ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 53, No. 2, 1986

TYPES ET SUITES SYMETRIQUES DANS L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$

PAR
SYLVIE GUERRE
Equipe d'Analyse. Université Paris VI, 75230 Paris, Cedex 05, France

ABSTRACT

We prove that every normalized sequence in L^p, weakly null if $p > 2$ and equivalent to the unit vector basis of l^2 if $1 \leqq p < 2$, has for all $\varepsilon > 0$ a subsequence which is $2(1+\varepsilon)$-symmetric. This result was known for $p = 1$ (H.P. Rosenthal) and $p \in 2\mathbf{N}$ (W.B. Johnson, B. Maurey, G. Shechtman, L. Tzafriri). Here, we use the techniques of stability which were introduced by J.L. Krivine and B. Maurey: as well as providing new results, this approach unifies and simplifies previous known results.

Nous étudions le problème suivant: "existe-t-il une constante $K > 0$ telle que pour tout $p \in [1, +\infty[$, toute suite normalisée de L^p, tendant faiblement vers 0 dans L^p ait une sous-suite K-symétrique?" Dans certains cas particuliers, on connait des réponses à cette question:

(i) Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite normalisée de L^1, isomorphe à la base canonique de l^2, H.P. Rosenthal a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous suite $2(1+\varepsilon)$-symétrique (résultat non publié).

(ii) Si d'autre part p est un entier pair et si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite normalisée de L^p qui converge faiblement vers 0, on sait (cf. [3]) que pour tout $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite $2(1+\varepsilon)$-symétrique.

Ici, on montre que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite normalisée de L^p telle que:

ou bien: $1 \leqq p < 2$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2

ou bien: $p > 2$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers 0,

alors pour tout $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite $2(1+\varepsilon)$-symétrique.

Dans le cas des espaces L^p, où p est un entier pair, cette démonstration est celle de [3] vue sous un angle différent et dans les autres cas, elle s'inspire du résultat de H.P. Rosenthal dans L^1.

Received June 27, 1984 and in revised form May 24, 1985

Le point de vue adopté ici est celui des espaces stables introduits dans [5] qui simplifie et unifie les résultats cités ci-dessus de H.P. Rosenthal et de [3].

Dans la première partie, on décrit l'espace des types sur L^p pour $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$ muni de sa topologie naturelle et de ses lois de composition. Dans la deuxième partie on utilise cette étude pour montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite normalisée, tendant faiblement vers 0 dans L^p si $2 < p < +\infty$ et isomorphe à l^2 dans L^p si $1 \leqq p < 2$, et si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définit un type σ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a une sous-suite $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base canonique du modèle étalé ([1]) associé à σ. Les espaces L^p étant des espaces stables, cette base est 2-symétrique et ceci prouve le résultat annoncé.

Je remercie W.B. Johnson qui a attiré mon attention sur cette question, Y. Raynaud pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur ce problème et B. Maurey et J.L. Krivine pour leurs conseils.

Dans toute cette étude, la théorie des espaces de Banach stables est fondamentale. Nous renvoyons à [5] pour les propriétés générales de ces espaces. Cependant, nous rappelons quelques définitions indispensables pour la suite.

X est stable si pour toutes suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_m)_{m \in \mathbf{N}}$ et pour tous ultrafiltres $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur $\mathbf{N}$, on a

$$\lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{V}} \| x_n + y_m \| = \lim_{m,\mathcal{V}} \lim_{n,\mathcal{U}} \| x_n + y_m \|.$$

Un type sur X est une fonction σ de X dans $\mathbf{R}^+$ telle qu'il existe une suite bornée sans sous-suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de X et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbf{N}$ tels que:

$$\forall x \in X, \qquad \sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}} \| x + x_n \|.$$

Les types sur X sont des fonctions 1-lipschitziennes de X dans $\mathbf{R}$ et l'espace des types sur X, noté $\mathcal{T}(X)$ peut être muni naturellement de la topologie de la convergence simple sur X.

Le produit de convolution de deux types σ et τ définis respectivement par $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\mathcal{U}$ et $(y_m)_{m \in \mathbf{N}}$ et $\mathcal{V}$ est défini par:

$$\forall x \in X, \qquad \sigma * \tau(x) = \lim_{n,\mathcal{U}} \lim_{m,\mathcal{V}} \| x + x_n + y_m \|.$$

Remarque. Bien que la notion de type soit définie sur tout espace de

Banach, le produit de convolution de deux types n'est bien défini que sur un espace de Banach stable.

Le *produit* du type σ par une constante λ est défini par:

$$\forall x \in X \qquad \lambda\sigma(x) = \lim_{n,\mathcal{U}} \|x + \lambda x_n\|.$$

On note

$$\left\{\begin{array}{l} \|\sigma\| = \sigma(0) = \lim_{n,\mathcal{U}} \|x_n\| \\[2ex] \text{pour } n \in \mathbf{N} \text{ et } (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \ \mathop{*}\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\sigma = \alpha_1\sigma * \cdots * \alpha_n\sigma, \\[2ex] K(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{T}(X) \mid \exists n \in \mathbf{N}, \exists (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n \text{ tels que } \tau = \mathop{*}\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\sigma\}, \\[2ex] K_1(\sigma) = \{\tau \in K(\sigma), \|\tau\| \leqq 1\}. \end{array}\right\}$$

On rappelle que le complété de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ pour la norme $\|\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\| = \|*_{i=1}^{\infty} \alpha_i\sigma\|$ est appelé modèle étalé associé à σ (cf. [1]). La suite fondamentale $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de tout modèle étalé sur un espace stable est 1-échangeable, c'est-à-dire qui si π est une permutation sur $\mathbf{N}$, on a: $\|\Sigma\, \alpha_i e_{\pi(i)}\| = \|\Sigma\, \alpha_i e_i\|$. De plus si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est normalisée et tend faiblement vers 0, $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est 2-inconditionnelle [1] donc c'est une base 2-symétrique du modèle étalé. Si de plus $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est 1-inconditionnelle, $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base 1-symétrique du modèle étalé.

1. Description de l'espace des types sur L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$

Soit (Ω, Σ, P) un espace de probabilité. On pose $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, P)$.

Nous allons utiliser une représentation de la norme des espaces L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$ qui a été utilisée initialement par J.L. Krivine pour prouver que les espaces L^p sont stables et nous commençons par donner les notations et définitions que nous utiliersons. Deux cas se présentent:

Premier cas. $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$

Si x appartient à L^p et si $i = 1,\ldots,2k-1$, on pose $l_i^x = x^i$. l_i^x appartient à $L^{2k/i}$ et si x et y appartiennent à L^p, on note:

$$\text{pour } i = 1,\ldots,2k-1, \qquad \langle l_i^x, l_{2k-i}^y\rangle = \int_\Omega x^i y^{2k-i}\, dP.$$

Remarquons que pour $i = 1,\ldots,2k-1$, on a:

$$\| x \|_{L^p}^p = \| l_i^x \|_{L^{2k/i}}^{2k/i}.$$

Deuxième cas. $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$
(N.B. pour $k = 0$, on conviendra de ne considérer que $1 \leqq p < 2$).
Soit μ_p la mesure sur $[0, +\infty[\times \Omega$ définie par:

$$d\mu_p = \frac{dt}{t^{p+1}} \otimes dP(\omega).$$

Posons:

$$l = \operatorname{Sup}(0, k-1),$$

$$K_p = \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos t + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!}\right) \frac{dt}{t^{p+1}}.$$

On remarque que K_p est fini, que $(-1)^k K_p$ est strictement positif et que pour u appartenant à $\mathbf{R}$ on a:

$$K_p |u|^p = \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos tu + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{t^{2j} u^{2j}}{(2j)!}\right) \frac{dt}{t^{p+1}}.$$

Pour x appartenant à L^p, on définit:

$$\text{pour } i = 0,\ldots,l, \qquad U_i^x(t,\omega) = 1 - \cos tx(\omega) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \frac{t^{2j} x(\omega)^{2j}}{(2j)!}$$

et

$$\text{pour } i = 0,\ldots,k, \qquad V_i^x(t,\omega) = -\sin tx(\omega) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \frac{t^{2j-1} x(\omega)^{2j-1}}{(2j-1)!}.$$

On notera encore r_i n'importe quel réel appartenant à

$$]p/(2i+2), p/2i[\, \cap \,]1, +\infty[\qquad \text{pour } i = 0,\ldots,l$$

et s_i n'importe quel réel appartenant à $]p/(2i+1), p/(2i-1)[\, \cap\,]1, +\infty[$ pour $i = 0,\ldots,k$. Il n'est pas difficile de voir que U_i^x appartient à $L^{r_i}(d\mu_p)$, que V_i^x appartient à $L^{s_i}(d\mu_p)$ et qu'il existe des constantes $C_{p,r_i} > 0$ et $D_{p,s_i} > 0$ telles que:

$$\| U_i^x \|_{L^{r_i}(d\mu_p)}^{r_i} = C_{p,r_i} \| x \|_{L^p}^p,$$

$$\| V_i^x \|_{L^{s_i}(d\mu_p)}^{s_i} = D_{p,s_i} \| x \|_{L^p}^p.$$

Si x et y appartiennent à L^p, on notera:
pour $(i,j) \in \{0,\ldots,l\}^2$, $i + j = k$ ou $k - 1$,

$$\langle U_i^x, U_j^y \rangle = \int_{[0,+\infty[\times\Omega} U_i^x U_j^y d\mu_p \,;$$

pour $(i,j) \in \{0,\ldots,k\}^2$, $i+j=k$ ou $k+1$,

$$\langle V_i^x, V_j^y \rangle = \int_{[0,+\infty[\times\Omega} V_i^x V_j^y d\mu_p.$$

LEMME 1. *Si x et y appartiennent à L^p, on a:*
si $p=2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$,

$$\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p = \sum_{i=1}^{2k-1} C_{2k}^i \langle l_i^x, l_{2k-i}^y \rangle;$$

si $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$

$$K_p(\|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle U_i^x, U_{k-i}^y \rangle - \sum_{i=0}^{l} \langle U_i^x, U_{l-i}^y \rangle$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} \langle V_i^x, V_{k-i}^y \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle V_i^x, V_{k-i+1}^y \rangle.$$

DÉMONSTRATION. Le premier cas est évident.

Pour le second cas, on introduit pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par:

$$\forall u \in \mathbf{R}, \qquad f_n(u) = 1 - e^{iu} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(iu)^j}{j!}.$$

Comme $f_n'(u) = if_{n-1}(u)$, il est facile de montrer par récurrence l'identité suivante:

$$f_n(u+v) - (f_n(u) + f_n(v)) = \sum_{j=1}^{n-1} f_j(u) f_{n-j}(v) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j(u) f_{n-j-1}(v).$$

En posant $u = tx(\omega)$ et $v = ty(\omega)$ et en intégrant la partie réelle de cette identité sur $[0,+\infty[\times\Omega$ par rapport à μ_p, on obtient l'identité souhaitée.

Nous allons étendre ces formules aux types sur L^p:

PROPOSITION 1. *Soit σ un type sur L^p.*

Si $p=2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$, pour $i=1,\ldots,2k-1$, il existe une fonction l_i^σ appartenant à $L^{2k/i}$ telle que:

$$\forall x \in L^p, \qquad \sigma(x)^p - \|\sigma\|^p - \|x\|^p = \sum_{i=1}^{2k-1} C_{2k}^i \langle l_i^\sigma, l_{2k-i}^x \rangle.$$

Si $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, pour $i = 0,\ldots,l$ il existe une fonction U_i^σ appartenant à $L^{r_i}(d\mu_p)$ et pour $i = 0,\ldots,k$ il existe une fonction V_i^σ appartenant à $L^{s_i}(d\mu_p)$ telles que:

$$\forall x \in L^p, \qquad K_p[\sigma(x)^p - \|\sigma\|^p - \|x\|^p]$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \langle U_i^\sigma, U_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=0}^{l} \langle U_i^\sigma, U_{l-i}^x\rangle + \sum_{i=0}^{k} \langle V_i^\sigma, V_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle V_i^\sigma, V_{k-i+1}^x\rangle.$$

DÉMONSTRATION. σ est défini par une suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbf{N}$.

Si $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$, pour $i = 1,\ldots,2k-1$, soit l_i^σ la limite faible de $(l_i^{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^{2k/i}$ selon $\mathcal{U}$.

Si $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, pour $i = 0,\ldots,l$ soit U_i^σ la limite faible de $(U_i^{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ selon $\mathcal{U}$ et pour $i = 0,\ldots,k$, soit V_i^σ la limite faible de $(V_i^{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^{s_i}(d\mu_p)$ selon $\mathcal{U}$. Comme μ_p est σ-finie, ces dernières limites faibles ne dépendent pas des réels r_i et s_i choisis dans les intervalles convenables définis précédemment.

En passant à la limite dans les identités du lemme 1, on voit aisément que ces fonctions vérifient les formules de la proposition 1. Il reste à vérifier que ces fonctions ne dépendent que de σ et non pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ni de $\mathcal{U}$.

Dans le cas où $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$, il faut montrer que si deux familles $(l_i)_{i=1,\ldots,2k-1}$ et $(l_i')_{i=1,\ldots,2k-1}$, appartenant pour chaque i à l'adhérance faible de $\{l_i^x,\ x \in L^p\}$ dans $L^{p/i}$, sont telles que:

$$\forall x \in L^p, \qquad \sum_{i=1}^{2k-1} C_{2k}^i \langle l_i - l_i', l_{2k-i}^x\rangle = 0,$$

alors, pour $i = 1,\ldots,2k-1$, $l_i = l_i'$.

Or si l'on change x en αx dans la relation précédente, par homogénéité on a aussi:

$$\forall x \in L^p, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{i=1}^{2k-1} C_{2k}^i \alpha^{2k-i} \langle l_i - l_i', l_{2k-i}^x\rangle = 0.$$

En divisant par α et en faisant tendre α vers 0, on obtient alors:

$$\forall x \in L^p, \qquad \langle l_{2k-1} l_{2k-1}', l_1^x\rangle = 0.$$

Donc $l_{2k-1} = l_{2k-1}'$.

En divisant par α^2 et en faisant tendre α vers 0, on obtient de même:

$$\forall x \in L^p, \qquad \langle l_{2k-2} - l_{2k-2}', l_2^x\rangle = 0.$$

Comme $\{l_2^x,\ x \in L^p\}$ est dense dans $L^{p/2}$, ceci prouve que $l_{2k-2} = l'_{2k-2}$.

En itérant ce procédé, on obtient aisément que $l_i = l'_i$ pour tout $i = 1,\dots,2k-1$.

Dans le cas où $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, il s'agit de montrer que s'il existe deux familles de fonctions $(U_i)_{i=0,\dots,l}$ et $(U'_i)_{i=0,\dots,l}$ appartenant pour chaque i à l'adhérence faible dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ de $\{U_i^x/x \in L^p\}$ et deux familles de fonctions $(V_i)_{i=0,\dots,k}$ et $(V'_i)_{i=0,\dots,k}$ appartenant pour chaque i à l'adhérence faible dans $L^{s_i}(d\mu_p)$ de $\{V_i^x/x \in L^p\}$ et telles que: $\forall x \in L^p$,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \langle U_i - U'_i, U_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=0}^{l} \langle U_i - U'_i, U_{l-i}^x\rangle$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} \langle V_i - V'_i, V_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=0}^{k} \langle V_i - V'_i, V_{k-i+1}^x\rangle = 0$$

alors $U_i = U'_i$ pour $i = 0,\dots,l$ et $V_i = V'_i$ pour $i = 0,\dots,k$. Or comme $U_i^{-x} = U_i^x$ et $V_i^{-x} = -V_i^x$ l'égalité ci-dessus est équivalente aux deux suivantes:

$$(*)\qquad \forall x \in L^p \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle U_i - U'_i, U_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=0}^{l} \langle U_i - U'_i, U_{l-i}^x\rangle = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \langle V_i - V'_i, V_{k-i}^x\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle V_i - V'_i, V_{k-i+1}^x\rangle = 0. \end{cases}$$

On peut donc traiter séparément les familles $(U_i - U'_i)_{i=0,\dots,l}$ et $(V_i - V'_i)_{i=0,\dots,k}$. Donnons le principe de la démonstration dans le cas des $(U_i - U'_i)_{i=0,\dots,l}$:

Si $k = 0$, la première égalité ci-dessus implique immédiatement $U_0 = U'_0$.

Si $k \geq 1$, on remarque que: $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall x \in L^p$,

$$\begin{cases} \| U_{k-1}^{\alpha x} \|_{L^{r_{k-1}}(d\mu_p)}^{r_{k-1}} = C_{p,r_{k-1}} \alpha^p \| x \|_{L^p}^p, \\ U_{k-i}^{\alpha x} - U_{k-i-1}^{\alpha x} = \alpha^{2(k-i)} (U_{k-i}^x - U_{k-i-1}^x) \qquad \text{pour } i = 1,\dots,k-1. \end{cases}$$

Comme $p/r_{k-1} > 2k-2$, le même argument d'homogénéité que dans le premier cas montre que la première ligne de la relation (*) équivaut à:

$$\forall x \in L^p \begin{cases} \langle U_0 - U'_0, U_{k-1}^x\rangle = 0, \\ \langle U_i - U'_i, U_{k-i}^x\rangle - \langle U_i - U'_i, U_{k-i-1}^x\rangle = 0, \qquad \text{pour } i = 1,\dots,k-1. \end{cases}$$

En utilisant (cf. lemme 1) le fait que la dérivée seconde de la fonction réelle $u \to U_i^u(t)$ est la fonction $u \to -t^2 U_{i-1}^u(t)$, on montre aisément que si $\forall x \in L^p$,

$\langle U_0 - U_0', U_{k-1}^x \rangle = 0$, alors $\forall x \in L^p$, $\langle U_0 - U_0', U_0^x t^{2(k-1)} \rangle = 0$ et ceci implique que $U_0 - U_0' = 0$ dans $L^2(t^{2(k-1)} d\mu_p)$ donc aussi dans $L^{r_0}(d\mu_p)$.

LEMME 2. *Soit $2k < p < 2k+2$, $k \geqq 1$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de L^p et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur* $\mathbf{N}$. *Si pour $i = 0, \ldots, k-1$, on note U_i la limite faible dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ de $(U_i^{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ selon $\mathcal{U}$, V_i la limite faible dans $L^{s_i}(d\mu_p)$ de $(V_i^{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ selon $\mathcal{U}$ et l_i la limite faible dans $L^{p/i}$ de $(x_n^i)_{n\in\mathbf{N}}$ on a*:

$$\textit{pour } i = 1, \ldots, k-1, \qquad U_i - U_{i-1} = (-1)^i \frac{t^{2i} l_{2i}}{(2i)!},$$

$$\textit{pour } i = 1, \ldots, k, \qquad V_i - V_{i-1} = (-1)^{i-1} \frac{t^{2i-1} l_{2i-1}}{(2i-1)!}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. On ne la fait que dans le cas des $(U_i)_{i=0,\ldots,k-1}$. Par définition, pour $i = 1, \ldots, k-1$ on a l'égalité:

$$U_i^{x_n} - U_{i-1}^{x_n} = (-1)^i \frac{t^{2i} x_n^{2i}}{(2i)!}.$$

Soit $0 < a < b$ et $\chi_{[a,b]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$ dans $[0, +\infty[$.

Les fonctions $\chi_{[a,b]} U_i^{x_n}$, $\chi_{[a,b]} U_{i-1}^{x_n}$ et $\chi_{[a,b]} t^{2i} x_n^{2i}$ appartiennent à $L^{p/2i}(d\mu_p)$. En passant à la limite faible selon $\mathcal{U}$ dans cet espace et comme μ_p est σ-finie, on trouve:

$$\chi_{[a,b]}(U_i - U_{i-1}) = (-1)^i \frac{t^{2i} l_{2i}}{(2i)!} \chi_{[a,b]}.$$

Ceci étant vrai pour tout $0 < a < b$, on en déduit

$$U_i - U_{i-1} = (-1)^i \frac{t^{2i} l_{2i}}{(2i)!}.$$

Ce lemme termine la démonstration de la proposition 1: en effet, aucune fonction de la forme $t^r f(\omega)$, $r \in \mathbf{R}$, $f \neq 0$ n'est intégrable pour la mesure μ_p. Donc si $U_0 = U_0'$, $U_1 - U_1'$ est de la forme $t^2(l_2 - l_2')$ et donc est nulle. De proche en proche, on montre également que $U_i = U_i'$ pour $i = 2, \ldots, k-1$.

REMARQUE 1. On conclut de cette étude que si σ est un type défini par une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de L^p et un ultrafilte $\mathcal{U}$ pour $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, la limite faible de $(x_n^i)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^{p/i}$ pour $i = 1, \ldots, 2k-1$ selon $\mathcal{U}$ dépend uniquement de σ. On la notera l_i^σ pour $i = 1, \ldots, 2k-1$ par analogie avec le cas des espaces L^p où p est un entier pair.

Le résultat qui suit décrit la topologie et les lois de compositions sur l'espace $\mathcal{T}(L^p)$. La démonstration de la proposition 2 est une conséquence de celle de la proposition 1, du lemme 2 et des formules utilisées au lemme 1.

PROPOSITION 2. *Soit $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de types dans L^p, $1 \leq p < +\infty$. Si $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers σ si et seulement si $(\|\sigma_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\|\sigma\|$ et si pour tout $i = 1,\ldots,2k-1$, $(l_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers l_i^σ dans $L^{k/i}$.*

De plus: $\forall(\sigma,\tau)\in[\mathcal{T}(L^p)]^2$, $\forall i = 1,\ldots,2k-1$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} l_i^{\sigma*\tau} = l_i^\sigma + l_i^\tau + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j l_j^\sigma l_{i-j}^\tau, \\ l_i^{\alpha\sigma} = \alpha^i l_i^\sigma. \end{cases}$$

Si $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers σ si et seulement si $(\|\sigma\|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\|\sigma\|$, si pour tout $i = 0,\ldots,l$, $(U_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers U_i^σ dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ et si pour tout $i = 0,\ldots,k$, $(V_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers V_i^σ dans $L^{s_i}(d\mu_p)$.

De plus: $\forall\sigma,\tau\in[\mathcal{T}(L^p)]^2$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$

$$\begin{cases} 1 - U_0^{\sigma*\tau} = (1 - U_0^\sigma)(1 - U_0^\tau) - V_0^\sigma V_0^\tau, \\ V_0^{\sigma*\tau} = (1 - U_0^\tau)V_0^\sigma + (1 - U_0^\sigma)V_0^\tau; \end{cases}$$

pour $i = 1,\ldots,k-1$

$$\begin{cases} U_i^{\alpha\sigma} - U_{i-1}^{\alpha\sigma} = \alpha^{2i}(U_i^\sigma - U_{i-1}^\sigma), \\ U_i^{\sigma*\tau} - U_{i-1}^{\sigma*\tau} = (U_i^\sigma - U_{i-1}^\sigma) + (U_i^\tau - U_{i-1}^\tau) + \sum_{j=1}^{2i-1} \frac{l_j^\sigma}{j!}\frac{l_{2i-j}^\tau}{(2i-j)!}; \end{cases}$$

pour $i = 0,\ldots,k$

$$\begin{cases} V_i^{\alpha\sigma} - V_{i-1}^{\alpha\sigma} = \alpha^{2i-1}(V_i^\sigma - V_{i-1}^\sigma), \\ V_i^{\sigma*\tau} - V_{i-1}^{\sigma*\tau} = (V_i^\sigma - V_{i-1}^\sigma) + (V_i^\tau - V_{i-1}^\tau) + \sum_{j=1}^{2i-2} \frac{l_j^\sigma}{j!}\cdot\frac{l_{2i-1-j}^\tau}{(2i-j-1)!}. \end{cases}$$

REMARQUE 2. L'espace des types sur L^p est un sous-ensemble des fonctions continues de L^p dans $\mathbf{R}$ et peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p. Il est facile de voir d'après la proposition 1 que si une suite de types $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur L^p est telle que:

si $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geqq 2$, pour chaque $i = 1,\ldots,2k-1$, la suite $(l_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte dans $L^{k/i}$.

si $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$, pour chaque $i = 0, \ldots, l$, la suite $(U_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ pour tout $r_i \in]p/(2i+2), p/2i[\cap]1, +\infty[$ et pour chaque $i = 0, \ldots, k$, la suite $(V_i^{\sigma_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte dans $L^{s_i}(d\mu_p)$ pour tout $s_i \in]p/(2i+1), p/(2i-1)[\cap]1, +\infty[$ alors la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{T}(L^p)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p.

II. Extraction de sous-suites $2(1+\varepsilon)$-symétriques

On se propose de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite normalisée dans L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$, telle que si $1 \leqq p < 2$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2 et si $2 < p < +\infty$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, qui est $2(1+\varepsilon)$-symétrique.*

Si de plus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est 1-inconditionnelle, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut en extraire une sous-suite $(1+\varepsilon)$-symétrique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite normalisée de L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$ vérifiant les hypothèses du théorème 1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un type σ c'est-à-dire: $\forall x \in L^p$, $\sigma(x) = \lim_n \|x + x_n\|$. Si $p > 2$, d'après [4], il n'est pas difficile de voir que, ou bien pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une sous-suite $(1+\varepsilon)$-équivalente à la base canonique de l^p, ou bien la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2. Dans le premier cas, le théorème 1 est évidemment vérifié. On peut donc supposer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2.

Grâce aux propriétés des modèles étalés sur les espaces stables rappelés dans l'introduction, le théorème 1 est alors une conséquence du théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite normalisée dans L^p, $1 \leqq p < +\infty$, $p \neq 2$, équivalente à la base canonique de ℓ^2 et définissant un type σ sur L^p. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $(x_{n_m})_{m\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que: $\forall m \in \mathbf{N}$, $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{R}^m$,*

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right\| - \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma \right\| \right| \leqq \varepsilon \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma \right\|.$$

Pour montrer le théorème 2 on utilise un résultat non publié de J.L. Krivine et B. Maurey.

PROPOSITION 3 (J. L. Krivine, B. Maurey). *Soit X un espace stable, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite normalisée tendant faiblement vers 0 dans X et σ un type défini par $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

Si $K_1(\sigma)$ est compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X, alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la conclusion du théorème 2.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3. Soit $\varepsilon > 0$ doné et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive telle que $\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m$.

On note $\overline{K_1(\sigma)}^u$ l'adhérence de $K_1(\sigma)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X.

On procède par récurrence: supposons construits des éléments $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_m})$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant: $\forall \tau \in \overline{K_1(\sigma)}^u$, $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in [-1, +1]^m$,

$$\left| \left\| \tau * \left(\mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i\sigma \right) \right\| - \tau\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \leqq \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \right) \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i\sigma \right\|.$$

On cherche à construire $x_{n_{m+1}}$, vérifiant cette propriété à l'ordre $m+1$. Pour cela, soit τ appartenant à $\overline{K_1(\sigma)}^u$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1})$ appartenant à $[-1, +1]^{m+1}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\tau * \alpha_{m+1}\sigma$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ si $\|\tau * \alpha_{m+1}\sigma\| \leqq 1$ et à

$$\frac{\tau * \alpha_{m+1}\sigma}{\|\tau * \alpha_{m+1}\sigma\|} \quad \text{et} \left(\frac{\alpha_1}{\|\tau * \alpha_{m+1}\sigma\|}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\|\tau * \alpha_{m+1}\sigma\|} \right) \qquad \text{si } \|\tau * \alpha_{m+1}\sigma\| > 1,$$

on peut écrire: $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left| \left\| \tau * \left(\mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i\sigma \right) \right\| - \tau\left(\alpha_{m+1} x_n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \\
&\leqq \left| \left\| \tau * \left(\mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i\sigma \right) \right\| - (\tau * \alpha_{m+1}\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \\
&\quad + \left| (\tau * \alpha_{m+1}\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) - \tau\left(\alpha_{m+1} x_n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \\
&\leqq \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \right) \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i\sigma \right\| + \left| (\tau * \alpha_{m+1}\sigma)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) - \tau\left(\alpha_{m+1} x_n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right) \right|.
\end{aligned}$$

La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie sur le compact $\overline{K_1(\sigma)}^u \times [-1, +1]^{m+1}$ par:

$$F_n(\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) = \tau\left(\alpha_{m+1} x_n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i} \right)$$

converge simplement vers $(\tau * \alpha_{m+1}\sigma)(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{n_i})$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X est une topologie métrique sur $\mathcal{T}(X)$ donnée par la distance d telle que:

$$d(\tau, \tau') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Sup}\{|\tau(x) - \tau'(x)| / \|x\| \leqq n+1\}.$$

Par l'inégalité triangulaire, il est alors facile de voir que: $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$|F_n(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) - F_n(\tau', \alpha'_1, \dots, \alpha'_{m+1})| \leqq d(\tau, \tau') + \sum_{i=1}^{m+1} |\alpha_i - \alpha'_i|.$$

La famille $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc équicontinue et on peut appliquer le théorème d'Ascoli: $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $\overline{K_1(\sigma)}^u \times [-1, +1]^{m+1}$ vers $(\tau * \alpha_{m+1}\sigma)(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{n_i})$.

Il existe donc un entier n_{m+1} tel que:

$$\forall \tau \in \overline{K_1(\sigma)}^u, \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \in [-1, +1]^{m+1},$$

$$\left| (\tau * \alpha_{m+1}\sigma)\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_{n_i} \right) - \tau\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \leqq \varepsilon_{m+1} \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i \sigma \right\|.$$

Comme

$$\left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} \alpha_i \sigma \right\| \leqq \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i \sigma \right\|,$$

ceci implique alors:

$$\forall \tau \in \overline{K_1(\sigma)}^u, \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \in [-1, +1]^{m+1},$$

$$\left| \left\| \tau * \left(\mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i \sigma \right) \right\| - \tau\left(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_{n_i} \right) \right| \leqq \left(\sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon_i \right) \left\| \mathop{*}_{i=1}^{m+1} \alpha_i \sigma \right\|.$$

Cette propriété est donc vraie à tout ordre et la sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi construite vérifie la proposition 3.

Démonstration du Théorème 2. Grâce à la proposition 3, il suffit de montrer que sous les hypothèses du théorème 2, $K_1(\sigma)$ est relativement compacte dans $\mathcal{T}(L^p)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p.

Soit $(\tau^m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite de $K_1(\sigma)$ telle que

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad \tau^m = \mathop{*}_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)} \sigma.$$

En appliquant un résultat de [6] sur les espaces à base symétrique, au modèle étalé associé à σ, il est facile de voir que $(\tau^m)_{m \in \mathbf{N}}$ a une sous-suite encore notée $(\tau^m)_{m \in \mathbf{N}}$, telle que: $\forall m \in \mathbf{N}$, $\tau^m = \tau'^m * \tau''^m$ avec:

$$\tau'^m = \mathop{*}_{i=1}^{n_m} \alpha_i^{(m)} \sigma \quad \text{et} \quad \tau''^m = \mathop{*}_{i=n_m+1}^{N_m} \alpha_i^{(m)} \sigma$$

et

$$\begin{cases} \lim_{m\to+\infty} \operatorname{Sup}\{|\alpha_i^{(m)}| / n_m+1 \leqq i \leqq N_m\} = 0, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall m \in \mathbf{N}, \left\| \sum_{i=N+1}^{n_m} \alpha_i^{(m)}\sigma \right\| \leqq \varepsilon + 1/m. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que $(\tau^m)_{m\in\mathbf{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p si et seulement si $(\tau''^m)_{m\in\mathbf{N}}$ l'est.

On supposera donc que la suite $(\tau^m)_{m\in\mathbf{N}}$ est telle que:

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbf{N}, \tau^m = \mathop{*}_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)}\sigma, \\ \lim_{m\to+\infty} \operatorname{Sup}\{|\alpha_i^{(m)}| / 1 \leqq i \leqq N_m\} = 0. \end{cases}$$

De plus, comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2 et que $\|\tau^m\| \leqq 1$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, la suite numérique $(\sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)2})_{m\in\mathbf{N}}$ est bornée et quitte à extraire une sous-suite de $(\tau^m)_{m\in\mathbf{N}}$, on peut supposer qu'elle converge vers un réel positif α.

On va utiliser les résultats de la première partie pour montrer qu'une telle suite a une sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p.

Cas des espaces L^p, $p = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \neq 2$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0 dans L^p, $l_1^\sigma = 0$. D'après la proposition 2, on a:

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad l_1^{\tau^m} = \left(\sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)}\right) l_1^\sigma = 0.$$

De la même façon on peut écrire:

$$\forall m \in \mathbf{N}, \qquad l_2^{\tau^m} = \left(\sum_{i=1}^{N_m} (\alpha_i^{(m)})^2\right) l_2^\sigma.$$

On en déduit que $(l_2^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge dans L^k vers αl_2^σ.

De la même façon, en utilisant la proposition 2, on montre que $(l_i^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^{2k/i}$ vers 0 si i est impair et vers $((2j)!/2^j j!)(\alpha l_2^\sigma)^j$ si $i = 2j$, $j \in \mathbf{N}$.

D'après la remarque 2, la suite $(\tau^m)_{m\in\mathbf{N}}$ a donc bien une sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de L^p. On peut remarquer que la limite τ est un l^2-type (i.e. $\lambda\tau * \mu\tau = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\tau$ pour tous réels λ et μ).

Cas des espaces L^p, $2k < p < 2k+2$, $k \in \mathbf{N}$

Si $2k < p < 2k+2$, $k \geqq 1$, quitte à extraire une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on peut supposer que $(x_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement dans $L^{p/2}$ vers l_2^σ.

Si $1 \leqq p < 2$, comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équivalente à la base canonique de l^2, on sait [7] que par changement de densité, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de L^2.

De plus à l'aide de [2] ou [3] p. 132, quitte à passer à une sous-suite, on peut décomposer la suite $(x_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ de L^1 en $x_n^2 = x_n^2\mathbf{1}_{A_n} + x_n^2\mathbf{1}_{A_n^c}$ où: $\Omega = A_n \cup A_n^c$, $\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n) = 0$ et la famille $(x_n^2\mathbf{1}_{A_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans L^2, la suite $(x_n\mathbf{1}_{A_n^c})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 en norme dans L^1. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que la suite $(x_n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ est équi-intégrable donc qu'elle converge faiblement dans L^1 vers l_2^σ.

LEMME 3. *Pour presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$\frac{1}{t^2}\left(U_0^\sigma - \frac{t^2 l_2^\sigma}{2}\right) \quad et \quad \frac{1}{t^2}V_0^\sigma$$

tendent vers 0 *quand t tend vers* 0.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Par définition des fonctions U_0^x et V_0^x, il existe une constante M positive telle que:
$\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} 0 \leqq -\left(U_0^{x_n} - \dfrac{t^2x_n^2}{2}\right) \leqq M(t^2x_n^2 \wedge t^4x_n^4), \\ 0 \leqq | V_0^{x_n} + tx_n | \leqq M| t^2x_n^2 \wedge t^3x_n^3|. \end{cases}$$

Si $\chi_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$ dans $]0,+\infty[$ il est facile de voir que les fonctions $\chi_{[a,b]}U_0^{x_n}$, $\chi_{[a,b]}V_0^{x_n}$, $\frac{1}{2}\chi_{[a,b]}t^2x_n^2$, $\chi_{[a,b]}tx_n$, $\chi_{[a,b]}(t^2x_n^2 \wedge t^4x_n^4)$ et $\chi_{[a,b]}[t^2x_n^2 \wedge t^3x_n^3)$ appartiennent à $L^1(d\mu_p)$ si $1 \leqq p < 2$ et à $L^{p/2}(d\mu_p)$ si $p > 2$. En passant à la limite faible dans ces espaces pour tout $0 < a < b < +\infty$, on voit, grâce aux inégalités ci-dessus qu'il existe des fonctions $\varphi_1(t,\omega)$ et $\varphi_2(t,\omega)$ telles que:

$$\begin{cases} 0 \leqq -\left(U_0^\sigma - t^2\dfrac{l_2^\sigma}{2}\right) \leqq Mt^2\varphi_1(t,\omega), \\ 0 \leqq | V_0^\sigma | \leqq Mt^2\varphi_2(t,\omega), \end{cases}$$

et pour t fixé, $\varphi_1(t,\omega)$ et $\varphi_2(t,\omega)$ appartiennent à $L^1(d\mu_p)$ si $1 < p < 2$ et à $L^{p/2}(d\mu_p)$ si $p > 2$.

De plus, comme ces fonctions sont limites faibles de fonctions croissantes, il est facile de voir que les fonctions $t \to \varphi_1(t,\omega)$ et $t \to \varphi_2(t,\omega)$ sont croissantes pour presque tout $\omega \in \Omega$. Donc pour montrer le lemme 3, il suffit de montrer que $\int_\Omega \varphi_1(t,\omega)dP(\omega)$ et $\int_\Omega \varphi_2(t,\omega)dP(\omega)$ tendent vers 0 quand t tend vers 0. Faisons le raisonnement pour $\varphi_1(t,\omega)$: soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour tout $A > 0$, on peut écrire: $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqq x_n^2 \wedge t^2 x_n^4 \leqq x_n^2 \mathbf{1}_{\{|x_n t| \geqq 1\}} + t^2 A^4 \mathbf{1}_{\{|x_n| \leqq A\}} + x_n^2 \mathbf{1}_{\{A \leqq |x_n|\}}.$$

La suite $(x_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ étant équiintégrable, il existe $A > 0$ tel que: $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\int_\Omega x_n^2 \mathbf{1}_{\{(x_n) \geqq A\}} dP(\omega) \leqq \varepsilon/3.$$

A étant ainsi fixé, il existe $t_0 > 0$ tel que:
$0 < t < t_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$

$$\begin{cases} t^2 A^2 \leqq \varepsilon/3, \\ \displaystyle\int_\Omega x_n^2 \mathbf{1}_{\{|x_n t| \geqq 1\}} dP(\omega) \leqq \varepsilon/3. \end{cases}$$

Donc: $0 < t < t_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqq \int_\Omega (x_n^2 \wedge t^2 x_n^4) dP(\omega) \leqq \varepsilon.$$

Par suite pour $0 < t_1 < t_0$:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{t^{p+1}} \int_\Omega \varphi_1(t_1,\omega)dP(\omega) \leqq \int_{t_1}^{t_0} \int_\Omega \varphi_1(t,\omega) \frac{dt}{t^{p+1}} dP(\omega) \leqq \varepsilon \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{t^{p+1}}$$

ou encore:

$$\int_\Omega \varphi_1(t_1,\omega)dP(\omega) \leqq \varepsilon$$

et ceci prouve le lemme 3.

Notons qu'il existe une démonstration plus simple de ce lemme dans le cas $p > 2$ en utilisant le fait que pour x appartenant à L^p, les fonctions $t^2x^2 \wedge t^4x^4$ et $t^2x^2 \wedge t^3x^3$ appartiennent respectivement à $L^{r_1}(d\mu_p)$ pour $r_1 \in]p/4, p/2[\cap]1, +\infty]$ et $L^{s_1'}(d\mu_p)$ pour $s_1' \in]p/3, p/2[\cap]1, +\infty[$ et donc que les fonctions $t^2\varphi_1(t,\omega)$ et $t^2\varphi_2(t,\omega)$ appartiennent à ces mêmes espaces. Comme par ailleurs, $t \to \varphi_1(t,\omega)$ et $t \to \varphi_2(t,\omega)$ sont des fonctions croissantes, pour des raisons d'intégrabilité en 0 pour la mesure dt/t^{p+1}, ces fonctions tendent vers 0 quand t tend vers 0.

Pour t et ω fixés, on peut donc écrire:

$$\begin{cases} U_0^\sigma(t,\omega) = 1 - \exp\left(-t^2\frac{l_2^\sigma}{2} + t^2\varepsilon_1(t,\omega)\right), \\ V_0^\sigma(t,\omega) = t^2\varepsilon_2(t,\omega), \end{cases}$$

avec

$$\lim_{t\to 0}\varepsilon_1(t,\omega) = \lim_{t\to 0}\varepsilon_2(t,\omega) = 0 \quad \omega\text{-pp}.$$

En utilisant la proposition 2 et le fait que $|1 - U_0^\tau| \leqq 1$ pour tout type τ sur L^p, il est facile de voir que pour tous t et ω fixés et pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} \left|1 - U_0^{\tau^m} - \prod_{i=1}^{N_m}(1 - U_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma})\right| \leqq \sum_{n=1}^{E[N_m/2]}\left(\sum_{i\neq j}|V_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma}V_0^{\alpha_j^{(m)}\sigma}|\right)^n, \\ |V_0^{\tau^m}| \leqq \sum_{i=1}^{N_m}|V_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma}| \cdot \sum_{n=1}^{E[N_m/2]}\left(\sum_{i\neq j}|V_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma}V_0^{\alpha_j^{(m)}\sigma}|\right)^n. \end{cases}$$

Or, avec les notations précédentes, on a:

$$\begin{cases} \sum_{1\leqq i,j\leqq N_m}|V_0^{\alpha_i^{(m)}}V_0^{\alpha_j^{(m)}}| = \sum_{1\leqq i,j\leqq N_m}\alpha_i^{(m)2}\alpha_j^{(m)2}t^4|\varepsilon_2(\alpha_i^{(m)}t,\omega)\varepsilon_2(\alpha_j^{(m)}t,\omega)| \\ \qquad \leqq t^4\left(\sum_{i=1}^{N_m}\alpha_i^{(m)2}\right)^2\operatorname{Sup}\{|\varepsilon_2(\alpha_i^{(m)}t,\omega)|^2 \mid 1 \leqq i \leqq N_m\}, \\ \sum_{i=1}^{N_m}|V_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma}| \leqq t^2\left(\sum_{i=1}^{N_m}\alpha_i^{(m)2}\right)\operatorname{Sup}\{|\varepsilon_2(\alpha_i^{(m)}t,\omega)| \mid 1 \leqq i \leqq N_m\}, \\ \prod_{i=1}^{N_m}(1 - U_0^{\alpha_i^{(m)}\sigma}) = \exp\left\{-t^2\left(\sum\alpha_i^{(m)2}\right)[l_2^\sigma/2 + \operatorname{Sup}\{|\varepsilon_1(\alpha_i^{(m)}t,\omega)| \mid 1 \leqq i \leqq N_m\}]\right\}. \end{cases}$$

Comme $(\sum_{i=1}^{N_m}\alpha_i^{(m)2})_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers α et $\operatorname{Sup}\{|\alpha_i^{(m)}| \mid 1 \leqq i \leqq N_m\}$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, ces inégalités prouvent que pour presque tout ω et t, $(U_0^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers $1 - \exp(-t^2\alpha(l_2^\sigma/2))$ et $(V_0^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Désignons par L_r un majorant de la suite $|\sum_{i=1}^{N_m}\alpha_i^{(m)r}|_{m\in\mathbf{N}}$ pour $r \geqq 2$ et remarquons qu'il existe une constante M' positive telle que:
$\forall n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} 0 \leqq U_0^{x_n} \leqq M'(1 \wedge t^2x_n^2), \\ 0 \leqq |V_0^{x_n}| \leqq M'|1 \wedge tx_n|, \\ 0 \leqq |V_1^{x_n}| \leqq M'|tx_n \wedge t^3x_n^3|. \end{cases}$$

En passant à la limite faible, et comme $V_0^\sigma = V_1^\sigma$ puisque par hypothèse $l_1^\sigma = 0$, on obtient aisément:
$\forall m \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} 0 \leqq U_0^{\tau^m} \leqq M'\left(1 \wedge \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)^2} t^2 l_2^\sigma\right) \leqq M' L_2(1 \wedge t^2 l_2^\sigma), \\ |V_0^{\tau^m}| = |V_1^{\tau^m}| \leqq M'\left|1 \wedge \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)^3} t^3 l_3^\sigma\right| \leqq M' L_3 |1 \wedge t^3 l_3^\sigma|. \end{cases}$$

Les fonctions $1 \wedge t^2 l_2^\sigma$ et $1 \wedge t^3 l_3^\sigma$ appartiennent à $L^{r_0}(d\mu_p)$ et $L^{s_0}(d\mu_p) \cup L^{s_1}(d\mu_p)$ respectivement. Par le théorème de convergence dominée, on déduit de ces majorations que les suites $(U_0^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$, $(V_0^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ et $(V_1^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ convergent dans $L^{r_0}(d\mu_p)$, $L^{s_0}(d\mu_p)$ et $L^{s_1}(d\mu_p)$ respectivement.

Ceci conclut le théorème 2 dans les cas $1 \leqq p < 2$ et $2 < p < 4$.

Si $4 < p < 6$, en utilisant la proposition 2, on peut écrire:
$\forall m \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} U_1^{\tau^m} = U_0^{\tau^m} + \left(\sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)^2}\right) \dfrac{t^2 l_2^\sigma}{2}, \\ V_2^{\tau^m} = V_1^{\tau^m} + \left(\sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i^{(m)^3}\right) \dfrac{t^3 l_3^\sigma}{6}. \end{cases}$$

Donc $(U_1^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ et $(V_2^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ convergent presque partout vers $1 - \exp(-\alpha t^2 l_2^\sigma/2) + t^2 \alpha l_2^\sigma/2$ et 0 respectivement.

Comme précédemment, on montre qu'il existe une constante M'' positive telle que: $\forall m \in \mathbf{N}$,

$$\begin{cases} |U_1^{\tau^m}| \leqq M'' L_2 L_4 (t^2 l_2^\sigma \wedge t^4 l_4^\sigma) \leqq M'' L_2 L_4 (t^2 [l_4^\sigma]^{1/2} \wedge t^4 l_4^\sigma), \\ |V_2^{\tau^m}| \leqq M'' L_3 L_5 |t^3 l_3^\sigma \wedge t^5 l_5^\sigma| \leqq M'' L_3 L_5 |t^3 [l_5^\sigma]^{3/5} \wedge t^5 l_5^\sigma|. \end{cases}$$

Des fonctions $t^2[l_4^\sigma]^{1/2} \wedge t^4 l_4^\sigma$ et $t^3[l_5^\sigma]^{3/5} \wedge t^5 l_5^\sigma$ appartiennent à $L^{r_1}(d\mu_p)$ et $L^{s_2}(d\mu_p)$ respectivement et le théorème de convergence dominée s'applique: les suites $(U_1^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ et $(V_2^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ convergent dans $L^{r_1}(d\mu_p)$ et $L^{s_2}(d\mu_p)$. Pour $p > 6$, on procède de la même façon pour montrer que $(U_i^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^{r_i}(d\mu_p)$ vers

$$1 - \exp\left(\frac{-t^2 \alpha l_2^\sigma}{2}\right) + \sum_{j=1}^{i} \frac{(-t^2 \alpha l_2^\sigma)^j}{j!} \qquad \text{pour } i = 0, \ldots, k-1$$

et $(V_i^{\tau^m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge dans $L^{s_i}(d\mu_p)$ vers 0 pour $i = 0, \ldots, k$. Ceci conclut le théorème 2 et on peut remarquer comme dans le cas des L^p, $p \in 2\mathbf{N}$, que la limite de $(\tau^m)_{m\in\mathbf{N}}$ est un l^2-type.

RÉFÉRENCES

1. A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory **7** (1973).

2. A. Dacunha-Castelle and M. Schreiler, *Techniques probabilistiques pour l'étude de problèmes d'isomorphismes entre espaces de Banach*, Ann. Inst. Henri Poincaré **10** (1974), 229–277.

3. W. B. Johnson, B. Maurey, G. Shechtmann and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. **19** (1979), n° 217.

4. M. I. Kadec and A. Pelczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math. **21** (1962).

5. J. L. Krivine and B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Isr. J. Math. **39** (1981), 273–295.

6. Y. Raynaud, *Stabilité des espaces d'opérateurs C_E*, Exposé au Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Paris VII, 1982–83.

7. H. P. Rosenthal, *On subspaces of L^p*, Ann. of Math. **97** (1973), 344–373.