^\infty$; soit $x\in V$ et $\mathscr{D}_x(V',V)$ l'ensemble des couples $(f,x)$ tels que $f$ soit une application indéfiniment différentiable de $U$ dans $(V',A')$, où $U<(V,A)$ dans $\tilde{\Lambda}^\infty$ et $x\in U$. Soit $\rho_\infty$ la relation d'équivalence définie sur $\mathscr{D}_x(V',V)$ par: $(f,x)\sim(f',x)$ si, et seulement si, $j_x^n f = j_x^n f'$, pour tout $n$. La classe d'équivalence de $(f,x)$ modulo $\rho_\infty$ sera notée $j_x^\infty f$ et appelée *jet infinitésimal d'ordre infini*, ou *$\omega$-jet* de $f$ en $x$. On définit comme précédemment $J^\infty(V',V)$, $M_\lambda^\infty(\vec{F},\vec{E})$, $T_F^\infty(V)$, $T_F^{\infty *}(V)$, $H^\infty(V,A)$ et $H^{\infty *}(V,A)$.

Supposons $\pi_E=\tau(\pi_E)$ et $\pi_F=\tau(\pi_F)$. Si $(V,A)$ est une $E$-variété, la quasi-topologie $\nu(A)$ s'identifie à la topologie $\tau(A)$. Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de parties bornées de $\vec{E}$ dont la réunion est totale dans $\vec{E}$ et tel que l'application:

$$(v,u)\to v\circ u \quad \text{de} \quad \mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{E},\vec{E})\times\mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{E},\vec{E}) \text{ dans } \mathscr{L}_{\mathscr{S}}(\vec{E},\vec{E})$$

soit continue; il en sera ainsi par exemple dans le cas où $\vec{E}$ est un espace de Banach et $\mathscr{S}$ l'ensemble de tous les bornés de $\vec{E}$. En remplaçant dans tout ce qui précède différentiable par $\mathscr{S}$-différentiable, on définit la notion de $E$-variété $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiable. Si les espaces $M^n\mathscr{S}(\vec{F},\vec{E})$ ainsi obtenus sont munis de la topologie $M_{\mathscr{S}}^n(\vec{F},\vec{E})$ induite par $\prod_{m\leq n} L_{\mathscr{S}}(\vec{F},\vec{E}^m)$, on montre encore que la loi de composition dans $M_{\mathscr{S}}^n(\vec{E})$ est indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable. Si de plus $(V',A')$ est une $F$-variété $n$ fois $\mathscr{S}'$-différentiable, l'application: $(v',u')\to v'\circ u'$ de $M_{\mathscr{S}}^n(\vec{G},\vec{F})\times M_{\mathscr{S}}^n(\vec{F},\vec{E})$ dans $M_{\mathscr{S}}^n(\vec{G},\vec{E})$ est indéfiniment $\mathscr{S}$-différentiable. Si $E$ et $F$ sont métrisables, on considèrera en particulier $M_c^n(\vec{F},\vec{E})$, où $c$ est l'ensemble de tous les compacts de $E$.

**Remarque 1.3.** Les $E$-variétés $n$ fois différentiables, où $E$ est un espace localement convexe, sont définies dans [7]. Dans le cas particulier où $E$ est un espace de Banach, la notion de $E$-variété $n$ fois $b$-différentiable est équivalente à celle de [21].

## 2. Espaces fibrés quasi-topologiques.

Dans une catégorie $\mathscr{C}$ nous désignerons par $\mathscr{C}_0$ la classe de ses unités, par $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ les unités à droite et à gauche de $f \in \mathscr{C}$; une unité d'une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$ sera aussi appelée *structure*.

Soit $P$ la catégorie des applications quasi-continues (§1): soit $(P, T, \mathscr{C}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes [8b], où $\Gamma$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathscr{C}$; rappelons qu'alors $T$ est un foncteur de $\mathscr{C}$ vers $P$, qu'un morphisme de $\mathscr{C}$ s'identifie à un triplet $(S', f, S)$, où $S \in \mathscr{C}_0$, $S' \in \mathscr{C}_0$ et $f$ es une application quasi-continue de $T(S)$ dans $T(S')$ et que $(P, T, \Gamma)$ est une espèce de structures. Une unité $\pi$ de $\mathscr{C}$ sera aussi désignée par le couple $(X, \pi)$, où $X$ est l'ensemble sous-jacent à la quasi-topologie $T(\pi)$; un isomorphisme de $\mathscr{C}$, par le couple $(f, (X, \pi))$. Nous supposerons de plus que pour certains couples $((X, \pi), (Y, \eta)) \in \mathscr{C}_0 \times \mathscr{C}_0$, il existe un produit $(X \times Y, \pi \times \eta)$ dans $\mathscr{C}$ tel que $T(X \times Y, \pi \times \eta) = T(\pi) \times T(\eta)$; ce produit est alors parfaitement déterminé. L'injection canonique d'une partie $A$ de l'ensemble $A'$ dans $A$ sera notée $i_A$.

**Définition 2.1.** *On appellera* catégorie de classe $\mathscr{C}$ *un couple* $(G, \gamma) \in \mathscr{C}_0$ *vérifiant les conditions suivantes*:

1) *$G$ est muni d'une structure de catégorie: nous désignerons par $\alpha_G$ et $\beta_G$ les applications source et but dans $G$, par $G'$ la classe des couples composables, par $o_G$ l'application: $(g, f) \to gf$ de $G'$ dans $G$.*

2) *Il existe $(G_0, \gamma_0) \in \mathscr{C}_0$ tel que $(\gamma, i_{G_0}, \gamma_0) \in \mathscr{C}$, $(\gamma_0, \alpha_G, \gamma) \in \mathscr{C}$ et $(\gamma_0, \beta_G, \gamma) \in \mathscr{C}$.*

3) *Il existe $(G \times G, \gamma \times \gamma) \in \mathscr{C}_0$ et $(G', \gamma') \in \mathscr{C}_0$ tels que $(\gamma \times \gamma, i_{G'}, \gamma') \in \mathscr{C}$; cette condition entraîne $(\gamma, o_G, \gamma') \in \mathscr{C}$.*

Les conditions 2 et 3 signifient que $(G, \gamma)$ est une catégorie d'opérateurs $\mathscr{C}$-structurée [8e], si $\mathscr{C}$ est aussi une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$. Elles ont pour conséquences:

$$T(\gamma_0) = T(\gamma)/G_0 \quad \text{et} \quad T(\gamma') < (T(\gamma) \times T(\gamma))/G'.$$

Une catégorie de classe $P$ sera appelée catégorie *quasi-topologique*. En particulier un *groupe quasi-topologique* est un couple $(G, \gamma) \in P$, où $G$ est un groupe et où l'application $o_G$ de $(G \times G,\ \gamma \times \gamma)$ dans $(G, \gamma)$ est quasi-continue. Une catégorie de classe $\tilde{\Delta}_n$ sera appelée *catégorie n fois différentiable.*

**Exemples: 2.1.** Avec les notations du §1, $M^n_\lambda(\vec{E},\vec{E})$ est une catégorie indéfiniment différentiable.

**2.2.** Une catégorie de classe $\tilde{\mathscr{T}}'$ est une catégorie topologique [8d].

**Définition 2.2.** *Soit $(G,\gamma)$ une catégorie de classe $\mathscr{C}$. On dira que $(G,\gamma)$ est une* catégorie d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sur $(Y,\eta)\in\mathscr{C}_0$ *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) *Y est une espèce de structures sur G relativement à une projection p telle que l'on ait $(\gamma,p,\eta)\in\mathscr{C}$. Nous désignerons par $G'/Y$ l'ensemble des couples composables $(s,y)\in G\times Y$ (tels que $p(y)=\alpha_G(s)$), par c l'application:*

$$(s,y)\to sy \quad de \quad G'/Y \quad dans\ Y.$$

2) *Il existe $(G\times Y,\gamma\times\eta)\in\mathscr{C}_0$ et $(G'/Y,\gamma'')\in\mathscr{C}_0$ tels que l'on ait: $(\gamma\times\gamma, i_{G'/Y},\gamma'')\in\mathscr{C}$, et cette condition entraîne $(\gamma,c,\gamma'')\in\mathscr{C}$.*

Ces conditions signifient que $(G,\gamma)$ est une catégorie d'opérateurs $\mathscr{C}$-structurée [8e] sur $(Y,\eta)$, lorsque $\mathscr{C}$ est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$.

**Cas particulier. 2.3.** Si $\mathscr{C}=P$ (resp. $\tilde{\Delta}^n$, resp. $\Delta^{\bar{n}}$), une catégorie d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sera appelée *catégorie d'opérateurs quasi-topologique* (resp. *n fois différentiable*, resp. *$\bar{n}$ fois différentiable*).

**2.4.** Si $\overset{*}{\mathscr{C}}=\tilde{\mathscr{T}}$, une catégorie d'opérateurs de classe $\tilde{\mathscr{T}}$ est une catégorie d'opérateurs topologique (voir [8d].)

**2.5.** Un groupe d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sur $(Y,\eta)\in\mathscr{C}_0$ est un groupe $(G,\gamma)$ de classe $\mathscr{C}$ tel que $G$ soit un groupe d'opérateurs sur $Y$, que l'application: $(s,y)\to sy$ définisse un homomorphisme de $(G\times Y,\gamma\times\eta)$ dans $(Y,\eta)$ appartenant à $\mathscr{C}$ et que $(\gamma,p,\eta)\in\mathscr{C}$, où $p(y)=e=$ unité de $G$.

**Proposition 2.1.** *Si $(G,\gamma)$ est une catégorie d'opérateurs de classe P (resp. $\tilde{\Delta}^n$) sur $(Y,\eta)$, la catégorie des hypermorphismes associée à l'espèce de structures $(G,p,Y)$ est une catégorie de classe P* (resp. $\tilde{\Delta}^n$).

En effet cette catégorie [8b] est formée des couples composables $(s, y)$ et appartient à $\mathscr{C}_0$ en vertu de la condition 2, Définition 2.2; la loi de composition étant définie par:

$$((s', y'), (s, y)) \to (s's, y) \text{ si, et seulement si,} y' = s(y)$$

elle est quasi-continue (resp. $n$ fois différentiable) en même temps que l'application $(s', s) \to s's$, en vertu des Théorèmes 1.1, Chapitre II et 2.2. Chapitre III.

Supposons désormais $P$ (resp. $\bar{P}$) muni de sa structure de catégorie inductive régulière à droite [8c] définie au §1.

**Définition 2.3.** *On dira que $\mathscr{C}$ est* une catégorie inductive à produit au-dessus de $P$ *(resp. $\bar{P}$) si $\mathscr{C}$ est une catégorie inductive au-dessus de $P$ (resp. $\bar{P}$) relativement à $T$, vérifiant les conditions:*

1) *Il existe une sous-classe $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}_0 \times \mathscr{C}_0$ telle que, si $(S, S') \in \mathscr{C}'$, $S$ et $S'$ admettent un produit $S \times S'$ dans $\mathscr{C}$ pour lequel:*

$$T(S \times S') = T(S) \times T(S').$$

2) $S_1 < S$, $S_1' < S'$ *et* $(S, S') \in \mathscr{C}'$ *entraînent* $(S_1, S_1') \in \mathscr{C}'$.

3) *Soient* $(S, S') \in \mathscr{C}'$, $(S, S_1') \in \mathscr{C}'$ *et* $(S_1, S') \in \mathscr{C}'$; *alors on a:*

$$S \times (S' \cap S_1') = (S \times S') \cap (S \times S_1') \text{ et } (S \cap S_1) \times S' = (S \times S') \cap (S_1 \times S').$$

Les conditions $S = (X, \pi)$, $S' = (X', \pi')$ et $(S, S') \in \mathscr{C}'$ entraînent

$$S \times S' = (X \times X', \pi \times \pi').$$

**Exemples.** $\tilde{P}'$, $\tilde{\Delta}^n$ et $\Delta^{\bar{n}}$ sont des catégories inductives à produit au-dessus de $P$.

**Proposition 2.2.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie inductive à produit au-dessus de $P$. Soient $(S_i, S_i') \in \mathscr{C}'$, où $i \in I$ et $S_{ii'} = S_i \times S_i'$. Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

1) $S_i < S_j$, $S_i' < S_j'$ *entraînent* $S_{ii'} < S_{jj'}$.

2) $S_{ii'} < S_{jj'}$ *et* $S_i' = S_j'$ *entraînent* $S_i < S_j$.

3) $S_{ii'} < S_{\kappa\kappa'}$ *et* $S_{jj'} < S_{\kappa\kappa'}$ *entraînent* $S_{ii'} \cap S_{jj'} = (S_i \cap S_j) \times (S'_i \cap S'_j)$

4) *Soit* $I' \subset I$, $S_{ii'} < S_{jj'}$ *et* $S'_i = S'_j$ *pour tout* $i \in I'$; *alors on a*:

$$\bigcup_{i \in I'} S_{ii'} = \left( \bigcup_{i \in I'} S_i \right) \times S'_j.$$

Résulte des définitions.

Nous supposerons désormais que $\mathscr{C}$ est une catégorie inductive à produit au-dessus de $P$, relativement au foncteur $T$, que $\mathscr{C}$ est régulière à droite et que $T(fs) = T(f)\,T(s)$ si, $f \in \mathscr{C}$, $s \in \mathscr{C}_0$, et $s < \alpha(f)$, où $fs$ et $T(f)\,T(s)$ sont des pseudoproduits. Soit $\Gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathscr{C}$, supposé distingué [8c] dans $\mathscr{C}$. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$ des sous-pseudogroupes faibles [8c] de $\mathscr{C}$ tels que $(S, S') \in \mathscr{C}'$ pour tout $S \in \mathscr{B}_0$ et $S' \in \mathscr{F}_0$. Nous supposerons que $T(\Gamma)$, $T(\mathscr{B})$ et $T(\mathscr{F})$ sont des sous-groupoïdes saturés [8b] de $P$. Soient $\tilde{\mathscr{C}}$, $\tilde{\mathscr{B}}$ et $\tilde{\mathscr{F}}$ les catégorie et groupoïdes inductifs obtenus par élargissement complet de $\mathscr{C}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$ resp. au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$.

Dans la suite $G$ désignera un groupe, $G^t$ le groupe des translations à gauche de $G$ et $G^-$ l'ensemble support de $G$, identifié à l'ensemble support de $G^t$. Nous supposerons que $(G, \gamma)$ est un groupe d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sur $(Y, \eta) \in \mathscr{F}_0$ et que l'application $\sigma \to (\eta, \sigma, \eta)$ est une injection de $G$ dans $\mathscr{F}$, en désignant aussi par $\sigma$ l'application $y \to \sigma y$, où $y \in Y$. Alors $(G^t, \gamma)$ est un groupe d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sur $(G^-, \gamma)$.

Soit $\Phi(Y, G, \mathscr{B})$ la classe de tous les éléments $\bar{\phi} = ((X_2 \times Y, \pi_2 \times \eta), \phi, (X_1 \times Y, \pi_1 \times \eta)) \in \Gamma$ de la forme suivante: Soient $x \in X_1$, $y \in Y$; alors $\phi(x, y) = (g(x), s_x(y))$ où $s_x \in G$, $((X_2, \pi_2), g, (X, \pi)) \in \mathscr{B}$, $((G,\gamma), s, (X_1, \pi_1)) \in \mathscr{C}$ et $((G, \gamma), s^{-1}, (X_1, \pi_1)) \in \mathscr{C}$, $s$ et $s^{-1}$ désignant les applications: $x \to s_x$ et $x \to s_x^{-1}$ resp.

**Théorème 2.1.** $\Phi(Y, G, \mathscr{B}) = \Phi$ *est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathscr{C}$.

**Démonstration.** Soient $S = (X \times Y, \pi \times \eta) \in \Phi_0$ et $S' = (X' \times Y, \pi' \times \eta)$ $\in \Phi_0$; puisque $\mathscr{B}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathscr{C}$ on a $\pi \cap \pi' \in \mathscr{B}_0$,. Soit $e_X$ l'application: $x \to e$, où $x \in X$ et $e$ est l'unité de $G$; alors $\bar{e}_X = (\gamma, e_X, \pi) \in \mathscr{C}$ et $(\gamma, e_X, \pi') \in \mathscr{C}$; puisque $T(\bar{e}_X(\pi \cap \pi')) = T(\bar{e}_{X'}(\pi \cap \pi'))$, $\alpha(\bar{e}_X(\pi \cap \pi')) = \alpha(\bar{e}_{X'}(\pi \cap \pi')) = \pi \cap \pi'$ et $\beta(\bar{e}_X(\pi \cap \pi')) = \beta(\bar{e}_{X'}(\pi \cap \pi')) = \gamma$, on obtient

$\bar{e}_X(\pi \cap \pi') = \bar{e}_{X'}(\pi \cap \pi')$, d'où $S \cap S' = (\pi \cap \pi')| \times \eta \in \Phi_0$. Soient $\bar{\phi} = (\pi_2 \times \eta, \phi, \pi_1 \times \eta) \in \Phi$ et $S = \pi \times \eta < \alpha(\bar{\phi}), S \in \Phi_0$. Le pseudo-produit $\bar{\phi} S$ admet $S$ pour unité à droite puisque $\mathscr{C}$ est régulière à droite; d'après la Proposition 2.2, $\pi < \pi_1$; donc $(\gamma, sT(\pi), \pi) \in \mathscr{C}$ et $(\gamma, s^{-1}T(\pi), \pi) \in \mathscr{C}$; il en résulte $\bar{\phi} S \in \Phi$. Soient $\bar{\phi}_i = (\pi_i' \times \eta, \phi_i, \pi_i \times \eta) \in \Phi$, où $i \in I$ et $\bar{\phi}_i < \bar{\phi} \in \Phi$; des relations: $\bigcup_{i \in I} \pi_i \in \mathscr{B}_0$, $(\gamma, \bigcup_{i \in I} e_{X_i}, \bigcup_{i \in I} \pi_i) \in \mathscr{C}$, on déduit $S = \bigcup_{i \in I} \alpha(\bar{\phi}_i) \in \Phi_0$, d'où $\bigcup_{i \in I} \bar{\phi}_i = \bar{\phi} S \in \Phi$. Donc $\Phi$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathscr{C}$.

**Définition 2.4.** *On appellera* pseudogroupe admissible pour $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ *ou $\mathscr{C}$ un sous-pseudogroupe faible $\Phi'$ de $\Phi(G, Y, \mathscr{B})$ vérifiant la condition: Soit $(X \times Y, \pi \times \eta) \in \alpha(\Phi')$; pour tout $\sigma \in G$ et tout $\bar{x} \in X$, il existe $(\phi', (X \times Y, \pi \times \eta)) \in \Phi'$ tel que $\varphi'(\bar{x}, y) = (g(\bar{x}), \sigma y)$. Si $\Phi'$ est admissible pour $(\mathscr{C}, \Gamma)$, on dira seulement que $\Phi'$ est* admissible pour $\mathscr{C}$.

**Définition 2.5.** *Soient $\Phi'(Y, G, \mathscr{B}) = \Phi'$ un pseudogroupe admissible pour $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ et $\tilde{\Phi}'$ le groupoïde inductif obtenu par élargissement complet de $\Phi'$ au-dessus de $\mathscr{T}'$; une structure de $\tilde{\Phi}'$ sera appelée* espace fibré de classe $\Phi'$, de fibres isomorphes à $(Y, \eta)$ et de groupe structural $(G, \gamma)$. *La classe de tous les espaces fibrés tels que $\mathscr{C}, \mathscr{B}, \mathscr{F}$ soient donnés et $\Phi', (Y, \eta)$* et $(G, \gamma)$ *variables sera désignée par $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \mathscr{F}]$.*

Un espace fibré de classe $\Phi'$ s'identifie à un couple $(M, A)$, où $M$ est un ensemble et $A$ un atlas complet sur $M$, compatible avec $\Phi'$ et tel que la topologie $\tau(A)$ sous-jacente soit séparée. La carte locale $(f, (X \times Y, \pi \times \eta)) \in A$ sera notée seulement $f$. Pour tout $x \in X$, l'application $f_x \cdot y \to f(x, y)$ définit un isomorphisme de $(Y, \eta)$ sur un sous-ensemble $f_x(Y)$ de $M$, qui est par suite muni d'une structure de $\tilde{\mathscr{F}}$.

**Proposition 2.3.** *Soit $(M, A) \in \tilde{\Phi}_0'(Y, G, \mathscr{B})$; les ensembles $f_x(Y)$, où $f \in A$, forment une partition de $M$ et l'ensemble $B$ quotient de $M$ par la relation d'équivalence associée est muni d'une structure de $\tilde{\mathscr{B}}$.*

**Démonstration.** Munissons toute structure $(X \times Y, \pi \times \eta) \in \Phi_0'$ de la relation d'équivalence définie par la projection canonique de $X \times Y$ sur $X$; un isomorphisme de $\Phi'$ est aussi un isomorphisme pour ces relations; par suite l'atlas $A$ définit sur $M$ une relation d'équivalence dont les classes sont les ensembles $f_x(Y)$. Soit $B$ l'espace quotient de $M$ par cette relation; l'application $f^B: x \to f_x(Y)$ est un isomorphisme de $X$ sur un sous-ensemble de $B$. L'égalité $f^B(x) = f'^B(x')$, où $f' \in A$, signifie que, pour tout $y \in Y$, il existe $y' \in Y$ tel que $f(x,y) = f'(x',y')$; puisque $f^{-1}f' = \phi \in \Phi'$, on a

$$f(x,y) = f\phi(x',y') = f(g(x'), s_{x'}(y')),$$

d'où $x = g(x')$ et $f'_{x'} = f_x s_{x'}$. Par conséquent $f^{B-1}f'^B = g$ et les couples $(f^B, (X,\pi))$ engendrent un atlas complet $A^B$ compatible avec $\mathscr{B}$, c'est-à-dire $(B, A^B) \in \tilde{\mathscr{B}}_0$.

**Définition 2.6.** *Avec les notations de la Proposition* 2.3, $(B, A^B)$ *est appelé* base de $(M, A)$ *et* $f_x(Y)$, *muni de sa structure de* $\tilde{\mathscr{F}}_0$, fibre de $(M, A)$.

Soit $m$ l'application canonique de $M$ sur $B$; la fibre $m^{-1}(b)$ sera désignée par $M_b$. L'application $m$ agrégat des applications $f^B p f^{-1}$ où $f \in A$ et $p$ est la projection canonique de $(X \times Y, \pi \times \eta)$ sur $(X, \pi)$ appartient à $\tilde{\mathscr{C}}$; en particulier $m$ est quasi-continue pour les quasi-topologies $\nu(A)$ et $\nu(A^B)$ sur $M$ et $B$ sous-jacentes à $A$ et $A^B$.

**Exemples: 2.3.** Si $\mathscr{C} = P$ (resp. $\tilde{\Lambda}^n$, resp. $\Lambda^{\bar{n}}$), un élément de $\tilde{\Phi}_0(Y, G, \Pi)$ (resp. $\tilde{\Phi}_0(Y, G, \tilde{\Lambda}^n)$, resp. $\tilde{\Phi}_0(Y, G, \Lambda^{\bar{n}})$) sera appelé *espace fibré quasi-topologique* (resp. *n fois*, resp. *$\bar{n}$ fois, différentiable*). Remarquons que si $(Y, \eta) \in P$ et si $G$ est un groupe de quasi-homéomorphismes de $(Y, \eta)$, on obtient un espace fibré quasi-topologique de fibres quasi-isomorphes à $(Y, \eta)$ de la façon suivante:

Soit $\Phi(Y, G, \Pi)$ le pseudo-groupe formé des quasi-homéomorphismes $(X_2 \times Y, \pi_2 \times \pi), \phi, (X_1 \times Y, \pi_1 \times \eta))$ tels que $\phi(x,y) = (x, s_x y), (X_i, \pi_i) \in P_0$, l'application $x \to s_x$ étant quelconque. *Si on munit $G$ de la quasi-topologie de la convergence locale, un élément de l'élargissement complet de* $\Phi(Y, G, \Pi)$ *au-dessus de* $\mathscr{T}'$ *est un espace fibré quasi-topologique.*

En effet les applications: $(\sigma', \sigma) \to \sigma'\sigma$ et $(y, \sigma) \to \sigma y$, où $\sigma \in G$, $\sigma' \in G$ et $y \in Y$, sont quasi-continues d'aprés le Théorème 1.1 du Chapitre II; de plus la quasi-continuité de $\phi$ entraîne celle de l'application $x \to s_x$ de $(X, \pi)$ dans $(G, \lambda)$.

**2.4.** Si $\mathscr{V}$ désigne le sous-pseudogroupe de $\Pi'$ formé des quasi-isomorphismes d'un espace quasi-localement convexe sur un autre, un élément de $P'[\Pi', \mathscr{V}]$ (resp. $\Delta^{\bar{n}}[\Lambda^n, \mathscr{V}]$) sera appelé *espace fibré vectoriel quasi-localement convexe* (resp. *$\bar{n}$ fois différentiable*).

**2.5.** En remplaçant dans les exemples précédents $P$ et $\tilde{P}'$ par $\mathscr{T}'$, on retrouve [8e] les espaces fibrés à groupe structural topologique, les espaces fibrés $n$ fois différentiables et les espaces fibrés vectoriels.

**Remarques 2.1.** On pourrait plus généralement définir des structures fibrées en partant d'une catégorie inductive $\mathscr{C}$ à produit au-dessus de $\bar{P}$; on obtiendrait ainsi des espaces fibrés dont la quasi-topologie sous-jacente ne serait pas séparée.

**2.2.** Soient $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{F}'$ deux groupoïdes inductifs au-dessus de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$ resp. relativement aux foncteurs $T^B$ et $T^F$. Soient $S \in \mathscr{F}'_0$, $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(T^F(S), G, \mathscr{B})$ et $G \subset T^F(\mathscr{F}')$. Alors l'application $f_x$, où $f \in A$, munit $M_b$ d'une structure de l'élargissement complet de $\mathscr{F}'$ au-dessus de $\mathscr{T}'$. Si de plus $AA^{-1} \subset T^B(\mathscr{B}')$, la base $B$ est munie d'une structure de l'élargissement complet de $\mathscr{B}'$ au-dessus de $\mathscr{T}'$ (voir [8b]), en supposant que $\cup \mathscr{B}'_0$ existe.

**Théorème 2.2.** *Soit $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$ de base $(B, A^B)$; l'ensemble $H$ des applications $f_x$, où $(f, (X, \pi)) \in A$ et $x \in X$, est muni d'une structure fibrée élément de $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \Gamma]$, de classe $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$, de fibres isomorphes à $(G^-, \gamma) \in \mathscr{C}_0$, de groupe structural $(G^t, \gamma)$.*

**Démonstration.** Soient $b \in B$ et $H_b$ l'ensemble des $f_x \in H$ tels que $f_x(Y) = M_b$; d'après la démonstration de la Proposition 2.3, on a $H_b \subset f_x G$; de plus pour tout $\sigma \in G$ il existe $\phi' \in \Phi'(Y, G, \mathscr{B}) = \Phi'$ tel que $\phi'(x, y) = (g(x), \sigma y)$; l'application $f\phi'^{-1} \in A$ associe à $(g(x), \sigma^{-1} y)$ le couple $f(x, y)$; par suite $f\,\phi'^{-1}_{g(x)} = f_x \sigma \in H_b$, donc $H_b = f_x G$ et $H_b$ est quasi-homéomorphe à $G$. Soit $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ le groupoïde des éléments $(\phi^H, (X \times G^-, \pi \times \gamma))$ tels que $(\phi, (X \times Y, \pi \times \eta)) \in \Phi'$, $\phi(x, y) = (g(x), s_x y)$ et $\phi^H(x, \sigma) = (g(x), s_x \sigma)$; alors $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ est un pseudogroupe admissible pour $(\mathscr{C}, \Gamma)$. Pour tout $(f, (X, \pi)) \in A$, soit $f^H$ l'application de $(X \times G^-, \pi \times \gamma)$ sur un sous-ensemble de $H$ définie par $(x,\sigma) \to f_x\sigma$; soit $A^H$ l'ensemble de ces applications qui est en correspondance biunivoque avec $A$ par l'application: $f \to f^H$; si $f' \in A$ et $f'^{-1}f(x,y) = (g(x), s_x(y))$, on aura:

$$(f^H(x,\sigma))(y) = f_x\sigma(y) = f(x,\sigma(y)) = f'(g(x), s_x\sigma(y)) = f'^H(g(x), s_x\sigma)(y);$$

par suite $(f'^H)^{-1} f^H \in \Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$; on en déduit que $A^H$ est un atlas complet définissant sur $H$ une structure de classe $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$, de base $(B, A^B)$.

**Définition 2.7.** *On appelle* pseudogroupe principal *un pseudogroupe $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ admissible pour $\mathscr{C}$ tel que $G^-$ soit l'ensemble sous-jacent à un groupe $G$ et que $G^t$ soit le groupe des translations à gauche de $G$. Le pseudogroupe $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ construit dans le Théorème* 2.2 *est appelé* pseudogroupe principal associé à $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$. *Si $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ est un pseudogroupe principal, un élément de $\tilde{\Phi}'_0(G^-, G^t, \mathscr{B})$ est appelé* espace fibré principal.

**Remarque 2.3.** Comme dans le cas des espaces fibrés topologiques [8c] on peut montrer que *si $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$, le groupoïde $HH^{-1}$* des triplets $(H_{b'}, h'h^{-1}, H_b) \in \tilde{\mathscr{F}}$ *est un groupoïde de classe $\mathscr{C}$ localement trivial de classe $\mathscr{C}$*, c'est-à-dire vérifie la condition: Pour tout $e \in (HH^{-1})_0$, il existe $U(e) < ((HH^{-1})_0, \eta'_0)$ et $((HH^{-1}, \eta'), k, U(e)) \in \mathscr{C}$ tels que $\alpha(k(e')) = e'$ et $\beta(k(e')) = e$ pour tout $e' \in U(e)$.

**Proposition 2.4.** *Soit $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$ un pseudogroupe admissible pour $\mathscr{C}$. Le sous-groupoïde plein de $\tilde{\Phi}'(Y, G, \mathscr{B})$ ayant pour unités les espaces fibrés $(M, A)$ de même base $(B, A^B)$ admet un groupoïde réduit* [8b] *canonique.*

**Démonstration.** Soit $(f, (X \times Y, \pi \times \eta)) \in A$ et $f^B \in A^B$ l'élément correspondant à $f$. Soit $\Sigma$ l'ensemble somme des ensembles $f^B(X) \times Y$, où $f \in A$. Soit $\mu$ la relation d'équivalence sur $\Sigma$:

$$(f^B(x), y) \;\mu\; (f'^B(x'), y') \text{ si et seulement si } f(x,y) = f'(x', y').$$

Soit $\bar{M}$ l'ensemble quotient de $\Sigma$ par $\mu$ et $\bar{A}$ l'ensemble des éléments $(\bar{f},(X \times Y, \pi \times \eta))$, où $\bar{f}(x,y) = (f^B(x), y) \bmod \mu$. Alors $\bar{A}$ est un atlas complet compatible avec $\Phi'(Y,G,\mathscr{B})$ déterminant sur $M$ une structure de $\tilde{\Phi}'(Y,G,\mathscr{B})$, de base $(B, A^B)$. L'application $\bar{v}: f(x,y) \to \bar{f}(x,y)$ est un isomorphisme de $M$ sur $\bar{M}$ et l'application $v: f \to \bar{v}f$ est une application biunivoque de $A$ sur $\bar{A}$, donc $((\bar{M},\bar{A}),\bar{v},(M,A)) \in \tilde{\Phi}'(Y,G,\mathscr{B})$. Si $((M,A),w,(M_1,A_1)) \in \tilde{\Phi}'(Y,G,\mathscr{B})$ et si $(M_1,A_1)$ est de base $(B,A^B)$, on a $(\bar{M},\bar{A}) = (\bar{M}_1,\bar{A}_1)$. Donc la classe des espaces fibrés $(\bar{M},\bar{A})$ est un groupoïde réduit du groupoïde des isomorphismes entre espaces fibrés de base $(B,A^B)$.

**Corollaire.** *$\tilde{\Phi}'(Y,G,\mathscr{B})$ admet un groupoïde réduit canonique.*

En effet, soit $(M,A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y,G,\mathscr{B})$ et soit $\Sigma'$ l'ensemble somme des ensembles $X \times Y$, où $(f,(X \times Y, \pi \times \eta)) \in A$; soit $\mu'$ la relation d'équivalence sur $\Sigma'$:

$$(x,y) \sim (x',y') \text{ si, et seulement si, } f(x,y) = f'(x',y').$$

Par une construction analogue à celle de la proposition, on montre que $((\bar{M}',\bar{A}'),j,(\bar{M},\bar{A})) \in \tilde{\Phi}'(Y,G,\mathscr{B})$, où:

$$j((f^B(x),y) \bmod \mu) = (x,y) \bmod \mu'.$$

$(\bar{M}',\bar{A}')$ ne dépend pas de la base $(B,A^B)$ de $(M,A)$.

L'espace fibré $(\bar{M},\bar{A}) \in \tilde{\Phi}'_0(Y,G,\mathscr{B})$ construit dans la démonstration de la Proposition 2.4, de base $(B,A^B)$, sera désigné par le symbole $\bar{M}((B,A^B),(Y,\eta),(G,\gamma),\bar{H})$, ou $\bar{M}(B,Y,G,\bar{H})$.

**Définition 2.8.** *On dira que deux pseudogroupes $\Phi'(Y,G,\mathscr{B})$ et $\Phi'(Y',G',\mathscr{B})$ admissibles pour $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sont* associés *s'il existe un foncteur naturalisé $(K, k \times u)$ vérifiant les conditions suivantes:*

1) *$K$ est un foncteur inductif de $\Phi'(G^-,G^t,\mathscr{B})$ vers $\Phi'(G'^-,G'^t,\mathscr{B})$.*

2) *Pour tout $e = (X \times G^-, \pi \times \gamma) \in \Phi'_0(G^-,G^t,\mathscr{B})$, l'élément $(k \times u)(e)$ est de la forme $k(e) \times u$, où $(k(e),(X,\pi)) \in \mathscr{B}$, $((G'^-,\gamma'),u,(G^-,\gamma)) \in \mathscr{C}$ et $u$ est une représentation de $G$ dans $G'$.*

3) *L'application $k$ de $\Phi'_0(G^-,G^t,\mathscr{B})$ dans $\mathscr{B}$ est inductive.*

Rappelons [8b] que $(K, k \times u)$ est un foncteur naturalisé si, et seulement si, $(K, k \times u, Id)$ est une transformation naturelle du foncteur injection $Id$ de $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ dans $\mathscr{C}$ vers le foncteur $K$; les conditions 1, 2, 3 entraînent que $(K, k \times u)$ est un foncteur naturalisé inductif [8b] de $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ dans $\Phi'(G'^-, G'^t, \mathscr{B})$. L'application $k(e) \times u$ associe à $(x, \sigma) \in X \times G^-$ l'élément $(k(e)(x), u(\sigma))$. Soit $K^B$le foncteur déduit de $K$ par le foncteur projection canonique $\psi$ de $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ dans $\mathscr{B}$; alors $(K^B, k)$ est un foncteur naturalisé inductif de $\psi(\mathscr{B})$ vers $\mathscr{B}$ où $k(\psi(e)) = k(e)$.

Si $\Phi'$ et $\Phi'_1$ sont associés par $(K, k \times u)$ et si $\Phi'_1$ et $\Phi''$ sont associés par $(K', k' \times u')$, alors $\Phi'$ et $\Phi''$ sont associés par $(K'K, (k' \times u')K \cdot (k \times u))$, où

$$(k' \times u')K \cdot (k \times u)(e) = (k' \times u')(K(e)).(k \times u)(e).$$

**Proposition 2.5.** *Pour que deux pseudogroupes* $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$ *et* $\Phi'(Y', G', \mathscr{B})$ *admissibles pour* $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ *soient associés, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*:

1) *Il existe un foncteur naturalisé inductif* $(K^B, k)$ *de* $\psi(\mathscr{B})$ *vers* $\mathscr{B}$ *(tel que, pour tout* $(X, \pi) \in \psi(\mathscr{B})_0$, *on ait* $k(X, \pi) \in \mathscr{B}$*).*

2) *Il existe une représentation* $u$ *de* $G$ *dans* $G'$ *telle que l'on ait* $((G'^-, \gamma'), u, (G^-, \gamma)) \in \mathscr{C}$.

3) *Pour tout* $(\phi, (X \times Y, \pi \times \eta)) \in \Phi'(Y, G, \mathscr{B})$, *avec* $\phi(x, y) = (g(x), s_x y)$, *l'application* $r(\phi)$: $(x', y') \to (k(g(X))(g(x)), u(s_x)y')$, *où* $x' = k(X)(x)$ *et* $y' \in Y'$, *appartient à* $\Phi'(Y', G', \mathscr{B})$.

*Si ces conditions sont vérifiées,* $r$ *est un foncteur inductif de* $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$ *vers* $\Phi'(Y', G', \mathscr{B})$.

En effet, soit $\phi \to \phi^H$ l'application de $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$ sur $\Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ construite au Théorème 2.2. Les conditions de la proposition sont nécessaires, $r$ étant le foncteur: $\phi \to \phi'$ si, et seulement si, $\phi'^{H'} = K(\phi^H)$. Si les conditions sont vérifiées, l'association est définie par $(K, k \times u)$, où $K$ est le foncteur:

$$\phi^H \to (r(\phi))^{H'}.$$

**Définition 2.9.** *On dira que* $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$ *et* $(M', A') \in \tilde{\Phi}'_0(Y', G', \mathscr{B})$ *sont* associés dans $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \mathscr{F}]$ *si les conditions suivantes sont vérifiées*:

1) $\Phi'(Y, G, \mathscr{B})$ *et* $\Phi'(Y', G', \mathscr{B})$ *sont associés par* $(K^B, k, r)$ (notations de la Proposition 2.5).

2) *Il existe une application* $\bar{r}$ *de* $A$ *dans* $A'$ *telle que* $M' = \cup\ \beta(\bar{r}(A))$ *et que, pour tout* $f \in A$ *et tout* $f_1 \in A$, *on ait* $\bar{r}(f)^{-1}\bar{r}(f_1) = r(f^{-1}f_1)$, *où* $f^{-1}f_1$ *et* $\bar{r}(f)^{-1}\bar{r}(f_1)$ *sont des pseudoproduits.*

La condition 2 entraîne que $A'$ est le plus petit atlas complet compatible avec $\Phi'(Y', G', \mathscr{B})$ contenant $\bar{r}(A)$; par suite $A'$ est entièrement déterminé par la donnée de $A$ et de l'association.

**Remarque 2.4.** La condition 2 de la Définition 2.9. signifie que les atlas complets $A$ et $A'$ sont associés au sens de [8b]; la notion plus précise que nous introduisons ici tient compte des propriétés particulières aux structures fibrées; si les espaces considérés sont des espaces fibrés topologiques, elle coïncide avec la notion usuelle d'association [8c].

**Proposition 2.6.** *Si* $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$ *et* $(M', A') \in \tilde{\Phi}'_0(Y', G', \mathscr{B})$ *sont associés dans* $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \mathscr{F}]$, $M'$ *admet une structure de* $\tilde{\Phi}_0(Y', G, \mathscr{B})$ *qui est une superstructure de* $(M', A')$ [8b], *si* $(Y, \eta') \in \mathscr{C}'$.

En effet, $(G, \gamma)$ est un groupe d'opérateurs de classe $\mathscr{C}$ sur $(Y', \eta')$ pour la loi de composition: $(s, y') \to u(s)y'$, en considérant $s$ comme une application de $Y'$ dans $Y'$. La classe $\bar{r}(A)$ se complète en atlas complet définissant sur $M'$ une structure de $\tilde{\Phi}'_0(Y', G, \mathscr{B})$.

$(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$ et l'espace fibré principal $(H, A^H)$ construit au Théorème 2.2 sont associés dans $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \Gamma]$; on appellera $(H, A^H)$ *l'espace fibré principal associé à* $(M, A)$.

Si $(M, A)$ et $(M', A')$ sont isomorphes dans $\tilde{\Phi}'(Y, G, \mathscr{B})$, ils sont associés. Par suite pour vérifier que $(M, A)$ et $(M', A')$ sont associés, il suffit de vérifier que $\bar{M}(B, Y, G, \bar{H})$ et $\bar{M}'(B', Y', G', \bar{H}')$ (Proposition 2.4) sont associés, ou même que $\bar{H}(B, G^-, G^t, \bar{H}^*)$ et $\bar{H}'(B', G'^-, G^t, \bar{H}'^*)$ sont associés.

**Théorème 2.3.** *Soient* $(H, A) \in \tilde{\Phi}'_0(G^-, G^t, \mathscr{B})$ *et* $(H', A') \in \tilde{\Phi}'_0(G'^-, G'^t, \mathscr{B})$ *deux espaces fibrés principaux associés dans* $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \mathscr{F}]$. *Alors il existe* $((B', A^{B'}), w^B, (B, A^B)) \in \tilde{\mathscr{B}}$, *où* $(B, A^B)$ *et* $(B', A^{B'})$ *sont les bases de* $(H, A)$ *et* $(H', A')$ *resp.*

**Démonstration.** Pour tout $f \in A$, désignons par $w(f)$ l'application $z \to \bar{K}(f)(k \times u)(\alpha(f))f^{-1}(z)$ de $\beta(f)$ sur $\beta(\bar{K}(f))$, où $(K, k \times u)$ est le foncteur naturalisé définissant l'association des pseudogroupes et $\bar{K}$ l'application de $A$ dans $A'$ appelée $\bar{r}$ dans la Définition 2.9. Montrons que l'ensemble des applications $w(f)$ est compatible [8b]. En effet, soit $f_1 \in A$ et $z \in \alpha(w(f)) \cap \alpha(w(f_1))$; il existe $\phi \in \Phi'(G^-, G^t, \mathscr{B})$ tel que $f_1 = f\phi$; la relation $\bar{K}(f_1) = \bar{K}(f)K(\phi)$ entraîne: $w(f_1)(z) = \bar{K}(f)(K(\phi)(k \times u)(\alpha(\phi)\phi^{-1})f^{-1}(z) = w(f)(z)$ donc $\alpha w(f) \cap w(f_1)) = \alpha(w(f)) \cap \alpha(w(f_1))$. Soit $z' \in \beta(w(f)) \cap \beta(w(f_1))$, d'après la condition 2 de la Définition 2.9, il existe $\xi'$ tel que $\bar{K}(f_1)(\xi') = z' = \bar{K}(f)(\xi'')$, où $\xi'' = K(\phi)(\xi')$. Puisque, pour tout $\sigma \in G$, on a $\bar{K}(f_1)(\xi'\sigma) = \bar{K}(f_1)(\xi')\sigma$, on peut supposer $\xi' \in Xu \times (G)$; alors $\xi'' \in X \times u(G)$. Soit $\xi \in \alpha(\phi)$ tel que

$$(k \times u)(\alpha(\phi))(\xi) = \xi';$$

de la relation: $(k \times u)(\beta(\phi))\phi(\xi) = K(\phi)(k \times u)(\alpha(\phi))(\xi)$, on déduit $(k \times u)(\beta(\phi))\phi(\xi) = \xi''$ et $f_1(\xi) = f\phi(\xi) = z$, d'où $\beta(w(f)) \cap \beta(w(f_1) = \beta(w(f) \cap w(f_1))$. Ceci montre que l'ensemble des morphismes $w(f)$ est une sous-classe complète de $\mathscr{C}$, donc il existe un morphisme $w \in \tilde{\mathscr{C}}$ tel que $w = \bigcup w(f), f \in A$. Puisque pour tout $f \in A$ le morphism $w(f^B) = (\bar{K}(f))^{B'} k(X, \pi)(f^B)^{-1}$ appartient à $\tilde{\mathscr{B}}$, l'application $w^B$ déduite de $w$ par passage au quotient, qui est l'agrégat des applications $w(f^B)$, définit un isomorphisme de $(B, A^B)$ sur $(B', A'^{B'})$ dans $\tilde{\mathscr{B}}$.

**Corollaire.** *Pour qu'il existe un élément de $\tilde{\Phi}_0(Y', G', \mathscr{B})$ qui soit associé à $(M, A) \in \tilde{\Phi}'_0(Y, G, \mathscr{B})$ dans $\mathscr{C}[\mathscr{B}, \mathscr{F}]$, il faut et il suffit qu'il existe:*

1) $((B', A'^{B'}), w^B, (B, A^B)) \in \tilde{\mathscr{B}}$;

2) $((G'^-, \gamma'), u, (G^-, \gamma)) \in \mathscr{C}$ *tel que $u$ soit une représentation de $G$ dans $G'$.*

**Démonstration.** Les conditions sont nécessaires d'après le théorème. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit $(\bar{H}, \bar{A}) = \bar{H}(B, G^-, G^t, \bar{H}^*)$ l'espace fibré principal associé à $(M, A)$, de la forme indiquée dans la Proposition 2.4. Soit $\bar{f} \in \bar{A}$ et $\bar{f}(x, \sigma) = (f^B(x), s_x\sigma)$. Si $K'$ est l'application $\bar{f} \to \bar{f}'$, où $\bar{f}' \in \bar{A}'$ est la carte:

$$(x, \sigma') \to (w^B f^B(x), u(s_x)\sigma'),$$

$(\bar{H}, \bar{A})$ et $(\bar{H}', \bar{A}')$ sont associés par $(id \times u, \bar{K}')$, où $\bar{H}' = \bigcup \beta(\bar{A}')$.

**Définition 2.10.** *Soient* $(H,A)\in\mathscr{C}[\mathscr{B},\mathscr{F}]$ *et* $(H',A')\in\mathscr{C}[\mathscr{B},\mathscr{F}]$ *deux espaces fibrés principaux de bases* $(B,A^B)$ *et* $(B',A^{B'})$ *resp. et de groupes structuraux* $(G^t,\gamma)$ *et* $(G'^t,\gamma)$ *respectivement. On appelle* homomorphisme strict de $(H,A)$ *dans* $(H',A')$ *un élément* $((H',A'),w,(H,A))\in\tilde{\mathscr{C}}$ *vérifiant les conditions suivantes*:

1) *Pour tout* $b\in B$, *la restriction* $w_b$ *de* $w$ *à* $H_b$ *est de la forme*:

$$w_b(h\sigma)=w_b(h)u(\sigma),\ \textit{où}\ h\in H,\ \sigma\in G,\qquad ((G'^-,\gamma'),u,(G^-,\gamma))\in\mathscr{C}$$

*et u est une répresentation de G dans G'.*

2) *Soit* $w^B$ *l'application*: $b\to b'$, *où* $\beta(w_b)=H'_{b'}$; *alors on a*:

$$((B',A^{B'}),w^B,(B,A^B))\in\tilde{\mathscr{B}}.$$

**Théorème 2.4.** *Si* $(H,A)\in\tilde{\Phi}'_0(G^-,G^t,\mathscr{B})$ *et* $(H',A')\in\tilde{\Phi}'_0(G'^-,G^t,\mathscr{B})$ *sont associés, il existe un homomorphisme strict de* $(H,A)$ *dans* $(H',A')$.

**Démonstration.** Soit $w=\bigcup w(f)$, où $f\in A$, l'application de $(H,A)$ dans $(H',A')$ construite dans la démonstration du Théorème 2.4. Soient $h\in H$ et $\sigma\in G$; si $f^{-1}(h)=(x,\sigma')$, on a $f^{-1}(h\sigma)=(x,\sigma'\sigma)$ et

$$w(f)(h)=f'(k(X,\pi)(x),u(\sigma')),$$

d'où: $$w(f)(h\sigma)=f'(k(X,\pi)(x),u(\sigma')u(\sigma))=w(f)(h)u(\sigma).$$

Par suite $w$ est un homomorphisme strict de $(H,A)$ dans $(H',A')$.

**Corollaire.** *Pour que* $(H,A)\in\tilde{\Phi}'_0(G^-,G^t,\mathscr{B})$ *et* $(H',A')\in\tilde{\Phi}_0(G^-,G'^t,\mathscr{B})$ *soient associés, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme strict de* $(H,A)$ *dans* $(H',A')$.

En effet la condition est nécessaire d'après le théorème et suffisante en vertu du corollaire du Théorème 2.3.

**Compléments. 2.1.** Les homomorphismes stricts peuvent aussi être définis de la façon suivante: Soit $\mathscr{H}(\mathscr{B},\mathscr{F})$ la sous-catégorie de $\mathscr{C}$ dont les unités sont les produits $(X\times G^-,\pi\times\gamma)$, où $(X,\pi)\in\mathscr{B}$, et $(G^-,\gamma)\in\mathscr{F}_0$, $G^-$

désignant l'ensemble sous-jacent à un groupe $G$ vérifiant les conditions p. 92; les morphismes de $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ sont définis par les applications $\kappa$ telles que $\kappa(x,\sigma)=(\kappa^B(x),\ \kappa'_x u(\sigma))$, où $x\in X$, $\sigma\in G^-$, $\kappa^B\in\mathcal{B}$, $((G'^-,\gamma'),\kappa',\ (X,\pi))\in\mathcal{C}$, $((G'^-,\gamma'),\kappa'^{-1},(X,\pi))\in\mathcal{C}$, $((G'^-,\gamma'),u,(G^-,\gamma))\in\mathcal{C}$ et $u$ est une représentation de $G$ dans $G'$. En particulier $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ contient tout pseudogroupe principal admissible pour $(\mathcal{C},\mathcal{F})$. *Un homomorphisme strict de* $(H,A)$ *dans* $(H',A')$ *est un élément* $((H',A'),w,(H,A))$ *de l'élargissement complet de* $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ *au-dessus de* $\tilde{\mathcal{T}}'$ (c'est-à-dire une application $w$ de $H$ dans $H'$ telle que $f'wf^{-1}\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ pour tout $f\in A$ et tout $f'\in A'$). Si $H$ est connexe pour la topologie sous-jacente à l'atlas $A$, cette définition est équivalente à la Définition 2.10; sinon, il se pourrait que la représentation $u$ soit différente dans deux composantes connexes différentes.

**2.2.** Plus généralement, soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ dont le éléments sont définis comme ceux de $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{F})$, mais en remplaçant la condition $\kappa^B\in\mathcal{B}$ par $\kappa^B\in\mathcal{C}$. Un élément de l'élargissement complet de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{F})$ au-dessus de $\tilde{\mathcal{T}}'$, de source $(H,A)$ et de but $(H',A')$, sera appelé *homomorphisme* de $(H,A)$ dans $(H',A')$; un tel élément est une application vérifiant encore la condition 1 de la Définition 2.10, mais non la condition 2. L'ensemble des homomorphismes d'un espace fibré principal de $\mathcal{C}[\mathcal{B},\mathcal{F}]$ dans un autre est une catégorie inductive au-dessus de $P$ admettant pour sous-groupoïde distingué l'ensemble des isomorphismes d'un espace fibré principal sur un autre.

**2.3.** Comme dans le cas des espaces fibrés topologiques [8a], il serait intéressant d'étudier le problème de la restriction du groupe structural. Etant donné $(M,A)\in\tilde{\Phi}'_0(Y,G,\mathcal{B})$, quels sont les sous-groupes $G'$ de $G$ tels que $(G'^-,\gamma')\in\mathcal{C}_0$ et que $M$ admette une structure fibrée de classe $\tilde{\Phi}'_0(Y,G',\mathcal{B})$ à laquelle $(M,A)$ soit sous-jacente, c'est-à-dire: existe-t-il $A'\subset A$ tel que $A'A'^{-1}\subset\Phi'(Y,G',\mathcal{B})$ et que l'on ait $M=\bigcup\beta(A')$?

### 3. Prolongements d'une variété différentiable.

Nous utiliserons sans références les notations et définitions des §1 et 2. Soient $(E,\pi_E)$ et $(E',\pi_{E'})$ deux espaces affines quasi-localement convexes, $(\vec{E},\pi_{\vec{E}})$ et $(\vec{E}',\pi_{\vec{E}'})$ les espaces quasi-localement convexes des vecteurs libres correspondants, $(X,\pi) < (E,\pi_E)$ et $(X',\pi') < (E',\pi_{E'})$ dans $P'$. Dans un espace affine quasi-localement convexe, nous désignerons par $t_z$ l'application: $v \to z + v$, où $v \in \vec{E}$ et $z \in E$. Les lettres $m$ et $n$ désigneront deux entiers compris entre 0 et $\infty$, tels que $m \leqq n$. On posera: $\tilde{P}' = \tilde{\Delta}_0$.

**Définition 3.1.** *Si* $((E',\pi_{E'}),f,(V,A)) \in \tilde{\Delta}^n$, *on appelle* n-différentielle de $f$ *en* $x \in V$, *et on note* $d_x^n f$, *le n-jet*: $j_x^n(t_{x'})^{-1}f$, *où* $x' = f(x)$; *on posera*: $d_x^0 f = (x,0)$. *Si* $((X',\pi'),f,(X,\pi)) \in \Delta^n$, *on appelle* $n$-dérivée de $f$ en $z \in \alpha(f)$, *et on note* $f_z^n$ le $n$-jet

$$j_0^n(t_{z'})^{-1} f t_z, \quad \text{où} \quad z' = f(z).$$

Dans le cas où les espaces sont de dimension finie, on retrouve les définitions de [8a].

**Proposition 3.1.** *Soient* $(V,A)$ *une* $(E,\pi_E)$*-variété* $n$ *fois différentiable et* $(V',A')$ *une* $(E',\pi_{E'})$*-variété* $n$ *fois différentiable; alors* $(V \times V', A \times A')$ *est une* $(E \times E', \pi_E \times \pi_{E'})$*-variété* $n$ *fois différentiable.*

$A \times A'$ désigne l'atlas complet compatible avec $\Lambda^n(E \times E')$ engendré par cartes $g \times g'$, où $g \in A$, $g' \in A'$ et:

$$(g \times g')(z,z') = (g(z), g'(z')) \text{ si } z \in \alpha(g) \text{ et } z' \in \alpha(g').$$

Si $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n$ et $(V',A') \in \tilde{\Lambda}_0^n$, nous désignerons par $J^{n,m}(V',V)$ l'espace $J^m(V',V)$ correspondant aux structures de variétés $m$ fois différentiables sous-jacentes à $A$ et à $A'$ resp.

**Proposition 3.2.** *La classe* $J^{n,m} = \bigcup J^{n,m}(V',V)$, *où* $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n$ *et* $(V',A') \in \tilde{\Lambda}_0^n$, *est une catégorie et l'application* $\Theta^{n,m}$:

$$f \to (\text{l'ensemble des } j_x^m f, \text{ où } x \in \alpha(f)),$$

*où* $f \in \tilde{\Delta}^n$, *est un foncteur généralisé* [8b] *de* $\tilde{\Delta}^n$ *vers* $J^{n,m}$.

En effet, la loi de composition est définie par:

$$(j_{x'}^m f', j_x^m f) \to j_x^m(f'f) \text{ si, et seulement si, } x' = f(x).$$

Pour tout $f \in \tilde{\Delta}^n$, l'ensemble $\Theta^{n,m}f$ peut être associé à l'application $\rho^m : j_x^m \to j_{x'}^m$, où $x' = f(x)$ et $j_x^m$ désigne le $m$-jet de l'application identique en $x$. Si $(V, A) \in \tilde{\Lambda}_0^n$, on conviendra que le prolongement $A^m = \Theta^{n,m}(A)$ de $A$ définit sur l'ensemble $V^m = \Theta^{n,m}V$ des germes d'ordre $m$ de $V$ une structure de variété $(n-m)$ fois différentiable; une carte $g^m \in A^m$ s'identifie à l'application: $z \to j_x^m$, où $z \in \alpha(g)$, $x = g(z)$ et $g \in A$.

**Théorème 3.1.** *Soient $(V, A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E, \pi_E)$ et $(V', A') \in \tilde{\Lambda}_0^n(E', \pi_{E'})$; l'ensemble $J^{n,m}(V', V)$ est muni d'une structure fibrée $\overline{(n-m)}$ fois différentiable de classe $\Phi(M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E}), M_\lambda^m(\vec{E}') \times M_\lambda^m(\vec{E}), \Lambda^{n-m})$, de base $((V^m \times V'^m), (A^m \times A'^m))$.*

**Démonstration.** Soit $(X' \leftarrow X)^m$ le sous-ensemble de $J^{n,m}$ formé des $m$-jets $j_z^m\phi$, où $\phi \in \Lambda^n$, $z \in X$ et $\phi(z) \in X'$; un tel $m$-jet s'identifie au triplet $(z, z', \phi_z^m)$ et l'application: $j_z^m\phi \to (z, z', \phi_z^m)$ identifie $(X' \leftarrow X)^m$ à $(X, \pi) \times (X', \pi') \times M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E})$ puisque tout $(z, z', \xi) \in X \times X' \times M^m(\vec{E}', \vec{E})$ est l'image de $j_z^m(t_{z'} f\, t_z^{-1})$, où $j_0^m f = \xi$. Soient $(g, (X, \pi)) \in A$ et $(g', (X', \pi')) \in A'$; l'application: $\phi \to g' \phi g^{-1}$ de l'ensemble $\mathscr{D}^n(X', X)$ des applications $n$ fois différentiables de $X$ dans $X'$ sur $\mathscr{D}^n(g'(X'), g(X))$ se prolonge en l'application: $\Theta^{n,m}\phi \to \Theta^{n,m}(g' \phi g^{-1})$; par suite à $(g \times g')$ est associée l'application:

$$(g, g')^m : j_z^m\phi \to (\Theta^{n,m}g') j_z^m \phi (\Theta^{n,m}g)^{-1}$$

de $(X' \leftarrow X)^m$ dans $J^m(V', V)$ qui s'identifie à l'application:

$$(z, z', \xi) \to (j_0^m g' t_{z'}) \xi (d_x^m g^{-1}), \quad \text{où } x = g(z) \text{ et } x' = g'(z').$$

Soit $(A, A')^m$ l'ensemble des applications $(g, g')^m$, où $g \in A$ et $g' \in A'$. Soient $g_1 \in A$ et $g_1' \in A'$; la relation:

$$(g, g')^m(z, z', \xi) = (g_1, g_1')^m(z_1, z_1', \xi_1)$$

entraîne $g(z) = g_1(z_1)$ et $g'(z) = g_1'(z_1')$; par suite il existe $\phi \in \Lambda^n(E)$ et $\phi' \in \Lambda^n(E')$ tels que $g = g_1\phi$ et $g' = g_1'\phi'$; de l'égalité:

$$j_0^m(g_1'\phi' t_{z'}) \xi d_x^m(g_1\phi)^{-1} = j_0^m(g_1' t_{z_1'}) \xi_1 d_x^m g_1^{-1}, \text{où } z_1' = \phi'(z'),$$

on déduit: $\xi_1 = \phi_{z'}'^m \xi(\phi_z^m)$, c'est-à-dire que $((g_1, g_1')^m)^{-1}(g, g')^m$ est l'application $(\phi, \phi')^m$: $(z, z', \xi) \to (\phi(z), \phi'(z'), \phi_{z'}'^m \xi(\phi_z^m)^{-1}$ qui appartient à $\Lambda^{n-m}$. De plus, $M_\lambda^m(\vec{E}') \times M_\lambda^m(\vec{E})$ est un groupe $\overline{\textit{indéfiniment}}$ différentiable d'opérateurs sur $M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E})$, d'après la Proposition 1.4, pour la loi de composition:

$$((\sigma, \sigma'), \xi) \to \sigma' \xi \sigma^{-1};$$

en particulier, $\phi_{z'}'^m \xi(\phi_z^m)^{-1}$ est le composé de $(\phi_z^m, \phi_{z'}'^m, \xi)$; comme l'application $(j_z^m, j_{z'}^m) \to ((\phi_{z'}'^m), (\phi_z^m)^{-1})$ est $(n-m)$ fois différentiable d'après les Théorèmes 2.1 et 2.2, Chapitre III, on a:

$$(\phi, \phi')^m \in \Phi(M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E}), M_\lambda^m(\vec{E}) \times M_\lambda^m(\vec{E}'), \Lambda^{n-m}).$$

Donc $(J^{n,m}(V', V), (A, A')^m) \in \Delta^{\overline{n-m}}[\Lambda^{n-m}, \Lambda^\infty]$.

**Corollaire.** *Pour tout $m'$ tel que $m + m' \leqq n$, l'injection $\gamma_m^{m'}$: $j_x^{m+m'}f \to j_x^{m'}(j^m f)$ est un isomorphisme $(n-m-m')$ fois différentiable de $J^{n,m+m'}(V', V)$ dans le sous-espace de $J^{n,m'}(J^{n,m}(V', V), V)$ formé des $m'$-jets des sections locales de $V$ dans $J^{n,m}(V', V)$.*

En effet $\gamma_m^{m'}$ est l'agrégat des applications:

$$(g, (g, g')^m)^{m'} p((g, g')^{m+m'})^{-1}, \text{ où } g \in A, g' \in A'$$

et $p$ est l'application $(n-m-m')$ fois différentiable:

$$j_z^{m+m'} f' \to j_z^{m'}(j^m f')$$

de $(X' \leftarrow X)^{m+m'}$ dans $(X \times X' \times M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E}) \leftarrow X)^{m'}$.

**Corollaire 2.** *$J^n(V', V)$ est un espace fibré quasi-topologique; si $n = \infty, J^{\infty,m}(V', V)$ est un espace fibré $\overline{\text{indéfiniment}}$ différentiable pour tout entier $m$.*

**Théorème 3.2.** *$J^{n,m}$ est une catégorie $(n-m)$ fois différentiable; si $m' \leqq m$, l'application $j^{m'm}$: $j_x^m f \to j_x^{m'} f$ est un foncteur $(n-m)$ fois différentiable de $J^{n,m}$ sur $J^{n,m'}$.*

**Démonstration.** La structure $(n-m)$ fois différentiable de $J^{n,m}$ est définie par l'atlas complet $\mathscr{A}^m$ engendré par la réunion des atlas complets $(A, A')^m$, où $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n$ et $(V', A') \in \tilde{\Lambda}_0^n$, construits dans la démonstration du Théorème 3.1. La classe $J_0^{n,m}$ des unités de $J^{n,m}$, qui est la classe des germes de variétés $m$ fois différentiables qui sont sous-jacents à un germe de variété $n$ fois différentiable, est munie de l'atlas complet $\mathscr{A}_0^m$ engendré par la réunion des atlas complets $A^m$, prolongements d'ordre $m$ de $A$. Puisque la projection canonique de l'espace fibré $J^{n,m}(V', V)$ sur sa base $V^m \times V'^m$ est $(n-m)$ fois différentiable, les applications source et but, $\alpha$ et $\beta$, dans $J^{n,m}$ sont $(n-m)$ fois différentiables. Soit $J'^{n,m}$ la sous-classe de $J^{n,m} \times J^{n,m}$ formée des couples composables. Soit $\overline{\mathscr{A}}'^m$ l'atlas complet compatible avec $\Lambda^{n-m}$ formé des cartes $\bar{a}^m$:

$$(\bar{\xi}, \bar{\xi}') \rightarrow (a^m(\bar{\xi}), a'^m(\bar{\xi}')), \quad \text{où } a^m \in \mathscr{A}^m,\ a'^m \in \mathscr{A}^m,$$

$$\bar{\xi} = (z, z', \xi) \in \alpha(a^m) \quad \text{et} \quad \bar{\xi}' = (z', z'', \xi') \in \alpha(a'^m);$$

cet atlas définit sur $J'^{n,m}$ une structure $(n-m)$ fois différentiable. La loi de composition est $(n-m)$ fois différentiable puisque agrégat des applications $a''^m h(\bar{a}^m)^{-1}$, où $a''^m \in \mathscr{A}^m$ et $h$ est l'application $(n-m)$ fois différentiable: $(\bar{\xi}, \bar{\xi}') \rightarrow (z, z'', \xi'\xi)$. Le foncteur $j^{m'm}$ est l'agrégat des applications: $(g,g')^{m'}\eta((g,g')^m)^{-1}$ où $g \in A$, $g' \in A'$ et $\eta$ désigne l'application:

$$(z, z', j_0^m f) \rightarrow (z, z', j_0^{m'} f) \text{ de } (X' \leftarrow X)^m \text{ dans } (X' \leftarrow X)^{m'};$$

par suite $j^{m',m}$ est $(n-m)$ fois différentiable.

**Corollaire.** *$J^{n,n}$ est une catégorie quasi-topologique et $J^{\infty,m}$ une catégorie indéfiniment différentiable.*

La géométrie différentielle consiste [8c] en l'étude de la catégorie $J^{n,m}$ et des espaces sur lesquelles opère un sous-groupoïde du groupoïde de ses éléments inversibles, qu'on peut appeler *prolongements* d'ordre $m$; nous allons étudier plus précisément certains de ces espaces.

**Théorème 3.3.** *L'ensemble $T_{E'}^{m*}(V)$ des $(E', \pi_{E'})^m$-covitesses sur* (la structure de $\underline{\tilde{\Lambda}_0^m(E, \pi_E)}$ sous-jacente à) $(V, A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E, \pi_E)$ *est un espace fibré vectoriel $\overline{(n-m)}$ fois différentiable de classe $\Phi(M_\Lambda^m(\vec{E}', \vec{E}), M_\Lambda^m(\vec{E}), \Lambda^{n-m})$.*

**Démonstration.** $M_\lambda^m(\vec{E})$ est un groupe d'opérateurs sur $M_\lambda^m(\vec{E}',\vec{E})$ pour la loi de composition: $(\sigma,\xi) \to \xi\sigma^{-1}$. Puisque $\xi = j_0^m f$ s'identifie à la suite $(D^i f)_{i \leq m}$ et que l'application: $f' \to D^i(f' \circ f)$ est linéaire, $M_\lambda^m(\vec{E})$ est un groupe d'opérateurs linéaires quasi-topologique sur l'espace quasi-localement convexe $M_\lambda^m(\vec{E}', \vec{E})$. Soient $(g,(X,\pi)) \in A$ et $g_{E'}^{*m}$ l'application:

$$(z,\xi) \to \xi(d_x^m g)^{-1}, \text{ où } z \in X \text{ et } x = g(z),$$

de $X \times M^m(\vec{E}',\vec{E})$ dans $T_{E'}^{m*}(V)$. Soit $g_1' \in A$; la relation:

$$g_{E'}^{*m}(z,\xi) = g_{1E'}^{*m}(z_1,\xi_1)$$

entraîne $g(z) = g_1(z_1)$, c'est-à-dire $g = g_1\phi$, où $\phi \in \Lambda^n(E)$, et $\xi = \xi_1(\phi_z^m)^{-1}$. Puisque l'application: $j_z^m \to (\phi_z^m)^{-1}$ est $(n-m)$ fois différentiable, l'application $(g_{1E'}^{*m})^{-1} g_{E'}^{*m}$:

$$(z,\xi) \to (\phi(z), \xi(\phi_z^m)^{-1})$$

appartient à $\Phi = \Phi(M_\lambda^m(\vec{E}',\vec{E}),\ M_\lambda^m(\vec{E}), \Lambda^{n-m})$. Il en résulte que l'ensemble des applications $g_{E'}^{*m}$ engendre un atlas complet $A_{E'}^{*m}$ compatible avec $\Phi$ qui définit sur $T_{E'}^{m*}(V)$ une structure d'espace fibré vectoriel $\overline{(n-m)}$ fois différentiable.

**Théorème 3.4.** *L'ensemble $T_{E'}^m(V)$ des $(E',\pi_{E'})^m$-vitesses sur $V, A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E,\pi_E)$ est muni d'une structure d'espace fibré $\overline{(n-m)}$ fois différentiable de classe $\Phi(M_\lambda^m(\vec{E},\vec{E}'), M_\lambda^m(\vec{E}), \Lambda^{n-m})$, de base $(V^m, A^m)$, d'espace fibré principal associé $H^m(V)$.*

**Démonstration.** $M_\lambda^m(\vec{E})$ est un groupe d'opérateurs $\overline{\text{indéfiniment}}$ différentiable sur $M_\lambda^m(\vec{E},\vec{E}')$ pour la loi de composition: $(\sigma,\xi) \to \sigma\xi$. Pour tout $g \in A$, soit $g_{E'}^m$ l'application:

$$(z,\xi) \to (j_0^m g t_z)\xi, \quad \text{de } \alpha(g) \times M^m(\vec{E}) \text{ dans } T_{E'}^m(V).$$

Si $g_1 \in A$ et si on a: $g_{E'}^m(z,\xi) = g_{1E'}^m(z_1,\xi_1)$, il existe $\phi \in \Lambda^n(E)$ tel que $g = g_1\phi$ et $\xi_1 = \phi_z^m\xi$. Il en résulte:

$$((g_{1E'}^m)^{-1} g_{E'}^m)(z,\xi) = (\phi(z), \phi_z^m\xi)$$

et les applications $g^m_{E'}$, où $g \in A$, engendrent un atlas complet compatible avec $\Phi(M^m_\lambda(\vec{E},\vec{E}'),M^m_\lambda(\vec{E}),\Lambda^{n-m})$, qui définit sur $T^m_{E'}(V)$ une structure fibrée. L'espace fibré principal associé est l'espace $(H^m(V),A^m_E)$, où $H^m(V) = T^m_E(V)$ est l'espace des répères d'ordre $m$.

**Proposition 3.3.** *L'ensemble* $\Phi^m(E)$ *des applications* $(\phi^m,(X,\pi)\times M^m{}_\lambda(\vec{E}))$:

$$(z,\xi)\to(\phi(z),\phi^m_z\xi),\ \textit{où}\ (\phi,(X,\pi))\in\Lambda^n(E),\ z\in X$$

*et* $\xi \in M^m(\vec{E})$, *est un pseudogroupe principal admissible pour* $\Delta^{\overline{n-m}}$. *Si* $(V,A)\in\tilde{\Lambda}^n_0(E,\pi_E)$, *l'espace* $H^m(V)$ *admet une structure d'espace fibré de classe* $\Phi^m(E)$.

**Démonstration.** L'application $(\phi,f)\to\phi f$, où $\phi\in\Lambda^n(E)$ et $f\in\mathscr{D}^1(X, X_1)$ se prolonge en l'application:

$$(\Theta^{n,m}\phi,\Theta^{n,m}f)\to\Theta^{n,m}\phi f;$$

ainsi à $\phi$ correspond l'application:

$$(z,z_1,f^m_z)\to(z,\phi(z_1),\phi^m_{z_1}f^m_z)\ \text{de}\ (X_1\leftarrow X)^m\ \text{dans}\ X\times X_1\times M^m(\vec{E});$$

cette dernière application est entièrement déterminée par l'application $\phi^m:(z,\xi)\to(\phi(z),\phi^m_z\xi)$. D'après le Théorème 2.1 du Chapitre III, l'application: $z\to\phi^m_z$ est $(n-m)$ fois différentiable; de plus, puisque $\Theta^{n,m}$ est un foncteur généralisé, le composé $\phi'^m\phi^m$ est l'application:

$$(z,\xi)\to(\phi'\phi(z),\phi'^m_{z'}\phi^m_z\xi)=(\phi'\phi(z),(\phi'\phi)^m_z\xi)\ \text{où}\ z'=\phi(z).$$

Donc $\Phi^m(E)$ est un groupoïde. Par ailleurs, soit $A^m_E$ l'atlas complet construit dans la démonstration du Théorème 3.4; si $g\in A$ et $g_1\in A$, l'application $(g^m_{1E})^{-1}g^m_E$ appartient à $\Phi^m(E)$; par conséquent $A^m_E$ contient un atlas complet $\bar{A}^m_E$ compatible avec $\Phi^m(E)$ et la structure $(H^m(V),\bar{A}^m_E)$ est de classe $\Phi^m(E)$.

**Définition 3.2.** *Avec les notations de la Proposition* 3.3, *le pseudogroupe principal admissible* $\Phi^m(E)$ *sera appelé* prolongement *d'ordre* $m$ *de*

$\Lambda^n(E)$. *Un espace fibré de base isomorphe à* $(V^m, A^m)$, *associé à un espace fibré de classe* $\Phi^m(E)$, *sera appelé* prolongement *régulier d'ordre m de* $(V, A)$.

Dans le cas de dimension finie, cette définition coïncide avec la définition de prolongement régulier de [8a].

**Proposition 3.4.** *Pour que* $(M,C)$ *soit un prolongement régulier d'ordre m de* $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E)$, *il faut et il suffit que M admette une structure fibrée* $(M,C')$ *sous-jacente à* $(M,C)$, *associée à* $(H^m(V), A_E^m)$. *Dans ce cas, il existe un atlas* $\bar{C} \subset C$, *qui engendre C, et tel que l'application:* $f \to f^B$ *de* $\bar{C}$ *dans* $C^B$ *soit une bijection, où* $(B,C^B)$ *est la base de* $(M,C)$.

**Démonstration.** Soit $(M,C)$ un espace fibré associé à $(H^m(V), A_E^m)$ par $(K^B, k, \bar{r})$; d'après la Proposition 2.3 et le Théorème 2.3, $M$ admet $(M, \bar{r}(A_E^m))$ pour superstructure; de plus $\bigcup \beta(\bar{r}(\bar{A}_E^m)) = M$, où $\bar{A}_E^m$ désigne l'atlas considéré dans la Proposition 3.3; il en résulte que $(M, \bar{r}(\bar{A}_E^m))$ est un prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V, A)$. Inversement soit $(M, C)$ un prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V, A)$. Puisque $\Phi^m(E)$ est obtenu par prolongement de $\Lambda^n(E)$ ainsi qu'indiqué dans la Proposition 3.3, la démonstration du corollaire de la Proposition 2.4 prouve que deux espaces fibrés de classe $\Phi^m(E)$ et de bases isomorphes sont isomorphes. L'espace $(H^m(V), \bar{A}_E^m)$ étant de classe $\Phi^m(E)$, il existe d'après le Théorème 2.4 un homomorphisme strict de $(H^m(V), \bar{A}_E^m)$ dans l'espace fibré principal $(H, C^H)$ associé à $(M, C)$. Du corollaire du Théorème 2.4, il résulte que $(H^m(V), A_E^m)$ et la structure fibrée obtenue en complétant $C^H$ relativement au pseudogroupe $\Phi(G^-, G^t, \Lambda^{n-m})$, où $(G, \gamma)$ est le groupe structural de $(M, C)$, sont associés.

**Corollaire.** $J^{n,m}(V', V)$ *est un prolongement régulier d'ordre m de* $(V \times V', (A \times A'))$, $T_{E'}^m(V)$ *et* $T_{E'}^{*m}(V)$ *sont des prolongements réguliers d'ordre m de* $(V, A)$.

**Démonstration.** $T_{E'}^m(V)$ admettant $H^m(V)$ pour espace fibré principal associé est un prolongement d'ordre $m$ de $(V, A)$ d'après la proposition. Les espaces fibrés $H^m(V \times V')$ et $J^m(V', V)$ sont associés en vertu du corollaire du Théorème 2.4 puisqu'ils ont même base et que leurs groupes structuraux

$M_\lambda^m(\vec{E} \times \vec{E}')$ et $M_\lambda^m(\vec{E}) \times M_\lambda^m(\vec{E}')$ sont isomorphes. Enfin les espaces fibrés $H^m(V)$ et $T_{E'}^{*m}(V)$ sont associés puisque leur base est $(V^m, A^m)$ et leur groupe structural $M_\lambda^m(\vec{E})$.

**Théorème 3.5.** *Transitivité des prolongements: Si $(M,C)$ est un prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E,\pi_E)$ et si $(M',C')$ est un prolongement régulier d'ordre $m'$ de la structure de variété, supposée $(n-m)$ fois différentiable, sur $M$ sous-jacente à $(M,C)$, alors $M'$ est muni d'une structure de prolongement d'ordre $m+m'$ de $(V,A)$.*

**Démonstration.** Soient $(M,C) \in \tilde{\Phi}_0'(F,G,\Lambda^{n-m})$ et

$$(M',C') \in \tilde{\Phi}_0'(F',G',\Lambda^{n-m-m'})$$

où $(F,\pi_F)$ et $(F',\pi_{F'})$ sont deux espaces affines quasi-localement convexes, $(\bar{F},Z) \in \tilde{\Lambda}_0^{n-m}(F,\pi_F)$ et $(\bar{F}',Z') \in \tilde{\Lambda}_0^{n-m-m'}(F',\pi_{F'})$. Soient $u$ et $u'$ les représentations de $M_\lambda^m(\vec{E})$ et $M_\lambda^{m'}(\vec{E} \times \vec{F})$ resp. dans $G$ et $G'$, définissant l'association. $(M,C)$ et $(M',C')$ admettent des superstructures $(M,\bar{C}) \in \tilde{\Phi}_0'^m(E)$ et $(M',\bar{C}') \in \tilde{\Phi}_0'^{m'}(M)$, de groupes structuraux $M_\lambda^m(\vec{E})$ et $M_\lambda^{m'}(\vec{E} \times \vec{F})$, où $\Phi'^m(E)$ et $\Phi'^{m'}(M)$ sont des pseudogroupes associés à $\Phi^m(E)$ et $\Phi^{m'}(E \times F)$. Un élément $\phi^m$ de $\Phi'^m(E)$ est de la forme:

$$(z,\bar{y}) \to (\phi(z),\ u(\phi_z^m)\bar{y}),\ \text{où}\ \phi \in \Lambda^n(E),\ z \in \alpha(\phi),\ \bar{y} \in \bar{F}.$$

$\Phi'^{m'}(M)$ contient tout élément $\psi^{m'}$ de la forme:

$$(z,\bar{y},\bar{y}') \to (\phi^m(z,\bar{y}), u'((\phi_\zeta^m)_{(z,y)}^{m'})\bar{y}'),\ \text{où}\ \bar{y}' \in \bar{F}',\ \bar{y} = \zeta(y),\ \zeta \in Z,$$

$\phi^m \in \Phi'^m(E)$ et $\phi_\zeta^m$ désigne l'application: $(z,y) \to \phi^m(z, \zeta(y))$. Par suite:

$$\psi^{m'}(z,\bar{y},\bar{y}') = (\phi(z), u(\phi_z^m)(\bar{y}), (u'(\phi_\zeta^m)_{(z,y)}^{m'})(\bar{y}')).$$

L'application: $(\bar{y},\bar{y}') \to (u(\phi_z^m)\bar{y}, (u'((\phi_\zeta^m)_{(z,y)}^{m'})\bar{y}')$ étant entièrement déterminée par la donnée de $\phi_z^{m+m'}$ peut s'écrire $u''(\phi_z^{m+m'})$. La relation:
$\phi''^{m+m'}_{z'}\phi'^{m+m'}_z = \phi_z^{m+m'}, z' = \phi'(z)$, entraîne $\phi''^m_z\phi'^m_z = \phi_z^m$ et $\phi''^{m'}_{z'}\phi'^{m'}_z = \phi_z^{m'}$, d'où $u''(\phi_z^{m+m'}) = u''(\phi''^{m+m'}_{z'})u''^{m+m'})$. L'ensemble $M'$ est canoniquement muni d'une structure fibrée $(n-m-m')$ fois différentiable $(M',C'')$ de base

$(V,A)$ et $u''$ est une représentation $(n-m-m')$ fois différentiable de $M_\lambda^{m+m'}(\vec{E})$ dans le sous-groupe $G'$ de $M_\lambda^m(\vec{E}) \times M_\lambda^m(\vec{E} \times \vec{F})$ qui est le groupe structural de $(M', C'')$. Par suite les espaces fibrés $H^{m+m'}(E)$ et $(M', C'')$ ont même base et il existe une représentation $(n-m-m')$ fois différentiable de $M_\lambda^{m+m'}(\vec{E})$ dans $G'$; il résulte du corollaire du Théorème 2.4 que ces espaces fibrés $\overline{(n-m-m')}$ fois différentiables sont associés, donc $M'$ est muni d'une structure de prolongement régulier d'ordre $m+m'$ de $(V, A)$.

**Théorème 3.6.** *$J^{n,m}(V', V)$ est muni d'une structure de prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V,A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E, \pi_E)$ et d'une structure de prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V', A') \in \tilde{\Lambda}_0^n(E', \pi_{E'})$, les projections canoniques sur la base étant resp. $\alpha$ et $\beta$.*

**Démonstration.** Soient $g \in A$ et ${}^Tg^m$ l'application:

$$(z, \xi) \to \xi(d_x^m g)^{-1}, \text{ où } z \in \alpha(g),\ x = g(z) \text{ et } \xi \in T_E^m(V');$$

si $\xi(d_x^m g)^{-1} = \xi_1(d_{x_1}^m g_1)^{-1}$, on a $x = x_1$, d'où $g = g_1\phi$, où $\phi \in \Lambda^n(E)$ et $\xi(\phi_z^m)^{-1} = \xi_1$; par conséquent:

$$({}^Tg_1^m)^{-1}({}^Tg^m)(z, \xi) = (\phi(z), \xi(\phi_z^m)^{-1})$$

et les applications ${}^Tg^m$, où $g \in A$, engendrent un atlas complet ${}^TA^m$ qui définit sur $J^m(V', V)$ une structure de prolongement d'ordre $m$ de $(V, A)$, de fibres isomorphes à $T_E^m(V')$ et de groupe structural $M_\lambda^m(\vec{E})$. De même l'atlas complet ${}^TA'^{*m}$ engendré par les cartes ${}^Tg'^m$ de la forme:

$$(z', \xi^*) \to j_0^m(g' t_{z'})\xi^*, \text{ où } g' \in A',\ z' \in \alpha(g'),\ \xi^* \in T_{E'}^{*m}(V),$$

définit sur $J^m(V', V)$ une structure de prolongement régulier d'ordre $m$ de $(V', A')$, de fibres isomorphes à $T_{E'}^{*m}(V)$ et de groupe structural $M_\lambda^m(\vec{E}')$.

Soit $(V, A) \in \tilde{\Lambda}_0^n(E, \pi_E)$; pour tout $x \in V$, désignons par $N_x$ la fibre de $T_{E'}^{m*}(V)$ au-dessus de $x$ (munie de sa structure d'espace quasi-localement convexe); soit $N'_x = \mathscr{L}'(R, N_x)$.

**Définition 3.3.** *Avec les notations précédentes, un élément du produit tensoriel* $(\overset{p}{\otimes} N_x) \otimes (\overset{q}{\otimes} N'_x)$ *sera appelé* $(E', \pi_{E'})^m$-tenseur de type $(p,q)$ sur $(V,A)$, d'origine $x$.

Le produit tensoriel $(\overset{p}{\otimes} N_x) \otimes (\overset{q}{\otimes} N'_x)$ sera identifié à un sous-espace de l'espace des formes multilinéaires continues sur $(\mathscr{L}'_\sigma(R, N_x))^p \times (\mathscr{L}'_\sigma(R, N'_x))^q$ en identifiant $(\overset{p}{\otimes} \xi_1) \otimes (\overset{q}{\otimes} \eta_j)$ à la forme:

$$((\xi'_i)_{i \leqq p}, (\eta'_j)_{j \leqq q}) \to \langle \xi'_1, \xi_1 \rangle \cdots \langle \xi'_p, \xi_p \rangle \langle \eta_1, \eta'_1 \rangle \cdots \langle \eta_q, \eta'_q \rangle.$$

Il sera muni de la quasi-topologie induite par la quasi-topologie de la convergence locale.

**Théoréme 3.7.** *L'ensemble des* $(E', \pi_{E'})^m$*-tenseurs de type* $(p,q)$ *sur* $(V,A) \in \tilde{\Lambda}^n_0(E, \pi_E)$ *admet une structure de prolongement d'ordre m de* $(V,A)$, *de fibres isomorphes à* $(\overset{p}{\otimes} N_x) \otimes (\overset{q}{\otimes} N'_x)$.

En effet l'atlas complet définissant la structure fibrée est engendré par les cartes $\overset{p+q}{\otimes} g$, où $g \in A$, définies par:

$$(z, (\overset{p}{\otimes} \xi_i) \otimes (\overset{q}{\otimes} \eta'_j)) \to \overset{p}{\otimes} (\xi_i d^m_x g^{-1}) \otimes \overset{q}{\otimes}([g\eta'_j]),$$

où $z \in \alpha(g)$, $g(z) = x$, $\xi_i \in M^m_\lambda(\vec{E}', \vec{E})$, si $i \leqq p$, $\eta'_j \in \mathscr{L}'_\lambda(R, M^m_\lambda(\vec{E}', \vec{E}))$ si $j \leqq q$, et $[g\eta'_j]$ désigne la forme linéaire sur $N_x$:

$$\zeta \to \langle \eta'_j, \zeta j^m_0 g t_z \rangle.$$

**Cas particuliers: 3.1.** Si $(V,A)$ est une $E$-variété $n$ fois différentiable il n'existe généralement pas de topologie sur $M^m(\vec{E}', \vec{E})$ telle que les différents espaces fibrés considérés dans ce paragraphe soient à groupe structural topologique (voir [7a]). Toutefois on obtient des espaces fibrés à groupe structural topologique en remplaçant partout la quasi-topologie de la convergence locale par la topologie de la convergence compacte dans le cas particulier suivant: Tous les espaces localement convexes $\vec{E}, \vec{E}', \cdots$ sont supposés être des espaces de Fréchet dont le dual topologique est métrisable pour la topologie de la convergence compacte. Le théorème de transitivité des prolongements est aussi valable dans ce cas. Dans le Théorème 3.7, on supposera le produit tensoriel muni de la topologie de produit tensoriel projectif (voir [13c]).

**3.2.** Dans tout ce paragraphe, on peut remplacer la classe des $(E,\pi_E)$-variétés $n$ fois différentiables par la classe des $E$-variétés $n$ fois $b$-différentiables, où $\vec{E}$ est un espace de Banach et $b$ l'ensemble de tous les bornés de $\vec{E}$; il faut de plus remplacer la quasi-topologie de la convergence locale par la topologie de la convergence bornée. Alors tous les théorèmes indiqués, et en particulier le théorème de transitivité des prolongements sont encore vrais; dans le Théorème 3.7, le produit tensoriel est supposé muni de la topologie de produit tensoriel topologique projectif.

**3.3.** Les résultats de ce paragraphe sont encore valables en considérant la classe des $E$-variétés $n$ fois $\mathscr{S}$-différentiables et en remplaçant la quasi-topologie de la convergence locale par la topologie de la $\mathscr{S}$-convergence, si on suppose que $\mathscr{S}$ est un ensemble de parties de l'espace localement convexe $\vec{E}$ tel que les conditions a', b (et c) de l'introduction soient vérifiées (Exemple: 3.2).

## BIBLIOGRAPHIE

1. M. Fréchet, a) *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* III, Sér. 42, 1925, p. 293; b) *J. Math. pures et app.* 16, 1937, p. 233.

2. M. Balanzat, a) La différentielle d'Hadamard-Fréchet dans les espaces vectoriels topologiques, *Math. Nothae*, 9, 1949 p. 29; b) *C.R.A.S.* 251, Paris, 1960, p. 2459.

3. S. Fernandez Long de Foglio, Extension de la différentielle d'Hadamard-Fréchet aux applications entre deux espaces vectoriels L. a) *C.R.A.S* 248, Paris, 1959, p. 1108; b) *Portugalia Math.* 19, 1960, p. 165.

4. H. R. Fischer, a) Differentialkalkül für nicht-metrische Strukturen, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I 1957; b) Limesräume, *Math, Ann.* 137, 1959, p. 269.

5. Sebastiao e Silva, Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes, *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. nat. mat.* VIII, a) Ser. 20,1956, p. 743; b) Sér. 21, 1956, p. 40.

6. J. Eells, On the geometry of function spaces, Symp. Inter. de Topologia Alg., Mexico, 1958, p. 303.

7. A. Bastiani, a) Différentiabilité dans les espaces localement convexes-Distructures, Thèse, Paris, série A 3948, n. 4799; b) Cônes convexes et pyramides convexes, *Ann. Inst. Fourier*, IX, 1959, p. 249.

8. C. Ehresmann, a) Géométrie Différentielle, *C.R.A.S.* 233, 1951, p. 598, 777, 1081; 234, 1952, p. 587, 1028, 1424; t, 239, 1954, p. 1762; Sur la théorie des espaces fibrés, Col.

Topol. alg. C.N.R.S. Paris, 1947, p. 3; b) Espèces de structures locales, élargissements de catégories, Sém. Topol. et Géom. diff. t. III, 1961; c) Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, X, 1960, p. 307; d) Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Géom. dif. Bruxelles, 1958, p. 137; e) Catégories structurées, *C.R.A.S.*, 256, 1963. p. 1198.

9. N. Bourbaki, a) Espaces vectoriels topologiques, chap. I et II, ASI 1189; a') chapitres III, IV, V, ASI 1229; b) Topologie générale, chap. IX, ASI 1045; c) Topologie générale chap. I et II, ASI 1142; d) Intégration, chap. I, II, III, IV, ASI 1175- Hermann, Paris.

10. H. J. Kowalsky, Limesräume und Komplettierung, *Math. Nach.* 12, 1954, p. 301.

11. G. Choquet, Convergences, *Ann. Inst. Fourier*, XXIII, 1947-48, p. 57

12. K. Iséki, A characterisation of pseudocompact spaces, *Proc. Jap. Acad.* 33, 1957, p. 320.

13. A. Grothendieck, a) Espaces vectoriels topologiques, Curso da Fac. Sao-Paulo 1958; b) Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasiliensis Math.* 3, 1954, p. 57; c) Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mém, Amer. Math. Soc.* 16, 1955, p. 190.

14. E. Hille, Functionnal analysis and semi-groups, New-York 1, 1948

15. G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris, 1932.

16. G. Nöbeling, Grundlagen der Analytischen Topologie, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954.

17. M. S. Collins, Completeness and compactness in linear topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 79, 1955, p. 256.

18. M. M. Vajnberg, Uber das Differential und die Gradienten von Funktionalen, *Uspehi Mat. Nauk.* 7, Nr 3, 1952, p. 139

19. L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *Jour. d'Analyse Math.* Jérusalem, VI, 1954-55, p. 88.

20. G. Papy, Variétés différentielles (point de vue contingent), *Bull. Soc. Math. France.* 85, 1957, n. I, p. 1.

21. S. Lang, Introduction to Differentiable Manifolds, Interscience Publishers, New York, 1962.

22. P. J. Hilton, Note on free and direct products in general categories, *Bull. Soc. Math. Belgique, XIII*, 1961.

(Reçu le 14 janvier 1963, révisé le 26 juin 1963)

*Note* (renvoi de la page 83):

*) Soit $\mathscr{V}^n$ la catégorie des applications $n$ fois différentiables d'un espace quasi-localement convexe dans un autre. $\mathscr{V}^n$ est une catégorie sous-inductive [8b] au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$ relativement à $\tau$:

$$\bar{f} = ((F,\pi_F), f, (E,\pi_E)) \to (\tau(\pi_F), f, \tau(\pi_E))$$

et au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$ relativement à $\tilde{\tau}$: $\bar{f} \to (F, f, E)$. La catégorie $\Delta^n$ s'identifie à la catégorie des jets locaux [8c] de $\mathscr{V}^n$ au-dessus de $\tilde{\mathscr{T}}'$ en identifiant $(X,\pi)$ à $j^{\lambda}_{\tau(\pi)}(E,\pi_E)$, où $\tau(\pi)$ est la topologie induite par $\tau(\pi_E)$ sur l'ouvert $X$. La catégorie $\Delta^{\bar{n}}$ s'identifie à la catégorie des jets locaux de $\mathscr{V}^n$ au-dessus de $\tilde{\mathscr{E}}$, en identifiant $(X,\pi)$ à $j^{\lambda}_X(E,\pi_E)$, si $X$ est contenu dans $E$.