IL
NUOVO CIMENTO
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. XII, N. 4 — *Serie nona* — 1° Ottobre 1954

Sur le changement de variables dans les distributions et leurs tranformées de Fourier.

R. SCARFIELLO
Buenos Aires

(ricevuto il 14 Giugno 1954)

Résumé. — On étudie le changement de variables dans les distributions en les considérant comme courants, soit de degré zéro, soit de degré n, dans un espace euclidien. On définit après la transformée de Fourier d'un courant et on applique les résultats antérieurs au cas de changement de variables dans la transformée de Fourier d'une distribution.

---

1. – Soit X un espace vectoriel à n dimensions orienté c'est-à-dire l'espace euclidien R^n, dont chaque point x est défini si l'on choisit une base par ses coordonnées: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit $\overset{p}{\mathcal{D}}$ l'espace des formes différentielles extérieures à support compact de degré p, espace des formes d'expression canonique:

$$\overset{p}{\varphi} = \sum_I f_I \, \mathrm{d}x_I$$

dont les coefficients f_I sont des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

I est un ensemble de p entiers de $[1, n]$; $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $i_1 < \ldots < i_p \cdot$ $\cdot \mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$.

$\overset{n-p}{\mathcal{D}'}$ son dual, espace des courants de degré $(n - p)$, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur $\overset{p}{\mathcal{D}}$ dont l'expression est la suivante:

$$\overset{n-p}{T} = \sum_J T_J \, dx_J$$

où les T_J sont des distributions.

Dans le cas de l'espace euclidien R^n, on peut identifier canoniquement les courants de degré zéro et ceux de degré n avec les distributions définies sur cet espace. Cette circonstance amène à considérer le changement de variables dans les distributions de deux façons différentes selon que l'on considère une distribution comme courant de degré zéro ou de degré n.

Nous indiquerons avec $\langle \overset{n-p}{T}, \overset{p}{\varphi} \rangle$ le produit scalaire du courant $\overset{n-p}{T}$ par la forme differentielle $\overset{p}{\varphi}$. Si $\overset{n-p}{\chi}$ est une forme de degré $(n-p)$ avec coéfficients localement intégrables, alors

$$\langle \overset{n-p}{\chi}, \overset{p}{\varphi} \rangle = \int_{R^n} \overset{n-p}{\chi} \wedge \overset{p}{\varphi} \, ,$$

où l'intégrale du produit extérieur des deux formes est étendue à tout l'espace R^n.

Soit maintenant H un isomorphisme $R^n \to R^n$, de R^n dans R^n.

Soit HT l'image directe du courant $\overset{n}{T}$, de degré n, par H et $H'\overset{0}{\varphi}$ l'image transposée de $\overset{0}{\varphi}$ par H. qui sera une forme appartenant à $\overset{0}{\mathcal{D}}$.

On définit:

$$H'\overset{0}{\varphi} = H'\varphi(x) = \varphi(H(x)) \, , \tag{2}$$

et alors

$$\langle H\overset{n}{T}, \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle \overset{n}{T}, H'\overset{0}{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi(H(x)) \rangle \, . \tag{3}$$

Dans le cas où le courant est de degré zéro et par conséquent la forme de degré n on aura

$$H'\overset{n}{\varphi} = H'(\varphi(x) \, dx) = \varphi(H(x)) \, |H| \, dx \, , \tag{4}$$

où on désigne avec $|H|$, le module du jacobien de H, alors

$$\langle H\overset{0}{T}, \overset{n}{\varphi} \rangle = \langle \overset{0}{T}, H'\overset{n}{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi(H(x)) \cdot |H| \rangle \, . \tag{5}$$

On a indiqué par $\varphi(x) \, dx$, la forme de degré n, $\varphi(x) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$; dx indique l'élement de volume de R^n.

Dans le cas général de degré p on aurait, si $d\overset{p}{\varphi}$ est la différentielle extérieure de la forme $\overset{p}{\varphi}$,

$$H'\mathrm{d}\overset{p}{\varphi} = \mathrm{d}H'\overset{p}{\varphi} \quad \text{et} \quad H'(\overset{p}{\varphi} \wedge \overset{q}{\psi}) = H'\overset{p}{\varphi} \wedge H'\overset{q}{\psi} \tag{6}$$ (1).

Appliquons la définition antérieure au cas de la mesure de Dirac δ. Considérons d'abord δ comme courant de degré zéro.

On a:

$$\langle H\overset{0}{\delta}, \overset{n}{\varphi}\rangle = \langle \overset{0}{\delta}, \varphi(H(x)) \cdot |H|\rangle = \varphi(0) \cdot |H| \,, \tag{7}$$

car $H(0) = 0$.

On obtient alors

$$H\overset{0}{\delta} = |H| \cdot \overset{0}{\delta} \,. \tag{8}$$

Nous pourrions aussi considérer δ comme courant de degré n. On aurait:

$$\langle H\overset{n}{\delta}, \overset{0}{\varphi}\rangle = \langle \overset{n}{\delta}, \varphi(H(x))\rangle = \varphi(0) \,, \tag{9}$$

et alors

$$H\overset{n}{\delta} = \overset{n}{\delta} \,. \tag{10}$$

Dans le cas où H est l'homothétie de rapport λ on aura, si on pose: $\overset{0}{\delta}_x$ au lieu de $\overset{0}{\delta}$; $\overset{0}{\delta}_{x/\lambda}$ au lieu de $H\delta$; $\overset{n}{\delta}_{x/\lambda}$ au lieu de $H\overset{n}{\delta}$.

$$\overset{0}{\delta}_{x/\lambda} = |\lambda|^n \cdot \overset{0}{\delta}_x \,, \tag{11}$$

$$\overset{n}{\delta}_{x/\lambda} = \overset{n}{\delta}_x \,. \tag{12}$$

Cet exemple montre que le changement de variables dans la mesure de Dirac donne des résultats différents si on la considère comme courant de degré zéro ou de degré n respectivement (2).

2. – Soit X l'expace vectoriel à n dimensions déjà considéré dans **1**, et soit Y son dual. Le produit scalaire d'un élement de X et d'un élément de Y sera indiqué par:

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \,. \tag{13}$$

---

(1) Voir [2], p. 13 et 28.

(2) Voir [3], remarque p. 157.

$\overset{p}{\mathcal{S}}_x$ sera l'espace des formes de degré p indéfiniment dérivables à decroissance rapide dans X, c'est-à-dire l'espace des formes d'expression canonique:

$$\overset{p}{\varphi} = \sum_I f_I \, \mathrm{d}x_I$$

telles que les coéfficients f_I sont des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n au sens usuel et decroissant à l'infini plus rapidement que toute puissance de $1/|x|$ ainsi que chacune de leurs dérivées; $\overset{n-p}{\mathcal{S}'_x}$ son dual, espace des courants tempérés de degré $(n-p)$, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur $\overset{p}{\mathcal{S}}_x$.

Considérons une application linéaire $\overset{0}{\mathcal{S}'_x} \to \overset{0}{\mathcal{S}'_x}$ de l'espace des courants tempérés de degré zéro dans lui même.

Nous allons démontrer qu'elle se prolonge par continuité en une application linéaire $\overset{p}{\mathcal{S}'_x} \to \overset{p}{\mathcal{S}'_x}$ de l'espace des courants de degré p dans lui même.

En effet: soit $\overset{p}{\wedge} X$ l'espace vectoriel puissance extérieure d'ordre p de X. Puisque donner une forme de degré p c'est donner un p-champ vectoriel covariant, c'est-à-dire, c'est donner une fonction définie sur X à valeurs dans $\overset{p}{\wedge} Y$ on pourra poser, si on indique avec le signe $\otimes$, le produit tensoriel de deux espaces:

$$\overset{p}{\mathcal{S}}_x = \overset{0}{\mathcal{S}}_x \otimes \overset{p}{\wedge} Y \text{ [3]}. \tag{14}$$

Considérons d'autre part l'espace $\overset{p}{\mathcal{S}'_x}$ et le produit tensoriel $\overset{0}{\mathcal{S}'_x} \otimes \overset{p}{\wedge} Y$.

Un élément du premier s'exprime par $\sum_J T_J \mathrm{d}x_J$, tandis qu'un élément du deuxième s'exprime per $\sum_J T_J e'_J$, où les e'_J forment une base de $\overset{p}{\wedge} Y$. On voit que ces deux expressions sont les mêmes.

D'ailleurs si les T_J tendent vers zéro, $\sum_J T_J \, \mathrm{d}x_J$ et $\sum_J T_J e'_J$ tendent aussi vers zéro.

On peut donc poser:

$$\overset{p}{\mathcal{S}'_x} = \overset{0}{\mathcal{S}'_x} \otimes \overset{p}{\wedge} Y , \tag{15}$$

formule qui définit un isomorphisme biunivoque et bicontinu entre $\overset{p}{\mathcal{S}'_x}$ et $\overset{0}{\mathcal{S}'_x} \otimes \overset{p}{\wedge} Y$.

Or, comme la formule (14) est intrinsèque et comme les espaces $\overset{0}{\mathcal{S}}_x$ et $\overset{p}{\mathcal{S}}_x$ sont denses dans $\overset{0}{\mathcal{S}'_x}$ et $\overset{p}{\mathcal{S}'_x}$ respectivement, alors la formule (15) est intrinsèque,

---

[3] Nous prenons X et Y réels, mais les fonctions et les formes sont à valeurs complexes; donc $\wedge X$ et $\wedge Y$ désignent les complexifiés des espaces désignés habituellement par $\wedge X$ et $\wedge Y$, c'est-à-dire: $\wedge X + i \wedge X$ et $\wedge Y + i \wedge Y$.

c'est-à-dire ne dépend pas du système d'axes choisi. (Un changement de base le montrerait si on faisait les calculs).

Si on revient à l'hypothèse, qu'on avait une application de $\overset{0}{\mathcal{S}}{}'_x$ dans $\overset{0}{\mathcal{S}}{}'_x$, la formule (15) montre que la même application applique $\overset{p}{\mathcal{S}}_x$ dans $\overset{p}{\mathcal{S}}_x$. ($\overset{p}{\wedge} Y$ étant appliqué sur lui même).

Considérons maintenant la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ d'une forme différentielle de degré n appartenant à $\overset{n}{\mathcal{S}}_x$:

$$\mathcal{F}\overset{n}{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \int_{R^n} \exp\left[-2\pi i\langle x, y\rangle\right]\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \psi(y)\,, \tag{16}$$

et sa coniugée $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\overline{\mathcal{F}}\overset{n}{\varphi} = \overline{\mathcal{F}}(\varphi(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \int_{R^n} \exp\left[2\pi i\langle x, y\rangle\right]\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \tau(y)\,, \tag{17}$$

où $\psi(y)$ et $\tau(y)$ sont des fonctions ou si on veut, formes différentielles de degré zéro, appartenants à $\overset{0}{\mathcal{S}}_y$.

On pourrait aussi écrire:

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}\overset{n}{T} &= \mathcal{F}(T\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \mathcal{F}T = V\,, \\ \overline{\mathcal{F}}\overset{n}{T} &= \overline{\mathcal{F}}(T\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n) = \overline{\mathcal{F}}T = W\,, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

où les derniers membres sont les transformées de Fourier de la distributions T.

Si on considère que les transformées de Fourier sont des applications continues dans $\mathcal{S}'$; que $\overset{n}{\mathcal{S}}_x$ et $\overset{0}{\mathcal{S}}_y$ sont des sous-espaces denses dans $\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x$ et $\overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y$ respectivement, et que (16) et (17) ne dépendent pas du système d'axes choisi, on voit que les formules (18) sont indépendents du système d'axes.

On peut conclure alors, que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjugée $\overline{\mathcal{F}}$ définissent deux applications qui font passer des courants de degré n sur un espace, aux courants de degré zéro sur le dual.

Nous indiquerons symboliquement avec $\overset{n\to 0}{\mathcal{F}}$ et $\overset{n\to 0}{\overline{\mathcal{F}}}$ ces applications.

Supposons donc qu'on a, en général une application:

$$\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x \to \overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y \tag{19}$$

des courants tempérés de degré n sur X dans les courants de degré zéro sur Y.

Nous démontrerons sous cette hypothèse qu'on a:

$$\overset{n-p}{\mathcal{S}}{}'_x \to \overset{p}{\mathcal{S}}{}'_y\,, \tag{19-bis}$$

c'est-à-dire, l'application donnée se prolonge en une application qui fait passer des courants tempérés de degré $(n-p)$ sur X aux courants tempérés de degré p sur Y.

En effet: soit $\overset{n-p}{T}$ un courant de degré $(n-p)$, et soit $\overset{p}{\omega}$ la forme identique de degré p sur X et à valeurs dans $\overset{p}{\wedge} X$, autrement dit la forme de degré p sur X telle qu'à tout p-vecteur sur X, elle lui fait correspondre le même p-vecteur comme élément de $\overset{p}{\wedge} X$.

Si on fait le produit extérieur de $\overset{n-p}{T}$ et $\overset{p}{\omega}$, on obtiendra un courant de degré n à valeur dans $\overset{p}{\wedge} X$, c'est-à-dire

$$\overset{n-p}{T} \wedge \overset{p}{\omega} = \overset{n}{S}, \tag{20}$$

ou $\overset{n}{S}$ est un courant de degré n à valeur dans $\overset{p}{\wedge} X$, ce que revient à dire que $\overset{n}{S}$ est un élément du produit tensoriel:

$$\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x \otimes \overset{p}{\wedge} X . \tag{21}$$

Mais par hypothèse on avait l'application $\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x \to \overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y$, et en appliquant $\overset{p}{\wedge} X$ sur lui même, on aura:

$$\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x \otimes \overset{p}{\wedge} X \to \overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y \otimes \overset{p}{\wedge} X = \overset{p}{\mathcal{S}}{}'_y , \tag{22}$$

car le produit tensoriel $\overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y \otimes \overset{p}{\wedge} X$ donne bien l'espace des courants de degré p définis sur Y (voir (14)).

En somme: grâce à la multiplication extérieure par $\overset{p}{\omega}$ l'application $\overset{n}{\mathcal{S}}{}'_x \to \overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y$ se prolonge en une application qui fait passer des courants de degré $(n-p)$ sur X, aux courants de degré p sur Y.

Lorsque l'application de la démonstration précedente est la transformée de Fourier ou sa conjuguée, on doit alors prolonger $\overset{n\to 0}{\mathcal{F}}$ et $\overset{n\to 0}{\overline{\mathcal{F}}}$ au moyen de la multiplication extérieure par ω.

On obtient dans ce cas: $\mathcal{F}_\omega$, ${}_\omega\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}_\omega$, ${}_\omega\overline{\mathcal{F}}$, selon que l'on fait le produit extérieur par ω, à droite ou à gauche.

Si on tient compte qu'on a fait:

$$\overset{n-p\to p}{\mathcal{F}_\omega} \cdot \overset{n-p}{T} = \overset{n\to 0}{\mathcal{F}} \cdot (\overset{n-p}{T} \wedge \overset{p}{\omega}), \qquad \text{et:} \quad \overset{n-p\to p}{{}_\omega\mathcal{F}} \cdot \overset{n-p}{T} = \overset{n\to 0}{\mathcal{F}} \cdot (\overset{p}{\omega} \wedge \overset{n-p}{T}) ,$$

on pourra écrire symboliquement:

$$\overset{n\to 0}{\mathcal{F}} \quad \text{se prolonge en} \quad \overset{n-p\to p}{\mathcal{F}_\omega} \quad \text{ou en} \quad \overset{n-p\to p}{{}_\omega\mathcal{F}} , \tag{23}$$

$$\overset{n\to 0}{\overline{\mathcal{F}}} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \overset{n-p\to p}{\overline{\mathcal{F}}_\omega} \quad \text{»} \quad \overset{n-p\to p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} . \tag{24}$$

Vérifions ces résultats en faisant les calculs avec un systeme d'axes. On a:

(25) $$\overset{n-p}{T} = \sum_J T_J \, dx_J \, ,$$

expression d'un courant de degré $(n-p)$ au moyen des $\binom{n}{p}$ distributions $T_J \in \mathcal{S}'_x$ (4)

(26) $$\overset{p}{\omega} = \sum_K e_K dx_K \, ,$$

où les e_K forment une base de $\overset{p}{\wedge} X$.

On a alors:

(27) $$\overset{n-p}{T} \wedge \overset{p}{\omega} = \sum \delta_I^{J,K} T_J e_K \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \, ,$$

qui est une somme de courants de degré zéro T_J, multipliés par les vecteurs e_K.

$\delta_I^{J,K}$ désigne le symbole de Kronecker, avec $I = (1, \ldots, n)$; $J = (j_1, \ldots, j_{n-p})$; $K = (k_1, \ldots, k_p)$. Si on fait la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ de (27), on obtient:

(28) $$\sum \delta_I^{J,K} V_J e_K = \overset{p}{V} \, ,$$

où on a fait:

(29) $$\mathcal{F} \, T_J dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = V_J \, ,$$

avec $V_J \in \mathcal{S}'_y$.

L'expression (28) peut être considérée comme courant de degré zéro sur Y à valeur dans $\overset{p}{\wedge} X$, c'est-à-dire comme élément du produit tensoriel $\overset{0}{\mathcal{S}}{}'_y \otimes \overset{p}{\wedge} X$, ou si on veut comme courant de degré p sur Y.

On peut alors écrire d'accord avec (25):

(30) $$\overset{p}{V} = \sum \delta_I^{J,K} V_J \, dy_K \, .$$

Soit d'ailleurs

(30) $$\overset{n-p}{\omega'} = \sum_L e'_L dy_L \, ,$$

la forme identique de degré $(n-p)$ sur Y à valeur dans $\overset{p}{\wedge} Y$.

Les e'_L forment une base de $\overset{p}{\wedge} Y$.

(4) Voir [2], p. 30.

On a:

$$\overset{n-p}{\omega'} \wedge \overset{p}{V} = \sum \delta_I^{L,K} \cdot \delta_I^{J,K} e'_L V_J \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \,. \tag{32}$$

On peut se passer du produit des symboles $\delta_I^{L,K}$, $\delta_I^{J,K}$ car ils sont les mêmes quand on fait $L = J$, alors:

$$\overset{n-p}{\omega'} \wedge \overset{p}{V} = \sum_J e'_J V_J \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \,. \tag{32-bis}$$

Si on applique la transformée de Fourier conjuguée à (32-*bis*) on aura:

$$\sum_J e'_J T_J = \overset{n-p}{T}, \tag{33}$$

car

$$\overline{\mathcal{F}} V_J \, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = T_J \,.$$

La formule (33) est alors l'expression d'un courant de degré zéro sur X à valeur dans $\overset{p}{\wedge} Y$ qui coïncide bien avec $\overset{n-p}{T}$.

Alors, symboliquement:

$$\overset{p \to n-p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} \circ \overset{n-p \to p}{\mathcal{F}_\omega} = \overset{n-p}{I} \,, \tag{34}$$

où I désigne l'identité.

3. – Soit maintenant H un isomorphisme de X sur lui même; un tel isomorphisme définit sur le dual Y l'isomorphisme contragrédient $\check{H}$ par la relation

$$\langle H(x), \check{H}(y) \rangle = \langle x, y \rangle \,. \tag{35}$$

On aura une image directe de $\overset{n-p}{\mathcal{S}'_x}$ par H, et par conséquence une image directe de $\overset{p}{\mathcal{S}'_y}$ par $\check{H}$, et parce qu'il y a transport de structure on pourra écrire

$$\left\{ \begin{aligned} &\overset{n-p \to p}{\mathcal{F}_\omega} H \overset{n-p}{T} = \check{H} \overset{p}{V} = \check{H} \overset{n-p \to p}{\mathcal{F}_\omega} \overset{n-p}{T} \,, \\ &\overset{p \to n-p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} \check{H} \overset{p}{V} = H \overset{n-p}{T} = H \overset{p \to n-p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} \overset{p}{V} \,, \end{aligned} \right. \tag{36}$$

et en fin, symboliquement:

$$\left\{ \begin{aligned} &\overset{n \; p \to p}{\mathcal{F}_\omega} \circ H = \check{H} \circ \overset{p \to n-p}{\mathcal{F}_\omega} \,, \\ &\overset{p \to n-p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} \circ \check{H} = H \circ \overset{n-p \to p}{{}_\omega\overline{\mathcal{F}}} \,. \end{aligned} \right. \tag{37}$$

A titre d'exemple nous obtiendrons la première des formules (37), dans le cas d'un courant de degré zéro, en faisant les calculs explicitement.

On peut poser:

$$\langle \mathcal{F} H \overset{0}{T}, \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle H \overset{0}{T}, \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} \rangle, \tag{38}$$

où les deux membres ont un sens bien défini car $\mathcal{F} H \overset{0}{T}$ est un courant de degré n, $H \overset{0}{T}$ un courant de degré zéro et $\mathcal{F} \overset{0}{\varphi}$ est une forme de degré n.

En tenant compte des formules (3) et (5), on aura:

$$\langle H \overset{0}{T}, \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle \overset{0}{T}, H' \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} \rangle. \tag{39}$$

Si on pose:

$$\mathcal{F} \overset{0}{\varphi} = \overset{n}{\psi}(x) = \int_{\dot{R}^n} \exp[-2\pi i \langle x, y \rangle] \varphi(y)\, dy, \tag{40}$$

on aura:

$$H' \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} = H' \overset{n}{\psi} = \psi(H(x)) \cdot |H| = \tag{41}$$

$$= |H| \cdot \int_{R^n} \exp[-2\pi i \langle H(x), y \rangle] \varphi(y)\, dy = |H| \int_{R^n} \exp[-2\pi i \langle x, {}^tH(y) \rangle] \varphi(y)\, dy.$$

Si on fait: ${}^tH(y) = \xi$; $y = {}^tH^{-1}(\xi)$ on obtient de (41)

$$|H| \int_{\dot{R}^n} \exp[-2\pi i \langle \xi, x \rangle] \varphi({}^tH^{-1}(\xi))\, |{}^tH^{-1}|\, d\xi = \tag{42}$$

$$= |H| \cdot |{}^tH^{-1}| \int_{\dot{R}^n} \exp[-2\pi i \langle \xi, x \rangle \varphi({}^tH^{-1}(\xi))\, d\xi =$$

$$= \int_{\dot{R}^n} \exp[-2\pi i \langle \xi, x \rangle] \varphi({}^tH^{-1}(\xi)) d\xi = \mathcal{F} \varphi({}^tH^{-1}(\xi)) = \mathcal{F} \overset{0}{\varphi}(\check{H}(\xi)) = \mathcal{F} \check{H}' \overset{0}{\varphi},$$

ou on a indiqué par $\check{H}$ l'isomorphisme contragrédient ${}^tH^{-1}$ de H.

On a donc:

$$H' \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} = \mathcal{F} \check{H}' \overset{0}{\varphi}. \tag{43}$$

En remplaçant dans (39) on aura:

$$\langle \overset{0}{T}, H' \mathcal{F} \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle \overset{0}{T}, \mathcal{F} \check{H}' \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F} \overset{0}{T}, \check{H}' \overset{0}{\varphi} \rangle = \langle \check{H} \mathcal{F} \overset{0}{T}, \overset{0}{\varphi} \rangle, \tag{44}$$

et par comparaison avec le premier membre de (38) on obtient:

(45) $$\mathcal{F} H \overset{0}{T} = \check{H} \mathcal{F} \overset{0}{T}.$$

Je tiens à remercier ici, M. L. SCHWARTZ, qui m'a suggéré de faire cette note et maintes fois m'a aidé avec ses conseilles, M. J. LIONS dont les discussions m'on été si utiles, et la Direccion Nacional de la Energía Atómica de Buenos Aires, qui m'a permis de rester comme boursier à Paris.

APPLICATION

Soit $X = R$, $n = 1$, $T = \lg|x|$, H l'homotétie de rapport $\lambda > 0$ (5).

a) Considérons d'abord T comme courant de degré zéro.
Il est facile de voir que:

$$H\overset{0}{T} = \lg\left|\frac{x}{\lambda}\right| = \lg|x| - \lg\lambda .$$

Alors:

$$\mathcal{F} H \overset{0}{T} = \mathcal{F}\lg|x| - \mathcal{F}\lg\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|} - K\delta - \delta\lg\lambda = -\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|} - (K + \lg\lambda)\delta ,$$

où on a fait:

(47) $$\mathcal{F}\lg|x| = -\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|} - K\delta , \quad (6)$$

avec $K = C + \lg 2\pi$ et $C =$ const. d'Euler.

Considérons maintenant: $\check{H}\mathcal{F}\overset{0}{T}$: on aura:

(48) $$\check{H}\left(-\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|} - K\delta\right) = \check{H} S .$$

où $(-\frac{1}{2}Pf(1/|y|) - K\delta) = \overset{1}{S}$ doit être considéré comme courant de degré un, et H est l'homothétie de rapport $1/\lambda$.

On aura

(49) $$\langle H\overset{1}{S}, \overset{0}{\varphi}\rangle = \langle \overset{1}{S}, \check{H}'\overset{0}{\varphi}\rangle = \left\langle \overset{1}{S}, \overset{0}{\varphi}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\rangle = \left\langle\left(-\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|} - K\delta\right), \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle -\frac{1}{2} Pf \frac{1}{|y|}, \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\rangle - \left\langle K\delta, \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2} Pf \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|}\, \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}y - K\varphi(0) .$$

---

(5) Voir [5], p. 1012.

(6) Voir [1], II, p. 114.

Considérons le premier terme du dernier membre de (49)

$$(50)\qquad -\frac{1}{2}Pf\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y + \varphi(0)\lg\varepsilon + \varphi(0)\lg\varepsilon\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)+\varphi\left(-\frac{y}{\lambda}\right)}{y}\mathrm{d}y + 2\varphi(0)\lg\varepsilon\right].$$

Si on fait:

$$\frac{y}{\lambda} = \xi\,; \qquad \frac{\varepsilon}{\lambda} = \eta\,.$$

On aura (50) égal à:

$$(51)\qquad -\frac{1}{2}\lim_{\eta\to 0}\left[2\int_{\eta}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi + 2\varphi(0)\lg\lambda\eta\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\eta\to 0}\left[2\int_{\eta}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi + 2\varphi(0)\lg\eta + 2\varphi(0)\lg\lambda\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}Pf\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\xi|}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \varphi(0)\lg\lambda\,.$$

En ramenant ce résultat à (49), on obtient:

$$(52)\qquad \check{H}\overset{1}{S} = -\frac{1}{2}Pf\frac{1}{|y|} - K\delta - \delta\lg\lambda = -\frac{1}{2}Pf\frac{1}{|y|} - (K+\lg\lambda)\delta\,,$$

ce qui coïncide avec (45).

b) Si l'on considère T comme courant de degré un. on aura

$$H\overset{1}{T} = \frac{1}{\lambda}\lg\left|\frac{x}{\lambda}\right|,$$

et

$$(53)\qquad \mathcal{F}H\overset{1}{T} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(\lg|x| - \lg\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}[\mathcal{F}\lg|x| - \mathcal{F}\lg\lambda] = \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}Pf\frac{1}{|y|} - (K+\lg\lambda)\delta\right].$$

Considérons maintenant:

$$\overset{\vee}{H}\mathcal{F}\overset{1}{T} = \overset{\vee}{H}\overset{0}{S}\,.$$

On obtient:

$$\langle \overset{\vee}{H}\overset{0}{S}, \overset{1}{\varphi} \rangle = \left\langle \overset{0}{S}, \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{2}Pf\frac{1}{|y|} - K\delta\right), \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\rangle, \tag{54}$$

et finalement

$$\overset{\vee}{H}\overset{0}{S} = \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{2}Pf\frac{1}{|y|} - (K + \lg\lambda)\delta\right], \tag{55}$$

résultat que coïncide avec (53).

Pour $\lambda < 0$ on obtient le même résultat en remplaçant λ par $|\lambda|$ comme on le voit très facilement en effectuant les mêmes calculs antérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Schwartz: *Théorie des distributions*, I, II (Paris, 1950-51).
[2] G. de Rham et K. Kodaira: *Harmonic Integrals* (Princeton, 1950).
[3] M. Cugiani et S. Albertoni: *Nuovo Cimento*, **10**, 157 (1953).
[4] W. Güttinger: *Phys. Rev.*, **89**, 1004 (1953).
[5] N. Boubaki: *Eléments de Mathématique*, VI, livre II, ch. II.

RIASSUNTO (*)

Si studia il cambiamento di variabili nelle distribuzioni considerandole come correnti, sia di grado zero che di grado n in uno spazio euclideo. In seguito si definisce la trasformata di Fourier di una corrente e si applicano i precedenti risultati al caso del cambiamento di variabili nella trasformata di Fourier di una distribuzione.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*