

Über den Zusammenhang von Bethe-Salpetergleichung und Tamm-Dancoffmethode (*).

W. ZIMMERMANN

Max-Planck-Institut für Physik - Göttingen

(ricevuto il 16 Novembre 1953)

INHALT: 1. Einleitung. 2. Allgemeines. 3. Tamm-Dancoffmethode im Ortsraum. 4. Wellenfunktionen. 5. Randbedingungen für $t = -\infty$. 6. Einzeitige Bethe-Salpetergleichung. 7. Vergleich beider Methoden. - Anhang über Graphentechnik. 1. Allgemeines. 2. Definition der Graphen. 3. Mehrzeitige Bethe-Salpetergleichung. 4. Integralgleichungssysteme. 5. Einzeitige Integralgleichungen.

1. - Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit soll der allgemeine Zusammenhang zwischen der Tamm-Dancoffmethode^(1,2) und der Bethe-Salpetergleichung⁽³⁾ besprochen werden. Die Arbeit schließt sich der strengen Begründung der Bethe-Salpetergleichung durch GELL-MANN und LOW⁽⁴⁾, sowie zwei Arbeiten von LÉVY⁽⁵⁾ an, in denen die Tamm-Dancoffmethode zu einem systematischen

(*) Diese Arbeit ist eine zusammenfassende Darstellung einer Reihe von Vorträgen die vom Verf. Februar 1953 am Max-Planck-Institut für Physik (Göttingen) gehalten wurden. Eine Ausnahme davon bildet lediglich Abschnitt 6 über einzeitige Formen der Bethe-Salpetergleichung, der im Anschluß an die Arbeit W. MACKE: *Zeits. f. Naturf.*, **8a**, 559 und 615, geschrieben wurde.

(¹) I. TAMM: *Journ. Phys. USSR*, **9**, 449 (1950).

(²) S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).

(³) E. L. SALPETER und H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **84**, 1232 (1951).

(⁴) M. GELL-MANN und F. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951).

(⁵) M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **88**, 72 und 725 (1925).

Verfahren ausgebaut und einem ersten Vergleich mit der Bethe-Salpetergleichung unterzogen wurde. Vor der eigentlichen Inhaltsübersicht erfolgt zunächst eine Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse.

Bei der Tamm-Dancoffmethode und der Methode von Bethe und Salpeter handelt es sich um zwei im Grunde sehr verschiedene Verfahren gebundene Zustände zu behandeln. Zur Bestimmung der Energieeigenwerte E von Zuständen zweier gebundener Nukleonen hat man in der Tamm-Dancoffmethode eine Integralgleichung der Form

$$(1.1) \quad \chi_t(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = g^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 K(t\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t'\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \chi_{t'}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2),$$

und andererseits die Bethe-Salpetergleichung

$$\varphi(x_1, x_2) = g^2 \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 K(x_1, x_2; \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \varphi(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2).$$

In beiden Integralgleichungen ist der Kern K gegeben als Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten, deren Glieder sich durch Graphen veranschaulichen lassen ⁽⁶⁾. Die Eigenwerte E bestimmen sich aus den Eigenwertgleichungen

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \chi_t = iE \chi_t, \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \varphi = -iE \varphi.$$

Vor der Diskussion der wichtigsten Unterschiede beider Verfahren sei zunächst auf einige methodische Parallelen hingewiesen. Die « Wahrscheinlichkeitsamplitude » $\chi_t(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ⁽⁷⁾ und die « Wellenfunktion » $\varphi(x_1, x_2)$ eines Zustands sind definiert durch:

$$(1.3) \quad \chi_t(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) \Phi(t))_{t_1=t_2=t},$$

$$(1.3') \quad \varphi(x_1, x_2) = (\Omega, T \psi(x_1) \psi(x_2) \Phi);$$

(Ω ist das Vakuum der Gesamtenergie, $\Phi(t)$ der in die Wechselwirkungsdarstellung transformierte Zustandsvektor Φ der Heisenbergdarstellung und

⁽⁶⁾ Siehe die Gl. (3.12) und (4.1) dieser Arbeit.

⁽⁷⁾ Die Bezeichnung Wahrscheinlichkeitsamplitude wurde wegen des einfachen Zusammenhangs mit den Entwicklungskoeffizienten von Φ nach Zuständen freier Teilchen gewählt.

$\psi(x)$ der Operator des Nukleonenfeldes; der Index ${}_0$ bezeichnet die entsprechenden Größen des wechselwirkungsfreien Problems). Diese Ausdrücke lassen sich durch Bildung von $m|n|a$ -Wahrscheinlichkeitsamplituden bzw. $m|n|a$ -Wellenfunktionen (d.h. Funktionen mit m Mesonenkoordinaten, n Nukleonenkoordinaten und a Antinukleonenkoordinaten) zu einem ganzen Satz von Wahrscheinlichkeitsamplituden bzw. Wellenfunktionen des Zustands Φ ergänzen⁽⁸⁾. Die erhaltenen Funktionen haben die bekannten Symmetrieeigenschaften, erlauben die Abseparation der Schwerpunktsbewegung und sind für $g = 0$ den wohlbekannten Wellenfunktionen im Konfigurationsraum des wechselwirkungsfreien Problems gleich.

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind untereinander durch ein einheitliches System A von unendlich vielen Gleichungen verknüpft⁽⁹⁾, ähnlich gehorchen die Wellenfunktionen einem mehrzeitigen System B unendlich vieler invarianter Integralgleichungen^(10,11). Jede Lösung $\chi_i(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$ bzw. $\varphi(x_1x_2)$ der Gl. (1.1) bzw. (1.1') läßt sich zu einem ganzen Satz von Wahrscheinlichkeitsamplituden bzw. Wellenfunktionen ergänzen, der das unendliche Gleichungssystem A bzw. B identisch erfüllt.

Tritt zu den rechten Seiten der Gl. (1.1) und (1.1') noch ein inhomogenes Glied $\varphi_0(x_1x_2)$, das in x_1 und x_2 der wechselwirkungsfreien Diracgleichung genügt, so beschreiben die durch Iteration gewonnenen Lösungen dieser Gleichungen die Streuung zweier Nukleonen, die asymptotisch (in der Vergangenheit) mit der wechselwirkungsfreien Zwei-Teilchenwellenfunktion $\varphi_0(x_1x_2)$ einlaufen.

Andere Zwei-Nukleonenprobleme, wie etwa die Streuung zweier Nukleonen und mehrerer Mesonen oder die Streuung eines Mesons an einem Deuteron werden dagegen durch die Gl. (1.1) und Gl. (1.1') nicht erfaßt: Diese Gleichungen, samt ihren inhomogenen Formen, sind speziell auf das Problem zweier gebundener oder gestreuter Nukleonen zugeschnitten, während die unendlichen Gleichungssysteme A und B allgemeingültig sind. Auch für die übrigen Probleme (z.B. Streuung von Mesonen an einem Deuteron) gibt es entsprechend spezialisierte Beziehungen, auf die in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen wird⁽¹²⁾.

⁽⁸⁾ Definition der Wahrscheinlichkeitsamplituden durch Gl. (III) auf Seite 53; Definition der Wellenfunktionen durch Gl. (4.5) und (IV) auf Seite 62, 63.

⁽⁹⁾ Gleichungssystem (Aa) auf Seite 56 und (Ab) auf Seite 59.

⁽¹⁰⁾ Gleichungssystem (B) auf Seite 65.

⁽¹¹⁾ Diese Erweiterung der Methode von Bethe und Salpeter wurde gemeinsam mit E. FREESE entwickelt und geht auf eine Anregung von M. GELL-MANN zurück. Vgl. E. FREESE: *Zeits. f. Naturf.*, **8a**, 776. Die Methode wurde ferner unabhängig gefunden von K. NISHIJIMA: *Progr. theor. Phys.*, **10**, 549 (1953); P. T. MATTHEWS und A. SALAM: *Proc. Roy. Soc., A* **221**, 128 (1954).

⁽¹²⁾ Siehe zu diesem Punkt K. NISHIJIMA: *Progr. theor. Phys.*, **10**, 549 (1953).

Bei der Gegenüberstellung beider Methoden fällt zunächst der Unterschied von einzeitiger und mehrzeitiger Formulierung auf. Dieser Unterschied ist jedoch nicht so wesentlich, da es auch einzeitige Formen der Bethe-Salpetergleichung und des Systems B gibt ⁽¹³⁾. Entscheidend ist vielmehr — und zwar in doppelter Hinsicht —, daß die Wahrscheinlichkeitsamplituden auf das wechselwirkungsfreie Vakuum bezogen sind, die Wellenfunktionen dagegen auf das Vakuum der Gesamtenergie.

Denn erstens hat die Beziehung auf das wechselwirkungsfreie Vakuum, wie sie der Tamm-Dancoffmethode zugrundeliegt, zur Folge, daß die Wahrscheinlichkeitsamplituden ganz elementar mit den Entwicklungskoeffizienten des Zustandsvektors Φ nach Eigenzuständen der wechselwirkungsfreien Energie zusammenhängen. Die Übertragung von Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen der Zustandsvektoren auf ihre Wahrscheinlichkeitsamplituden ist deshalb kein Problem. Dagegen ist vorläufig die Frage noch unbeantwortet, wie sich Orthogonalität und Normierung von Zustandsvektoren in den zugehörigen Wellenfunktionen ausdrücken (« Normierungsproblem » der Wellenfunktionen) ⁽¹⁴⁾.

Wie sich zweitens die Wahl des Bezugsvakuums auf das Renormierungsproblem auswirkt, macht die Gegenüberstellung der störungstheoretischen Entwicklung von Wahrscheinlichkeitsamplitude und Wellenfunktion eines Streuzustands von Elementarteilchen deutlich:

$$(1.4) \quad (\Omega_0, \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\Phi(t))_{t=-t} = (\Omega_0, \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)U(t, -\infty)\Phi(-\infty))$$

$$(1.4') \quad (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\Phi}) = (\Omega_0, T[U(+\infty, -\infty)\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)]\bar{\Phi}(-\infty)).$$

Die Renormierung der Entwicklung (1.4') macht wegen der Verwandtschaft des Ausdrucks $T[U(+\infty, -\infty)\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)]$ mit der Dyson'schen S -Matrix gar keine Schwierigkeit, dagegen hängt die Renormierung der Entwicklung (1.4) mit dem heute noch ungelösten Problem ⁽¹⁵⁾, den Operator $U(t, -\infty)$ in jeder Näherung frei von Divergenzen zu halten, eng zusammen.

Ganz ebenso verhält es sich mit den Integralgleichungen (1.1) und (1.1'). Es ist bekannt, daß die invariante Renormierung der Bethe-Salpetergleichung sich in Analogie zur S -Matrix vornehmen läßt ⁽¹⁶⁾. Dagegen wurde von LEH-

⁽¹³⁾ W. MACKE: *Zeits. f. Naturfor.* im Erscheinen; ferner Seite 68 und Abschnitt 6 dieser Arbeit.

⁽¹⁴⁾ Zur Lösung des Normierungsproblems vgl. K. NISHIJIMA: *Progr. theor. Phys.*, **10**, 549 (1953).

⁽¹⁵⁾ E. C. G. STUECKELBERG: *Phys. Rev.*, **81**, 130 (1951).

⁽¹⁶⁾ M. GELL-MANN und P. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951); M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **88**, 725 (1952).

MANN⁽¹⁷⁾ nachgewiesen, daß auf der rechten Seite der Gl. (1.1) divergente Ausdrücke vorkommen, die sich *nicht* als Renormierungsterme verstehen lassen.

Während so die Notwendigkeit invarianter Renormierung der Methode der Wellenfunktionen den Vorrang gibt, scheinen die Wahrscheinlichkeitsamplituden, was Normierungs- und Orthogonalitätsfragen anlangt, zweckmäßiger,

LÉVY hat vorgeschlagen, bei praktischen Rechnungen an sich mit der Tamm-Dancoffmethode zu arbeiten, Renormierungseffekte jedoch mit der Bethe-Salpetergleichung zu bestimmen und anschließend in die Tamm-Dancoffmethode umzurechnen. Das mag in einzelnen Fällen wohl durchführbar sein, dürfte jedoch erhebliche Schwierigkeiten bereiten, sobald Renormierungseffekte wirklich ins Gewicht fallen; denn die Umrechnungsformeln von den Wellenfunktionen zu den Wahrscheinlichkeitsamplituden sind sehr unerfreulich. Vor allem ist zu befürchten, daß diese Umrechnung ähnliche Probleme aufwirft wie die Renormierung des Operators $U(0, -\infty)$ ⁽¹⁵⁾.

Die Möglichkeit einzelziger Formulierung ist, wie gesagt, nicht allein auf die Tamm-Dancoffmethode beschränkt. In beiden Methoden hat man einzelzige Wellenfunktionen bzw. Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$\varphi_t(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \varphi(x_1x_2)_{t_i=t} \quad \text{bzw.} \quad \chi_t(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2),$$

die mit den zugehörigen zeitunabhängigen Größen

$$\varphi(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \varphi_{t=0}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) \quad \text{bzw.} \quad \chi(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \chi_{t=0}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$$

in der Form $\varphi_t = \exp[-iEt]\varphi$ bzw. $\chi_t = \exp[-iEt]\chi$ zusammenhängen.

Die einzelzigen bzw. zeitunabhängigen Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsamplituden sind untereinander durch einzelzige bzw. zeitunabhängige Gleichungen verknüpft⁽¹⁸⁾. Ferner kann die mehrzeitige Bethe-Salpetergleichung in eine einzelzige Form

$$(1.5) \quad \varphi_t(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = g^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 \tilde{K}(t\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2; t'\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2) \varphi_{t'}(\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2), \quad (19)$$

gebracht werden, die das eigentliche Analogon zu Gl. (1.1) darstellt, von dieser jedoch wesentlich verschieden ist.

⁽¹⁷⁾ H. LEHMANN: *Zeits. f. Naturf.*, **8a**, 776 (1953).

⁽¹⁸⁾ Die einzelzigen Wellenfunktionen hängen eng mit den Größen zusammen, die F. J. DYSON (*Phys. Rev.*, **91**, 1543 (1953)) als Ersatz für die Wahrscheinlichkeitsamplituden vorgeschlagen hat.

⁽¹⁹⁾ Zur Definition des Integralkerns vgl. Gl. (6.6) der Arbeit. Dieselbe einzelzige Form der Bethe-Salpetergleichung ist kürzlich von W. MACKE auf anderem Wege gefunden worden (*Zeits. f. Naturfor.*, **8a**, 599 u. 615 (1953)). Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Ableitung wurde gemeinsam mit K. SYMANZIK entwickelt.

Es folgt nun eine kurze Inhaltsübersicht. Nach allgemeinen Betrachtungen in Abschnitt 2 wird zunächst (Abschnitt 3) die von LÉVY ausgebaute Tamm-Dancoffmethode für den Ortsraum formuliert. Ausgehend von der Bethe-Salpetergleichung wird in Abschnitt 4 die Methode der Wellenfunktionen entwickelt. Es werden ein lorentzinvariantes und ein einzeitiges Gleichungssystem der Wellenfunktionen angegeben. Abschnitt 5 handelt vom Einfluß vorgegebener Randwerte zur Zeit $t = -\infty$ auf Wahrscheinlichkeitsamplituden und Wellenfunktionen. Abschnitt 6 bringt die Ableitung einer einzeitigen Form der Bethe-Salpetergleichung. Am Beispiel des Zwei-Nukleonenproblems werden abschließend in Abschnitt 7 die wichtigsten Vergleichspunkte beider Verfahren diskutiert. Im Anhang sind einige wichtige Regeln der Graphentechnik zusammengestellt.

2. – Allgemeines.

Als Grundlage der folgenden Untersuchungen ist die Wechselwirkung von Nukleonen mit pseudoskalaren Mesonen (pseudoskalare Kopplung) gewählt, die beschrieben wird durch die Feldgleichungen

$$(I) \quad \begin{cases} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_0 \right) \psi(x) = ig\gamma_5 A(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_0 \right) = -igA(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5, \\ (\square - \kappa_0^2)A(x) = \frac{1}{2} ig[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)]\gamma_{\beta\alpha}^5, \end{cases}$$

und die gleichzeitigen kanonischen Vertauschungsrelationen. Der Energieimpulsoperator \mathbf{P}_μ dieses Problems hat die Eigenschaften:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} = i[\psi(x), \mathbf{P}_\mu], \quad \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_\mu} = i[\bar{\psi}(x), \mathbf{P}_\mu],$$

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} = i[A(x), \mathbf{P}_\mu].$$

Je nachdem, ob die in den Feldgleichungen (I) auftretenden Konstanten m_0 und κ_0^2 in ihre « experimentellen » Anteile m , κ^2 und die Zusatzmassen

— δm , — $\delta\kappa^2$ zerlegt werden oder nicht, hat man

$$(2.2 a) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_1(t) = -\frac{1}{2} ig \int_t^{\infty} [\bar{\psi}_\beta(x), \gamma_5^{\beta\alpha} A(x) \psi_\alpha(x)] d\mathbf{x},$$

oder

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}'_0(t) + \mathbf{H}'_1(t) \quad (20)$$

$$(2.2 b) \quad \mathbf{H}'_1(t) = -\frac{1}{2} ig \int_t^{\infty} [\bar{\psi}(x), \gamma_5 A(x) \psi(x)] d\mathbf{x} - \\ -\frac{1}{2} \delta m \int_t^{\infty} [\bar{\psi}(x), \psi(x)] d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \delta\kappa^2 \int_t^{\infty} A(x)^2 d\mathbf{x} \quad (21),$$

als Zerlegung der Gesamtenergie in wechselwirkungsfreie und Wechselwirkungsenergie. Jeder dieser Zerlegungen entspricht eine Wechselwirkungsdarstellung, die wir uns für $t = 0$ der Heisenbergdarstellung angepaßt denken. Die Integralgleichungen der Zustandsvektoren $\Phi(t)$ bzw. $\Phi'(t)$ dieser Darstellungen lauten:

$$\Phi(t) = \Phi(-\infty) - i \int_{-\infty}^t H_1(t') \Phi(t') dt' \quad (22),$$

$$(II a) \quad H_1(t) = -ig \int_t^{\infty} : \bar{\psi}_0(x) \gamma_5 A_0(x) \psi_0(x) : d\mathbf{x} \quad (20),$$

$$\Phi'(t) = \Phi'(-\infty) - i \int_{-\infty}^t H'_1(t') \Phi'(t') dt' \quad (22),$$

$$(II b) \quad H'_1(t) = -ig \int_t^{\infty} : \bar{\psi}'_0(x) \gamma_5 A'_0(x) \psi'_0(x) : d\mathbf{x} - \\ - \delta m \int_t^{\infty} : \bar{\psi}'_0(x) \psi'_0(x) : d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \delta\kappa^2 \int_t^{\infty} A'_0(x)^2 d\mathbf{x} \quad (20),$$

(20) Die fetten Typen $\mathbf{H}_1(t)$, $\mathbf{H}'_1(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$, $\mathbf{H}'_0(t)$ bezeichnen Energieoperatoren der Heisenbergdarstellung, $H_1(t)$, H_0 bzw. $H'_1(t)$, H'_0 dagegen Energieoperatoren der Wechselwirkungsdarstellungen.

(21) Lediglich die Abspaltung der Massenrenormierungsterme wird für das Folgende wesentlich sein, die Konstanten δm und $\delta\kappa^2$ seien in der von KÄLLÉN vorgeschlagenen Weise definiert (G. KÄLLÉN: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952)).

$$(22) \int_{-\infty}^t \dots dt' \text{ steht zur Abkürzung für } \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t e^{\alpha t'} \dots dt'.$$

worin $\psi_0(x)$, $\psi'_0(x)$, usw. diejenigen Lösungen der wechselwirkungsfreien Feldgleichungen mit den Konstanten m_0 , κ_0^2 bzw. m , κ^2 sind, die zur Zeit $t = 0$ mit den Feldoperatoren $\psi(x)$, $A(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ übereinstimmen.

Über die inhomogenen Glieder $\Phi(-\infty)$, $\Phi'(-\infty)$ ist folgendes zu sagen: Ist $\Phi'(-\infty)$ ein Zwei-Nukleonenzustand oder allgemein ein Zustand freier Elementarteilchen, so beschreibt die durch Iteration gewonnene Lösung

$$\Phi'(t) = U'(t, -\infty)\Phi'(-\infty)$$

der inhomogenen Gl. (II b) die Streuung der durch $\Phi'(-\infty)$ vorgegebenen freien Teilchen. Beschreibt aber $\Phi'(t)$ z.B. den Grundzustand des Deuterons oder die Streuung von Mesonen an einem Deuteron, so gehorcht $\Phi'(t)$ der homogenen Integralgleichung

$$(II\ b') \quad \Phi'(t) = -i \int_{-\infty}^t H_1'(t')\Phi'(t') dt' \quad (23).$$

Legt man andererseits die Energiezerlegung (2.2 a) zugrunde, so erfüllt — als Folge der Verschiebung des Eigenwertspektrum von H_0 um Vielfache der Renormierungsmassen — jeder zum Vakuumzustand orthogonale Zustand $\Phi(t)$ die homogene Integralgleichung

$$(II\ a') \quad \Phi(t) = -i \int_{-\infty}^t H_1(t')\Phi(t') dt' \quad (23).$$

Die Differentialgleichungen (I) können auch in Form homogener Integralgleichungen geschrieben werden:

$$(I') \quad \psi(x) = g\gamma_5 \int S_r(x-x')A(x')\psi(x') dx', \dots$$

wobei die Funktionen S_r , A_r zu den Massen m_0 , κ_0 gebildet sind. Daß keine inhomogenen Glieder auftreten, ist eine Folge von δm , $\delta\kappa^2 \neq 0$.

Den zur Gesamtenergie \mathbf{H} gehörenden Vakuumzustand (definiert als Eigenzustand kleinster Energie) bezeichnen wir mit Ω , den zu H_0 bzw. H'_0 gehörenden Vakuumzustand mit Ω_0 bzw. Ω'_0 . Die willkürlichen additiven Konstanten des Energieimpulsoperators \mathbf{P}_μ legen wir durch

$$(2.3) \quad \mathbf{P}_\mu \Omega = 0$$

fest. Ω_0 und Ω'_0 haben die Eigenschaften

$$\psi_0^+(x)\Omega_0 = 0, \quad \dots, \quad \psi_0^{+'}(x)\Omega'_0 = 0, \quad \dots$$

Es wird angenommen, daß das Vakuum der Gesamtenergie sich in der

(23) V. GLASER und W. ZIMMERMANN: *Zeits. f. Phys.*, **134**, 346 (1953).

Form

$$\text{bzw. } \begin{cases} \Omega = U(0, -\infty)\Omega_0 & (2^4) \\ \Omega = U'(0, -\infty)\Omega'_0 & (2^4) \end{cases}$$

darstellen läßt, was zur Folge hat, daß mit $\mathbf{P}_\mu\Omega = 0$ auch

$$(2.4) \quad P_\mu^0\Omega_0 = 0 \quad (2^4) \quad \text{und} \quad P_\mu^{0'}\Omega'_0 = 0 \quad (2^4)$$

ist.

Die S'_p - und A'_p -Funktionen sind definiert durch:

$$(2.5) \quad \begin{cases} S'_p(x-x') = -(\Omega, T\psi(x)\bar{\psi}(x')\Omega) \\ A'_p(x-x') = +(\Omega, TA(x)A(x')\Omega) \end{cases}$$

und besitzen die Entwicklungen

$$(2.6 a) \quad \begin{cases} S'_p(x-x') = -\frac{(\Omega_0, T[U(+\infty, -\infty)\psi_0(x)\bar{\psi}_0(x')]\Omega_0)}{(\Omega_0, U(+\infty, -\infty)\Omega_0)} & (25, 26), \\ A'_p(x-x') = +\frac{(\Omega_0 T[U(+\infty, -\infty)A_0(x)A_0(x')]\Omega_0)}{(\Omega_0, U(+\infty, -\infty)\Omega_0)}, \end{cases}$$

oder

$$(2.6 b) \quad S'_p(x-x') = \frac{(\Omega'_0, T[U'(+\infty, -\infty)\psi'_0(x)\bar{\psi}'_0(x')]\Omega'_0)}{(\Omega'_0, U'(+\infty, -\infty)\Omega'_0)},$$

$A'_p(x-x')$ entsprechend.

Mit $U(t, t')$ bzw. $U'(t, t')$ ist die Dyson'sche Entwicklung gemeint:

$$(2.7 a) \quad U(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T[H_1(t_1) \dots H_1(t_n)] \quad (25),$$

$t > t'$

$$(2.7 b) \quad U'(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \dots \int_{t'}^t dt_n T[H'_1(t_1) \dots H'_1(t_n)].$$

(24) Diese fragwürdigen Beziehungen zwischen Ω und Ω_0 ; Ω'_0 werden nur zur Ableitung asymptotischer Entwicklungen in der Art von Gl. (2.6) benutzt, wogegen wohl nichts einzuwenden ist. Die ebenso fragwürdige simultane Gültigkeit von Gl. (2.3) und (2.4) ist für das Folgende unerheblich, da es nur auf Differenzen $p_\mu - p_\mu^0$ (p_μ Energieimpuls eines Zustands, p_μ^0 Energieimpuls eines Vakuums) ankommen wird.

(25) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 1736 (1949).

(26) M. GELL-MANN und F. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951).

3. - Tamm-Dancoffmethode im Ortsraum ⁽²⁷⁾.

Ausgangspunkt der von LÉVY ⁽²⁸⁾ ausgebauten Tamm-Dancoffmethode ^(29,30) ist die Entwicklung eines Zustandsvektors Φ nach einem Orthonormalsystem von Eigenvektoren der ungestörten Energie:

$$(3.1) \quad \Phi = \sum a_i \Phi_i^0, \quad \mathbf{H}_0 \Phi_i^0 = E_i^0 \Phi_i^0. \quad (31)$$

(Der Index i faßt Impuls- und Spineigenwerte der freien Teilchen zusammen). Die Eigenwertgleichung

$$(3.2) \quad (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1) \Phi = E \Phi \quad (31)$$

ergibt dann ein System von unendlich vielen Integralgleichungen für die Koeffizienten a_i :

$$(3.3) \quad (E - E_i^0) a_i = \sum_j H_1^{ij} a_j, \quad H_1^{ij} = (\Phi_i^0, \mathbf{H}_1 \Phi_j^0).$$

Im Falle eines Zwei-Nukleonenproblems ⁽³²⁾ lassen sich alle Koeffizienten a_i höherer Teilchenzahl auf den Koeffizienten $a(k_1 s_1, k_2 s_2)$ zurückführen (k_1, k_2, s_1, s_2 Impuls- und Spineigenwerte zweier Nukleonen). Es gelingt so, das unendliche Gleichungssystem (3.3) in eine einzige Integralgleichung für $a(k_1 s_1, k_2 s_2)$ umzuwandeln, welche nach LÜDERS ⁽³³⁾ in der einfachen Form

$$(3.4) \quad (E - E_i^0) a_i = \sum_j a_j \left(H_1^{ij} + \sum_k' \frac{H_1^{ik} H_1^{kj}}{E - E_k^0} + \sum_{kl}' \frac{H_1^{ik} H_1^{kl} H_1^{lj}}{(E - E_k^0)(E - E_l^0)} + \dots \right) \quad (34)$$

geschrieben werden kann. (i kennzeichnet darin einen Zwei-Nukleonenzustand ⁽³²⁾ Φ_i^0 , in der ersten Summe der rechten Seite wird über alle Zwei-

⁽²⁷⁾ Vgl. zu diesem Abschnitt auch die Arbeiten von M. CINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 526 und 614 (1953).

⁽²⁸⁾ M. LÉVY: *Phys. Rev.*, **88**, 72 (1952).

⁽²⁹⁾ I. TAMM: *Journ. Phys. USSR*, **9**, 449 (1950).

⁽³⁰⁾ S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **78**, 382 (1950).

⁽³¹⁾ $\mathbf{H}_0(t)$ und $\mathbf{H}_1(t)$ zur Zeit $t = 0$ genommen.

⁽³²⁾ Wir sprechen von einem Zwei-Nukleonenproblem, wenn für Φ die Differenz Nukleonenzahl weniger Antinukleonenanzahl den Eigenwert Zwei hat. Ein Zwei-Nukleonenzustand ist ein Zustand mit zwei freien Nukleonen, aber keinen freien Mesonen oder Antinukleonen.

⁽³³⁾ G. LÜDERS: *Vorlesungen Kopenhagen*, Oktober 1952.

⁽³⁴⁾ Glieder mit ungerader Anzahl von Übergangselementen verschwinden.

Nukleonenzustände j summiert, das Summenzeichen \sum' bedeutet, daß — unter Ausschluß der Zwei-Nukleonenzustände — über alle Zustände Φ_k, Φ_l, \dots zu summieren ist.)

Zum späteren Vergleich mit der Bethe-Salpetergleichung sollen in diesem Abschnitt das Gleichungssystem (3.3) und die Integralgleichung (3.4) auch für den Ortsraum formuliert werden.

Als erstes führen wir an Stelle der Entwicklungskoeffizienten a_i (in Gl. 3.1)) die im Ortsraum entsprechenden « Wahrscheinlichkeitsamplituden » ein, welche dann die Grundlage für die weitere Behandlung der Lévy'schen Methode im Ortsraum bilden.

Die Koeffizienten a_i sind (bis auf Normierungsfaktoren) gegeben durch Übergangselemente von Produkten aus Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} & (\Omega_0, \psi_{s_1}^+(\mathbf{k}_1)\psi_{s_2}^+(\mathbf{k}_2)\Phi), \\ & (\Omega_0, A^+(\mathbf{k}_1)\psi_{s_2}^+(\mathbf{k}_2)\psi_{s_3}^+(\mathbf{k}_3)\Phi), \\ & (\Omega_0, A^+(\mathbf{k}_1)\psi_{s_2}^+(\mathbf{k}_2)\psi_{s_3}^+(\mathbf{k}_3)\psi_{s_4}^+(\mathbf{k}_4)\psi_{s_5}^+(\mathbf{k}_5)\Phi). \\ & \text{USW.} \end{aligned}$$

Diese gehen bei Transformation in den Ortsraum über in:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_{|\alpha\beta|}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= (\Omega_0, \psi_{0\alpha}^+(x_1)\psi_{0\beta}^+(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0} \quad (35) \\ \chi_{|\alpha\beta|}(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3) &= (\Omega_0, A_0^+(x_1)\psi_{0\alpha}^+(x_2)\psi_{0\beta}^+(x_3)\Phi)_{t_i=0} \\ \chi_{|\alpha_2\alpha_3\alpha_4|\alpha_5}(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4|\mathbf{x}_5) &= (\Omega_0, A_0^+(x_1)\psi_{0\alpha_2}^+(x_2)\psi_{0\alpha_3}^+(x_3)\psi_{0\alpha_4}^+(x_4)\psi_{0\alpha_5}^+(x_5)\Phi)_{t_i=0}. \\ & \text{USW.} \end{aligned} \right.$$

Neben diesen Funktionen χ , die wir *zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsamplituden* nennen wollen, werden wir dem Zustandsvektor Φ noch *zeitabhängige* Wahrscheinlichkeitsamplituden χ , zuordnen, die definiert sind durch Ausdrücke der Form:

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= (\Omega_0, \psi_0^+(x_1)\psi_0^+(x_2)\Phi(t))_{t_1=t_2=t} \quad (36) \\ \chi_t(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3) &= (\Omega_0, A_0^+(x_1)\psi_0^+(x_2)\psi_0^+(x_3)\Phi(t))_{t_i=t} \\ & \text{USW.} \end{aligned} \right.$$

(35) Über die Bedeutung der Größen $\psi_0, \Omega_0, \Phi(t)$ siehe S. 50. Man kann stattdessen auch die gestrichelten Größen in die Gl. (3.5) und (III) einsetzen: Über die so definierten Wahrscheinlichkeitsamplituden vgl. am Ende dieses Abschnitts.

(36) Spinorindizes sind in dieser wie in den meisten folgenden Formeln weggelassen.

Für Zwei-Nukleonenprobleme — auf die wir uns meist beschränken werden — verschwinden alle Wahrscheinlichkeitsamplituden, für welche die Differenz «Zahl der Nukleonenkoordinaten weniger Zahl der Antinukleonenkoordinaten» ungleich zwei ist. Weiter kommen den zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden folgende drei Eigenschaften zu:

1. Die Funktionen χ_t sind symmetrisch in den Mesonenkoordinaten und antisymmetrisch in den Nukleonen- bzw. Antinukleonenkoordinaten.

2. Aus der Energieeigenwertgleichung des Zustandsvektors Φ folgen Eigenwertgleichungen für die zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden. Dem wegen der Vertauschungsrelationen der wechselwirkungsfreien Feldoperatoren mit H_0 und der Differentialgleichung von $\Phi(t)$ ergibt Gl. (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_t = -iE\chi_t,$$

oder

$$\chi_t = \exp[-iEt]\chi_{t=0}.$$

Ferner folgt

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \chi_t = \boldsymbol{\pi} \chi_t,$$

wenn

$$\mathbf{P}_\mu \Phi = \pi_\mu \Phi, \quad \boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

ist.

3. Im wechselwirkungsfreien Fall sind die Funktionen χ_t mit den bekannten Wellenfunktionen des Konfigurationsraums identisch (von Normierungsfaktoren abgesehen).

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind — wie die Koeffizienten a_i — untereinander durch Systeme von unendlich vielen Gleichungen gekoppelt. Ein erstes System, das die zeitunabhängigen Funktionen miteinander verknüpft, folgt unmittelbar aus Gl. (3.6) (für $t = 0$), den Feldgleichungen der wechselwirkungsfreien Feldoperatoren und der Differentialgleichung von $\Phi(t)$. Für die einfachste Wahrscheinlichkeitsamplitude $\chi(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|)$ erhält man beispielsweise:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \right) (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi^+(x_2) \Phi)_{t=0} = \\ & = -g \int_{t=0} d\mathbf{x} (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) : \bar{\psi}_0(x) \gamma_5 A_0(x) \psi_0(x) : \Phi), \quad \left(\mathbf{f} = \boldsymbol{\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + i\beta m \right), \end{aligned}$$

oder

$$(3.8) \quad (-iE + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)\chi_{|\alpha_1\alpha_2|}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = +g \int_{t=0} \mathbf{d}\mathbf{x} \chi_{|\alpha_1\alpha_2\alpha|\beta}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}|\mathbf{x})\gamma_5^{\beta\alpha} + \\ + ig \int_{t=0} \mathbf{d}\mathbf{x} S_{\alpha_1\beta}^+(x_1-x)\gamma_5^{\beta\alpha} \chi_{|\alpha_2\alpha|}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}) + ig \int_{t=0} \mathbf{d}\mathbf{x} S_{\alpha_2\beta}^+(x_2-x)\gamma_5^{\beta\alpha} \chi_{|\alpha_1\alpha|}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_1|\mathbf{x}).$$

Als weiteres Beispiel sei noch die Gleichung für $\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|)$ angegeben. Da die Differentialgleichung von $A_0(x)$ zeitlich von zweiter Ordnung ist, führt man zweckmäßig neben $\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|)$ noch die erste Ableitung nach der Mesonenzeit ein:

$$\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|) := \frac{\partial}{\partial t_1} (\Omega_0, A_0^+(x_1)\psi_0^+(x_2)\psi_0^+(x_3)\Phi)_{t_i=0}.$$

Man erhält dann für die $1|2|$ - und die $1|2|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude ⁽³⁷⁾ die Beziehungen:

$$(3.9) \quad (-iE + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|) = \\ = \chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|) - g \int_{t=0} \mathbf{d}\mathbf{x} (\Omega_0, A_0^+(x_1)\psi_0^+(x_2)\psi_0^+(x_3) : \bar{\psi}_0(x)\gamma_5 A_0(x)\psi_0(x) : \Phi)_{t_i=0};$$

$$(3.10) \quad (-iE + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|) = (\Delta - \mathcal{K}_0^2)\chi(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3|) - \\ - g \int_{t=0} \mathbf{d}\mathbf{x} (\Omega_0, \dot{A}_0^+(x_1)\psi_0^+(x_2)\psi_0^+(x_3) : \bar{\psi}_0(x)\gamma_5 A_0(x)\psi_0(x) : \Phi)_{t_i=0}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Wick'schen Regel leicht so umformen, daß außer den Funktionen $S^+(x-x')$, $\Delta^+(x-x')$ und $\Delta^+(x-x')$ nur noch Übergangselemente von Produkten aus Vernichtungsoperatoren, also Wahrscheinlichkeitsamplituden übrig bleiben. Die allgemeinen Gleichungen für irgendeine Wahrscheinlichkeitsamplitude χ (einschließlich der ersten Ableitungen nach Mesonenzeiten) lassen sich nach dem Muster der Gl. (3.9) und (3.10) leicht herstellen.

Wir kommen zu einem zweiten unendlichen Gleichungssystem, das die zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden (wieder einschließlich der ersten

⁽³⁷⁾ Die $m|n|a$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude hat m Mesonen-, n Nukleonen- und a Antinukleonenkoordinaten. Ist nach einzelnen Mesonenkoordinaten die zeitliche Ableitung gebildet, so wird dies durch untergesetzte Punkte angedeutet: $\chi_i(y_1, y_2, y_3, y_4|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$ wird z.B. als $2|2$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude bezeichnet.

Ableitungen nach Mesonenzeiten) untereinander verknüpft und sich besonders zum Vergleich mit der Bethe-Salpetergleichung eignet. Zur Ableitung dieses Systems geht man am besten von der Integralgleichung (II a') (S. 50) des Zustandsvektors $\Phi(t)$ in der gewählten Wechselwirkungsdarstellung aus:

$$(II a') \quad \Phi(t) = -i \int_{-\infty}^t H_1(t') \Phi(t') dt'.$$

Daraus folgt für $\chi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) \Phi(t)) = \\ = -g \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}' (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) : \bar{\psi}_0(x') \gamma_5 A_0(x') \psi_0(x') : \Phi(t'))_{t'=t}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (3.11) \quad \chi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) = \\ -g \int_{-\infty}^t dt \int_{t'}^t d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S^+(x_1 - x'_1) \gamma_4^1 S^+(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \gamma_5 \chi_{t'}(\mathbf{x}' | \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 | \mathbf{x}') + \\ + g \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S^+(x_1 - x'_1) \gamma_5^1 S^+(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \chi_{t'}(\mathbf{x}'_1 | \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 |) + \\ + g \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S^+(x_1 - x'_1) \gamma_4^1 S^+(x_2 - x'_2) \gamma_5^2 \chi_{t'}(\mathbf{x}'_2 | \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 |). \end{aligned}$$

Ganz allgemein gilt für irgendein Produkt $P(x_1, \dots, x_n)$ von Operatoren $A_0^+(x)$, $A_0^-(x)$, $\psi_0^+(x)$, $\bar{\psi}_0^+(x)$:

$$\begin{aligned} (A a) \quad (\Omega_0, P(x_1, \dots, x_n) \Phi(t))_{t'=t} = \\ = -g \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}' (\Omega_0, P(x_1, \dots, x_n) : \bar{\psi}_0(x') \gamma_5 A_0(x') \psi_0(x') : \Phi(t'))_{t'=t}. \end{aligned}$$

Hier formt man wieder auf der rechten Seite nach der Wick'schen Regel so um, daß schließlich nur noch Übergangselemente von Produkten aus lauter Vernichtungsoperatoren vorkommen. Führt man weiter die noch verbleibenden Vernichtungsoperatoren zur Zeit t mit Hilfe von S - und A -Funktionen auf

Vernichtungsoperatoren zur Zeit t' zurück, so erhält man auf der rechten Seite eine Summe von Integralen, in welchen außer Funktionen χ_i nur noch die Funktionen S^+ , S^- , A^- und zeitliche Ableitungen von Δ^+ vorkommen. Das Resultat dieser Umformung kann man für jede beliebige Funktion χ_i nach einfachen Regeln, die im Anhang angegeben sind, in graphischer Form sofort hinschreiben (siehe S. 83).

Diese graphische Formulierung ⁽³⁸⁾ des Integralgleichungssystems (A a) erlaubt in einfacher Weise außer der $|2^-|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude alle übrigen Wahrscheinlichkeitsamplituden zu eliminieren. So können in der Integralgleichung Fig. 1 bzw. Gl. (3.11) auf der rechten Seite die $1|3^-|$ - und die $1|2^-|$ -Wahrscheinlichkeitsamplituden mit Hilfe ihrer Integralgleichungen Fig. 2 und Fig. 3 ersetzt werden. Das Resultat dieser Substitution ist die in Fig. 4 gezeichnete Integralgleichung. Das Ziel ist in weiteren Iterationsschritten von der rechten Seite möglichst viele Glieder abzuspalten, die nur noch die $|2^-|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude enthalten, um so im Limes unendlich vieler Schritte ein Analogon zur Bethe-Salpetergleichung zu gewinnen. Zur Formulierung dieses Iterationsverfahrens brauchen wir noch eine eindeutige Zerlegungsvorschrift eines Graphen in seine irreduziblen Bestandteile.

Am einfachsten ist, einen beliebigen Graphen G durch alle durchgehenden Schnitte konstanter Zeit zu zerlegen, die nur zwei Nukleonlinien treffen. Um jedoch zu vermeiden, daß reine Selbstenergiegraphen gesondert als irreduzible Bestandteile auftreten, schlägt man zweckmäßiger Selbstenergieeile zum nächsten unteren zusammenhängenden irreduziblen Bestandteil (Fig. 5). Graphen, die sich nicht im Sinne dieser zweiten Zerlegungsvorschrift zerlegen lassen, nennen wir $\bar{\bar{}}$ -irreduzibel ⁽³⁹⁾. Der Zusatz $\bar{\bar{}}$ soll besagen, daß die Zeiten der inneren Punkte zwischen der Zeit t' des frühesten Eckpunkts und der Zeit t der Endpunkte x_1, x_2 eingeschlossen sind.

Wenn man nun allgemein bei jedem Iterationsschritt die $\bar{\bar{}}$ -irreduziblen Terme stehen läßt und die übrigen Terme weiter iteriert, erhält man schließlich die Integralgleichung

$$(3.12) \quad \chi_{t'}(|x_1 x_2|) = \sum_{\bar{\bar{y}}} L_{\bar{\bar{y}}}^x(|x_1 x_2|)_{t'=t}$$

in der über alle $\bar{\bar{}}$ -irreduziblen Zwei-Nukleonengraphen ⁽³⁹⁾ $\bar{\bar{y}}$ summiert wird. Die Funktionen $L_{\bar{\bar{y}}}^x$ sind nach den im Anhang gegebenen Regeln zu bilden und stellen Integrale über $\chi_{t'}(|x'_1, x'_2|)$ und die Funktionen S_p, A_p dar.

Einige der $\bar{\bar{}}$ -irreduziblen Graphen sind im Sinne einer weitergehenden

⁽³⁸⁾ Die Kenntnis der im Anhang angegebenen Regeln wird im folgenden vorausgesetzt.

⁽³⁹⁾ Zur genauen Definition dieser Begriffe siehe den Anhang über Graphentechnik.

Zerlegungsvorschrift reduzibel. Sie lassen sich in $\bar{\text{---}}$ -irreduzible ⁽³⁹⁾ Graphen zerlegen, bei welchen den Zeiten der inneren Eckpunkte nur die Bedingung auferlegt ist kleiner als die Zeit t der Endpunkte zu sein. (Fig. 5). Mit diesem neuen Begriff der Irreduzibilität erhält man die Integralgleichung

$$(3.13) \quad \chi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum_{\bar{\gamma}} L_{\bar{\gamma}}^{\chi}(|x_1x_2|)_{t_i=t},$$

worin nun über alle $\bar{\text{---}}$ -irreduziblen ⁽³⁹⁾ Zwei-Nukleonengraphen $\bar{\gamma}$ summiert wird. Gl. (3.13) kann leicht in Gl. (3.12) umgeformt werden, der Nachweis geschieht ähnlich der auf Seite 73 geschilderten Transformation der Bethe-Salpetergleichung in eine einzeitige Form und soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

Faßt man die Selbstenergieteile in Gl. (3.13) geeignet zusammen, so erhält man:

$$(3.14) \quad \chi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum_{\bar{\gamma}'} L_{\bar{\gamma}'}^{*\chi}(|x_1x_2|)_{t_i=t}.$$

Hierin wird nur über diejenigen Graphen summiert, die frei von Selbstenergieteilen sind. Bei der Bildung von L^* sind statt der S_F , Δ_F -Funktionen, jeweils die Funktionen

$$\begin{aligned} &(\Omega_0, T[U(t, -\infty)\psi_0(x'_1)\bar{\psi}_0(x'_2)]\Omega_0) \\ &(\Omega_0, T[U(t, -\infty)A_0(x'_1)A_0(x'_2)]\Omega_0) \end{aligned}$$

einzusetzen.

Weiter kann man zeigen ⁽⁴⁰⁾, daß sich jede Lösung der Gleichung

$$(3.15) \quad \chi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \chi_t^1(|\mathbf{x}_1|)\chi_t^2(|\mathbf{x}_2|) - \chi_t^2(|\mathbf{x}_1|)\chi_t^1(|\mathbf{x}_2|) + \sum_{\bar{\gamma}'} L_{\bar{\gamma}'}^{*\chi}(|x_1x_2|)_{t_i=t},$$

worin $\chi_t^1(|x|)$ und $\chi_t^2(|x|)$ Lösungen der Einteilchengleichung

$$\chi_t^{1,2}(|x|) = \sum_{\bar{\gamma}} L_{\bar{\gamma}}^{\chi^{1,2}}(|x|) \quad (41)$$

sind, zu einem Satz von Wahrscheinlichkeitsamplituden χ_t ergänzen läßt, der das unendliche Integralgleichungssystem (A a) (S. 56) löst. Die durch Iteration erhaltene Lösung von Gl. (3.15) beschreibt offenbar die Streuung zweier

⁽⁴⁰⁾ Zum Beweis vergleiche die analogen Überlegungen für Wellenfunktionen auf Seite 67, 68.

⁽⁴¹⁾ Hier wird über alle $\bar{\text{---}}$ -irreduziblen Ein-Nukleonengraphen summiert, vgl. Anhang, S. 86.

Nukleonen mit den Wahrscheinlichkeitsamplituden $\chi'_i(|\mathbf{x}|)$ und $\chi''_i(|\mathbf{x}|)$, während die Lösungen von Gl. (3.14) gebundene Zwei-Nukleonenzustände beschreiben.

Zum Abschluß sei noch erwähnt, wie sich die Lévy'sche Methode im Ortsraum entwickeln läßt, wenn die Konstanten m_0 und κ_0^2 konsequent in die experimentellen Anteile m , κ^2 und die Zusatzterme $-\delta m$, $-\delta\kappa^2$ aufgetrennt werden. Zu diesem Zweck definiert man die zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden — anders als in Gl. (III) (S. 53) — mit Hilfe der zum Hamiltonoperator H'_0 gehörenden Größen Ω'_0 , $\psi'_0(x)$, $\Phi'(t)$ usw.:

$$(3.16) \quad \begin{cases} \chi'_i(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = (\Omega'_0, \psi_0^{+'}(x_1)\psi_0^{+'}(x_2)\Phi'(t)) \\ \chi'_i(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4) = (\Omega'_0, A_0^{+'}(x_1)A_0^{+'}(x_2)\psi_0^{+'}(x_3)\psi_0^{+'}(x_4)\Phi'(t)). \end{cases}$$

Diese neuen Wahrscheinlichkeitsamplituden erfüllen wieder die drei auf S. 54 genannten Eigenschaften.

Aus der Integralgleichung

$$(II b) \quad \Phi'(t) = \Phi'(-\infty) - i \int_{-\infty}^t H'_1(t')\Phi'(t')dt'$$

folgt dann für die $|2|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \chi'_i(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= \varphi_0(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)_{t_i=t} - \\ &- g \int_{-\infty}^t dx' (\Omega'_0, \psi_0^{+'}(x_1)\psi_0^{+'}(x_2) : \bar{\psi}'_0(x')A'_0(x')\gamma_3\psi'_0(x') : \Phi'(t'))_{t_i=t} + \\ &+ \int_{-\infty}^t dx' \left(\Omega'_0, \psi_0^{+'}(x_1)\psi_0^{+'}(x_2) \left[i\delta m : \bar{\psi}'_0(x')\psi'_0(x') : + \frac{1}{2} i\delta\kappa^2 A'_0(x')^2 \right] \Phi'(t') \right)_{t_i=t}. \end{aligned}$$

Hierin kann der Integralterm der rechten Seite wieder so umgeformt werden, daß er außer Wahrscheinlichkeitsamplituden nur noch S^+ -Funktionen enthält. Die allgemeinen Gleichungen lauten (mit entsprechender Bezeichnungsweise wie bei Gl. (A a)):

$$(A b) \quad \begin{aligned} (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n)\Phi'(t))_{t_i=t} &= (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n)\Phi'(-\infty))_{t_i=t} - \\ &- g \int_{-\infty}^t dx' (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n) : \bar{\psi}'_0(x')\gamma_3 A'_0(x')\psi'_0(x') : \Phi'(t'))_{t_i=t} + \\ &+ i\delta m \int_{-\infty}^t dx' (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n) : \bar{\psi}'_0(x')\psi'_0(x') : \Phi'(t'))_{t_i=t} + \\ &+ \frac{1}{2} i\delta\kappa^2 \int_{-\infty}^t dx' (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n) A'_0(x')^2 \Phi'(t'))_{t_i=t}. \end{aligned}$$

Beschreibt $\Phi'(t)$ die Streuung zweier Nukleonen, so gibt das inhomogene Glied von Gl. (3.17)

$$\varphi_0(|x_1 x_2|)_{t_i=t} = (\Omega'_0, \psi_0^{+'}(x_1) \psi_0^{+'}(x_2) \Phi'(-\infty))$$

die wechselwirkungsfreie Wellenfunktion der beiden einlaufenden Teilchen. Beschreibt dagegen $\Phi'(t)$ etwa den Grundzustand des Deuterons, so müssen als Folge von $\Phi'(-\infty)=0$ sämtliche Funktionen $\varphi_0 = (\Omega_0, P(x_1, \dots, x_n) \Phi'(-\infty))_{t_i=t}$ verschwinden.

Mit der Annahme, daß — ausgenommen höchstens die Funktion $\varphi_0(|x_1 x_2|)$ — alle übrigen Funktionen φ_0 identisch verschwinden, gelangt man so zu der Gleichung

$$(3.18) \quad \chi'_{t'}(|x_1 x_2|) = \chi_0(|x_1 x_2|)_{t_i=t} + \sum_{\tilde{\gamma}} \tilde{L}'_{\tilde{\gamma}}(|x_1 x_2|)_{t_i=t} \quad (4^2)$$

in welcher auf der rechten Seite nur über diejenigen — irreduziblen Graphen summiert wird, die frei von irgendwelchen Selbstenergieteilen sind, und bei der Bildung der Funktionen \tilde{L} statt der S_F , Δ_F -Funktionen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &(\Omega'_0, T[U'(t, -\infty) \psi'_0(x'_1) \bar{\psi}'_0(x'_2)] \Omega'_0) \\ &(\Omega'_0, T[U'(t, -\infty) A'_0(x'_1) A'_0(x'_2)] \Omega'_0) \end{aligned}$$

eingesetzt werden. Die Gl. (3.18) hat eine große Ähnlichkeit mit Gl. (3.15), ist jedoch mit ihr wegen der Verschiedenheit der statt der S_F - und Δ_F -Funktionen einzusetzenden Bildungen nicht identisch.

4. — Wellenfunktionen.

Die von BETHE und SALPETER ⁽⁴³⁾ gefundene Integralgleichung für das Problem zweier gebundener Nukleonen lautet:

$$(4.1) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = \sum_F L_F^g(|x_1 x_2|).$$

Summiert wird über sämtliche mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen (vergl. Anhang S. 83), die mehrzeitig irreduzibel sind. Mehrzeitig irreduzibel soll heißen: Es sei nicht möglich Γ durch einen beliebigen Schnitt in zwei Teile zu zerlegen, die nur durch zwei Nukleonenlinien miteinander verknüpft sind,

⁽⁴²⁾ χ_0 stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit $\varphi_0(|x_1 x_2|)_{t_i=t}$.

⁽⁴³⁾ E. E. SALPETER und H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **84**, 1232 (1951).

derart, daß die in x_1 und x_2 endenden Nukleonenlinien noch zusammenhängen. (Fig. 17). Die Konstruktion eines Terms $L_F^{\varphi}(x_1x_2)$ geschieht wie bei den S -Matrixgraphen mit Hilfe von S_F -, Δ_F -Funktionen usw., nur mit dem Unterschied, daß für die äußeren Nukleonenlinien die Funktion $\varphi(|x_1x_2|)$ selbst eingesetzt wird. (Vgl. hierzu die im Anhang angegebenen Regeln).

Eine strenge Begründung der Bethe-Salpetergleichung wurde zuerst von GELL-MANN und LOW ⁽⁴⁴⁾ gegeben, die zeigen konnten, daß die «Wellenfunktion»

$$(4.2) \quad \varphi(|x_1x_2|) = (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)$$

eines Zustands Φ zweier gebundener Nukleonen der Bethe-Salpetergleichung genügt. Dieser Funktion kommen nun gleichfalls die drei Eigenschaften (S. 54) der Wahrscheinlichkeitsamplituden zu:

1. φ ist antisymmetrisch in x_1 und x_2 .
2. Aus der Energie-Impulseigenwertgleichung von Φ folgt eine Eigenwertgleichung für φ :

$$\mathbf{P}_\mu \Phi = \pi_\mu \Phi$$

ergibt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \right) \varphi = i\pi_\mu \varphi.$$

3. Im wechselwirkungsfreien Fall ist $\varphi(|x_1x_2|)_{t_1=t_2=t}$ mit der bekannten Zwei-Teilchenwellenfunktion des Konfigurationsraums identisch (bis auf den Normierungsfaktor $1/2$).

GELL-MANN und LOW ⁽⁴⁴⁾ haben eine Form der Bethe-Salpetergleichung angegeben, in der relativistisch invariant alle Selbstenergieteile zusammengefaßt sind:

$$(4.4) \quad \varphi(|x_1x_2|) = \sum_{F'} L_{F'}^{\prime\varphi}(|x_1x_2|).$$

Hier wird über alle Graphen F' summiert, die keine Selbstenergieteile mehr enthalten. Die analytischen Ausdrücke L' unterscheiden sich von den entsprechenden Termen L durch Ersetzung der Funktionen S_F , Δ_F durch S_F' , Δ_F' . In ähnlicher Weise ist die Aufsummierung der Eckteile (vertex parts) und M-Teile möglich.

Es gilt nun das Verfahren von Bethe und Salpeter weiter auszubauen. In Parallele zu den Ausführungen des Abschnitts 3 wird man zunächst zur

⁽⁴⁴⁾ M. GELL-MANN und F. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951).

« Darstellung » eines Zustandsvektors Φ ⁽⁴⁵⁾ neben der Zwei-Nukleonenwellenfunktion $\varphi(|x_1 x_2|)$ weitere Wellenfunktionen einführen; z.B. eine « 2|2|-Wellenfunktion » $\varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2 |)$, die zwei Mesonen mit den Koordinaten y_1, y_2 und zwei Nukleonen mit den Koordinaten x_1, x_2 beschreibt. Wie man die Definition der Wellenfunktionen zu wählen hat, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit. Soll es sich um eine wirklich brauchbare Verallgemeinerung des für freie Felder geläufigen Begriffs Wellenfunktion handeln, wird man mindestens verlangen, daß — wie für die Wahrscheinlichkeitsamplituden — die auf Seite 54 genannten drei Eigenschaften erfüllt sind. Darüber hinaus soll die Definition möglichst einfach sein und zu übersichtlichen Differentialgleichungen für die Wellenfunktionen führen.

In Analogie zu den Definitionsgleichungen der Wahrscheinlichkeitsamplituden liegt es nahe, die Definition (4.2) durch folgende Ausdrücke zu ergänzen:

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) = (\Omega, T A(y_1) A(y_2) \psi(x_1) \psi(x_2) \Phi) \\ \tau(|x_1 x_2 x_3 | z) = (\Omega, T \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(z) \Phi) . \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

Diese « τ -Funktionen » haben zwar die bekannten Symmetrieeigenschaften und erfüllen als Folge von Gl. (4.3) die Eigenwertgleichungen

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \tau = i\pi_\mu \tau,$$

(summiert wird über alle Koordinaten von τ). Doch ist Eigenschaft 3 nicht erfüllt. Denn im wechselwirkungsfreien Fall ist z.B.

$$\begin{aligned} (\Omega_0, T A_0(y_1) A_0(y_2) \psi_0(x_1) \psi_0(x_2) \Phi_0) &= (\Omega_0, A_0^+(y_1) A_0^+(y_2) \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) \Phi_0) + \\ &+ \Delta_F(y_1 - y_2) (\Omega_0, \psi_0^+(x_1) \psi_0^+(x_2) \Phi_0) \quad (46). \end{aligned}$$

Wenn auch die τ -Funktionen aus diesem Grund noch nicht geeignete Wellenfunktionen sind, können solche doch leicht aus ihnen gewonnen werden. Man braucht nur die im wechselwirkungsfreien Fall gültigen Beziehungen zwischen

⁽⁴⁵⁾ Wir beschränken uns grundsätzlich auf Zustandsvektoren von Zwei-Nukleonenproblemen.

⁽⁴⁶⁾ Für einen Zustand mit zwei freien Nukleonen wäre die τ_0 -Funktion mit zwei Mesonen- und zwei Nukleonenkoordinaten von Null verschieden.

τ -Funktionen und Wellenfunktionen

$$\tau_0(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) = \varphi_0(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) + \Delta_F(y_1 - y_2) \varphi_0(|x_1 x_2 |)$$

$$\begin{aligned} \tau_0(|x_1 x_2 x_3 | z) = & \varphi_0(|x_1 x_2 x_3 | z) - S_F(x_3 - z) \varphi_0(|x_1 x_2 |) + \\ & + S_F(x_2 - z) \varphi_0(|x_1 x_2 |) - S_F(x_1 - z) \varphi_0(|x_2 x_3 |), \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

unmittelbar zu übertragen:

$$(IV) \quad \begin{cases} \tau(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) = \varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) + \Delta_F(y_1 - y_2) \varphi(|x_1 x_2 |) \\ \tau(|x_1 x_2 x_3 | z) = \varphi(|x_1 x_2 x_3 | z) - S_F(x_3 - z) \varphi(|x_1 x_2 |) + \dots \end{cases}$$

Diese Beziehungen — aufgefaßt als *Definitionsgleichungen* der Wellenfunktionen — erlauben jede Wellenfunktion eindeutig aus endlich vielen τ -Funktionen gleicher oder geringerer Teilchenzahl rekursiv zu berechnen, z.B.:

$$\begin{aligned} \varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) &= \tau(y_1 y_2 | x_1 x_2 |) - \Delta_F(y_1 - y_2) \tau(|x_1 x_2 |) \\ \varphi(|x_1 x_2 x_3 | z) &= \tau(|x_1 x_2 x_3 | z) + S_F(x_3 - z) \tau(|x_1 x_2 |) - \dots \end{aligned}$$

Die so erklärten Wellenfunktionen haben die drei gewünschten Eigenschaften ⁽⁴⁷⁾: Sie sind symmetrisch in den Mesonen- und antisymmetrisch in den Nukleonen- bzw. Antinukleonenkoordinaten. Aus Gl. (4.3) folgen die Eigenwertgleichungen

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \varphi = i\pi_\mu \varphi$$

und im wechselwirkungsfreien Fall stimmen die (einzeitig genommenen) Wellenfunktionen mit den bekannten wechselwirkungsfreien Wellenfunktionen des Konfigurationsraums überein.

Ebenso wie bei Wahrscheinlichkeitsamplituden ist auch der Satz der Wellenfunktionen eines Zustands Φ einem unendlichen System von Differentialgleichungen unterworfen, die sich aus den Feldgleichungen (I) und den gleichzeitigen kanonischen Vertauschungsrelationen ergeben.

⁽⁴⁷⁾ Eine andere Möglichkeit, Wellenfunktionen mit diesen drei Eigenschaften aus den τ -Funktionen abzuleiten, wird auf Seite 66 erwähnt.

Zunächst folgen aus der Definition der τ -Funktionen die Differentialgleichungen

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{x_1} \tau(|x_1 x_2|) &= ig \gamma_5^{x_1} \tau(x_1 | x_1 x_2) \\ f_{x_1} \tau(y_1 | x_1 x_2) &= ig \gamma_5^{x_1} \tau(y_1 x_1 | x_1 x_2) \\ h_{y_1} \tau(y_1 | x_1 x_2) &= ig \gamma_5^{y_1} \tau(|x_1 x_2 y_1| y_1) \\ f_{x_3} [\tau(|x_1 x_2 x_3| z) + S_F(x_3 - z) \tau(|x_1 x_2|)] &= ig \gamma_5^{x_3} \tau(x_3 | x_1 x_2 x_3 | z) \quad (4^8) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} f_x &= \nu \frac{\partial}{\partial x} + m \\ h_y &= \square_y - \kappa^2 \end{aligned}$$

oder

$$f_{x_3} \tau(|x_1 x_2 x_3| z) = -i \delta(x_3 - z) \tau(|x_1 x_2|) + ig \gamma_5^{x_3} \tau(x_3 | x_1 x_2 x_3 | z) \quad (5^0)$$

$$h_{y_1} [\tau(y_1 y_2 | x_1 x_2) - \Delta_F(y_1 - y_2) \tau(|x_1 x_2|)] = ig \gamma_5^{y_1} \tau(y_2 | x_1 x_2 y_1 | y_1) \quad (4^9)$$

oder

$$h_{y_1} \tau(y_1 y_2 | x_1 x_2) = i \delta(y_1 - y_2) \tau(|x_1 x_2|) + ig \gamma_5^{y_1} \tau(y_2 | x_1 x_2 y_1 | y_1) \quad (5^0).$$

Mit den Umrechnungsformeln (IV) erhält man als Differentialgleichungen der Wellenfunktionen:

$$(V) \quad \left\{ \begin{aligned} (4.7) \quad f_{x_1} \varphi(|x_1 x_2|) &= ig \gamma_5^{x_1} \varphi(x_1 | x_1 x_2) \\ (4.8) \quad f_{x_1} \varphi(y | x_1 x_2) &= ig \gamma_5^{x_1} \varphi(y x_1 | x_1 x_2) + \Delta_F(y - x_1) ig \gamma_5^{x_1} \varphi(|x_1 x_2|) \\ (4.9) \quad h_{y_1} \varphi(y | x_1 x_2) &= ig \gamma_5^{y_1} \varphi(|x_1 x_2 y| y) - S_F(x_2 - y) ig \gamma_5^{y_1} \varphi(|x_1 y|) + \\ &\quad + S_F(x_1 - y) ig \gamma_5^{y_1} \varphi(|x_2 y|) \\ (4.10) \quad f_{x_3} \varphi(y | x_1 x_2 x_3 | z) &= ig \gamma_5^{x_3} \varphi(y x_3 | x_1 x_2 x_3 | z) - S_F(x_3 - z) ig \gamma_5^{x_3} \varphi(y x_3 | x_1 x_2 | z) + \\ &\quad + ig \gamma_5^{x_3} \Delta_F(y - x_3) \varphi(|x_1 x_2 x_3 | z) + \\ &\quad + ig \gamma_5^{x_3} \Delta_F(y - x_3) S_F(x_3 - z) \varphi(|x_1 x_2|) \\ (4.11) \quad h_{y_1} \varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2) &= ig \gamma_5^{y_1} \varphi(y_2 | x_1 x_2 y_1 | y_1) + \\ &\quad + S_F(x_2 - y_1) ig \gamma_5^{y_1} \varphi(y_2 | x_1 y_1) - S_F(x_1 - y_1) ig \gamma_5^{y_1} \varphi(y_2 | x_2 y_1 |) \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right.$$

(4⁸) Der Term $S_F(x_3 - z) \tau(|x_1 x_2|)$ gibt für $x_3 \neq z$ zur rechten Seite keinen Beitrag, kompensiert aber die durch die Vertauschung $\{\psi(x_3), \bar{\psi}(z)\}$ bedingte Unstetigkeit von $\tau(|x_1 x_2 x_3 | z)$ in $x_3 = z$.

(4⁹) Der Term $\Delta_F(y_1 - y_2) \tau(|x_1 x_2|)$ kompensiert die durch die Vertauschung $[A(y_1), A(y_2)]$ bedingte Unstetigkeit von $\tau(y_1 y_2 | x_1 x_2)$ in $y_1 = y_2$.

(5⁰) Die in den Differentialgleichungen der τ -Funktionen vorkommenden vierdimensionalen δ -Funktionen sind eine Konsequenz der lokalen Vertauschungsrelationen.

Die zugehörigen Integralgleichungen lauten (die inhomogenen Glieder sind als Folge der Eigenwertverschiebungen durch die Renormierungsmassen gleich Null zu setzen):

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4.12) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = + g \gamma_5^{x_1} \int S_F(x_1 - x'_1) \varphi(x'_1 | x'_1 x_2) dx'_1 \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

Gl. (4.12) und die den übrigen angegebenen Differentialgleichungen (4.8) bis (4.11) entsprechenden Integralgleichungen sind in den Fig. 6 bis 10 graphisch dargestellt.

Bei der Ableitung der Gleichungssysteme (4.6) und (V) ist nirgends davon Gebrauch gemacht worden, daß die Wellen- und τ -Funktionen auf den Vakuumzustand Ω bezogen sind. Die Differentialgleichungen (4.6) gelten demnach ebenso für die T -Produkte

$$T[A(y_1) \dots \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots]$$

der Feldoperatoren und sämtliche Übergangselemente zwischen zwei fest gewählten Zuständen:

$$\tau_{\Phi, \Phi'}(y_1, \dots | x_1, \dots | z_1, \dots) = (\Phi', T[A(y_1) \dots \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots] \Phi).$$

Ebenso verhält es sich mit den aus T -Produkten nach der Wick'schen Regel abgeleiteten Operatoren:

$$T[\psi(x_1)\psi(x_2)] = : \psi(x_1)\psi(x_2) :$$

$$T[A(y_1)A(y_2)\psi(x_1)\psi(x_2)] = : A(y_1)A(y_2)\psi(x_1)\psi(x_2) : + \Delta_F(y_1 - y_2) : \psi(x_1)\psi(x_2) : \text{ usw.}$$

Diese Operatoren, wie auch deren Übergangselemente

$$\varphi_{\Phi, \Phi'}(y_1, \dots | x_1, \dots | z_1, \dots) = (\Phi', : A(y_1) \dots \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots : \Phi)$$

genügen ebenfalls den Differentialgleichungen (V). Sie genügen ferner den Integralgleichungen (B), wobei das Verschwinden der inhomogenen Glieder durch direkte Ableitung aus den homogenen Integralgleichungen (I') folgt. Die Funktionen $\varphi_{\Phi, \Phi'}$ bezeichnen wir als Wellenfunktionen des Zustands Φ relativ zum Zustand Φ' . Die Frage, wie man — entsprechend zu Gl. (4.4) — die Systeme (4.6) und (B) umzugestalten hat, sodaß sämtliche Selbstenergieteile usw. zusammengefaßt werden, ist nicht so leicht zu beantworten. Einen ersten Hinweis erteilen die störungstheoretischen Entwicklungen der τ -Funk-

tionen eines Streuzustands von Elementarteilchen:

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau(y_1, \dots | x_1, \dots | z_1, \dots) &= \\ &= (\Omega_0, TU'(+\infty, -\infty)A'(y_1) \dots \psi'(x_1) \dots \bar{\psi}'(z_1) \dots) \Phi'(-\infty) \quad (61) \\ \Phi &= U'(0, -\infty)\Phi'(-\infty). \end{aligned} \right.$$

Die graphentechnische Auswertung dieser Entwicklungen zeigt, daß die von Dyson zur Renormierung der S -Matrix gegebenen Vorschriften ohne wesentliche Änderungen übernommen werden können. So lassen sich z.B. ohne weiteres sämtliche Selbstenergierteile in Form der S'_p - und A'_p -Funktionen zusammenfassen. Diese Möglichkeit geht verloren, wenn der Übergang zu den Wellenfunktionen nach Gl. (IV) vollzogen wird. Denn das Auftreten der ungestrichenen Funktionen in den Definitionsgleichungen (IV) macht eine konsequente Aufsummierung der Selbstenergierteile von vorneherein unmöglich. Anders verhält es sich aber, wenn man zur Definition der Wellenfunktionen die gestrichenen Funktionen verwendet

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau(|x_1 x_2|) &= \varphi'(|x_1 x_2|) \\ \tau(y_1 y_2 | x_1 x_2|) &= \varphi'(y_1 y_2 | x_1 x_2|) + A'_p(y_1 - y_2)\varphi'(|x_1 x_2|) \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \right.$$

Die aus den Gl. (4.13) erhaltenen störungstheoretischen Entwicklungen dieser « gestrichenen » Wellenfunktionen erlauben in jeder Näherung die invariante Aufsummierung der Selbstenergie-, Eck- und M-Teile. Als weiteren Vorzug zeigt die Gegenüberstellung

$$\varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2|) = (\Omega, TA(y_1)A(y_2)\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi) - \\ - (\Omega_0, TA_0(y_1)A_0(y_2)\Omega_0)(\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)$$

$$\varphi'(y_1 y_2 | x_1 x_2|) = (\Omega, TA(y_1)A(y_2)\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi) - \\ - (\Omega, TA(y_1)A(y_2)\Omega)(\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)$$

daß die Definition der gestrichenen Wellenfunktionen keine Größen aus der Theorie der freien Teilchen benutzt.

(61) Bis auf den Phasenfaktor $1/(\Omega'_0; U'(+\infty, -\infty)\Omega'_0)$ der rechten Seite, den wir unter der Vereinbarung weglassen können, daß bei der graphentechnischen Auswertung eines Ausdrucks der Form

$$(\Omega'_0, T[U'(+\infty, -\infty) \dots] \Phi'(-\infty))$$

nur Graphen ohne geschlossene Komponenten zu berücksichtigen sind.

Aus den störungstheoretischen Entwicklungen der gestrichenen Wellenfunktionen lassen sich Integralgleichungen erhalten, die außer endlichen Konstanten nur noch die durch Zusammenfassung von Selbstenergieanteilen usw. entstandenen Funktionen S'_p , usw. enthalten. Diese «renormierten» Integralgleichungen, die auch unabhängig von der Voraussetzung $\Phi = U'(0, -\infty)\Phi'(-\infty)$ gültig sind, sind jedoch ziemlich kompliziert und sollen hier nicht in Betracht gezogen werden. Wir beschränken uns vielmehr ganz auf die Diskussion der ungestrichenen Wellenfunktionen, die wegen der Einfachheit der Systeme (V), (B) zur ersten Orientierung geeigneter sind.

Wir wollen uns noch davon überzeugen, daß sich jede Lösung der Bethe-Salpetergleichung zu einem ganzen Satz von Wellenfunktionen ergänzen läßt, der das Gleichungssystem (B) identisch befriedigt. Wir gehen dazu von einer bestimmten Lösung der Bethe-Salpetergleichung (5.1) aus (die inhomogene Form der Bethe-Salpetergleichung wird nachher behandelt) und definieren die fehlenden Wellenfunktionen als Entwicklungen nach Potenzen der Kopplungskonstanten:

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(y_1|x_1x_2|) = \sum_{\Gamma}^{1|2|} L_{\Gamma}^{\varphi}(y_1|x_1x_2|) \quad (\varphi = \varphi(|x'_1x'_2|)) \\ \varphi(|x_1x_2x_3|z) = \sum_{\Gamma}^{3|1|} L_{\Gamma}^{\varphi}(|x_1x_2x_3|z) \\ \varphi(y_1y_2|x_1x_2x_3|z) = \sum_{\Gamma}^{2|3|1|} L_{\Gamma}^{\varphi}(y_1y_2|x_1x_2x_3|z) \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

In $\sum_{\Gamma}^{m|n|k}$ wird über alle mehrzeitig irreduziblen $m|n|k$ -Graphen (vgl. Anhang S. 41) summiert. Jeder dieser Graphen enthält zwei äußere Nukleonlinien, für welche $\varphi(|x_1x_2|)$ einzusetzen ist. Mit Hilfe der Integralgleichung (4.1) und der im Anhang entwickelten Graphentechnik läßt sich dann leicht nachweisen, daß jede einzelne Integralgleichung des Systems (B) für $\varphi(|x_1x_2|)$ und die von dieser Funktion abgeleiteten Entwicklungen (4.15) eine Identität ist.

Um einen entsprechenden Beweis für eine Lösung der inhomogenen Bethe-Salpetergleichung

$$(4.16) \quad \varphi(|x_1x_2|) = \varphi_1(|x_1|)\varphi_2(|x_2|) - \varphi_2(|x_1|)\varphi_1(|x_2|) + \sum_{\Gamma}^{1|2|} L_{\Gamma}^{\varphi}(|x_1x_2|)$$

zu führen, in der $\varphi_1(|x|)$, $\varphi_2(|x|)$ Lösungen der Ein-Teilchenform

$$(4.17) \quad \varphi_{1,2}(|x|) = \sum_{\Gamma}^{1|1|} L_{\Gamma}^{\varphi_{1,2}}(|x|) \quad \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(|x'|)$$

der Bethe-Salpetergleichung sind, schreiben wir (4.16) in der Form:

$$(4.18) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = \sum_F^{|\mathfrak{z}|} L_F^{\varphi_0}(|x_1 x_2|) + \sum_F^{|\mathfrak{z}|} L_F^{\varphi}(|x_1 x_2|)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1(|x'_1|) \varphi_2(|x'_2|) - \varphi_2(|x'_1|) \varphi_1(|x'_2|); \quad \varphi = \varphi(|x'_1 x'_2|)$$

wobei in der Summe \sum^* über alle mehrzeitig irreduziblen $|\mathfrak{z}|$ -Graphen summiert wird. Die $|\mathfrak{z}|$ -Wellenfunktion brauchen wir dann nur noch durch Ausdrücke der Form

$$(4.19) \quad \varphi(y_1 y_2 | x_1 x_2) = \sum_F^{2|\mathfrak{z}|} L_F^{\varphi_0}(|x_1 x_2|) + \sum_F^{2|\mathfrak{z}|} L_F^{\varphi}(|x_1 x_2|)$$

zu ergänzen (in \sum^* wird über alle mehrzeitig irreduziblen $2|\mathfrak{z}|$ -Graphen summiert), um einen Satz von Wellenfunktionen zu erhalten, der das Gleichungssystem (B) befriedigt.

Das lorentzinvariante System (V) (Seite 64) kann sehr leicht in ein einzeitiges System von Differentialgleichungen verwandelt werden, vorausgesetzt, daß Φ ein Eigenzustand der Energie ist. Denn nimmt man (wie bei den Wahrscheinlichkeitsamplituden) die ersten Ableitungen der Wellenfunktionen nach Mesonenzeiten als unabhängige Funktionen hinzu, so können die Zeitdifferenziationen in (V) mit Hilfe der Eigenwertgleichungen

$$\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = -iE\varphi,$$

sofort eliminiert werden. Grenzübergänge zu gleichen Zeiten (wobei auf die Größenanordnung der Zeitkoordinaten während des Grenzübergangs streng geachtet werden muß) liefern ein System von Differentialgleichungen, die nur noch die zur Zeit $t = 0$ genommene Wellenfunktion und deren erste Ableitungen nach Mesonenzeiten enthält.

Als Beispiele seien folgende Gleichungen angeführt:

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4.20) \quad (-iE + f_1 + f_2)\varphi(|x_1 x_2|) = ig\alpha_5^x \varphi(x_1 | x_1 x_2) + ig\alpha_5^z \varphi(x_2 | x_1 x_2) \\ (4.21) \quad (-iE + f_1 + f_2)\varphi(y | x_1 x_2) = \varphi(y | x_1 x_2) + ig\alpha_5^x \varphi(y x_1 | x_1 x_2) - \\ \quad - g\alpha_5^x \Delta^+(y - x_1)\varphi(|x_1 x_2|) + ig\alpha_5^z \varphi(y x_2 | x_1 x_2) - \\ \quad - g\alpha_5^z \Delta^+(y - x_2)\varphi(|x_1 x_2|) \\ (4.22) \quad (-iE + f_1 + f_2)\varphi(y | x_1 x_2) = (\Delta - \kappa_0^2)\varphi(y | x_1 x_2) + ig\alpha_5^x \varphi(y x_1 | x_1 x_2) - \\ \quad - g\alpha_5^x \Delta^+(y - x_2)\varphi(|x_1 x_2|) + ig\alpha_5^z \varphi(y x_2 | x_1 x_2) - \\ \quad - g\alpha_5^z \Delta^+(y - x_2)\varphi(|x_1 x_2|) - ig\gamma_5^y \varphi(|x_1 x_2 y|) - \\ \quad - g\gamma_5^z S^+(x_2 - y)\varphi(|x_1 y|) + g\gamma_5^z S^+(x_1 - y)\varphi(|x_2 y|) \end{array} \right.$$

$$\alpha_5 = i\gamma_4 \gamma_5, \quad S^+(x) = S^+(x)_{t=0}, \quad \Delta^+(x) = \Delta^+(x)_{t=0}.$$

Diese drei Gleichungen entsprechen beziehungsweise genau den Gl. (3.8), (3.9) und (3.10) der Tamm-Dancoffmethode.

Interessiert man sich nur für die lorentzinvarianten Eigenwerte π_μ^2 der Ruhenergie, so wird man als Nebenbedingungen zum Gleichungssystem (VI)

$$P_\mu \Phi = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial x_\mu^i} \psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3$$

verlangen, sodaß

$$E = \sum_{\mu=1}^4 \pi_\mu^2$$

ist.

5. - Randbedingungen für $t = -\infty$.

In den letzten beiden Abschnitten waren die Verfahren von Tamm-Dancoff und Bethe-Salpeter parallel entwickelt worden. Neben der Bethe-Salpetergleichung und der Integralgleichung (3.18) haben wir unendliche Gleichungssysteme kennen gelernt, die unabhängig von Randbedingungen ganz allgemein gelten. Während sich Randbedingungen für $t = -\infty$ in den Systemen (A a) (S. 56) und (B) (S. 65) nicht einmal äußerlich bemerkbar machen, gehen sie in das System (A b) (S. 59) durch die Funktionen

$$\varphi_0 = (\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n) \Phi'(-\infty))_{t=t}$$

ein ⁽⁵²⁾.

Wir wissen bisher, daß jede Lösung der Integralgleichungen (4.4), (3.18) auch eine Lösungsmannigfaltigkeit der zugehörigen Systeme bestimmt. Die Frage ist, welche Lösungen umgekehrt bei Umwandlung der Gleichungssysteme in die Integralgleichungen (4.4), (3.18) verloren gehen. Zur Beantwortung dieser Frage beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Streuvorgänge zwischen Elementarteilchen, d.h. auf Zustandsvektoren Φ , die in der Wechselwirkungsdarstellung formal ⁽⁵³⁾ die Gestalt

$$(5.1) \quad \Phi'(t) = U'(t, -\infty) \Phi'(-\infty)$$

haben. Unter dieser Voraussetzung läßt sich leicht zeigen, daß die Integral-

⁽⁵²⁾ Mit der Einschränkung, daß verschiedene Randbedingungen für $t = -\infty$ zu denselben Funktionen $(\Omega'_0, P(x_1, \dots, x_n) \Omega'(-\infty))$ führen können.

⁽⁵³⁾ Das heißt abgesehen von Divergenzschwierigkeiten des Operators $U'(t, -\infty)$ (E. C. G. STUECKELBERG: *Phys. Rev.*, **81**, 130 (1951)).

gleichung (3.18)

$$(5.2) \quad \chi'_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \chi_0(|x_1x_2|)_{t_i=t} + \sum_{\bar{\gamma}} \tilde{L}'_{\bar{\gamma}}(|x_1x_2|)_{t_i=t} \quad (5^4)$$

und ebenso die Bethe-Salpetergleichung (4.4) in ihrer inhomogenen Form

$$(5.2') \quad \varphi(|x_1x_2|) = q_0(|x_1x_2|) + \sum_{\Gamma'} L'_{\Gamma'}(|x_1x_2|) \quad (5^4)$$

nur unter der Randbedingung erfüllt sind, daß $\Phi'(-\infty)$ ein Zustand mit zwei freien Nukleonen ist.

Denn nach Voraussetzung (5.1) gelten die Entwicklungen

$$(5.3) \quad (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)\Phi'(t)) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)U'(t, -\infty)\Phi'(-\infty))$$

$$(5.3') \quad (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi) = (\Omega'_0, T[U'(+\infty, -\infty)\psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)]\Phi'(-\infty)).$$

Nehmen wir zunächst an, daß $\Phi'(-\infty)$ ein Zustand mit zwei freien Nukleonen ist, so enthält die Entwicklung (5.3) bzw. (5.3') — außer S - und A -Funktionen zu den experimentellen Massen — nur die Wellenfunktion $(\varphi_0(|x_1x_2|))$ der beiden einlaufenden Teilchen. Die einzelnen Entwicklungsglieder von (5.3') lassen sich — wie bei der Dysonschen S -Matrixentwicklung — durch Graphen veranschaulichen, nur mit dem Unterschied, daß noch zwei in den Punkten x_1 und x_2 blind endende Nukleonlinien mit zu berücksichtigen sind. Außer dem Graphen Γ_0 (Fig. 11 a) der nullten Näherung treten in den höheren Näherungen die in den Fig. 11 b bis e dargestellten Typen T_1 , T_2 , T_{12} und T_3 auf. Γ_0 gibt zu $\varphi(|x_1x_2|)$ den Beitrag $\varphi_0(x_1x_2)$, die der Gesamtheit der Graphen vom Typ T_1 , T_2 , T_{12} und T_3 entsprechenden Beiträge seien bzw. mit $\varphi_1(x_1x_2)$, $\varphi_2(x_1x_2)$, $\varphi_{12}(x_1x_2)$ und $\eta(|x_1x_2|)$ bezeichnet. Die Entwicklung schreibt sich dann in der Form

$$\varphi(|x_1x_2|) = \varphi_0(x_1x_2) + \varphi_1(x_1x_2) + \varphi_2(x_1x_2) + \varphi_{12}(x_1x_2) + \eta(|x_1x_2|).$$

Auf Grund der Renormierungsbedingungen ist (⁵⁵):

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12} = Z_2\varphi_0.$$

Andererseits kann $\eta(|x_1x_2|)$ laut Definition in der Form

$$\eta(|x_1x_2|) = \sum_{\Gamma'} L'_{\Gamma'}(|x_1x_2|)$$

(⁵⁴) Die inhomogenen Glieder χ und q sind beide Lösungen der wechselwirkungsfreien Diracgleichungen mit der Masse m .

(⁵⁵) G. KÄLLÉN: *Helv. Phys. Acta.*, **25**, 417 (1952).

entwickelt werden, sodaß

$$\varphi(|x_1 x_2|) = Z_2 \varphi_0(|x_1 x_2|) + \sum_{F'} L_{F'}'(|x_1 x_2|)$$

folgt. Ebenso zeigt man, daß die Entwicklung (5.3) die Integralgleichung (5.2) erfüllt, wenn $\Phi'(-\infty)$ ein Zustand mit zwei freien Nukleonen ist.

Nimmt man dagegen für $t = -\infty$ als Randbedingung an, daß beispielsweise $\Phi'(-\infty)$ ein Zustand mit zwei Nukleonen und zwei Mesonen der Wellenfunktion

$$\varphi_0(y_1 y_2 | x_1 x_2) = (\Omega_0', A^+(y_1) A^+(y_2) \psi^{+'}(x_1) \psi^{+'}(x_2) \Phi'(-\infty))$$

sei, so gibt Gl. (5.3') bzw. (5.3) die Entwicklung von $\varphi(x_1 x_2)$ bzw. $\chi_i(x_1 x_2)$ nach $\varphi_0(y_1 y_2 | x_1 x_2)$ und es ist leicht zu sehen, daß $\varphi(x_1 x_2)$ bzw. $\chi_i(x_1 x_2)$ keine Lösung der Bethe-Salpetergleichung (5.2') bzw. der Gl. (5.2) darstellt.

Ganz allgemein weist man so nach, daß nur unter der Bedingung — $\Phi'(-\infty)$ ein Zustand mit zwei freien Nukleonen — die Wellenfunktion $\varphi(x_1 x_2)$ bzw. Wahrscheinlichkeitsamplitude $\chi_i(x_1 x_2)$ des Zustands

$$\Phi'(t) = U'(t, -\infty) \Phi'(-\infty)$$

eine Lösung der Gl. (5.2') bzw. (5.2) ist.

Wir hatten uns eben auf Streuvorgänge zwischen Elementarteilchen beschränkt. Die entsprechende Diskussion für Zustände mit

$$\Phi'(-\infty) = 0$$

— darunter fallen z.B. das Deuteron, die Streuung von Mesonen am Deuteron, aber auch die gegenseitige Streuung von Deuteronen — ist nicht so einfach. Es sei nur erwähnt, daß die Wellenfunktion des Grundzustands zweier gebundener Nukleonen formal⁽⁵⁶⁾ sicher die Bethe-Salpetergleichung erfüllt, während z.B. für Streuung von Mesonen an diesem Grundzustand die Wellenfunktion $\varphi(|x_1 x_2|)$ der Bethe-Salpetergleichung nicht genügt.

Zum Abschluß noch eine gemeinsame Eigenschaft von Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsamplituden, die wesentlich eine Folge von Eigenschaft 3 ist. Beschreibt Φ die Streuung von k Mesonen an zwei Nukleonen, so ist unter allen Wahrscheinlichkeitsamplituden bzw. Wellenfunktionen die Funktion mit k Mesonen- und zwei Nukleonenkoordinaten besonders ausgezeichnet. Sie besitzt die Entwicklung

$$\chi_i'(y_1, \dots, y_k | x_1 x_2) = (\Omega_0', A_0^{+'}(y_1) \dots A_0^{+'}(y_k) \psi_0^{+'}(x_1) \psi_0^{+'}(x_2) U'(t, -\infty) \Phi'(-\infty))$$

bzw.

$$\varphi(y_1, \dots, y_k | x_1 x_2) = (\Omega_0' T[U(+\infty, -\infty) : A_0'(y_1) \dots \psi_0'(x_2) :] \Phi'(-\infty))$$

⁽⁵⁶⁾ D. h. abgesehen von einer Divergenz der Entwicklung des Integralkerns von Gl. (5.2').

und stimmt (alle Zeitkoordinaten der Wellenfunktion gleich t gesetzt) asymptotisch für $t \rightarrow -\infty$ mit der Wellenfunktion

$$\varphi_t^0(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = (\Omega_0', A_0^{+'}(y_1) \dots \psi_0^{+'}(x_2) \Phi'(-\infty))_{x_i^0 = y_j^0 = t}$$

der einlaufenden Teilchen überein, während die übrigen Wahrscheinlichkeitsamplituden und Wellenfunktionen asymptotisch verschwinden, z.B.:

$$(\Omega_0', A_0^{+'}(y_1) \dots A_0^{+'}(y_n) \psi_0^{+'}(x_1) \psi_0^{+'}(x_2) \Phi'(-\infty)) = 0 \quad \text{für } n \neq k.$$

6. – Einzeitige Bethe-Salpetergleichung.

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der im Anhang⁽⁵⁷⁾ entwickelten Graphentechnik eine kürzlich von W. MACKE⁽⁵⁸⁾ gefundene einzeitige Form der Bethe-Salpetergleichung abgeleitet werden⁽⁵⁹⁾. Die Aufgabe ist, aus der mehrzeitigen Bethe-Salpetergleichung

$$(6.1) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = \sum_{\Gamma} L_{\Gamma}^{\varphi}(|x_1 x_2|)$$

eine Integralgleichung für die einzeitige Wellenfunktion

$$\varphi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) = \varphi(|x_1 x_2|)_{t_1 = t_2 = t}$$

zu erhalten. Dazu schreiben wir die Bethe-Salpetergleichung in der Form

$$(6.2) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = \sum_{\Gamma, \tau} L_{\Gamma, \tau}^{\varphi}(|x_1 x_2|)$$

worin Γ_{τ} den mit einer vollständigen zeitlichen Eckpunktanordnung τ versehenen Graphen Γ bezeichnet, und über sämtliche mehrzeitig irreduziblen, mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen Γ und jede mögliche Eckpunktanordnung τ summiert wird.

Ferner benutzen wir folgende Hilfsformel, die jeden einzeitig irreduziblen, *mehrzeitigen* Zwei-Nukleonengraphen G (mit vollständiger Anordnung τ der Eckpunktzeiten, Beispiel Fig. 15 a) bis auf Terme höherer Ordnung durch den

(57) Die Kenntnis der im Anhang gegebenen Definitionen und Regeln ist für das Verständnis des Folgenden notwendig.

(58) W. MACKE: *Zeits. f. Naturf.*, 8a, 599 und 615 (1953).

(59) Die Vorliegende Ableitung wurde gemeinsam mit K. SYMANZIK entwickelt. Von SYMANZIK stammt auch eine Erweiterung des Verfahrens, die bereits renormierte Form der mehrzeitigen Bethe-Salpetergleichung in eine einzeitige Beziehung umzuwandeln: K. SYMANZIK: *Nuovo Cimento*, 11, 88 (1953).

zugehörigen *einzeitigen* Zwei-Nukleonengraphen G' (Fig. 15 b) ausdrückt:

$$(6.3) \quad L_g^{(x'_1 x'_2)}(|x_1 x_2|) = L_{g'}^{(x'_1 x'_2)}(|x_1 x_2|) + \sum_g L_g^{(x'_1 x'_2)}(|x_1 x_2|).$$

Die Summe auf der rechten Seite ist über sämtliche mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen g erstreckt, die

1. einzigartig irreduzibel sind
2. nach Abtrennung des untersten mehrzeitig irreduziblen Bestandteils in G übergehen.

Zum Beweis von Gl. (6.3) setzt man in L_g^o die rechte Seite der Bethe-Salpetergleichung ein; es entstehen mehrzeitige Zwei-Nukleonengraphen, die einzigartig *reduzibel*, und solche, die einzigartig *irreduzibel* sind. Die einzigartig reduzierbaren Graphen werden nach der Schnittregel (siehe Anhang, S. 82) in G' und einen mehrzeitig irreduziblen Zwei-Nukleonengraphen zerlegt und anschließend mit Hilfe der Bethe-Salpetergleichung in L_g , zusammengefaßt (man beachte dabei die Orthogonalität von S^+ - und S^- -Funktion!). Die einzigartig irreduziblen Graphen machen gerade die Gesamtheit der beschriebenen Graphen g aus, über die in Gl. (6.3) summiert wird.

Wir summieren nun Gl. (6.3) über sämtliche einzigartig irreduziblen, mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen G vom Grad n (G heißt vom Grad n , wenn G in n mehrzeitig irreduzible Bestandteile zerfällt, der Graph in Fig. 15 a hat den Grad 3). Das Resultat dieser Summation lautet:

$$(6.4) \quad S_n = S'_n + S_{n+1},$$

wenn S_n die Summe aller einzigartig irreduziblen, *mehrzeitigen* Zwei-Nukleonengraphen vom Grad n und S'_n die Summe aller einzigartig irreduziblen, *einzeitigen* Zwei-Nukleonengraphen vom Grad n bedeutet. Bei Vernachlässigung des Restgliedes S_n für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\varphi(|x_1 x_2|) = S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} S'_n$$

oder

$$(6.5) \quad \varphi(|x_1 x_2|) = \sum_{\gamma} L_{\gamma}^{(x'_1 x'_2)}(|x_1 x_2|)$$

wenn rechts über alle einzigartigen Zwei-Nukleonengraphen γ summiert wird, die einzigartig irreduzibel sind.

Da die Terme L_{γ} nur von der einzigartigen Wellenfunktion abhängen, gibt Gl. (6.5) die Transformation von der einzigartigen auf die mehrzeitige Wellen-

funktion. Durch Gleichsetzen der Zeiten t_1 und t_2 erhält man so die gewünschte Integralgleichung für die einzeitige Wellenfunktion alleine:

$$(6.6) \quad \varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum_{\gamma} L_{\gamma}^{\varphi_t(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|)}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)_{t_1=t_2=t}.$$

In dieser Gleichung können jeweils alle Graphen zusammengefaßt werden, die sich nur in der Anordnung der Eckpunktzeiten unterscheiden. Als Beispiel sind die Graphen Fig. 12 *a* und *b* angeführt. Im ersten Fall kommen alle Zeitanordnungen auf der rechten Seite von Gl. (6.6) vor, bei denen $t' < t'_3$: Diese Terme können also in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_3 \int_{-\infty}^{t'_3} dt' I(t, t'_1, t'_2, t'_3, t')$$

zusammengefaßt werden, wenn I den nach Integration über die Ortskoordinaten verbliebenen Integranden bezeichnet. Im zweiten Beispiel (Fig. 12 *b*) sind auf der rechten Seite von Gl. (6.6) alle Zeitanordnungen vertreten, bei denen $t' < t'_2$, $t'_3 < t'_1$, $t'_3 < t'_2$ oder $t' < t'_2$, $t'_1 < t'_3$, $t'_1 < t'$ ist, also können sich die zugehörigen Terme in die beiden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt'_3 \int_{t'_3}^{+\infty} dt'_1 \int_{t'_3}^{+\infty} dt'_2 \int_{-\infty}^{t'_2} dt' I(t, t'_1, t'_2, t'_3, t') + \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_2 \int_{-\infty}^{t'_3} dt'_1 \int_{t'_1}^{t'_2} dt' I(t, t'_1, t'_2, t'_3, t')$$

zusammenfassen lassen.

Um weiter von der 16-komponentigen Wellenfunktion φ zum (im Impulsraum 4-komponentigen) positiven Frequenzanteil φ^{++} überzugehen⁽⁶⁰⁾, verfährt man ganz ähnlich wie bei der Ableitung von Gl. (6.6) aus der mehrzeitigen Bethe-Salpetergleichung. Analog zu Gl. (6.4) gilt die Beziehung

$$(6.7) \quad T_n^{\varphi} = T_n^{\varphi^{++}} + T_{n+1}^{\varphi},$$

worin T_n die Summe aller einzeitig +-irreduziblen, einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen vom Grad n bedeutet. Der Grad ist hier etwas anders definiert: G heißt vom Grad n , wenn G in n einzeitig irreduzible Bestandteile zerfällt.

⁽⁶⁰⁾ $\varphi_t^{++}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$ ist definiert durch:

$$\varphi_t^{++}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = - \int_t S^+(x_1 - x'_1) S^+(x_2 - x'_2) \gamma'_4 \gamma'_4 \varphi_t(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|).$$

Die Indizes φ und φ^{++} besagen, welche Funktion jeweils in die Graphen einzusetzen ist. Aus Gl. (6.7) folgt für φ^{++} alleine die Integralgleichung

$$(6.8) \quad \varphi_t^{\varphi^{++}}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum_{\gamma^+} L_{\gamma^+}^{\varphi^{++}}(|x_1x_2|)_{t_1=t_2=t},$$

in der über alle einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen γ^+ summiert wird, die $+$ -irreduzibel sind.

Gl. (6.6) und (6.8) unterscheiden sich — trotz äußerlicher Ähnlichkeiten — wesentlich von der Tamm-Dancoffgleichung (3.13): Während die Eckpunkte der Graphen der Tamm-Dancoffgleichung stets zeitlich früher als die Endpunkte liegen, die Zeitintegrationen also höchstens bis zur Endpunktzeit t erstreckt werden, kommen in den Gl. (6.6) und (6.8) durchaus Zeitintegrationen vor, die über t hinaus bis $+\infty$ weisen. Ein weiterer wesentlicher Unterschied ist, daß die einzeitige Bethe-Salpetergleichung — im Gegensatz zur Tamm-Dancoffgleichung — keine geschlossenen Komponenten (disconnected closed loops) enthält.

7. - Vergleich beider Methoden.

Um die wesentlichen Unterschiede der Verfahren von Tamm-Dancoff und Bethe-Salpeter zu erkennen, genügt es die $|2|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude und $|2|$ -Wellenfunktion herauszugreifen und die Diskussion auf die Bethe-Salpetergleichung

$$(7.1) \quad \varphi(|x_1x_2|) = \sum_{\Gamma'} L_{\Gamma'}^{\varphi}(|x_1x_2|)$$

und die ihr methodisch entsprechende Tamm-Dancoffgleichung

$$(7.2) \quad \chi'_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum_{\tilde{\gamma}'} \tilde{L}_{\tilde{\gamma}'}^{\chi'}(|x_1x_2|)_{t_1=t_2=t}$$

zu beschränken.

Besonders auffallend ist der Unterschied zwischen einzeitiger und mehrzeitiger Formulierung: Während Gl. (7.2) nur *einen* Zeitparameter t enthält, tritt die Wellenfunktion $\varphi(|x_1x_2|)$ in der Bethe-Salpetergleichung zu verschiedenen Zeiten auf, sodaß jedes Nukleon mit einem eigenen Zeitparameter behaftet erscheint. Die einzeitige Formulierung ist jedoch keine Besonderheit der Tamm-Dancoffmethode, da es ja auch einzeitige Formen der Bethe-Salpetergleichung gibt, in welche nur die zur Zeit $t = 0$ genommene Wellenfunktion eingeht (Abschnitt 6).

Zum Vergleich der Methoden braucht man also nur die Definitionsgleichungen von Wahrscheinlichkeitsamplitude und Wellenfunktion für die Zeit $t = 0$ hinzuschreiben:

$$(7.3) \quad \chi'_{t=0}(|x_1 x_2|) = (\Omega'_0, \psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0}$$

$$(7.3') \quad \varphi(|x_1 x_2|)_{t_1=t_2=0} = (\Omega, \psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0}.$$

Diese Darstellung zeigt den entscheidenden Unterschied zwischen der Tamm-Dancoffmethode und der Methode von Bethe und Salpeter: Die Wahrscheinlichkeitsamplituden sind auf das Vakuum der weckselwirkungsfreien Energie bezogen, die Wellenfunktionen hingegen auf das Vakuum der Gesamtenergie.

Aus den Gleichungen (7.3) und (7.3') folgen sofort Beziehungen, die von der einen Methode in die andere transformieren:

$$(7.4) \quad (\Omega'_0, \psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0} = (\Omega, U'(0, -\infty)\psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0}$$

$$(7.4') \quad (\Omega, \psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0} = (\Omega'_0, U'(-\infty, 0)\psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)\Phi)_{t_1=t_2=0}.$$

Die rechte Seite von Gl. (7.4') kann als Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten geschrieben werden, die außer S -, Δ -Funktionen nur zeitunabhängige Wahrscheinlichkeitsamplituden (beliebig hoher Koordinatenzahl) enthält, die auf die $|2|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude zurückgeführt werden können ⁽⁶¹⁾. Gl. (7.3') gibt also eine Vorschrift, die Wellenfunktion $\varphi(|x_1 x_2|)_{t_1=t_2=0}$ aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude $\chi_{t=0}(|x_1 x_2|)$ auszurechnen ⁽⁶²⁾.

Umgekehrt gibt Gl. (7.4) eine Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten, die außer S - und Δ -Funktionen nur Übergangselemente der Form

$$(\Phi, 0(x_1) \dots 0(x_n)\Phi)_{t_i=0}$$

enthält ($0(x_i)$ sind Feldoperatoren ψ , $\bar{\psi}$ oder A , genommen zur Zeit $t_i = 0$). Diese Übergangselemente lassen sich sehr einfach durch die (zur Zeit $t = 0$ genommenen) Wellenfunktionen des Zustands Φ ausdrücken ⁽⁶³⁾, die ihrer-

⁽⁶¹⁾ Die zu einer Lösung $\chi_t(|x_1 x_2|)$ der Gl. (7.2) gehörenden Wahrscheinlichkeitsamplituden höherer Koordinatenzahl können durch Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten (analog zu Gl. (4.15)) auf $\chi_t(|x_1 x_2|)$ zurückgeführt werden.

⁽⁶²⁾ Mit $\varphi(|x_1 x_2|)_{t_1=t_2=0}$ läßt sich nach Gl. (6.5) $\varphi(|x_1 x_2|)$ auch zu verschiedenen Zeiten berechnen.

⁽⁶³⁾ Dazu ist nur die τ -Funktion der rechten Seite von

$$(\Omega, 0(x_1) \dots 0(x_n)\Phi)_{t_i=0} = \lim_{\substack{t_1 > t_2 > \dots > t_n \\ t_i \rightarrow 0}} (\Omega, T 0(x_1) \dots 0(x_n)\Phi)_{t_i=0}$$

durch Wellenfunktionen auszudrücken und der Grenzübergang zu gleichen Zeiten vorzunehmen.

seits mit den Gl. (4.15) auf die $|2\rangle$ -Wellenfunktion $\varphi(|x_1x_2\rangle)$ zurückgeführt werden können. Damit ist es im Prinzip möglich, $\chi_{t=0}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\rangle)$ aus der Wellenfunktion $\varphi(|x_1x_2\rangle)$ zu berechnen.

Die Gl. (7.4) und (7.4') liefern also den Zusammenhang zwischen der zur Zeit $t=0$ genommenen Lösung der Bethe-Salpetergleichung und den zeitunabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden. Die Entwicklungen sind jedoch so kompliziert, daß wenig Hoffnung besteht, aus den Gl. (7.4) und (7.4') praktischen Nutzen zu ziehen.

Wie schon mehrfach hervorgehoben⁽⁶⁴⁾, ist die Möglichkeit invarianter Renormierung ein Vorzug der Bethe-Salpetergleichung. Die Renormierung der Tamm-Dancoffmethode bereitet dagegen einige Schwierigkeiten⁽⁶⁵⁾. Einen Hinweis auf die Natur dieser Schwierigkeiten erhält man, wenn man — bei Beschränkung auf Streuprobleme — die Funktionen $\chi'_t(|x_1x_2\rangle)$ und $\varphi(|x_1x_2\rangle)$ nach den Wellenfunktionen der freien einlaufenden Teilchen entwickelt:

$$(7.5) \quad (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi) = (\Omega'_0, T[U'(+\infty, -\infty)\psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)]\Phi'(-\infty)) \quad (66)$$

$$(7.5') \quad (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)\Phi'(t)) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)U'(0, -\infty)\Phi'(-\infty)) \quad (66)$$

Die Entwicklung (7.5) von φ besitzt eine so enge Verwandtschaft mit der Dyson'schen S -Matrixformel, daß die Übertragung der Dyson'schen Renormierungsvorschriften auf diese Entwicklung keine Mühe macht. Bei der Renormierung der Entwicklung (7.5') sind aber prinzipielle Schwierigkeiten zu erwarten: Sie hängt wesentlich an der Renormierung von $U(0, -\infty)$, und es ist bisher noch nicht gelungen, diesen Operator in jeder Näherung divergenzfrei zu formulieren⁽⁶⁷⁾.

Während sich also die Beziehung auf das wechselwirkungsfreie Vakuum zur Behandlung von Renormierungsfragen nachteilig auswirkt, verdankt man ihr andererseits die Möglichkeit, Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen von Zustandsvektoren sehr einfach auf die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsamplituden zu übertragen: Die zeitunabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden eines Zustands Φ lassen sich ja durch eine Fouriertransformation in die Entwicklungskoeffizienten a_i (Gl. (3.1)) von Φ nach dem Orthonormalsystem Φ_i^0 überführen.

⁽⁶⁴⁾ M. GELL-MANN und F. LOW: *Phys. Rev.*, **84**, 350 (1951).

⁽⁶⁵⁾ H. LEHMANN: *Zeits. f. Naturfor.*, im Erscheinen.

⁽⁶⁶⁾ Diese Entwicklungen erhält man auch, wenn die inhomogenen Formen der Gl. (7.1) und (7.2) iteriert werden.

⁽⁶⁷⁾ E. C. G. STUECKELBERG: *Phys. Rev.*, **81**, 130 (1951).

Der Unterschied zwischen dem Vakuum der wechselwirkungsfreien Energie und dem Vakuum der Gesamtenergie entfällt natürlich, sobald Paarbildungsprozesse vernachlässigt werden. Macht man z.B. für $H_1(t)$ statt Gl. (II) den Ansatz

$$(7.6) \quad H_1(t) = -ig \int_t A_0(x) (\bar{\psi}_0^-(x) \psi_0^+(x) - \psi_0^-(x) \bar{\psi}_0^+(x)) dx$$

in dem alle Paarbildungs- und Paarvernichtungsprozesse unterschlagen sind, so folgt

$$\Omega = \Omega(0) = \Omega(-\infty) = \Omega_0$$

und die zu gleichen Zeiten genommene Funktion φ wird identisch mit der $|2\rangle$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$\varphi(|x_1 x_2\rangle)_{t=t} = \chi_t(|x_1 x_2\rangle).$$

Dementsprechend führt bei Vernachlässigung der Paarprozesse die in Abschnitt 6 angegebene Umwandlung der mehrzeitigen Bethe-Salpetergleichung in eine einzeitige Form genau zur Tamm-Dancoffgleichung.

Bei voller Berücksichtigung der Paarprozesse geht jedoch, wie wir in Abschnitt 6 gesehen haben, die Äquivalenz von Tamm-Dancoff- und einzeitiger Bethe-Salpetergleichung verloren. Wahrscheinlichkeitsamplitude und Wellenfunktion weichen dann wesentlich voneinander ab, da die Paarbildungsprozesse den Vektor $\Omega'(t)$ zeitlich ändern, und somit einen Unterschied zwischen dem Vakuum Ω der Gesamtenergie und dem Vakuum Ω'_0 der wechselwirkungsfreien Energie schaffen. Die erheblichen Schwierigkeiten, die sich dann an die Beziehung

$$\Omega = U'(0, -\infty)\Omega'_0$$

der beiden Vakua knüpfen, greifen auch auf die Wahrscheinlichkeitsamplituden über, als Folge ihrer Definition, die gemischt Größen des Wechselwirkungsproblems und Größen des wechselwirkungsfreien Problems verwendet. Die Wellenfunktionen hingegen, die schon äußerlich dem Wechselwirkungsproblem angepaßter sind, schließen sich eng an den Dyson'schen S -Matrixkalkül an, der wenigstens in jeder Näherung konvergente Resultate liefert.

ANHANG ÜBER GRAPHENTECHNIK

1. – Allgemeines.

Angesichts der verwirrenden Fülle von Integralgleichungen und Integralgleichungssystemen in der Feldphysik, deren analytische Struktur durch Graphen verschiedenster Art veranschaulicht werden kann, scheint es wünschenswert, die Definitionen und Regeln der Graphentechnik auf eine einheitliche Grundlage zu stellen.

Die Graphen der Quantenfeldphysik dienen zur anschaulichen Interpretation komplizierter Integralausdrücke, sowie zur schnellen Aufzählung aller Terme (bis zu einer bestimmten Näherungsordnung), die für eine spezielle physikalische Problemstellung in Betracht kommen. Es ist zweckmäßig, noch einen Schritt weiter zu gehen und die Graphen selbst als übersichtliche und abkürzende Schreibweise analytischer Bildungen aufzufassen. In diesem Sinne sind die Graphen die ihnen entsprechenden Integralausdrücke je selbst und können statt der Integrale in deren gegenseitige Beziehungen eingesetzt werden. Mit den so erhaltenen « Graphengleichungen » läßt sich leicht umgehen, da sich manche mit viel Schreiarbeit verbundene analytische Umformung in graphischer Form sehr einfach gibt. Ganze Beweise (z.B. die Transformation der mehrzeitigen Bethe-Salpetergleichung in eine einzeitige Form) lassen sich so rein graphenmäßig führen.

Die Absicht ist, eine Graphentechnik zu entwickeln, die es ermöglicht, in der beschriebenen Weise die zahlreichen Beziehungen von Wahrscheinlichkeitsamplituden oder Wellenfunktionen gleichermaßen darzustellen. Dazu wird folgender Weg eingeschlagen: Wir kennzeichnen zunächst eine allgemeine Klasse von Graphen und geben die Regeln, nach denen die zugehörigen analytischen Ausdrücke zu bilden sind. Ein gemeinsamer Zug dieser Graphen, deren Gesamtheit für unsere Zwecke gerade ausreicht, wird darin liegen, daß inneren Nukleonlinien bzw. Mesonenlinien stets S_F - bzw. Δ_F -Funktionen entsprechen. Anschließend werden aus dieser allgemeinen Klasse spezielle Graphentypen ausgesondert, so wie es die graphische Formulierung der verschiedenen in der Arbeit besprochenen Beziehungen erfordert. Es stellt sich heraus, daß die wesentlichen Unterschiede zwischen Graphen der Tamm-Dancoffmethode und Graphen der einzeitigen Bethe-Salpetergleichung davon herrühren, wie über die Zeiten der Eckpunkte usw. integriert wird.

Entsprechend den beiden Zerlegungen Gl. (2.2a) und (2.2b) der Gesamtenergie kann die Graphentechnik auf zwei verschiedenen Weisen angewandt werden, je nachdem, ob die Massenkonstanten m_0, κ_0 in experimentelle Anteile und Renormierungszusätze aufgetrennt werden oder nicht. Im ersten Fall entsprechen inneren Linien S_F, Δ_F -Funktionen zu den experimentellen Massen, im zweiten Fall S_F, Δ_F -Funktionen zu den Massen m_0, κ_0 . Wir beschränken uns im folgenden auf den zweiten Fall. Die Modifikationen, welche die Auftrennung der Massenkonstanten mit sich bringt, sind jeweils in Anmerkungen angegeben.

2. – Definition der Graphen.

Wir definieren eine allgemeine Klasse von Graphen, die sich von den S -Matrixgraphen in folgende Eigenschaften unterscheiden:

1. Außer *Eckpunkten* x'_i (in denen jeweils drei Linien zusammenstoßen, nämlich eine Mesonen-, eine auf x'_i und eine von x'_i wegweisende Nukleonlinie) ⁽⁶⁸⁾ besitzen die Graphen auch End- und (gegebenenfalls) Unterteilungspunkte: In den *Endpunkten* x_i, y_i bzw. z_i endigt je eine Mesonen- oder auf y_i bzw. von z_i gerichtete Nukleonlinie blind; in den *Unterteilungspunkten* q_i treffen entweder zwei Mesonen- oder eine auf q_i und eine von q_i gerichtete Nukleonlinie zusammen. Jeder Unterteilungspunkt einer Mesonenlinie *muß* oberhalb oder unterhalb durch einen beigesetzten Punkt markiert sein. Ein Endpunkt einer Mesonenlinie *kann* durch einen unterhalb gesetzten Punkt markiert sein (siehe Fig. 13). Wie üblich unterscheiden wir innere Linien (mit zwei Randpunkten) und äußere Linien (mit einem Randpunkt). Die Randpunkte äußerer Linien heißen äußere Punkte, ihre Koordinaten äußere Koordinaten.

2. Es kommt auf die Anordnung der Endpunkte durch ihren Index an.

3. Den Graphen können bestimmte Größenbeziehungen (im folgenden « Zeitbedingungen » genannt) für die Zeiten der Eck-, End- und Unterteilungspunkte beigegeben sein (nach diesen Bedingungen werden sich die Zeitintegrationen in den zugeordneten analytischen Ausdrücken richten). Als Beispiele solcher Zeitbedingungen führen wir an:

a) Keine Größenbeziehung ist beigegeben.

b) Eine vollständige Anordnung aller vorkommenden Zeiten wird beigegeben: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Es können auch verschiedene Zeiten gleichgesetzt sein. Wir sprechen dann von « Schnitten konstanter Zeit »: Ein Schnitt konstanter Zeit faßt jeweils alle Punkte gemeinsamer Zeit zusammen (Fig. 12, 15 *b*, u.a.).

Bei einem Graphen mit vollständiger Anordnung der Zeiten sind die Zeitbedingungen der Zeichnung zu entnehmen (Beispiel Fig. 13 u.a.): Punkte auf gleicher Höhe haben gleiche Zeitkoordinaten, die Anordnung der Zeiten wird durch die Vertikale der Zeichnung wiedergegeben (die Richtung von unten nach oben entspricht größer werdenden Zeiten). Sind die Zeiten nicht vollständig angeordnet (Fig. 12 *a* und *b*), so werden die Zeitbedingungen der Figur beigebeschrieben. Ist dem Graphen überhaupt keine Zeitbedingung beigegeben, so wird dies durch den Zusatz (o.Z.) (ohne Zeitbedingung) vermerkt. Die zeichnerische Anordnung der Punkte des Graphen ist dann natürlich ganz gleichgültig (Fig. 6 bis 11, 16 *a, b* und *c*, 18, 19).

Zwei Graphen heißen isomorph, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung der Punkte des einen Graphen auf die Punkte des anderen Graphen gibt, sodaß:

⁽⁶⁸⁾ Bei Auftrennung der Massenkonstanten enthalten die Graphen außerdem noch $1|1$ -Eckpunkte, in denen eine ein- und eine auslaufende Nukleonlinie zusammenstoßen, sowie $2|$ -Eckpunkte, in denen zwei Mesonenlinien zusammenstoßen.

- a) die Koordinaten entsprechender Endpunkte übereinstimmen;
- b) die Zeitbedingungen invariant bleiben;
- c) die Verbindungsart zweier benachbarter Punkte (Mesonen- oder Nukleonenlinie bestimmter Markierung oder Richtung) erhalten bleibt.

Wenn jeder Punkt eines Graphen G mit mindestens einem der Endpunkte von G zusammenhängt, besitzt G außer der identischen Abbildung keinen weiteren Automorphismus.

Die folgenden Regeln 1) bis 8) ordnen jedem Graphen G , der von den S -Matrixgraphen in den genannten drei Punkten abweicht, — bei Vorgabe einer Wahrscheinlichkeitsamplitude bzw. Wellenfunktion q der äußeren Koordinaten — eine Funktion $L_G^q(x_1, \dots | y_1, \dots | z_1, \dots)$ der Endpunktkoordinaten zu. Zunächst wird nach den Regeln 1) bis 7) ein Integrand I aus seinen Faktoren zusammengesetzt, der anschließend nach Regel 8) über die Koordinaten von Eck- und Unterteilungspunkten zu integrieren ist.

1. Einer inneren von x' nach x weisenden Nukleonenlinie entspricht der Faktor $S_F(x - x')$ von I ⁽⁶⁹⁾.

2. Einer inneren Mesonenlinie mit den Randpunkten x und x' entspricht in I der Faktor $\Delta_F(x - x')$, $\Delta_{F'}(x - x')$, $\Delta_F(x - x')$ oder $\Delta_{F'}(x - x')$, je nachdem, ob die Linie keine Markierungen hat, oder bei x , bei x' oder an beiden Randpunkten markiert ist ⁽⁶⁹⁾.

3. Der Gesamtheit der äußeren Linien entspricht als Faktor die vorgegebene Wahrscheinlichkeitsamplitude oder Wellenfunktion $q(u_1, \dots, u_k, \dots | v_1, \dots | w_1, \dots)$, wenn die äußeren Mesonen, Nukleonen- und Antinukleonenlinien in den Punkten u_i , v_i und w_i einlaufen und die Punkte u_i für $i \geq k$ unterhalb markiert sind ⁽⁷⁰⁾.

4. Einem Eckpunkt x'_i entspricht der Faktor $-g\gamma_5$ ⁽⁷¹⁾

5. Dem Unterteilungspunkt q_i einer Nukleonenlinie entspricht der Faktor γ_4 .

6. Dem Unterteilungspunkt einer Mesonenlinie entspricht der Faktor $-i$ bzw. $+i$, je nachdem ob die Unterteilungsstelle oberhalb oder unterhalb markiert ist.

7. Man ersetze in dem nach den Regeln 1) bis 6) gebildetem Ausdruck jeden Faktor $S_F(x - x')$ durch das Operatorenprodukt $\psi(x)\bar{\psi}(x')$ und $q(u_1, \dots | v_1, \dots | w_1, \dots)$ durch $\psi(v_1) \dots \bar{\psi}(w_1) \dots$. (Die übrigen Faktoren werden weggelassen). Je nachdem, ob eine Permutation dieses Operatorenproduktes,

⁽⁶⁹⁾ Zu den Massen m , κ bzw. m_0 , κ_0 , je nachdem, ob die Massenkonstanten aufgetrennt werden oder nicht.

⁽⁷⁰⁾ Die Reihenfolge der Nukleonen- und Antinukleonenkoordinaten in q kann untereinander beliebig gewählt werden, die Regel 7 sorgt automatisch für das richtige Vorzeichen.

⁽⁷¹⁾ Bei Aufspaltung der Massenkonstanten entspricht einem $|1|$ -Eckpunkt der Faktor $i\delta m$, einem $2||$ -Eckpunkt der Faktor $\frac{1}{2}i\delta\kappa^2$.

welche die Faktoren in die Reihenfolge

$$\begin{aligned} & \psi(y_1) \dots \psi(y_i) \dots \bar{\psi}(z_1) \dots \bar{\psi}(z_i) \dots \bar{\psi}(x'_1) \psi(x'_1) \\ & \bar{\psi}(x'_i) \psi(x'_i) \dots \bar{\psi}(q_1) \psi(q_1) \dots \bar{\psi}(q_i) \psi(q_i) \end{aligned}$$

anordnet, gerade oder ungerade ist, hat I noch einen Faktor $+1$ oder -1 ⁽⁷²⁾.

8) Der nach den Regeln 1) bis 7) erhaltene Integrand I wird integriert über sämtliche Eck- und Unterteilungspunkte, jedoch nicht über die Endpunkte. Die Integration erstreckt sich bei n Raumkoordinaten jeweils über den ganzen Raum. Bei Ausführung der Zeitintegrationen muß auf die Zeitbedingungen geachtet werden: Es ist über sämtliche Zeiten zu integrieren, welche die Zeitbedingungen erfüllen. Zwei Beispiele seien angeführt:

a) Der Graph hat vier Eckpunkte x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , zwei Endpunkte x_1, x_2 , eine Größenbeziehung der Zeiten ist nicht angegeben. Die Integrationsvorschrift lautet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt'_4 \int d\mathbf{x}'_1 \int d\mathbf{x}'_2 \int d\mathbf{x}'_3 \int d\mathbf{x}'_4 I(x_1 x_2 x'_1 x'_2 x'_3 x'_4).$$

b) Der Graph hat vier Eckpunkte x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , zwei Endpunkte x_1, x_2 und einen Unterteilungspunkt x' . Als Zeitbedingungen sind angegeben: $t' = t'_4 < t'_3 < t'_2 < t'_1 < t_1 = t_2 = t$. Die Integrationsvorschrift lautet:

$$\int_{\infty}^t dt'_1 \int_{\infty}^{t'_1} dt'_2 \int_{-\infty}^{t'_2} dt'_3 \int_{-\infty}^{t'_3} dt' \int d\mathbf{x}'_1 \int d\mathbf{x}'_2 \int d\mathbf{x}'_3 \int d\mathbf{x} I(x_1 x_2 x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 x')_{t_1 = t_2 = t, t'_1 = t'}$$

Den nach diesen acht Vorschriften definierten Ausdruck L^g_θ identifizieren wir auch mit dem Graphen G selbst:

$$G = L^g_\theta(x_1, \dots | y_1, \dots | z_1, \dots).$$

Die Variablen x_i, y_j, z_k stehen dann an den Endpunkten, das Symbol q für Wahrscheinlichkeitsamplitude oder Wellenfunktion an den äußeren Linien des Graphen. Der so bezeichnete Graph ist damit eindeutig als analytischer Ausdruck definiert (Beispiele: die Graphengleichungen Fig. 1, 14, usw.).

Es gilt die einfache «Schnittregel» daß in einem Graphen die Schnitte konstanter Zeit, die keine *äußeren* Linien unterteilen, weggelassen werden dürfen, sofern über all möglichen Markierungen der betroffenen Mesonenunterteilungstellen summiert wird (Beispiel Fig. 14, dagegen darf der in Fig. 15 *b* eingetragene Schnitt konstanter Zeit nicht weggelassen werden, da er eine äußere Nukleonlinie unterteilt).

⁽⁷²⁾ Hat der Graph g Automorphismen, so tritt noch der Faktor $1/g$ hinzu.

Ein Graph heißt einzeitig, wenn sämtliche äußeren Punkte auf einem Schnitt konstanter Zeit liegen (Beispiel Fig. 15 *b*) andernfalls heißt der Graph mehrzeitig (Fig. 15 *a*). Einzeitige Graphen hängen von einzeitigen Funktionen (Wahrscheinlichkeitsamplitude oder einzeitige Wellenfunktion) mehrzeitige von mehrzeitigen Funktionen (mehrzeitige Wellenfunktion) ab.

3. – Mehrzeitige Bethe-Salpetergleichung.

Zur Formulierung der Bethe-Salpetergleichung (4.1) gehen wir zu speziellen Graphentypen über. Wir definieren zuerst die *mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen*. Diese sollen neben inneren Linien

1. zwei — untereinander zusammenhängende — in den Punkten x_1 und x_2 blind endende Nukleonlinien,
2. zwei einlaufende äußere Nukleonlinien enthalten, von denen aus keine Selbstenergieteile abspaltbar sind (siehe Fig. 16).

Zeitbedingungen können je nach Bedarf hinzugefügt werden (siehe den Abschnitt über einzeitige Integralgleichungen).

Ein mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph heißt *mehrzeitig reduzibel*, wenn sich zwei seiner inneren Nukleonlinien so zerschneiden lassen, daß zwei nicht zusammenhängende Teile entstehen, die beide wieder mehrzeitige Zwei-Nukleonengraphen sind (Fig. 17). Andernfalls heißt der Graph *mehrzeitig irreduzibel*. Jeder Graph mit den Eigenschaften 1 und 2 ist entweder selbst mehrzeitig irreduzibel oder läßt sich eindeutig in mehrzeitig irreduzible Bestandteile zerlegen.

In der Bethe-Salpetergleichung wird nun über sämtliche mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen (ohne Zeitbedingung) summiert, die mehrzeitig irreduzibel sind und keine geschlossene Komponenten besitzen ⁽⁷⁸⁾.

Ganz entsprechend ist die Bethe-Salpetergleichung eines einzelnen Nukleons graphisch zu formulieren (vgl. S. 86).

4. – Integralgleichungssysteme.

Für die graphische Formulierung der Integralgleichungen (*A a*) der Wahrscheinlichkeitsamplituden χ_i eines Zustands Φ sind drei Beispiele angeführt, aus denen das allgemeine Bildungsgesetz schon zu ersehen ist: Fig. 1 gibt die graphische Fassung von Gl. (3.11), Fig. 2 enthält aus dem System (*A a*) die Integralgleichung der $1|2|$ -, Fig. 3 die Integralgleichung der $1|3|1$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude.

⁽⁷⁸⁾ Die Gesamtheit aller Linien und Punkte, die mit einem bestimmten herausgegriffenen Punkt x eines Graphen Γ zusammenhängen heißt Komponente von Γ . Ein Graph ist entweder selbst eine Komponente oder kann eindeutig in seine Komponenten zerlegt werden. Komponenten ohne Endpunkte und äußere Linien heißen geschlossen (Fig. 18 zeigt einen Graphen mit zwei geschlossenen Komponenten).

Die mehrzeitigen Integralgleichungen (B) der Wellenfunktionen eines Zustands Φ lassen sich gleichfalls sehr übersichtlich als Graphengleichungen schreiben. Fig. 6 zeigt die Integralgleichung (4.12), die Fig. 7 bis 10 geben die zu den Differentialgleichungen (4.8) bis (4.11) gehörenden Integralgleichungen.

Es folgen noch einige Begriffsbildungen, die auf Seite 67 zur Ableitung der Bethe-Salpetergleichung aus dem System (B) benutzt wurden. Das Zeichen $\sum_F^{m|n|n-2}$, wie es in den Gl. (4.15) und (4.19) vorkommt, besagt, daß über alle mehrzeitigen $m|n|(n-2)$ -Graphen (unter Ausschluß der Graphen mit geschlossenen Komponenten) zu summieren ist, die mehrzeitig irreduzibel sind. Ein mehrzeitiger $m|n|(n-2)$ -Graph soll außer inneren Linien enthalten:

1. Endpunkte $y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_{n-2}$ von Mesonenlinien, einlaufenden und auslaufenden Nukleonenlinien.
2. Zwei einlaufende äußere Nukleonenlinien, die untereinander zusammenhängen. Von diesen aus sollen sich keine Selbstenergieeile abspalten lassen.

Ein mehrzeitiger $m|n|(n-2)$ -Graph heißt mehrzeitig irreduzibel (Beispiel Fig. 19), wenn es nicht möglich ist, zwei seiner inneren Nukleonenlinien so zu zerschneiden, daß er in zwei nicht zusammenhängende Teile zerfällt, von denen der eine wieder ein mehrzeitiger $m|n|(n-2)$ -Graph und der andere ein mehrzeitiger $|2|$ -Graph (Zwei-Nukleonengraph) ist.

Ganz entsprechend werden die in Gl. (4.17) vorkommenden mehrzeitig irreduziblen $m|n|(n-1)$ -Graphen erklärt. Sie enthalten:

1. Endpunkte $y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_{n-1}$.
2. Eine einlaufende äußere Nukleonenlinie, deren Randpunkt ein innerer Punkt (also keiner der Endpunkte x_i) ist.

Die mehrzeitigen $m|n|(n-2)^*$ -Graphen unterscheiden sich von den mehrzeitigen $m|n|(n-2)$ -Graphen lediglich darin, daß die beiden äußeren Nukleonenlinien *nicht* untereinander zusammenhängen und keinen der Endpunkte x_i als Randpunkt besitzen. Ein mehrzeitiger $m|n|(n-2)^*$ -Graph heißt irreduzibel, wenn es nicht möglich ist, eine seiner inneren Nukleonenlinien so zu zerschneiden, daß er in zwei nicht zusammenhängende Teile zerfällt, von denen der obere wieder ein $m|n|(n-2)^*$ -Graph, der untere ein $|1|$ -Graph ist.

5. - Einzeitige Integralgleichungen.

Es handelt sich im folgenden um die präzise Fassung der in dieser Arbeit besprochenen Integralgleichungen (6.6), (6.8), (3.13) und (3.12), sowie der Transformationsgleichung (6.5). Als erstes definieren wir die *einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen* die sich von den mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen nur um einen Schnitt konstanter Zeit unterscheiden: G sei ein mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph mit vollständiger zeitlicher Eckpunktordnung, x'_1 sei der frühere, x'_2 der spätere der beiden äußeren Punkte. Wir konstruieren zu G

einen einzeitigen Graphen G' , indem wir durch x'_1 und die auf x'_2 weisende äußere Nukleonlinie einen Schnitt konstanter Zeit legen (Beispiel: Fig. 15 a und b). Jeder Graph G' , der sich so aus einem mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen konstruieren läßt, heißt einzeitiger Zwei-Nukleonengraph.

Aus dieser Definition folgt, daß in einem einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen die eine der beiden äußeren Nukleonlinien auf einen Eckpunkt, die andere auf einen Unterteilungspunkt weist. Die vom Unterteilungspunkt zum nächsten Eckpunkt weisende Nukleonlinie ist nach oben gerichtet. Es läßt sich von ihr aus kein Selbstenergieteil abspalten.

Ein einzeitiger Zwei-Nukleonengraph heißt mehrzeitig irreduzibel, wenn der zugehörige mehrzeitige Graph diese Eigenschaft hat.

Auf diese einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen bezieht sich die Eigenschaft *einzeitig irreduzibel*: Ein einzeitiger Zwei-Nukleonengraph heißt einzeitig irreduzibel, wenn er sich nicht durch einen Schnitt konstanter Zeit, bestehend aus einem Eckpunkt x' der einen Nukleonlinie und einem Unterteilungspunkt q' der anderen Nukleonlinie, so in zwei nicht zusammenhängende Teile zerlegen läßt, daß beide Teile wieder einzeitige Zwei-Nukleonengraphen sind ^(74,75).

Ein $+$ -Zwei-Nukleonengraph ist ein einzeitiger Zwei-Nukleonengraph, in dem die Zeiten der den Endpunkt x_1, x_2 benachbarten Eckpunkte x'_1, x'_2 früher als die *gemeinsame* Zeit t der beiden Endpunkte liegen:

$$t'_1 < t, \quad t'_2 < t.$$

(Graphisch ausgedrückt: Die in den Endpunkte x_1, x_2 endenden Nukleonlinien sollen nach oben gerichtet sein).

Ein $-$ -Zwei-Nukleonengraph ist ein einzeitiger Zwei-Nukleonengraph, in dem sämtliche Eckpunktzeiten s früher als die *gemeinsame* Zeit t der beiden Eckpunkte x_1, x_2 liegen:

$$s < t.$$

Auf die $+$ -Zwei-Nukleonengraphen und die $-$ -Zwei-Nukleonengraphen beziehen sich die Eigenschaften *$+$ -irreduzibel* und *$-$ -irreduzibel*: Ein $+$ -Zwei-Nukleonengraph bzw. ein $-$ -Zwei-Nukleonengraph heißt $+$ -irreduzibel bzw. $-$ -irreduzibel, wenn er sich nicht durch einen Schnitt konstanter Zeit, bestehend aus einem Eckpunkt x' der einen Nukleonlinie und einem Unterteilungspunkt q' der anderen Nukleonlinie, so in zwei nicht zusammenhängende Teile zerlegen läßt, daß beide Teile wieder $+$ -Zwei-Nukleonengraphen bzw. $-$ -Zwei-Nukleonengraphen sind ⁽⁷⁴⁾.

Die $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraphen, die wir zur Formulierung der Gl. (3.12) benötigen, müssen etwas anders als den mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen konstruiert werden: G sei ein mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph mit vollständiger Eckpunktanordnung, jede Zeit s eines äußeren oder inneren Punktes von G sei früher als die gemeinsame Zeit t der beiden Endpunkte x_1, x_2 :

$$s < t.$$

⁽⁷⁴⁾ Der obere Teil des Graphen ist natürlich durch eine auf x' und eine auf q' weisende Nukleonlinie zu vervollständigen.

⁽⁷⁵⁾ Zu den verschiedenen einzeitigen Irreduzibilitätsbegriffen vgl. Fig. 20.

Wir konstruieren dann zu G einen $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraphen G' , indem wir durch den frühesten (äußeren oder inneren) Eckpunkt einen Schnitt konstanter Zeit legen. Jeder Graph G' , der sich so aus einem mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen gewinnen läßt, heißt $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraph.

Aus der Definition folgt, daß jede Eckpunktzeit s eines $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraphen zwischen der Zeit t' des frühesten Eckpunkts und der Zeit t der Endpunkte liegt:

$$t' < s < t.$$

Ein $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraph heißt $\bar{\bar{}}$ -irreduzibel, wenn er sich nicht durch einen Schnitt konstanter Zeit, bestehend aus einem Eckpunkt x' der einen Nukleonlinie und einem Unterteilungspunkt q' der anderen Nukleonlinie oder aus einem Eckpunkt x' , einem Unterteilungspunkt q'_1 der einen Nukleonlinie und einem Unterteilungspunkt q'_2 der anderen Nukleonlinie, so in zwei nicht zusammenhängende Teile zerlegen läßt, daß beide Teile wieder $\bar{\bar{}}$ -Zwei-Nukleonengraphen sind (⁷⁴).

In den Gl. (6.5) und (6.6) wird unter Ausschluß von Graphen mit geschlossenen Komponenten (disconnected closed-loops) über sämtliche einzeitig irreduziblen, einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen γ summiert. In Gl. (6.8) wird unter Ausschluß geschlossener Komponenten über sämtliche $+$ -irreduziblen Zwei-Nukleonengraphen γ^+ summiert. In den Gl. (3.13) und (3.12), wird über sämtliche $-$ -irreduziblen bzw. $\bar{\bar{}}$ -irreduziblen Zwei-Nukleonengraphen $\bar{\gamma}$, $\bar{\bar{\gamma}}$ summiert.

Den Begriff « einzeitig irreduzibel » wenden wir gelegentlich auch auf mehrzeitige Zwei-Nukleonengraphen an: Ein mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph heißt einzeitig irreduzibel, wenn dies für den zugehörigen einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen zutrifft.

Entsprechend zu den mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen werden die Ein-Nukleonengraphen definiert: Ein Ein-Nukleonengraph soll neben inneren Linien

1. eine im Punkt x blind endende Nukleonlinie,
2. eine einlaufende äußere Nukleonlinie,

enthalten. Der Unterschied einzeitig — mehrzeitig entfällt hier natürlich. Die Eigenschaften irreduzibel, $-$ -irreduzibel, usw. werden für Ein-Nukleonengraphen ganz analog definiert.

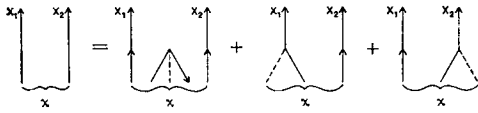


Fig. 1. - Graphische Darstellung der Integralgleichung (3.11).

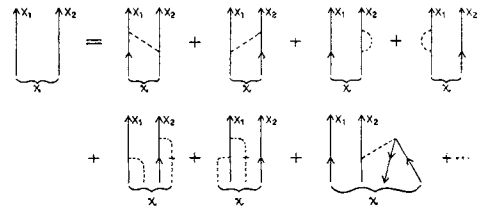


Fig. 4. - Integralgleichung, entstanden durch Einsetzen von Fig. 2 und 3 in Fig. 1.

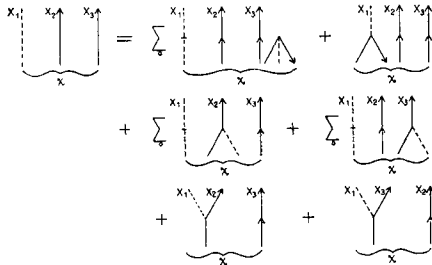


Fig. 2. - Graphische Darstellung der Integralgleichung (System A a) der $1|2|$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude.

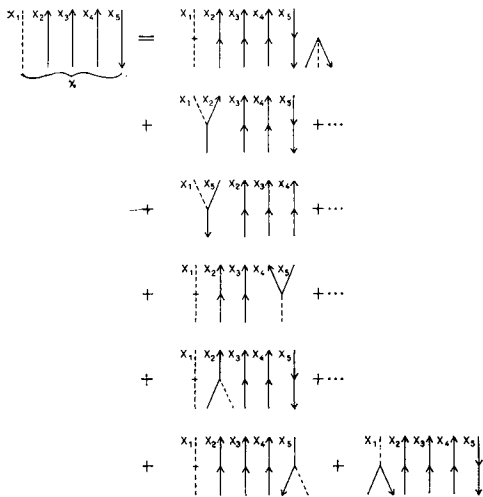


Fig. 3. - Graphische Darstellung der Integralgleichung (System A a) der $1|3|1$ -Wahrscheinlichkeitsamplitude. Das Symbol χ und die Summenzeichen Σ sind der Übersichtlichkeit halber auf der rechten Seite weglassen.

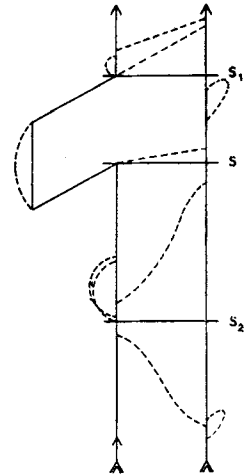


Fig. 5. - Ein Zwei-Nukleonengraph, der durch die Schnitte S_1, S_2 konstanter Zeit in seine drei \equiv -irreduziblen Bestandteile zerlegt ist. Durch einen weiteren Schnitt S wird er in seine vier \equiv -irreduziblen Bestandteile zerlegt.

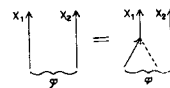


Fig. 6. - Graphische Darstellung der Integralgleichung (4.12), sämtliche Graphen o.Z.

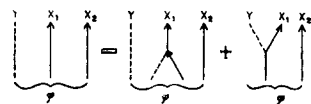


Fig. 7. - Zu Gl. (4.8) gehörende Integralgleichung des Systems (V) (o.Z.).

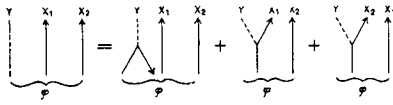


Fig. 8. - Zu Gl. (4.9) gehörende Integralgleichung des Systems (V) (o.Z.).

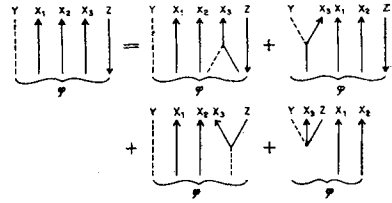


Fig. 9. - Zu Gl. (4.10) gehörende Integralgleichung des Systems (V) (o.Z.).

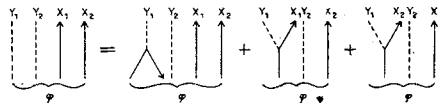


Fig. 10. - Zu Gl. (4.11) gehörende Integralgleichung des Systems (V) (o.Z.).

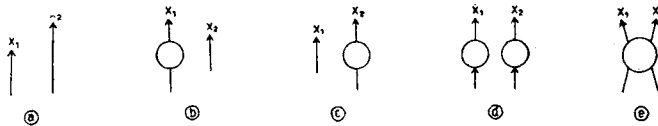
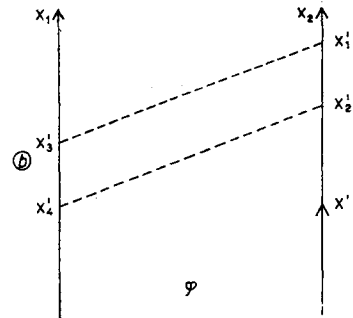
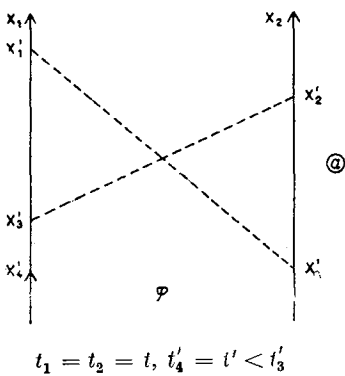


Fig. 11. - a) Graph T_0 nullter Näherung der Entwicklung (5.3'). b) Graphentyp T_1 der Entwicklung (5.3'). c) Graphentyp T_2 der Entwicklung (5.3'). d) Graphentyp T_{12} der Entwicklung (5.3'). e) Graphentyp T_3 der Entwicklung (5.3'), sämtliche Graphen o.Z.



oder $t_1 = t_2 = t, t' = t'_4 < t'_2; t'_1 < t'_3; t'_1 < t'_4.$

Fig. 12 a und b. - Zwei Graphen mit beigeschriebenen Zeitbedingungen, die durch Zusammenfassung von einzellig irreduziblen, einzelligen Zwei-Nukleonengraphen gleicher Struktur entstanden sind.

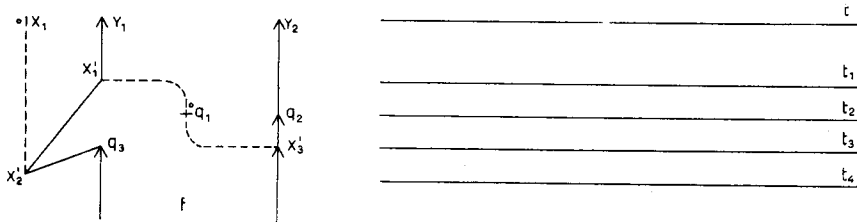


Fig. 13. – Graphische Darstellung des Ausdrucks:

$$\begin{aligned}
 & - (-g)^3 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \int_{t_1}^{t_3} dx_1' \int_{t_1}^{t_3} dq_1 dq_2 \int_{t_3}^{t_4} dq_3 dx_3' \int_{t_4}^{t_1} dx_2', \\
 & \Delta_F(x_1 - x_2') S_F(y_1 - x_1') S_F(y_2 - q_2) S_F(x_1' - x_2') \Delta_F(x_1' - q_1) \gamma_6^{x_1'} \gamma_6^{x_2'} (-i) \gamma_4^{q_2} \\
 & S_F(x_2' - q_3) \Delta_F(q_1 - x_3') S_F(q_2 - x_3') \gamma_4^{q_3} \gamma_5^{x_3'} f_{t_3}(|\mathbf{q}_3 \mathbf{x}_3'|).
 \end{aligned}$$

Die Zeitbedingungen sind hier graphisch dargestellt: Punkte gleicher Zeit liegen auf gleicher Höhe. Die Größenanordnung $t_4 < t_3 < t_2 < t_1 < t$ der Zeiten wird durch die Vertikale der Zeichnung wiedergegeben, die Richtung von unten nach oben entspricht größer werdenden Zeiten.

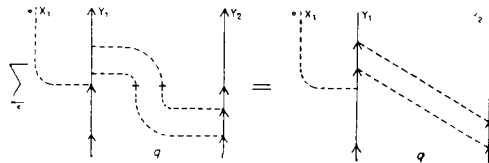


Fig. 14. – Beispiel einer Graphengleichung. Σ bedeutet, daß über die vier möglichen Markierungen der beiden Mesonenunterteilungsstellen summiert wird.

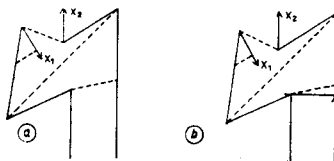


Fig. 15. – Zur Definition der einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen. a) zeigt einen mehrzeitigen Zwei-Nukleonengraphen, b) den zugehörigen einzeitigen Zwei-Nukleonengraphen. a) und b) sind einzeitig irreduzibel.

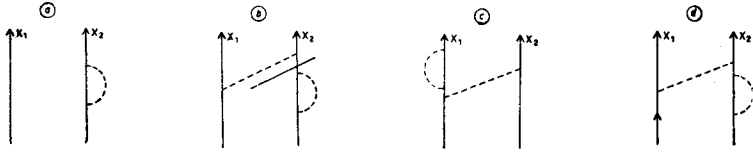


Fig. 16. - Selbstenergierteile bei Zwei-Nukleonengraphen. Die Graphen *a* und *b* (o.Z.) sind keine Zwei-Nukleonengraphen, da sich von der Nukleonlinie 2 aus ein Selbstenergierteil abspalten läßt. In *a* hängen die beiden Nukleonlinien außerdem nicht zusammen. Der Graph *c* (o.Z.) ist dagegen ein mehrzeitig irreduzibler, mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph. *d* ist kein einzeitiger Zwei-Nukleonengraph, da er sich nicht definitionsgemäß aus einem mehrzeitigen Graphen konstruieren läßt.

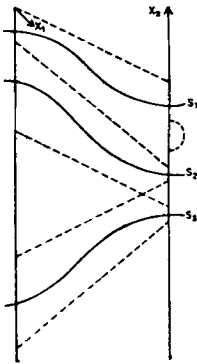


Fig. 17. - Ein einzeitig irreduzibler, mehrzeitiger Zwei-Nukleonengraph, der durch die Schnitte S_1 , S_2 und S_3 in seine vier mehrzeitig irreduziblen Bestandteile zerlegt wird.

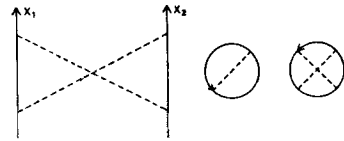


Fig. 18. - Ein Graph mit zwei geschlossenen Komponenten (o.Z.).

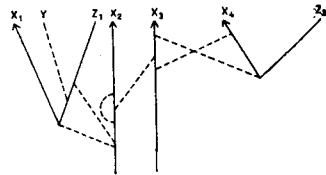


Fig. 19. - Beispiel eines mehrzeitig irreduziblen $1|4|2$ -Graphen (o.Z.).

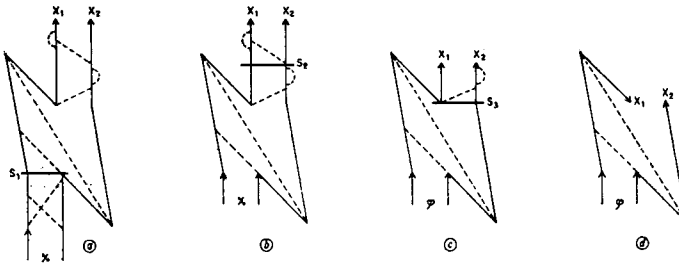


Fig. 20. - Vier einzeitige Zwei-Nukleonengraphen. *a* zeigt einen \equiv -irreduziblen Graphen, der durch den Schnitt S_1 (konstanter Zeit) in seine beiden \equiv -irreduziblen Bestandteile zerfällt. *b* zeigt einen \equiv -irreduziblen Graphen (nämlich den oberen Bestandteil von *a*), der durch den Schnitt S_2 in seine beiden \equiv -irreduziblen Bestandteile zerfällt. *c* zeigt einen \equiv -irreduziblen Graphen (den unteren Bestandteil von *b*), der durch S_3 in seine beiden einzeitig irreduziblen Bestandteile zerfällt. Der untere Teil von *c* ist als Beispiel *d* eines einzeitig irreduziblen Zwei-Nukleonengraphen herausgezeichnet.