EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES STOCHASTIQUES NON LINEAIRES (1)

PAR

A. BENSOUSSAN ET R. TEMAM

ABSTRACT

Le but de cet article est d'étudier les équations d'évolution non linéaires monotones à entrées stochastiques du type suivant:

$$\frac{dy}{dt}(t;\ ) + A(t)y(;\ ) = g(t;\ ) + \frac{df}{dt}(t;\ )$$

où A(t) est une famille d'opérateurs monotones d'un espace de Banach V dans son dual V'. Il s'agit d'une généralisation à des équations aux dérivées partielles des travaux de Ito sur les équations différentielles stochastiques.

Introduction

Le but de cet article est d'étudier les équations d'évolution non linéaires monotones à entrées stochastiques du type suivant

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t;\omega) + A(t)y(t;\omega) = g(t;\omega) + \dfrac{df}{dt}(t;\omega) \\ y(0;\omega) = y_0(\omega) \end{cases}$$

où $A(t)$ est une famille d'opérateurs monotones d'un espace de Banach V dans son dual V'. En l'absence du terme en df/dt, ω joue simplement le rôle d'un paramètre et en changeant le cadre fonctionnel, on peut appliquer à l'équation (i) les théorème généraux d'existence et d'unicité sur les équations déterministes monotones (cf. J. L. Lions [4]). Par contre en présence du terme en df/dt (f étant seulement continue en temps), on rencontre une situation analogue à celle des équations différentielles stochastiques de Ito [3]. On ne peut plus se ramener à un cadre strictement déterministe. On donne alors un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation (i) et on démontre un théorème de l'énergie. Le résultat essentiel est le Théorème 4.1.

Received August 4, 1971

1. Hypothèses–Notations

1.1. Le cadre déterministe

Soit V un espace de Banach réel, réflexif et séparable et H un espace de Hilbert réel, avec $V \subset H$, l'injection étant continue et V étant dense dans H. On identifie H et son dual; alors si V' désigne le dual de V, on a

$$V \subset H \subset V', \tag{1.1}$$

chaque espace étant dans le suivant, les injections étant continues. On note $\| \cdot \|$ (ou $\| \cdot \|_V$), $| \cdot |_H$ (ou $| \cdot |_H$) les normes dans V et H respectivement, $(\cdot , \cdot)$ le produit scalaire dans H, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la dualité entre V, V'. Soit $T > 0$ fixé. Si X est une espace de Banach, on note $L^p(0, T; X)$ ou $L^p(X)$ lorsqu'aucune confusion n'est *à* craindre, l'espace des (classes de) fonctions de $[0,T] \to X$, mesurable et de puissance *p*ieme sommable. Cet espace est de Banach pour la norme

$$\| g \|_{L^p(X)} = \left\{ \int_0^T \| g(t) \|_X^p \, dt \right\}^{1/p} \qquad (1 \leqq p < \infty)$$

$$\| g \|_{L^\infty(X)} = \sup_t \text{ess} \, \| g(t) \| \qquad (p = \infty)$$

On note encore $\mathscr{C}([0, T]; X)$ [ou $\mathscr{C}(X)$], l'espace des fonctions continues de $[0,T] \to X$, qui est de Banach pour la norme uniforme

$$\| g \|_{\mathscr{C}(X)} = \sup_{0 \leqq t \leqq T} \| g(t) \|_X$$

On considérera, en particulier, ci-après, les espaces $L^p(V)$, $\mathscr{C}(H)$, $L^{p'}(V')$, avec $1/p + 1/p' = 1$.

EQUATION D'ÉVOLUTION. On se donne pour presque tout $t \in]0,T[$, un opérateur $A(t)$ de $V \to V'$, vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) \text{ est hémicontinu de } V \to V' \text{ (i.e. faiblement continu sur les} \\ \text{droites affines de } V \text{, soit} \\ \lambda \to \langle A(t)(y + \lambda z), w \rangle \text{ est continue de } R \text{ dans } R,\ \forall y, z. w \in V) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

$$\| A(t)y \|_{V'} \leqq \beta \| y \|_V^{p-1}, \qquad \forall y \in V, \text{ p.p.t} \tag{1.3}$$

$$\langle A(t)y, y \rangle \geqq \alpha \| y \|_V^p, \qquad \forall y \in V, \text{ p.p.t} \tag{1.4}$$

avec α, $\beta > 0$, $p \geqq 2$ (coercivité).

$$\langle A(t)y - A(t)z, y - z \rangle \geqq 0 \quad \forall y, z \in V, \text{ p.p.t (monotonie)} \tag{1.5}$$

(1.6) Si $y \in L^p(V)$, alors $\{t \to A(t)y(t)\} \in L^p(V')$.

On a alors le:

THÉORÈME 1.1. *Sous les hypothèses* (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), *pour* g *donné dans* $L^p(0,T;V')+L^1(0,T;H)$ *et* y_0 *donné dans* H, *il existe une fonction* y *unique vérifiant.*

(1.7) $y \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

$$(1.8)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + A(t)y = g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

REMARQUE 1.1. On renvoie pour la démonstration du théorème 1.1 à. J. L. Lions [4].

REMARQUE 1.2. D'après (1.7) et (1.8), $dy/dt \in L^{p'}(0,T;V')+L^1(0,T;H)$. Ceci et (1.7) impliquent que y est p.p. égale à une fonction de (H).

REMARQUE 1.3. On a le résultat suivant (cf. J. L. Lions [4]).

Si $z \in L^p(V) \cap L^\infty(H)$ avec $dz/dt \in L^{p'}(V')+L^1(H)$, alors

$$(1.9)\qquad \frac{d}{dt}|z(t)|_H^2 = 2\langle z(t), \frac{dz}{dt}\rangle \text{ p.p. } t \in [0,T]$$

et on en déduit aisément l'égalité de l'energie suivante vérifiée par $y(t)$ (en prenant $z = y$ et intégrant entre 0 et t):

$$(1.10)\quad |y(t)|_H^2 + 2\int_0^t \langle A(s)y(s), y(s)\rangle\, ds = |y_0|_H^2 + 2\int_0^t \langle g(s), y(s)\rangle ds$$

ORIENTATION. Notre but est d'étudier l'équation stochastique analogue à (1.8) l'analogie étant du type équation différentielles de Ito [3])

1.2. Le cadre stochastiqe

Soit (ω,μ) un espace de probabilité, ω, espace topologique complètement régulier muni de sa tribu borélienne $\mathscr{T}$ et μ une probabilité de Radon (i.e., mesure abstraite sur $\mathscr{T}$ intérieurement régulière), cf. P. A. Meyer [5], L. Schwartz [7] On introduit les espaces

$$(1.8)_2\qquad \mathscr{H} = L^2(\omega,\mu;H)$$

$$(1.9)_2\qquad \mathscr{V} = L^p(\omega,\mu;V)$$

L'espace $\mathscr{H}$ est de Hilbert pour le produit scalaire

$$(1.10)_2\qquad (y,z)_{\mathscr{H}} = E(y(\cdot),z(\cdot)) = \int_\omega (y(\omega),z(\omega))d\mu(\omega).$$

L'espace $\mathscr{V}$ est de Banach pour la norme

$$\| y \|_{\mathscr{V}} = \left\{ \int_{\boldsymbol{\omega}} \| y(\omega) \|_V^p d\mu(\omega) \right\}^{1/p} . \tag{1.11}$$

Il résulte de (1.1) et de ce que $p \geqq 2$, que

$$\mathscr{V} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{V}', \tag{1.12}$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant. On note

$$\langle y, z \rangle_{\mathscr{V}, \mathscr{V}'} = E \langle y(\cdot), z(\cdot) \rangle = \int_{\boldsymbol{\omega}} \langle y(\omega), z(\omega) \rangle \, d\mu(\omega) \tag{1.13}$$

la dualité entre $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$.

On sera amené á considérer les espaces

$$L^2(\mathscr{H}), \; L^p(\mathscr{V}), \; L^{p'}(\mathscr{V}') \tag{1.14}$$

Remarque 1.4. Les espaces (1.14) sont respectivement isomorphes (en tant qu'espaces normés) aux espaces

$$L^2(\boldsymbol{\omega} \times \,]0, T[, \; d\mu \otimes dt; H)$$

$$L^p(\boldsymbol{\omega} \times \,]0, T[, \; d\mu \otimes dt; V)$$

$$L^{p'}(\boldsymbol{\omega} \times \,]0, T[, \; d\mu \otimes dt; V')$$

Indépendence de Variables Aléatoires. Nous aurons besoin dans la suite de la notion d'indépendence de deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces topologiques $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Soient $\xi_1(\omega)$ et $\xi_2(\omega)$ deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$; on note $\xi_1(\mu)$ et $\xi_2(\mu)$ les lois de probabilité sur $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ définies comme mages de μ par les V.A. ξ_1, ξ_2, et on note $\xi_1 \otimes \xi_2$ l'application de $\boldsymbol{\omega} \to \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ définie par

$$\omega \xrightarrow{\xi_1 \otimes \xi_2} \{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)\}^*.$$

Soit $\xi_1 \otimes \xi_2(\mu)$ la loi de probabilité sur $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$ définie comme image de μ par $\xi_1 \otimes \xi_2$, on adopte avec Meyer [5] et Schwartz [7] la définition:

Définition 1.1. *Les variables aléatoire ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes si*

$$\xi_1 \otimes \xi_2(\mu) = \xi_1(\mu) \otimes \xi_2(\mu)$$

où $\xi_1(\mu) \otimes \xi_2(\mu)$ désigne le produit tensoriel des lois de probabilité $\xi_1(\mu), \xi_2(\mu)$ ∎

---

* Bien entendu, $\xi_1 \otimes \xi_2$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2$.

On démontre le théorème très utile suivant (cf. L. Schwartz [7]).

THÉORÈME 1.2. *Dans le cas où $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont des espaces topologiques complètement réguliers, la condition nécéssaire et suffisante pour que ξ_1 et ξ_2, soient indépendantes est que l'on ait*

$$E\phi(\xi_1)\psi(\xi_2) = E\phi(\xi_1)E\psi(\xi_2)$$

$\forall \phi \in \mathscr{B}(\mathscr{E}_1)$, $\psi \in \mathscr{B}(\mathscr{E}_2)$ où $\mathscr{B}(\mathscr{E}_1)$ (respectivement $\mathscr{B}(\mathscr{E}_2)$) *désigne l'espace des fonctions réelles continues et bornées sur $\mathscr{E}_1$ (respectivement $\mathscr{E}_2$)* ∎

REMARQUE 1.5. Il est important de noter que si $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie la notion d'indépendance de V.A à valeurs dans les $\mathscr{E}_i$ dépend fortement des topologies dont on munit les $\mathscr{E}_i$ (faibles compactes, fortes ...).

PROCESSUS f. On considérera par la suite des processus $f \equiv f(t;\omega)$ du type suivant:

$$f \in C([0,T];\ L^p(\omega,\mu;H)) \tag{1.15$_1$}$$

$$\begin{cases} \forall t_1, t_2 \text{ avec } 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T, f(t_2)-f(t_1) \text{ est une variable aléatoire} \\ \text{à valeurs dans } H \text{ indépendante de la variable aléatoire} \{f(t_{j_1}),\cdots,f(t_{j_q})\} \\ \text{à valeurs dans } H^q, \text{ pour tout } q \text{ et} \end{cases} \tag{1.15$_2$}$$

$$t_{j_1},\cdots,t_{j_q} \leqq t_1.$$

Donnons tout de suite un exemple important de processus f, à savoir le processus de Wiener hilbertien.

PROCESSUS DE WIENER HILBERTIEN. Soit $f(t)$ un processus de Wiener à valeurs dans H, c'est-à-dire une application de $[0,T] \to$ Mes $[\omega,\mu;H]$* vérifiant

(1.16) $\{\ \forall t,\ \forall \phi \in H,\ (f(t),\phi)$ est une variable aléatoire réelle centrée de Gauss

et

$$E(f(t),\phi)(f(s),\psi) = \int_0^{\min(t,s)} (Q(\tau)\phi,\psi)d\tau,\ \forall t,s,\ \forall\phi,\psi \in H \tag{1.17}$$

où $Q(\cdot) \in L^\infty; \mathscr{L}(H,H))$ et

(1.18) p.p.t $Q(t)$ est auto adjoint positif et nucléaire

* Espace des variables aléatoires à valeurs dans H.

$$t \to \operatorname{tr} Q(t) \in L^1(0,T). \tag{1.19}$$

On peut, quitte à remplacer f par un processus équivalent, supposer que $f(t)$ est p.s. un processus continu à valeurs dans H (cf. A. Bensoussan [1]).
On vérifie sans difficulté à partir de (1.15), ..., (1.18) que

$$\left\{\begin{array}{l}\forall t,\tau,\ 0 \leqq t \leqq \tau,\ \forall\phi \text{ et } \psi \in H,\ (f(t),\phi) \text{ et } (f(t)-f(\tau),\psi) \text{ sont des} \\ \text{variables aléatoires indépendantes.}\end{array}\right. \tag{1.20}$$

$$E|f(t)|^2 = \int_0^t \operatorname{tr} Q(\tau)d\tau \tag{1.21}$$

(et donc $f(0) = 0$).

On a alors la

PROPOSITION 1.1. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$f(t) \in C([0,T];\ L^p(\omega,\mu;H)) \tag{1.22}$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que

$$\forall t,\ f(t) \in L^p(\omega,\mu;H). \tag{1.23}$$

On considère, toujours pour t fixé l'opérateur $\int_0^t Q(s)ds$ qui est un opérateur $\in \mathscr{L}(H;H)$ auto adjoint, positif et nucléaire, et donc possède un système de vecteurs propres $e(t)$, $i = 1,\cdots,\infty$, qui forme une base orthonormée de H. Par conséquent $f(t)$ peut se décomposer suivant la base $e_i(t)$, soit

$$f(t) = \sum_i \lambda_i(t)e_i(t) \tag{1.24}$$

et aussi, puisque les $e_i(t)$ sont orthonormés

$$|f(t)|^2 = \sum_i (\lambda_i(t))^2. \tag{1.25}$$

Notons que les $\lambda_i(t)$ sont des variables aléatoires réelles, données par la formule

$$\lambda_i(t) = (f(t),e_i(t)) \tag{1.26}$$

et donc

$$E\lambda_i(t)\lambda_j(t) = E(f(t),e_i(t))\,(f(t),e_j(t)) = \int_0^t (Q(s)e_i(t),e_j(t)) = \mu_i(t)\delta_{ij} \tag{1.27}$$

où $\mu_i(t)$ est la valeur propre de $\int_0^t Q(s)ds$, associée à $e_i(t)$. Soit $2q$ un nombre entier pair quelconque. On a

$$(1.28)\qquad |f(t)|^{2q} = (|f(t)|^2)^q = \left(\sum_i (\lambda_i(t))^2\right)^q = \sum_{i_1\cdots i_q} (\lambda_{i_1}(t))^2 \cdots (\lambda_{i_n}(t))^2$$

où $i_1, \cdots, i_q$ sont des entiers quelconques.

On a donc, par intégration en ω des fonctions positives (1.28),

$$(1.29)\qquad E\,|f(t)|^{2q} = \sum_{i_1\cdots i_q} E(\lambda_{i_1}(t))^2 \cdots (\lambda_{i_q}(t))^2$$

les intégrales (1.29) pouvant être infinies. D'après (1.27) les $\lambda_i(t)$ sont des variables aléatoires Gaussiennes non correlées et donc indépendantes. Par conséquent, on a

$$(1.30)\qquad E(\lambda_{i_1}(t))^2 \cdots (\lambda_{i_q}(t))^2 = E\,\lambda_{i_{r_1}}^{2r_1}(t) E\,\lambda_{i_{r_2}}^{2r_2}(t) \cdots E\,\lambda_{r_{i_q}}^{2r_q}(t)$$

où $i_{r_1} \neq i_{r_2} \neq \cdots \neq i_{r_q}$ sont les indices appartenant à $i_1, \cdots, i_q$ ayant des valeurs distinctes, et

$$(1.31)\qquad r_1 + \cdots + r_q = q\,.$$

On remarque alors que, puisque, les $\lambda_{r_i}(t)$ sont Gaussiennes,

$$(1.32)\qquad E\,\lambda_{i_{r_h}}^{2r_h}(t) = \frac{(2r_h)!}{r_h!}\,\frac{1}{2^{r_h}}(E\,\lambda_{i_{r_h}}^2(t))^{r_h}$$

et donc

$$(1.33)\qquad E\,\lambda_{i_{r_1}}^{2r_1}(t) \cdots E\,\lambda_{i_{r_q}}^{2r_q}(t) = \prod_{h=1}^{q} \frac{(2r_h)!}{r_h!}\,\frac{1}{2^{r_h}}\,(E\,\lambda_{i_{r_h}}^2(t))^{r_h}$$

$$\leqq \left(\frac{(2q)!}{q!}\right)^q (E\,\lambda_{i_{r_1}}^2(t))^{i_1} \cdots \left(E\,\lambda_{i_{r_q}}^2(t)\right)^{r_q}.$$

Mais le second membre de l'inégalité ci-dessus n'est autre que

$$\left(\frac{(2q)!}{q!}\right)^q E\lambda_{i_1}^2(t) \cdots E\lambda_{i_n}^2(t).$$

On obtient ainsi, en revenant à (1.28)

$$(1.34)\quad E\,|f(t)|^{2q} \leqq \left(\frac{(2q)!}{q!}\right)^q \sum_{i_1\cdots i_n} E\lambda_{i_1}^2(t) \cdots E\,\lambda_{i_q}^2(t) = \left(\frac{(2q)!}{q!}\right)^q \left(\sum_i E\lambda_i^2(t)\right)^q,$$

et donc

$$(1.35)\qquad E\,|f(t)|^{2q} \leqq \text{Cte} \times (E\,|f(t)|^2)^q.$$

Mais le second membre de l'inégalité (1.35) est fini et donc

$$f(t) \in L^{2q}(\omega, \mu; H) \ \forall q \text{ entier positif.}$$

On peut donc trouver q tel que $2q \leqq p \leqq 2q+2$. Mais alors

$$(1.36) \qquad E|f(t)|^p = \int_{\{\omega, |f(t)| \geqq 1\}} |f(t)|^p d\mu(\omega) + \int_{\{\omega, |f(t)|<1\}} |f(t)|^p d\mu(\omega)$$

$$\leqq \int_{\{\omega, |f(t)| \geqq 1\}} |f(t)|^{2q+2} d\mu(\omega) + \int_{\{\omega, |f(t)|<1\}} |f(t)|^{2q} d\mu(\omega)$$

$$\leqq E|f(t)|^{2q+2} + E|f(t)|^{2q}$$

et comme le second membre de l'inégalité ci-dessus est fini, il en résulte que $f(t) \in L^p(\omega, \mu; H)$.

Montrons maintenant que $t \to f(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $L^p(\omega, \mu; H)$. Pour $t = 0$, ceci résulte de

$$(1.40) \qquad E|f(t) - f(0)|^p = E|f(t)|^p$$

et d'après (1.35) et (1.21), on voit aussitôt que

$$(1.41) \qquad E|f(t)|^p \leqq \mathrm{Cte} \left(\int_0^t \operatorname{tr} Q(s) ds \right)^p \xrightarrow[t \to 0]{} 0.$$

Soit maintenant t_0 non nul, on peut faire le même raisonnement qui ci-dessus, avec l'opérateur $\int_{min(t,t_0)}^{max(t,t_0)} Q(s) ds$ remplaçant $\int_0^t Q(s) ds$, et $f(t) - f(t_0)$ remplaçant (t). On en déduit, comme pour (1.36), l'inégalité

$$(1.42) \qquad E|f(t) - f(t_0)|^{2q} \leqq \mathrm{Cte}(E|f(t) - f(t_0)|^2)^q$$

$$= \mathrm{Cte} \left(\int_{min(t,t_0)}^{max(t,t_0)} \operatorname{tr} Q(s) ds \right)^q$$

et donc aussi

$$(1.43) \quad E|f(t) - f(t_0)|^p \leqq \mathrm{Cte} \left\{ \left(\int_{min(t,t_0)}^{max(t,t_0)} \operatorname{tr} Q(s) ds \right)^{2q} + \left(\int_{min(t,t_0)}^{max(t,t_0)} \operatorname{tr} Q(s) ds \right)^{2q+2} \right\}$$

où $\qquad 2q \leqq p \leqq 2q + 2.$

Il résulte alors de (1.43) que

$$(1.44) \qquad E|f(t) - f(t_0)|^p \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$$

ce qui prouve bien (1.22). ■

Il résulte bien alors de la Proposition 1.1, de (1.20) et du fait que les variables aléatoires $(f(t), \phi)$ sont Gaussiennes $\forall \phi$ que le processus de Wiener Hilbertien f à valeurs dans H vérifie (1.15).

APPROXIMATION DE f. Il sera commode, par la suite de disposer d'une approximation de f vérifiant (1.15), par des processus à valeurs dans V: Si $\{e_i\}_{i \geq 1}$ désigne une base orthonormée de H formée d'éléments de V^*, on pose

$$f_N(t) = \sum_{i=1}^{N} (f(t), e_i) e_i \tag{1.45}$$

et on a alors

PROPOSITION 1.2. *Pour tout entier N, f_N est un processus stochastique vérifiant la propriété* (1.15). De plus on a

$$f_N \in C([0, T]; L^p(\omega, \mu; V)) \tag{1.46}$$

$$\forall t \, f_N(t) \to f(t) \quad \text{dans} \quad L^2(\omega, \mu; H). \tag{1.47}$$

DÉMONSTRATION. Comme $f(t) \in C([0, T]; L^p(\omega, \mu; H))$, on a aussitôt $\forall i$ $f((t), e_i) \in C([0, T]; L^p(\omega, \mu; R))$ et donc (1.46), ce qui implique aussi $f_N \in C([0, T]; L^p(\omega, \mu; H))$.

D'autre part, $f_N(t_2) - f_N(t_1) = \sum_{i=1}^{N} (f(t_2) - f(t_1), e_i) e_i$ s'obtient à partir de $f(t_2) - f(t_1)$ par une application visiblement continue de $H \to H$. De même $\{f_N(t_1), \cdots, f_N(t_q)\}$ s'obtient à partir de $\{f(t_{j1}), \cdots, f(t_{jq})\}$ par une application continue de $H^q \to H^q$. De l'indépendance des V.A. $f(t_2) - f(t_1)$ dans H et $\{f(t_{ji}), \cdots, f(t_{jq})\}$ dans H^q résulte aussitôt celle de $f_N(t_2) - f_N(t_1)$ et $\{f_N(t_{j1}), \cdots, f_N(t_{jq})\}$. Enfin (1.47) est évident puisque les e_i forment une base de H ∎

REMARQUE 1.6. Dans le cas où f est un processus de Wiener Hilbertien, on montre aisément (cf. Bensoussan [1]) que f_N est également un processus de Wiener Hilbertien dans H, auquel correspond un opérateur $Q_N(s) \in \mathscr{L}(H; H)$ défini par

$$Q_N(s)\phi = \sum_{i,j=1}^{N} (Q(s)e_i, e_j)(e_i, \phi) e_j. \tag{1.48}$$

La propriété (1.47) se complète alors par

$$f_N \to f \quad \text{dans} \quad C([0, T]; L^2(\omega, \mu; H)) \text{ lorsque } N \to +\infty. \tag{1.49}$$

---

* Une telle base existe: Comme V est dense dans H, il exist une famille libre et totale (et nécéssairement dénombrable) formée d'éléments de V. Le procedé d'orthogonalisation de Schmidt nous permet d'en déduire une base orthonormée.

2. Premiers Types D'Equations Stochastiques

2.1 Transposition du cas déterministe

Pour $y \in \mathscr{V}$, $\omega \to A(t)y(\omega)$ est (pour presque tout t) une application de $\boldsymbol{\omega} \to V'$. On démontre que $A(t)$ est une application continue de V fort dans V' faible (cf. [4]) et alors $\{\omega \to A(t)y(\omega)\}$ est faiblement mesurable à valeurs dans V' et donc mesurable, puisque V' est séparable. Grâce à (1.3) on vérifie aisément que $\{\omega \to A(t)y(\omega)\} \in L^{p'}(\boldsymbol{\omega}, \mu; V') = \mathscr{V}'$. On note $\mathscr{A}(t)$ l'opérateur ainsi défini de $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$:

$$y \to \{\omega \to A(t)y(\omega)\}.$$

On fait sur $A(t)$ l'hypothèse supplémentaire suivante:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \text{si } t \to y(t) \text{ est une application mesurable à valeurs dans } \mathscr{V}, \text{ alors,} \\ t \to A(t)y(t) \text{ est mesurable à valeurs dans } \mathscr{V}'.^* \end{cases}$$

On a alors le

LEMMA 2.1. *Les opérateurs $\mathscr{A}(t); \mathscr{V} \to \mathscr{V}', t \in]0, T[$ satisfont à des propriétés analogues à celles de $A(t)$:*

$$\text{(2.2)} \qquad \mathscr{A}(t) \textit{ est hémicontinu pour presque tout } t$$

$$\text{(2.3)} \qquad \langle \mathscr{A}(t)y - \mathscr{A}(t)z, y - z\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} \geqq 0 \qquad \forall y, z \in \mathscr{V}, \text{p.p. } t$$

$$\text{(2.4)} \qquad \langle \mathscr{A}(t)y, y\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} \geqq \alpha \| y \|_{\mathscr{V}}^p \qquad \forall y \in \mathscr{V}, \text{ p.p. } t$$

$$\text{(2.5)} \qquad \| \mathscr{A}(y)t \|_{\mathscr{V}'} \leqq \beta \| y \|_{\mathscr{V}}^{p-1} \qquad \forall y \in \mathscr{V}, \text{ p.p. } t$$

$$\text{(2.6)} \qquad \text{Si } y \in L^p(\mathscr{V}), \text{ alors } \{t \to \mathscr{A}(t)y(t)\} \in L^{p'}(\mathscr{V}')$$

DÉMONSTRATION. Soient $y, z \in \mathscr{V}$ et $\phi \in \mathscr{V}'$; on a, si $\lambda \in R$

$$\text{(2.7)} \quad \langle \mathscr{A}(t)(y + \lambda z), \phi\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} = \int_{\boldsymbol{\omega}} \langle A(t)(y(\omega) + \lambda z(\omega)), \phi(\omega)\rangle \, d\mu(\omega).$$

D'après (1.2), lorsque $\lambda \to 0$

$$\langle A(t)(y(\omega) + \lambda z(\omega)), \phi(\omega)\rangle \to \langle A(t)\, y(\omega), \phi(\omega)\rangle, \text{ p.s.}$$

D'après (1.3), on voit que p.s.

$$\begin{aligned} \text{(1.8)} \quad & \langle A(t)(y(\omega) + \lambda z(\omega)), \phi(\omega)\rangle \,|\, < \| A(t)(y(\omega) + \lambda z(\omega)) \|_V \, \| \phi(\omega) \|_V \\ & \leqq \beta \| y(\omega) + \lambda\, z(\omega) \|_{V'}^{p-1} \| \phi(\omega) \|_V \leqq \beta(\| y(\omega) \|_{V'} + \| z(\omega) \|_{V'})^{p-1} \| \phi(\omega) \|_V \end{aligned}$$

---

* Comme $\mathscr{V}'$ est séparable, il suffit que $t \to A(t)\, y(t)$ soit faiblement mesurable à valeurs dans $\mathscr{V}'$.

(en se limitant, ce qui suffit, à $|\lambda| \leqq 1$).

D'après le théorème de Lebesgue, il en résulte que

$$\int_\omega \langle A(t)(y(\omega) + \lambda z(\omega)), \phi(\omega)\rangle \, d\mu(\omega) \to \int_\omega \langle A(t)y(\omega), \phi(\omega)\rangle \, d\mu(\omega) \tag{2.9}$$

ce qui implique (2.2).

Pour démontrer (2.3), on écrit grâce à (1.5)

$$\langle A(t)y(\omega) - A(t)z(\omega), y(\omega) - z(\omega)\rangle \geqq 0 \quad \text{p.p. } t, \text{ p.s. } \omega \tag{2.10}$$

et par intégration en ω, on obtient bien la propriété de monotonie (2.3). Quant à (2.4), on écrit à partir de (1.4)

$$\langle A(t)y(\omega), y(\omega)\rangle \geqq \alpha \| y(\omega) \|_V^p \quad \text{p.s. } \omega \tag{2.11}$$

et par intégration en ω, il en résulte aussitôt (2.4).

De même (2.5) résulte de (1.3); en effet, on a

$$\text{p.p. } t \text{ p.s. } \omega \; \| A(t)y(\omega) \|_{V'} \leqq \beta \| y(\omega) \|_V^{p-1}$$

d'où, par élévation à la puissance p'

$$\text{p.p. } t \text{ p.p.} \omega \; \| A(t)y(\omega) \|_{V'}^{p'} \leqq \beta^{p'} \| y(\omega) \|_V^p$$

et en intégrant en ω, il vient

$$\int_\omega \| A(t)y(\omega) \|_{V'}^{p'} d\mu(\omega) \leqq \beta^{p'} \int_\omega \| y(\omega) \|_V^p d\mu(\omega)$$

soit

$$\| \mathscr{A}(t)y \|_{V'}^{p'} \leqq \beta^{p'} \| y \|_V^p$$

d'où (2.5), en remarquant que $p/p' = p - 1$.

Si maintenant $y \in L^p(\mathscr{V})$, alors d'après (2.1), $\mathscr{A}(t)y(t)$ est mesurable à valeurs dans $\mathscr{V}'$ et d'après (2.5)

$$\| \mathscr{A}(t)y(t) \|_{\mathscr{V}'} \leqq \beta \| y(t) \|_{\mathscr{V}}^{p-1}$$

d'où il résulte immédiatement, par élévation à la puissance p', que $\mathscr{A}(\cdot)y(\cdot) \in L^{p'}(\mathscr{V}')$ les autres propriétés ennoncées dans (2.6) se démontrent comme ci-dessus, par application du théorème de Lebesgue.

REMARQUE 2.1. Dans le cas où $A(t)$ est indépendant de t, (2.1) est automatiquement vérifiée. En effet $\mathscr{A}\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ est hémicontinu, monotone, coercif et donc continu de $\mathscr{V}$ fort dans $\mathscr{V}'$ faible. Si donc $t \to y(t)$ est mesurable à valeurs dans $\mathscr{V}$, alors $t \to \mathscr{A}(y(t))$ est mesurable à valeurs dans $\mathscr{V}'$ faible, donc aussi dans $\mathscr{V}'$ ∎

On déduit du Lemme 2.1 le premier résultat suivant

PROPOSITION 2.1. *Pour* $y_0 \in \mathscr{H}$ *et* $L^{p'}(\mathscr{V}') + L^{r}(\mathscr{H})$ *donnés, il existe y unique dans* $L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(\mathscr{H})$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \mathscr{A}(t)y(t) = g(t) \quad \text{p.p. } t \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

DÉMONSTRATION. On applique simplement le Théorème 1.1 avec A, V, H, V' remplacés par $\mathscr{A}, \mathscr{V}, \mathscr{H}, \mathscr{V}'$ ■

REMARQUE 2.2. Les égalités (2.12) sont équivalentes aux suivantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t;\omega) + A(t)y(t;\omega) = g(t;\omega) \text{ p.s. } \omega, \text{ p.p. } t \\ y(0;\omega) = y_0(\omega) \text{ p.s. } \omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

la dérivation en t étant prise au sens des distributions vectorielles à valeurs dans V'. En effet dy/dt est une distribution à valeurs dans $\mathscr{V}'$, et donc si $\phi \in \mathscr{N}(]0, T[)$ on a

$$\int_0^T \frac{dy}{dt}\phi\, dt = -\int_0^T y(t)\phi(t)dt = -\int_0^T y(t;\omega)\phi(t)dt \in \mathscr{V}' \tag{2.14}$$

mais alors p.s. ω,

$$-\int_0^T y(t;\omega)\phi(t)dt = \int_0^T \frac{dy(t;\omega)}{dt}\phi(t)dt \in V'$$

d'où (2.13) ■

Donnons un autre résultat. On considère un processus f vérifiant

$$f \in \mathscr{C}([0,T];\ L^p(\omega,\mu;V)). \tag{2.15}$$

On a alors

THÉORÈME 2.1. *Sous les hypothèses des paragraphes* 1.2 *et l'hypothèse* (2.15), *il existe y unique dans* $L^p(\mathscr{V}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \mathscr{A}(t)y = g(t) + \dfrac{df}{dt}^{*} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

* Égalité au sens des distributions vectorielles sur $]0,T[$ à valeurs dans $\mathscr{V}'$.

DÉMONSTRATION. Considérons l'opérateur $\mathscr{A}_f(t): \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ défini par

$$\mathscr{A}_f(t)z = \mathscr{A}(t)(z+f(t)) \text{ pour } z \in \mathscr{V}, \tag{2.17}$$

et l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} + \mathscr{A}_f(t)z = g(t) \\ z(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que (2.16) ait une solution unique est que (2.18), ait une solution unique dans $L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(\mathscr{H})$ telle que

$$\frac{dz}{dt} \in L^{p'}(\mathscr{V}) + L^1(\mathscr{H})$$

En effet si $z \in L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(\mathscr{H})$, $dz/dt \in L^{p'}(\mathscr{V}') + L'(\mathscr{H})$ alors $z \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ et si on pose $y = z + f$, alors $y \in L^p(\mathscr{V}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{H})$ (grâce à (2.15)) et il est évident que y est solution de (2.16).

Réciproquement si y est solution de (2.16), alors $z = y - f$ est solution de (2.18) et $dz/dt = g(t) - \mathscr{A}(t)y(t) \in L^{p'}(\mathscr{V}')$.

Tout revient donc à démontrer l'existence d'une solution unique de (2.18) (dans $L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(\mathscr{H})$ avec dérivée dans $L^{p'}(\mathscr{V}') + L'(\mathscr{H})$). C'est ce qui est fait au numéro 2.3.

Les résultats d'existence et d'unicité pour (2.18) peut être déduit du théorème 1.1 (ou du moins d'une version améliorée de ce théorème). La démonstration que nous proposons ci-après utilise les méthodes de différences finies et nous permettra d'obtenir des informations supplémentaires sur la solution (cf. no 3.2).

2.2. Etude de l'équation (2.18)

On a le

LEMMA 2.2.

(2.19) *$\mathscr{A}_f(t)$ est hémicontinu pour presque tout t*

(2.20) *$\mathscr{A}_f(t)$ est monotone pour presque tout t*

(2.21) *Si $y \in L^p(\mathscr{V})$, alors $\{t \to \mathscr{A}_f(t)y(t)\} \in L^{p'}(\mathscr{V}')$.*

DÉMONSTRATION. Soient $y, z \in \mathscr{V}$ et $\phi \in \mathscr{V}'$; on a si $\lambda \in R$

$$\langle \mathscr{A}_f(t)(y+\lambda z), \phi \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} = \langle \mathscr{A}(t)(y+f(t)+\lambda z), \phi \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} \tag{2.22}$$

et grâce à (2.2), lorsque $\lambda \to 0$, le second membre de (2.22) converge vers $\langle \mathscr{A}(t)(y+f(t)), \phi \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} = \langle \mathscr{A}_f(t)g, \phi\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}$ d'où (2.19).

Pour démontrer (2.20) on écrit

$$\langle \mathscr{A}_f(t)y - \mathscr{A}_f(t)z, y-z \rangle = \langle \mathscr{A}(t)(y+f(t)) - \mathscr{A}(t)(z+f(t)), (y+f(t)) - (z+f(t))\rangle \geqq 0 \tag{2.23}$$

d'après (2.3).

Enfin (2.21) résulte immédiatement de (2.6) car si $y(\cdot) \in L^p(\mathscr{V})$, alors (grâce à (2.15)) $y(\cdot) + f(\cdot) \in L^p(\mathscr{V})$, et donc

$$\mathscr{A}_f(\cdot)y(\cdot) = \mathscr{A}(\cdot)(y(\cdot) + f(\cdot)) \in L^{p'}(\mathscr{V}') \blacksquare$$

2.3. Approximation

Soit N un entier destiné à tendre vers l'infini et $k = T/N$. On considère un découpage de l'intervalle $[0, T]$, $0, k, 2k, \cdots, Nk$. On pose

$$f^n = f(nk) \in \mathscr{V} \tag{2.24}$$

$$g^n = \frac{1}{k}\int_{(n-1)k}^{nk} g(t)dt \in \mathscr{V}' \tag{2.25}$$

et on introduit la famille d'opérateurs $\mathscr{A}_f^n$ de $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ définis par

$$\mathscr{A}_f^n \phi = \frac{1}{k}\int_{(n-1)k}^{nk} \mathscr{A}(t)(\phi + f^n)dt. \tag{2.26}$$

On considère les relations de récurrence

$$\begin{cases} \dfrac{z^n - z^{n-1}}{k} + \mathscr{A}_f^n z^n = g^n & n \geqq 1 \\ z_0 = y_0 - f(0). \end{cases} \tag{2.27}$$

Remarquons d'abord que (2.27) définit bien de manière unique une suite z^n d'éléments de $\mathscr{V}$ (sauf toutefois pour $n = 0$, $z_0 \in \mathscr{H}$).

En effet introduisons $\mathscr{A}^n : \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ défini

$$\mathscr{A}^n\phi = \frac{1}{k}\int_{(n-1)k}^{nk} \mathscr{A}(t)\phi dt, \ \forall \phi \in \mathscr{V}; \tag{2.28}$$

alors (2.27) s'écrit

$$\frac{z^n - z^{n-1}}{k} + \mathscr{A}^n(z^n + f^n) = g^n \tag{2.29}$$

mais alors en posant $y^n = z^n + f^n$, on voit que y^n doit satisfaire aux relations de récurrence:

$$\begin{cases} \dfrac{y^n - y^{n-1}}{k} + \mathscr{A}^n y^n = g^n + \dfrac{f^n - f^{n-1}}{k} \\ y^0 = y_0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Or il résulte des propriétés de $\mathscr{A}(t)$ (Lemme 2.1) que $\mathscr{A}^n$ est monotone, hémicontinu et coercif de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}'$ et par conséquent (cf. Lions [4] $(I + k^n)$ est inversible. Donc, dans (2.30), lorsque y^{n-1} est connu, y^n est défini de manière unique comme un élément de $\mathscr{V}$.

On introduit maintenant les fonctions étagées

$$\begin{cases} f_k(t) = f^n \text{ dans } [nk,(n+1)k[\\ g_k(t) = g^n \text{ dans } [nk,(n+1)k[\\ y_k(t) = y^n \text{ dans } [nk,(n+1)k[\\ z_k(t) = z^n \text{ dans } [nk,(n+1)k[\end{cases} \tag{2.31}$$

On a alors le

Lemme 2.3. *$y_k(\cdot)$ et $z_k(\cdot)$ demeurant, lorsque $k \to 0$, dans des bornés de $L^\infty(\mathscr{H})$ et $L^p(\mathscr{V})$.*

Démonstration. Considérons la relation (2.29) qui s'écrit

$$z^n - z^{n-1} + k\, \mathscr{A}^n y^n = k\, g^n \tag{2.32}$$

d'où

$$(z^n - z^{n-1}, z^n) + k\langle \mathscr{A}^n y^n, y^n - f^n\rangle = k\langle g^n, y^n - f^n\rangle \tag{2.33}$$

soit

$$(z^n - z^{n-1}, z^n) + k\langle \mathscr{A}^n y^n, y^n\rangle = k\langle g^n, y^n\rangle + k\langle f^n, \mathscr{A}^n y^n\rangle - k\langle g^n, f^n\rangle. \tag{2.34}$$

Mais

$$(z^n - z^{n-1}, z^n) = \tfrac{1}{2}(|z^n|^2 - |z^{n-1}|^2) + \tfrac{1}{2}|z^n - z^{n-1}|^2$$

et donc (2.34) implique

$$|z^n|^2 - |z^{n-1}|^2 + |z^n - z^{n-1}|^2 + 2k\langle \mathscr{A}^n y^n, y^n\rangle = 2k\langle g^n, y^n\rangle + 2k\langle f^n, \mathscr{A}^n y^n\rangle - 2k\langle g^n, f^n\rangle. \tag{2.35}$$

D'après les propriétés (2.4) et (2.5) de $\mathscr{A}(t)$, qui conduisent aux mêmes pour $\mathscr{A}^n$, on déduit de (2.35) la majoration suivante

$$(2.36)\quad |z^n|^2 - |z^{n-1}|^2 + 2k\alpha \| y^n \|^p \leqq 2k \| g^n \|_{\mathscr{V}'} \| y^n \|_{\mathscr{V}} + 2k\beta \| f^n \|_{\mathscr{V}} \| y^n \|_{\mathscr{V}}^{p-1} + 2k \| g^n \|_{\mathscr{V}} \| f^n \|_{\mathscr{V}}$$

On utilise alors l'inégalité classique suivante; Si r et $s > 0$ vérifient $1/r + 1/s = 1$, alors

$$(2.37)\quad ab \leqq \frac{a^r c^r}{r} + b^s \frac{1}{sc^s}, \quad \forall a, b, c > 0.$$

Par conséquent on a

$$(2.38)\quad \| g^n \|_{\mathscr{V}'} \| y^n \|_{\mathscr{V}} \leqq \| y^n \|_{\mathscr{V}}^p \frac{c^p}{p} + \| g^n \|_{\mathscr{V}'}^{p'} \frac{1}{p' c^{p'}}. \quad \forall c > 0,$$

et

$$(2.39)\quad \| f^n \|_{\mathscr{V}} \| y^n \|_{\mathscr{V}}^{p-1} \leqq \| y^n \|_{\mathscr{V}}^p \frac{d^{p'}}{p'} + \| f^n \|_{\mathscr{V}}^p \frac{1}{pd^p}, \quad \forall d > 0,$$

en remarquant que $\dfrac{p}{p-1} = p'$.

Enfin

$$(2.40)\quad \| g^n \|_{\mathscr{V}'} \| f^n \|_{\mathscr{V}} < \frac{\| g^n \|_{\mathscr{V}}^{p'}}{p'} + \frac{\| f^n \|_{\mathscr{V}}}{p}.$$

Choisissons c et d de façon que $c_1 = 2\alpha - 2\dfrac{c^p}{p} - 2\beta\dfrac{d^{p'}}{p'} > 0$ alors tenant compte de (2.38), (2.39), (2.40) on déduit de (2.36) l'inégalité suivante

$$(2.41)\quad |z^n|^2 - |z^{n-1}|^2 + kc_1 \| y^n \|^p \leqq 2k \| g^n \|_{\mathscr{V}'}^{p'} \frac{1}{p'} + \frac{1}{p' c^{p'}} + 2k \| f^n \|_{\mathscr{V}}^p \left(\frac{\beta}{pd^p} + \frac{1}{p} \right).$$

Mais, d'après l'inégalité de Hölder on a

$$(2.42)\quad \| g^n \|_{\mathscr{V}'}^{p'} = \left\| \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} g(t)dt \right\|_{\mathscr{V}'}^{p'} \leqq \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} \| g(t) \|_{\mathscr{V}'}^{p'} dt$$

et puisque $f(t) \in \mathscr{C}(\mathscr{V})$

$$(2.43)\quad \| f^n \|_{\mathscr{V}} \leqq \text{Constante}, \quad \forall n.$$

Grâce à (2.42) et (2.43), on obtient finalement la majoration

$$(2.44) \quad |z^n|^2_{\mathscr{H}} - |z^{n-1}|^2_{\mathscr{H}} + kc_1 \|y^n\|^p_{\mathscr{V}} \leqq c_2 \int_{(n-1)k}^{nk} \|g(t)\|^{p'}_{\mathscr{V}'} dt + kc_3$$

Par addition (et remarquant que $nk \leqq$ Constante) on déduit aisément de (2.44) les majorations suivantes

$$(2.45) \quad \begin{cases} \forall n, |z^n|^2_{\mathscr{H}} \leqq |y_0 - f(0)|^2_{\mathscr{H}} - c_2 \int_0^T \|g(t)\|^{p'}_{\mathscr{V}'} dt + c_3 T \\ c_1 \sum_{n=1}^{N} k \|y^n\|^p_{\mathscr{V}} \leqq |y_0 - f(0)|^2_{\mathscr{H}} + c_2 \int_0^T \|g(t)\|^{p'}_{\mathscr{V}'} dt + c_3 T. \end{cases}$$

Mais (2.45) signifie que y_k demeure dans un borné de $L^p(\mathscr{V})$ et z_k dans un borné de $L^\infty(\mathscr{H})$. Comme f_k demeure dans un borné de $L(\mathscr{V})$, il en résulte bien le Lemme.

Soit t fixé dans $[0, T]$ et n_t = partie entière de t/k. En ajoutant les diverses égalités (3.22), pour n compris entre 1 et n_t, il vient

$$(2.46) \qquad z^{n_t} + k \sum_{n=1}^{n_t} \mathscr{A}^n y^n = y_0 - f(0) + k \sum_{n=1}^{n_t} g^n$$

ce qui s'écrit aussi

$$(2.47) \qquad z_k(t) + \int_0^{n_t k} \mathscr{A}_k(s) y_k(s) ds = y_0 - f(0) + \int_0^{n_t k} g_k(s) ds$$

Noter également que l'on peut remplacer $\mathscr{A}_k$ par $\mathscr{A}$ dans cette égalité.

Soit maintenant $w \in \mathscr{V}$ quelconque, (2.47) donne encore

$$(2.48) \quad (z_k(t), w) + \int_0^T \langle \mathscr{A}(s) y_k(s), \mathscr{X}_{n_t k}(s) w \rangle ds = y_0 + \int_0^T \langle g_k(s), \mathscr{X}_{n_t k}(s) w \rangle ds$$

où $\mathscr{X}_{n_t k}(s)$ désigne la fonction caractéristique de $]0, n_t k[$.

Le Lemme 2.3 nous permet d'extraire des suites $y_k(t)$ et $z_k(\mathrm{p}t)$ de sous suites notées de façon identique, qui convergent vers des éléments y et z dans $L^p(\mathscr{V})$ faible et dans $L^\infty(\mathscr{H})$ faible étoile. Il est évident que $y = z + f$. Par ailleurs, d'après la propriété (2.5) de $\mathscr{A}(s)$, on déduit du Lemme 2.3 que $\mathscr{A}(s) y_k(s)$ demeure dans un borné de $\mathrm{L}^{p'}(\mathscr{V}')$ et par conséquent, quitte à extraire une nouvelle sous suite, on peut toujours supposer que $\mathscr{A}(\cdot) y_k(\cdot) \to \mathscr{O}(s)$ dans $L^{p'}(\mathscr{V}')$ faible.

On peut alors passer à la limite dans (2.48)* et on obtient

* Raisonnement classique (cf [1] et [9]).

$$(2.49)\qquad (z(t),w)+\int_0^t\langle\mathcal{O}(s),w\rangle\,ds = y_0+\int_0^t\langle g(s),w\rangle\,ds$$

et donc

$$(2.50)\qquad \frac{dz}{dt}+\mathcal{O}(t)=g(t)\ \text{p.p. } t\in[0,T]\ (\text{égalité dans } \mathscr{V}')\ \blacksquare$$

On a alors le

LEMME 2.4. $\mathcal{O}(t)=\mathscr{A}(t)\,y(t)$, p.p. t.

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que

$$(2.51)\qquad \int_0^T\langle\mathscr{A}(s)y_k(s),y_k(s)\rangle\,ds \xrightarrow[k\to 0]{} \int_0^T\langle\mathcal{O}(s),y(s)\rangle\,ds.$$

En effet, (2.50) montre que $dz/dt\in L^{p'}(\mathscr{V}')$. Comme $z\in L^p(\mathscr{V})$, il en résulte (cf. [4]) que l'on a

$$(2.52)\qquad \frac{d}{dt}|z(t)|^2_{\mathscr{H}} = 2\langle z(t),\frac{dz}{dt}(t)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'},\quad \text{p.p. t.,}$$

soit

$$(2.53)\qquad |z(t)|^2=|z(0)|^2+2\int_0^T\langle z(t),g(t)-\mathcal{O}(t)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}dt.$$

Considérons ensuite les égalités (2.35), que l'on additionne pour n compris entre 1 et N. On en déduit aisément l'inégalité

$$(2.54)\qquad |z_k(T)|^2+2\int_0^T\langle\mathscr{A}(t)y_k(t),y_k(t)\rangle\,dt \leqq |z(0)|^2+2\int_0^T\langle g_k(t),y_k(t)\rangle\,dt$$
$$+\,2\int_0^T\langle f_k(t),\mathscr{A}(t)y_k(t)\rangle\,dt-2\int_0^T\langle g_k(t),f_k(t)\rangle\,dt.$$

En passant à la limite supérieure, on obtient

$$(2.55)\qquad \limsup_{k\to 0}\int_0^T\langle\mathscr{A}(t)y_k(t),y_k(t)\rangle\,dt \leqq \tfrac12|z(0)|^2+\int_0^T\langle g(t),y(t)\rangle\,dt$$
$$+\int_0^T\langle f(t),\mathcal{O}(t)\rangle\,dt-\int_0^T\langle g(t),f(t)\rangle\,dt-\liminf_{k\to 0}\tfrac12|z_k(T)|^2$$

Mais

$$\tfrac12|z(T)|^2\leqq\liminf_{k\to 0}\tfrac12|z_k(T)|^2$$

et tenant compte de (2.53), on déduit alors de (2.55)

$$\text{(2.56)}\quad \limsup_{k\to 0}\int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t), y_k(t)\rangle\,dt \leqq \tfrac{1}{2}|z(0)(|^2 + \int_0^T \langle g(t), y(t)\rangle\,dt$$

$$+\int_0^T \langle f(t), \mathscr{O}(t)\rangle\,dt - \int_0^T \langle g(t), f(t)\rangle\,dt - \tfrac{1}{2}|z(0)|^2$$

$$-\int_0^T \langle y(t)-f(t), g(t)-\mathscr{O}(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle y(t), \mathscr{O}(t)\rangle\,dt$$

Mais par ailleurs on a

$$\text{(2.57)}\quad \int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t), y_k(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t) - \mathscr{A}(t)y(t), y_k(t)-y(t)\rangle\,dt$$

$$+\int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y(t), y_k(t)\rangle\,dt + \int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t), y(t)\rangle\,dt$$

$$-\int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y(t), y(t)\rangle\,dt$$

et comme $\mathscr{A}(t)$ est monotone, on en déduit

$$\text{(2.58)}\quad \liminf_{k\to 0}\int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t), y_k(t)\rangle\,dt \geqq \int_0^T \langle \mathscr{O}(t), y(t)\rangle\,dt$$

ce qui, comparé avec (2.56) montre bien (2.51).

Pour démontrer le Lemme 2.4 à partir de (2.51), on utilise une technique classique basée sur la monotonie et l'hémicontinuité de $\mathscr{A}(t)$, (cf. Minty [6], Brézis [2] et Lions [1]).

D'après la monotonie de $\mathscr{A}(t)$, on a, pour tout $w \in L^p(\mathscr{V})$

$$\text{(2.59)}\qquad \int_0^T \langle \mathscr{A}(t)y_k(t) - \mathscr{A}(t)w(t), y_k(t) - w(t)\rangle\,dt \geqq 0$$

d'où en passant à la limite, grâce à (2.51) il vient

$$\text{(2.60)}\qquad \int_0^T \langle \mathscr{O}(t) - \mathscr{A}(t)w(t), y(t) - w(t)\rangle\,dt \geqq 0\,.$$

Choisissons alors $w(t) = y(t) - \lambda\psi(t)$, où $\psi \in L^p(\mathscr{V})$ et $\lambda > 0$ sont quelconques; (2.60) donne

$$\text{(2.61)}\qquad \int_0^T \langle \mathscr{O}(t) - \mathscr{A}(t)(y(t) - \lambda\psi(t)), \psi(t)\rangle\,dt \geqq 0$$

on divise alors par λ ce qui est possible car $\lambda > 0$ et on obtient

$$\int_0^T \langle \mathcal{O}(t) - \mathscr{A}(t)(y(t) - \lambda\psi(t)), \psi(t)\rangle \, dt \geqq 0. \tag{2.62}$$

On fait alors tendre λ vers 0 dans (2.62). La propriété d'hémicontinuité conduit à

$$\int_0^T \langle \mathcal{O}(t) - \mathscr{A}(t)y(t), \psi(t)\rangle \, dt \geqq 0 \qquad \forall \psi \in L^p(\mathscr{V}) \tag{2.63}$$

d'où le résultat. ∎

2.4. Démonstration du Théorème 2.1. On récapitule les résultats obtenus. Il existe $z \in L^p(\mathscr{V})$, $dz/dt \in L^{p'}(\mathscr{V}')$ et $y \in L^p(\mathscr{V})$ vérifiant $y = z + f$. De plus (2.50) et le Lemme 2.4 donnent aussitôt

$$\frac{dz}{dt} + \mathscr{A}(t)y(t) = g(t). \tag{2.64}$$

Enfin $z(0) = y_0 - f(0)$ (d'après (2.49)). Donc z est solution de (2.18) et par conséquent y de (2.16).

L'unicité résulte de la propriété de monotonie de l'opérateur $\mathscr{A}_f(t)$. En effet, supposons que (2.18) possède deux solutions z_1, z_2 et posons $w = z_1 - z_2$. On a donc, par soustraction

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} + \mathscr{A}_f z_1 - \mathscr{A}_f z_2 = 0 & \text{p.p. } t \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

et donc en multipliant par w et intégration il vient

$$\tfrac{1}{2}|w(t)|^2 + \int_0^t \langle \mathscr{A}_f(\tau)z_1(\tau) - \mathscr{A}_f(\tau)z_2(\tau), z_1(\tau) - z_2(\tau)\rangle \, d\tau = 0 \qquad \forall t \in [0, T] \tag{2.66}$$

et comme $\mathscr{A}_f(\tau)$ est monotone, on voit que $w(t) = 0 \quad \forall t$ ∎

Du point de vue de l'approximation remarquons que toute la suite z_k converge vers z dans $L^p(\mathscr{V})$ faible et $L^\infty(\mathscr{H})$ faible étoile (et non une sous suite en raison de l'unicité de la limite de toute sous suite extraite). De même $y_k \to y$ dans $L^p(\mathscr{V})$ faible et $L^\infty(\mathscr{H})$ faible étoile.

De plus le Lemme 2.4 nous montre que $\mathscr{A}(\cdot)y_k(\cdot) \to \mathscr{A}(\cdot)y(\cdot)$ dans $L^{p'}(\mathscr{V}')$ faible.

3. Egalités de L'énergie

3.1. Hypothèses

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse de type probabiliste (par exemple sur la correlation des processus g et y_0 avec f). Nous allons maintenant supposer la propriété d'indépendance suivante:

$$(3.1)\quad \begin{cases} \forall t_1, t_2 \text{ avec } 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T,\ f(t_2) - f(t_1), \text{ est une variable aléatoire} \\ \text{à valeurs dans } H \text{ indépendante de la variable aléatoire } \tilde{\xi} = \\ \{y_0, g|_{]0,t_1[}, f(t_{j1}), \cdots, f(t_{jq})\} \text{ à valeurs dans } H \times L^{p'}(0, t_1; H) \times H^q \text{ pour} \\ \text{tout entier } q \text{ et } t_{j1}, \cdots, t_{jq} \leqq t_1{}^*. \end{cases}$$

REMARQUE 3.1. L'hypothèse (3.1) jointe à (2.15) redonne comme cas particulier (1.15). Nous serons amenés à considérer deux processus dy type f, notés f_1, f_2 qui vérifieront (2.15). Quant aux correlations de f_1 et f_2 entre eux, ou de f_1, f_2 avec y_1, y_2 on fera l'hypothèse suivante

$$(3.2)\quad \begin{cases} \forall t_1, t_2 \text{ avec } 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T, \text{ le couple } \{f_1(t_1) - f_1(t_1), f_2(t_2) - f_2(t_1)\} \text{ à} \\ \text{valeurs dans } H^2 \text{ est indépendant de} \\ \{y_0, g|_{]0,t_1[}, f_1(t_{j1}), \cdots, f_1(t_{jq}), f_2(t_{i1}), \cdots, f_2(t_{ir})\} \text{ à valeurs dans} \\ H \times L^{p'}(0, t_1; V') \times H^q \times H_r,^{**}\ \forall q,\ r \text{ et } t_{j1}, \cdots, t_{jq}, t_{i1}, \cdots, t_{ir} \leqq t_1 . \end{cases}$$

REMARQUE 3.2. L'hypothèse (3.2) est plus générale que (3.1) et se réduit à elle, lorsqu'il n'y a qu'un processus ($f_1 \equiv f_2$).

3.2. Théorème de l'énergie

On note y_1 (respectivement y_2) la solution de (2.16) où f est remplacé par f_1 (respectivement f_2). On a alors le Théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses de la proposition* 2.2 *et du paragraphe* 3.1, *les relations suivantes* (*du type égalités de l'énergie*) *sont vérifiées*

---

* $g \big|]0, t_1[$ désigne la restriction de g à l'intervalle $]0, t_1[$.

** Bien que f_1 et f_2 soient continues à valeurs dans $L^p(\omega, \mu; V)$, (3.2) peut très bien être *faux* si on considère les $f_1(t_{j1}) \ldots$ *V.A.* à valeurs dans V.

$$(3.3)\qquad E\,|\,y(t)\,|_H^2 + 2E\int_0^t \langle A(s)y(s), y(s)\rangle\, ds = E\,|\,y_0\,|^2$$

$$+ 2E\int_0^t \langle g(s), y(s)\rangle\, ds + E\,|\,f(t)\,|^2, \quad \forall t \in [0,T)],$$

$$(3.4)\qquad E\,|\,y_1(t) - y_2(t)\,|_H^2 + 2\,E\int_0^t \langle A(s)y_1(s) - A(s)y_2(s), y_1(s) - y_2(s)\rangle\, ds$$

$$= E\,|\,f_1(t) - f_2(t)\,|_H^2 \qquad \forall t \in [0,T]$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que (3.3) et (3.4) ont un sens, puisque grâce à l'hypothèse (2.15), $y = z + f$ est continue de $[0,T] \to L^2(\omega,\mu;H)$ (donc aussi $y_1 = z_1 + f_1$, $y_2 = z_2 + f_2$).

DÉMONSTRATION DE 3.3.

1) APPLICATION DE PROPRIÉTÉS CLASSIQUES. La solution z de (2.18) vérifie la propriété suivante (comme fonction $\in L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(\mathscr{H})$ dont la dérivée distribution appartient à $L^{p'}(\mathscr{V}') + L^1(\mathscr{H})$ cf. [4])

$$(3.5)\qquad \frac{d}{dt}\,|\,z(t)\,|_{\mathscr{H}}^2 = 2\langle z(t), z'(t)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} \quad \text{p.p. } t$$

et par conséquent, en utilisant (2.17)

$$= 2\langle z(t), g(t) - \mathscr{A}_f(t)z\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}$$

$$= 2\langle z(t), g(t)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}$$

$$-\ 2\langle z(t), \mathscr{A}(t)(z(t) + f(t))\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}, \quad \text{p.p. } t,$$

ce qui s'écrit encore

$$(3.6)\qquad \frac{d}{dt}E\,|\,y(t) - f(t)\,|_N^2 + 2E\langle y(t) - f(t), A(t)y(t)\rangle$$

$$= 2E\langle g(t), y(t) - f(t)\rangle, \quad \text{p.p. } t.$$

Par intégration et utilisant la condition initiale (2.18), il vient

$$(3.7)\qquad E\,|\,y(t) - f(t)\,|_H^2 + 2\int_0^t E\langle A(s)y(s), y(s) - f(s)\rangle\, ds$$

$$= E\,|\,y_0\,|_H^2 + 2\int_0^t E\langle g(s), y(s) - f(s)\rangle\, ds, \ \forall t,$$

Nous allons démontrer ci-après la relation suivante

$$(3.8)\qquad E(y(t),f(t)) + E\int_0^t \langle A(s)y(s),f(s)\rangle\, ds =$$

$$+ E\int_0^t \langle g(s),f(s)\rangle\, ds + E|f(t)|^2 - E(f(0)|^2 .$$

Il est alors immédiat, en développant (3.7), et en utilisant (3.8), que l'on obtient (3.3).

2.) Démonstration de (3.8). Nous allons, pour démontrer (3.8) utiliser l'approximation y_k de y définie au n° 2.3. Considérons les relations (2.30), que l'on écrit en explicitant $\mathscr{A}^n$ (et en faisant apparaître la variable $\omega \in \boldsymbol{\omega}$).

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^n(\omega) - y^{n-1}(\omega)}{k} + A^n y^n(\omega) = g^n(\omega) + \dfrac{f^n(\omega) - f^{n-1}(\omega)}{k} \\ y^0(\omega) = y_0(\omega) \end{cases}$$

où A^n est l'opérateur de $V \to V'$ défine par

$$(3.10)\qquad A^n\phi = \frac{1}{k}\int_{k(n-1)}^{kn} A(t)\phi dt, \qquad \forall\phi \in V.$$

Prenons le produit scalaire de (3.9) avec f^n, il vient

$$(3.11)\qquad (y^n - y^{n-1},f^n)_H + k\langle A^n y^n,f^n\rangle = k\langle g^n,f^n\rangle + (f^n,f^n - f^{n-1})_H \text{ p.s. } \omega.$$

Or on a

$$(3.16)\qquad (y^n - y^{n-1},f^n) = (y^n,f^n) - (y^{n-1},f^{n-1},f^n - f^{n-1}).$$

Nous allons démontrer le

Lemma 3.1. *On a la propriété d'indépendance suivante*

$$(3.17)\qquad \begin{cases} \textit{Pour tout } n, 2 \leqq n \leqq N, f^n - f^{n-1} \textit{ à valeurs dans } H \textit{ est indépendant} \\ \textit{de } \{y_0, g|_{[0,(n-1)k[}, f(t_1),\cdots,f(t_q), y^1,\cdots,y^p\} \textit{ à valeurs dans} \\ H \times L^{p'}(0,(n-1)k;V') \times H^q \times H^p,\ \forall q,\ \forall t_1,\cdots,t_q \leqq (n-1)k \textit{ et } \forall p \\ \textit{avec } 1 \leqq p \leqq n-1. \end{cases}$$

Démonstration. Prenons d'abord $p = 1$. On remarque que, d'après (3.9) on a

$$(3.18)\qquad y^1 = (I + kA^1)^{-1}(y_0 + kg^1 + f^1 - f^0).$$

Or, d'après l'hypothèse (3.1) on a, $\forall q$, $\forall t_1,\cdots,t_q \leqq (n-1)k$

$$(3.19)\qquad \begin{cases} f^n - f^{n-1} \text{ (dans } H) \text{ est indépendent de la V.A.} \\ \xi = \{y_0, g\,|_{]0,(n-1)k[}, f(t_1), \cdots, f(t_q), f(0), f(k)\} \\ \text{à valeurs dans } H \times L^{p'}(0,(n-1)k;\, V') \times H^{q+2}. \end{cases}$$

Par ailleurs $y_0 + kg^1 + f^1 - f^0$ considérée comme une V.A. à valeurs dans V' peut être définie comme une image de la V.A. ξ par une application évidente à expliciter, et qui est *continue* de $H \times L^p(0,t';V') \times H^{q+2} \to V'$. Or l'opérateur $(I + kA^1)$ comme inverse d'un opérateur monotone hémicontinu et coercif est continu de $V' \to H$.*

Donc y^1, V.A. à valeurs dans H, se déduit de ξ par une application *continue* de $H \times L^{p'}(0,t',V') \times H^{q+2} \to H$. Par conséquent, la V.A.

$$\{y_0, g\,|_{]0,t_1[}, f(t_1), \cdots, f(t_q), y^1\}$$

se déduit de ξ par une application continue de $H \times L^p(0,t';V') \times H^{q+2} \to H \times L^{p'}(0,t';V') \times H^{q+1}$. Mais alors de (3.19) il résulte, comme on le voit immédiatement en utilisant le Théorème 1.2, que $f^n - f^{n-1}$ est indépendant de

$$\{y_0, g\,|_{]0,t_1[}, f(t_1), \cdots, f(t_q), y^1\}$$

On va maintenant raisonner par recurrence sur p.

Nous venons de voir que la propriété (3.17) est vraie pour $p = 1$. Supposons la vérifiée pour $p - 1$ et montrons là pour $p(p \leqq n-1)$. D'après (3.9), on a

$$(3.20)\qquad y^p = (I + kA^p)^{-1}(y^{p-1} + kg^p + f^p - f^{p-1}).$$

Mais (3.17) écrite pour $p - 1$, q changé en $q + 2$, avec $t_q + 1 = (p-1)k$, $t_q = pk$, donne

$$(3.21)\qquad \begin{cases} f^n - f^{n-1} \text{ (dans } H) \text{ est indépendant de la V.A.} \\ \xi = \{y_0, g\,|_{]0,(n-1)k[}, f(t_1), \cdots, f(t_q), f((p-1)k), f(pk), y^1, \cdots, y^{p-1}\} \\ \text{à valeurs dans } H \times L^{p'}(0,t';V') \times H^{q+2} \times H^{p-1}. \end{cases}$$

La démonstration se poursuit alors à partir de (3.20) et (4.21), exactement comme ci-dessus à partir de (3.18) et (3.19). ∎

Il résulte alors du Lemme 3.1 que, en particulier, $f^n - f^{n-1}$ (dans H) est indépendant de y^{n-1} dans H. Il en est de même, pour tout vecteur h déterministe de H, des variables aléatoires réelles $(f^n - f^{n-1}, h)$ et (y^{n-1}, h). Donc

---

* Et aussi dans V faible (cf [4])

(3.22) $$E(f^n - f^{n-1}, h)(y^{n-1}, h) = 0 \quad \forall h \in H$$

puisque $Ef(t) = 0$, $\forall t$. Mais alors, en prenant une base orthonormée de H, et en utilisant le théorème de Lebesgue, on déduit aisément de (3.22) par un raisonnement classique, que

(3.23) $$E(f^n - f^{n-1}, y^{n-1}) = 0, \ \forall n \geqq 1 \text{ et } \leqq N^*$$

En fait dans le Lemme n ne peut être égal à 1. Mais pour $n = 1$, (3.23) résulte immédiatement de l'hypothèse (3.1) ($f^n - f^{n-1}$ est indépendant de y_0). On retrouve alors à l'égalité (3.16), et on passe à l'espérance mathématique. Il en résulte, en tenant compte de (3.23), que

(3.24) $$E(y^n - y^{n-1}, f^n) = E(y^n, f^n) - E(y^{n-1}, f^{n-1}).$$

D'autre part, on a $E(f^{n-1}, f^{n-1} - f^n) = 0$, puisque d'après l'hypothèse (3.1), $f^n - f^{n-1}$ est indépendant de f^{n-1}, d'où

(3.25) $$E(f^n, f^n - f^{n-1}) = E|f^n|^2 - E|f^{n-1}|^2.$$

On prend alors l'espérance mathématique de (3.11) ce qui donne,

(3.26) $$E(y^n, f^n) - E(y^{n-1}, f^{n-1}) + kE\langle A^n y^n, f^n\rangle = kE\langle g^n, f^n\rangle + E|f^n|^2 - E|f^{n-1}|^2.$$

Soit $t \in [0, T]$ fixé et n_t la partie entière de t/k; en ajoutant les égalités (3.26), pour n compris entre 1 et n_t en obtient

(3.27) $$E(y^{n_t}, f^{n_t}) + k \sum_{n=1}^{n_t} E\langle A^n y^n, f^n\rangle = E(y_0, f(0)) + k \sum_{n=1}^{n_t} E\langle g^n, f^n\rangle + E|f^{n_t}|^2 - E|f(0)|^2$$

ce qui est équivaut, avec les notations du paragraphe 2.3, à

(3.28) $$(y_k(t), f(n_t k))_{\mathscr{H}} + \int_0^{n_t k} \langle \mathscr{A}(s) y_k(s), f_k(s)\rangle_{\mathscr{V}, \mathscr{V}'} ds = \int_0^{n_t k} \langle g_k(s), f_k(s)\rangle ds + |f(n_t k)|_{\mathscr{H}}^2$$

---

* Considérer une base orthonormée de H: $e_1 \ldots e_i, \ldots$, Alors d'après (3.22), on a pour tout

$$s, \ \sum_{i=1}^{s} E(f^n - f^{n-1}, e_i)(y^{n-1}, e_i) = 0.$$

On passe alors à la limite pur $s \to \infty$. Le théorème de Lebesgue donne aussitôt (3.23).

Mais d'après le numéro (2.4), $y_k \to y$ dans $L^\infty(\mathscr{H})$ faible; donc pour tout $\phi \in \mathscr{D}([0,T]$ (fonctions scalaires indéfiniment différentiables, à support compact dans $]0,T[$), on a

$$(3.29) \qquad \int_0^T (y_k(t), f(n_t k))_{\mathscr{H}} \phi(t) dt = \int_0^T (y(t), f(t))_{\mathscr{H}} \phi(t) dt.$$

Par ailleurs $\mathscr{A}(\cdot) y_k(\cdot) \to \mathscr{A}(\cdot) y(\cdot)$ dans $L^{p'}(\mathscr{V}')$ faible; donc, pour tout $\phi \in \mathscr{D}(]0, T[)$

$$(3.30) \qquad \int_0^T \phi(t) \left\{ \int_0^{n_t k} \langle \mathscr{A}(s) y_k(s), f_k(s) \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} ds \right\} dt$$

$$\to \int_0^T \phi(t) \left\{ \int_0^t \langle \mathscr{A}(s) y(s), f(s) \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} ds \right\} dt.$$

On peut alors passer à la limite, au sens des distributions scalaires dans (3.28), et on obtient une égalité ponctuelle p.p.:

$$(3.31) \quad (y(t), f(t))_{\mathscr{H}} + \int_0^t \langle \mathscr{A}(s) y(s), f(s) \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} ds = + \int_0^t \langle g(s), f(s) \rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} ds + |f(t)|^2_{\mathscr{H}}$$

ce qui n'est autre que (3.8).

On a ainsi complétement démontré l'égalité (3.3).

Démonstration de (3.4). On opère en deux étapes comme pour la démonstration de (3.3).

Application de Propriétés Classiques. Les processus y_1 et y_2 vérifient les équations

$$(3.32) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} + A(t) y_1(t) = g(t) + f_1(t) \\ y_1(0) = y_0 \end{cases}$$

$$(3.33) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_2}{dt} + A(t) y_2(t) = g(t) + f_2(t) \\ y_2(0) = y_0. \end{cases}$$

Et en considérant $z_1 = y_1 - f_1, z_2 = y_2 - f_2$ comme fonctions de $L^p(\mathscr{V})$ à dérivées dans $L^{p'}(\mathscr{V}')$, z_1 et z_2 sont solutions de (2.18) (où f est remplacé par f_1 ou f_2)

$$\text{(3.34)} \quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} + \mathscr{A}_{f_1}(t)z_1 = g(t) \\ z_1(0) = y_0 - f_1(0) \end{cases}$$

$$\text{(3.35)} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_2}{dt} + \mathscr{A}_{f_2}(t)z_2 = g(t) \\ z_2(0) = y_0 f_2(0). \end{cases}$$

D'où on déduit

$$\text{(3.36)} \quad \frac{d}{dt}|z_1(t) - z_2(t)|^2_{\mathscr{H}} = 2\langle z_1(t) - z_2(t), \mathscr{A}_{f_2}(t)z_2 - \mathscr{A}_{f_1}(t)z_1\rangle$$

Par intégration et interprétation des quantités obtenues, il vient

$$\text{(3.37)} \quad E|(y_1(t) - y_2(t)) - (f_1(t) - f_2(t))|^2 + 2\int_0^t E\langle (y_1(s) - y_2(s)) - (f_1(s) - f_2(s)), A(s)y_1(s) - A(s)y_2(s)\rangle\, ds = 0.$$

Nous démontrerons ensuite la relation suivante

$$\text{(3.38)} \quad E(y_1(t) - y_2(t), f_1(t) - f_2(t)) + \int_0^t E\langle A(s)y_1(s) - A(s)y_2(s), f_1(s) - f_2(s)\rangle = E|f_1(t) - f_2(t)|^2$$

Il est alors immédiat, en développant (3.37) et utilisant (3.38), que l'on obtient (3.4).

2) Démonstration de (3.38). On considère les approximations $y_{1k}(t)$ et $y_{2k}(t)$ de $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Les relation (3.9) écrites pour y_1^n et y_2^n donnent par soustraction

$$\text{(3.39)} \quad \begin{cases} \dfrac{(y_1^n - y_2^n) - (y_1^{n-1} - y_2^{n-1})}{k} + A^n y_1^n - A^n y_2^n = \dfrac{(f_1^n - f_2^n) - (f_1^{n-1} - f_2^{n-1})}{k} \\ y_1^0 - y_2^0 = 0. \end{cases}$$

On prend le produit scalaire de (3.39) par $f_1^n - f_2^n$

$$\text{(3.40)} \quad ((y_1^n - y_2^n) - (y_1^{n-1} - y_2^{n-1}), f_1^n - f_2^n)_H + k\langle A^n y_1^n - A^n y_2^n, f_1^n - f_2^n\rangle = ((f_1^n - f_2^n) - (f_1^{n-1} - f_2^{n-1}), f_1^n - f_2^n)_H, \text{ p.s. } \omega$$

mais on a

(3.41) $$((y_1^n - y_2^n) - (y_1^{n-1} - y_2^{n-1}), f_1^n - f_2^n) = (y_1^n - y_2^n, f_1^n - f_2^n) -$$

$$- (y_1^{n-1} - y_2^{n-1}, f_1^{n-1} - f_2^{n-1}) + (y_1^{n-1} - y_2^{n-1}, (f_1^n - f_2^n) - (f_2^{n-1} - f_2^{n-1}))_H .$$

Exactement comme dans le Lemme 3.1, mais en utilisant l'hypothèse (3.2), on démontre que le couple $\{f_1^n - f_1^{n-1}, f_2^n - f_2^{n-1}\}$ est indépendant de

$$\left\{y_0, g\big|_{]0,(n-1)k[}, f_1(t_{j1}), \cdots, f_1(t_{jq}), f_2(t_{i1}), \cdots, f_2(t_{i_r}),\ y_1^1, \cdots, y_1^{n-1}, y_2^1, \cdots, y_2^{n-1}\right\}$$

et donc on a des relations analogues à (3.23), soit

(3.42) $$\begin{cases} E(f_1^n - f_1^{n-1}, y_1^{n-1}) = 0 \\ E(f_1^n - f_1^{n-1}, y_2^{n-1}) = 0 \end{cases}$$

et les relations analogues obtenues en permutant les indices 1 et 2. En prenant l'espérance mathématique des deux membres de (3.40), il vient, tenant compte de (3.41) et (3.42)

(3.43) $$E(y_1^n - y_2^n, f_1^n - f_2^n) - E(y_1^{n-1} - y_2^{n-1}, f_1^{n-1} - f_2^{n-1})$$
$$+ kE\langle A^n y_1^n - A^n y_2^n, f_1^n - f_2^n\rangle = E\left|f_1^n - f_2^n\right|^2 - E\left|f_1^{n-1} - f_2^{n-1}\right|^2$$

En ajoutant les égalités (3.43), pour n compris enter 1 et n_t, on obtient l'analogue de (3.27), soit

(3.44) $$E(y_1^{n_t} - y_2^{n_t}, f_1^{n_t} - f_2^{n_t}) + k \sum_{n=1}^{n_t} E\langle A^n y_1^n - A^n y_2^n, f_1^n - f_2^n\rangle = E\left|f_1^{n_t} - f_2^{n_t}\right|^2$$

ce qui équivaut, avec les notations du paragraphe 2.3, à

(3.45) $$(y_{1k}(t) - y_{2k}(t), f_1(n_t k) - f_2(n_t k))_{\mathscr{H}}$$
$$+ \int_0^{n_t k} \langle \mathscr{A}(s) y_{1k}(s) - \mathscr{A}(s) y_{2k}(s), f_{k1}(s) - f_{k2}(s)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} ds$$
$$= \left|f_1(n_t k) - f_2(n_t k)\right|_{\mathscr{H}}^2 - \left|f_1(0) - f_2(0)\right|_{\mathscr{H}}^2$$

Par passage à la limite, exactement comme de (3.28) à (3.31), on obtient (3.38). On a ainsi complètement démontré (3.4) et par conséquent aussi le Théorème 3.1.

4. Extension du théorème d'existence et d'unicité

Orientation

Nous avons donné, jusqu'à présent, deux exemples d'équations d'évolution stochastiques: l'équation (2.12) et l'équation (2.16) qui est d'ailleurs plus générale que (2.12).

Remarquons également que l'analyse fonctionnelle a joué un rôle beaucoup plus important que les propriétés probabiliste. En fait, le Théorème 2.1 est un théorème abstrait avec des espaces abstraits $\mathscr{V}, \mathscr{H}, \mathscr{V}'$, les propriétés probabilistes ne sont intervenues à aucun moment. Seule est intervenue (de manière *fondamentale*) l'hypothèse (2.15), à savoir que $f(\,\cdot\,)$ est une fonction continue à valeurs dans $\mathscr{V}$. En outre les corrélations de y_0, g avec f sont quelconques.

Par contre, pour obtenir les égalités de l'Energie stochastique, Théorème 3.1, les hypothèses d'indépendances (3.1) et (3.2) ont joué un rôle essentiel. Nous allons voir maintenant que si l'on fait l'hypothèse d'indépendance (3.1) (en plus de l'hypothèse (1.15)), alors on obtient encore le Théorème 2.1, mais cette fois *en abandonnant l'hypothèse* (2.15), qui devient ainsi superflue. Le résultat que nous obtenons alors, est dans la ligne des résultats de Ito [3] relatifs aux équations différentielles.

4.1. Notation — Enoncé du résultat

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 4.1. *On suppose que f est un processus Hilbertien vérifiant* (1.15) (*mais non l'hypothèse* (2.15)), *et que l'hypoyhèse* (3.1) *est vérifiée. Alors il existe une fonction unique* $y \in L^p(0,T; L^p(\omega,\mu;V)) \cap \mathscr{C}(0,T;L^2(\omega,\mu;H))$ *vérifiant*

$$\frac{dy}{dt} + \mathscr{A}y = g + \frac{df}{dt} \tag{4.1}$$

au sens des distributions vectorielles à valeurs dans $L^{p'}(\omega,\mu;V') = \mathscr{V}'$.

$$y(0) = y_0 \tag{4.1'}$$

De plus y satisfait à l'égalité d'énergie stochastique

$$\begin{aligned} E\,|y(t)|_H^2 + 2\int_0^t E\langle A(s)y(s), y(s)\rangle\, ds &= E\,|y_0|^2 \\ &+ 2\int_0^t E\langle g(s), y(s)\rangle\, ds + E\,|f(t)|^2 \qquad \forall t \in [0,T] \blacksquare \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour la démonstration du Théorème 4.1, qui sera faite au paragraphe suivant, on utilisera l'approximation de f, par les processus f_N définis en (1.45). Remarquons que f_N vérifie la propriété (1.46) et par conséquent, $\forall N\ f_N$ est un processus Hilbertien vérifiant (1.15) et *aussi* l'hypothèse (2.15). Considérons maintenant f_N et f_M, pour $N \neq M$ et montrons qu'ils satisfont à l'hypothèse (3.2), avec $f_1 \equiv f_N, f_2 \equiv f_M$.

En effet, considérons la variable aléatoire

$$\xi = \{y_0, g\,|_{]0,t_1[}, f_N(t_{j1}), \cdots, f_N(t_{jq}), f_M(t_{i_1}), \cdots, f_M(t_{i_r})\} \tag{4.3}$$

à valeurs dans $H \times L^{p'}(0,t_1;V') \times H^q \times H^r$ image de $\tilde{\xi}$, par une application visiblement continue. Mais, d'après l'hypothèse (3.1), $f(t_2) - f(t_1)$ est indépendante de $\tilde{\xi}$, et donc aussi de ξ.

Par ailleurs la variable aléatoire $\{f_N(t_2) - f_N(t_1), f_N(t_2) - f_M(t_2) - f_M(t_1)\}$ à valeurs dans H^2, se déduit de $f(t_2) - f(t_1)$ par une application continue de H dans H^2. Comme $f(t_2) - f(t_1)$ est indépendant de ξ, il en est de même pour $\{f_N(t_2) - f_N(t_1), f_M(t_2) - f_M(t_1)\}$.

4.2. Démonstration du Théoreme 4.1

Unicité.

Le raisonnement est classique (cf. paragraphe 2.4). Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (4.1), on obtient par différence

$$\begin{cases} \dfrac{d(y_1 - y_2)}{dt} + \mathscr{A}y_1 - Ay_2 = 0 \\ y_1(0) - y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Il en résulte que $(d/dt)(y_1 - y_2) \in L^{p'}(\mathscr{V}')$ et par conséquent

$$\frac{d\,|\,y_1 - h_2\,|^2_{\mathscr{H}}}{dt} = -2\langle y_1 - y_2, \mathscr{A}(t)y_1(t) - \mathscr{A}(t)y_2(t)\rangle_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} \leqq 0$$

ce qui avec la condition initiale nulle, entraine bien $y_1 = y_2$, $\forall t$.

4.2.2. Existence

On introduit donc f_N approximation de f selon (1.45), N entier quelconque. Comme f_N vérifie (2.15), on peut appliquer le Théorème 2.1 et par conséquent, il existe $y_N \in L^p(\mathscr{V}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{H})$ solution de

$$(4.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_N}{dt} + \mathscr{A}(t)y_N = g(t) + \dfrac{df_N}{dt} \\ y_N(0) = y_0 . \end{cases}$$

De même considérons pour un autre entier M, y_M solution de l'analogue de (4.6) où f_N est remplacé par f_M, soit

$$(4.6)_{bis}\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_M}{dt} + \mathscr{A}(t)y_M = g(t) + \dfrac{df_M}{dt} \\ y_M(0) = y_0 \end{cases}$$

Nous avons vu au paragraphe précedent que f_N et f_M sont des processus du type f_1,f_2 et donc y_N et y_M sont des processus du type y_1 et y_2. On peut donc appliquer le théorème 3.1 sur les égalités de l'énergie stochastique. Il vient

$$(4.7)\qquad E|y_N(t)|_H^2 + 2\int_0^t E\langle A(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds = E|y_0|^2 + 2\int_0^t E\langle g(s), y_N(s)\rangle\, ds + E|f_N(t)|_H^2 \qquad \forall t \in [0,T]$$

et

$$(4.8)\qquad E|y_N(t) - y_M(t)|_H^2 + 2\int_0^t E\langle A(s)y_N(s) - A(s)y_M(s), y_N(s) - y_M(s)\rangle\, ds = E|f_N(t) - f_M(t)|_H^2, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Or

$$E|f_N(t)|^2 \leqq E|f(t)|^2 \leqq \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} E|f(t)|^2 .$$

Il résulte aisément de (4.7) que l'on a la majoration

$$(4.9)\qquad E|y_N(t)|^2 + 2c_1 \int_0^t E\|y_N(s))\|_V^2\, ds \leqq E|y_0|^2 + 2c_2\int_0^T E\|g(s)\|_{V'}^{p'}\, ds + \sup_t E|f(t)|^2 .$$

Par conséquent lorsque $N \to \to \infty$, on a:

(4.10) y_N demeure dans un borné de $C(\mathscr{H}) \cap L^p(\mathscr{V})$ et aussi, grâce à la propriété (2.5) des $\mathscr{A}(t)$

(4.11) $\mathscr{A}(\cdot)y_N(\cdot)$ demeure pour $N \to \infty$, dans un borné de $L^{p'}(\mathscr{V}')$.

On peut extraire de y_N une sous suite, encore notée y_N telle que

$$(4.12)\qquad \begin{cases} y_N \to y \text{ dans } L^p(\mathscr{V}) \text{ faible et } L^\infty(\mathscr{H}) \text{ faible étoile} \\ \mathscr{A}(\cdot)y_N(\cdot) \to \mathscr{O} \text{ dans } L^{p'}(\mathscr{V}') \text{ faible.} \end{cases}$$

D'après (4.8), lorsque N et $M \to \infty$ on a aussi

$$(4.13)\qquad \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s) - \mathscr{A}(s)y_M(s), y_N(s) - y_M(s)\rangle\, ds \to 0.$$

Par conséquent, pour tout ε fixé, il existe $N(\varepsilon)$ et $M(\varepsilon)$, tels que pour $N \geqq N(\varepsilon)$, $M \geqq M(\varepsilon)$ on ait

$$(4.14)\qquad 0 \leqq \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s) - \mathscr{A}(s)y_M(s), y_N(s) - y_M(s)\rangle\, ds \leqq \varepsilon$$

Fixons $M \geqq M(\varepsilon)$ et faisons tendre $N \to \infty$. Alors de (4.14) et (4.12) on déduit aisément

$$(4.15)\qquad 0 \leqq \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_M(s), y\rangle\, ds + \int_0^T \langle y_M(s), \mathscr{O}(s)\rangle\, ds - \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_M(s), y_M(s)\rangle\, ds$$

$$\leqq \liminf_{N\to\infty} \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds \leqq \limsup_{N\to\infty} \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds$$

$$\leqq \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_M(s), y > ds + \int_0^T \langle y_M(s), \mathscr{O}(s)\rangle\, ds -$$

$$\int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_M(s), y_M(s)\rangle\, ds + \varepsilon.$$

On fait alors tendre M vers l'infini. On obtient

$$(4.16)\qquad 2\liminf_{N\to\infty} \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds \geqq 2\int_0^T \langle y(s), \mathscr{O}(s)\rangle\, ds$$

et aussi

$$(4.17)\qquad 2\limsup_{N\to\infty} \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds \leqq 2\int_0^T \langle y(s), \mathscr{O}(s)\rangle\, ds + \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, il est clair que (4.16) et (4.17) impliquent

$$(4.18)\qquad \lim_{N\to\infty} \int_0^T \langle \mathscr{A}(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\, ds = \int_0^T \langle y(s), \mathscr{O}(s)\rangle\, ds$$

Comme dans cas classique, il résulte de la monotonie et de l'hémicontinuité des $\mathscr{A}(t)$, que (4.12) et (4.18) impliquent

(4.19) $$\mathcal{O}(t) = \mathscr{A}(t)y(t).$$

On peut alors passer à la limite sans difficultés dans (4.6) et y vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \mathscr{A}y = g(t) + \dfrac{df}{dt} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ce qui n'est autre que (4.1). On a ainsi montré l'existence d'une solution de (4.1), vérifiant $y \in L^p(\mathscr{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathscr{H})$.

D'après (4.8), on voit aussitôt que pour tout t fixé, $y_N(t)$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{H}$, et donc converge fortement vers $\zeta(t)$ dans $\mathscr{H}$, lorsque $N \to \infty$. Si $\phi \in \mathscr{N}(]0, T[)$, on a alors, tenant compte du fait que $y_N(t)$ appartient à un borné de $\mathscr{C}(\mathscr{H})$, et en utilisant le Théorème de Lebesgue

$$\int_0^T y_N(t)\phi(t)dt \to \int_0^T \zeta(t)\phi(t)\,dt.$$

Mais d'après (4.12)

$$\int_0^T y_N(t)\phi(t)dt \to \int_0^T y(t)\phi(t)\,dt$$

d'où, puisque ϕ est quelconque

(4.21) $$\zeta(t) = y(t) \text{ p.p. } t.$$

Or en raisonnant comme plus haut on voit que l'on a

(4.22) $$\forall t \int_0^t E\langle A(s)y_N(s), y_N(s)\rangle\,ds \to \int_0^t E\langle A(s)y(s), y(s)\rangle\,ds.$$

On peut donc passer à la limite dans (4.7), pour t fixé. On obtient (puisque $f_N(t) \to f(t)$ dans $\mathscr{H}$ fort)

(4.23) $$|\zeta(t)|^2_{\mathscr{H}} + 2\int_0^t E\langle A(s)y(s), y(s)\rangle\,ds = E|y_0|^2$$
$$+ 2\int_0^t E\langle g(s), y(s)\rangle\,ds + E|f(t)|^2 - E|f(0)|^2,\ \forall t.$$

Compte tenu de (4.21), on a aussi

$$(4.24) \quad E\,|y(t)|^2 + 2\int_0^t E\langle A(s)y(s), y(s)\rangle\, ds = E\,|y_0|^2$$

$$+ 2\int_0^t E\langle g(s), y(s)\rangle\, ds + E\,|f(t)|^2 - E\,|f(0)|^2, \text{ p.p. } t.$$

Mais (4.24) montre que $t \to E|y(t)|^2$ est p.p. égale à une fonction réelle continue. On peut donc considérer que (4.24) a lieu $\forall t$, ce qui prouve (4.2). Il reste à montrer que $y(t)$ est p.p. égale à une fonction de $\mathscr{C}(\mathscr{X})$. Or en intégrant l'équation (4.1), on obtient que $y(t)$ est p.p. égale à une fonction de $\mathscr{C}(\mathscr{V}')$. Mais alors $y(t)$ est p.p. égale à une fonction de $L^\infty(\mathscr{H}) \times \mathscr{C}(\mathscr{V}')$ et $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{V}'$, avec injection continue. Il résulte alors d'un résultat de Strauss [8], que y est p.p. égale à une fonction continue à valeurs dans $\mathscr{H}$ faible. Comme $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert, ceci, jouit au fait que $|y(\cdot)|_{\mathscr{H}}$ est p.p. égale à une fonction continue du temps, entraine bien que y est p.p. égale à une fonction de $\mathscr{C}(\mathscr{H})$.

4.3. Remarques et Exemples

Dans les exemples, f sera en général un processus de Wiener Hilbertien et g, y_0 des processus Gussiens non correlés avcc f.

L'hypothèse (3.1) sera automatiquement vérifiée. Le modèle pourra s'appliquer à des équations aux dérivées partielles non linéaires comme dans le cas déterministe (cf. J. L. Lions [4]).

Donnons un exemple, parmi bien d'autres; soit Ω un ouvert borné de R^n, et $V = W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles L^p sur Ω, de dérivées premières L^p et nulles sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω; l'espace V est de Banach pour la norme

$$\|y\|_V = \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p_{L^p(\Omega)}\right)$$

Soit $H = L^2(\Omega)$ et A l'opérateur défini par

$$\langle Ay.z\rangle = \sum_{i=1}^h \int_\Omega \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{z}{x_i}dx, \qquad \forall y,\ z \in V.$$

Soit g donné dans $L^2([0,T];\mathscr{H})$ et y_0 donné dans $\mathscr{H}$, processus Gaussien non correlé avec f. Alors le théorème 4.1 assure l'existence et l'unicité de $y \in L^p(\mathscr{V}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{H})$ vérifiant

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^{h} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = g + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.22}$$

$$y(\omega, x, 0) = y_0(\omega, x), \text{ p. p. } x, \text{ p.s. } \omega. \tag{4.23}$$

Le théorème 4.1 et les autres théorèmes préliminaires s'étendent comme le théorème 1.1 à des situations plus générales: on peut en particulier remplacer les opérateurs $A(t)$ par une somme $\sum_{i=1}^{q} A_i(t)$, où les opérateurs $A_i(t)$ envoient V_i dans V_i' ($V_i \subset H \subset V_i'$) et satisfont des hypothèses analogues à celles vérifiées par les $A(t)$ (V remplacé par V_i, p par leur nombre $p_i \geqq 2$, $\forall i$).

Bibliographie

1. A. Bensoussan, *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 1971.
2. H. Brezis, Equations et Inéquations non linéaires dans les Espaces vectoriesl en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **18**, (1968), 115–175.
3. K. Ito, *On stochastic differential equations*, Mem. Math. Ani. Soc. (1951).
4. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier Villars, Paris, 1969.
5. P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, Herman, Paris, 1966.
6. G. J. Minty, *Monotone (non linear) operators in Hilbert spaces*, Duke Math. J. **29**, (1962), 341–346.
7. L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological spaces* (à paraître), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.
8. W. A. Strauss, *On continuity of functions with values in various Banach spaces*, Pacific J. Math. **19** (1966), 543–551.
9. R. Temam, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*, Ann. Mat. Pura Appl. **79** (1968), 191–380.

U E R Mathematiques de la Decision
Universite de Paris — Dauphine
Place de Marechal de Lattre de Tassigny Paris 16
France

et

Mathematiques — Bat. 425
Universite de Paris — Sud
91 — Orsay, France