ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 40, Nos. 3–4, 1981

SUR LES ESPACES DE BANACH CONTENANT $l^1(\tau)$

PAR
MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

Let τ be a cardinal with $\mathrm{cf}(\tau) > \aleph_0$. Then a Banach space E contains a subspace isomorphic to $l^1(\tau)$ if and only if $[0,1]^\tau$ is a continuous image of the unit ball E'_1 of E', provided with the w*-topology. It follows that, foı each cardinal κ, if E'_1 contains a copy of $\beta\kappa$, then E has a quotient isomorphic to $l^\infty(\kappa)$. In this situation we show that E has even a quotient *isometric* to $l^\infty(\kappa)$.

Introduction

Pour un cardinal infini τ, la *cofinalité* $\mathrm{cf}(\tau)$ de τ est le plus petit cardinal τ' tel que τ soit le supremum d'un ensemble de τ' cardinaux $< \tau$.

Soit E un espace de Banach, et E'_1 la boule unité de E' munie de la topologie préfaible $\sigma(E', E)$. Si E contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\tau)$ alors par transposition E'_1 contient un sous-ensemble fermé dont $[0,1]^\tau$ est image continue donc $[0,1]^\tau$ est image continue de E'_1. Nous montrerons que la réciproque est exacte si τ est tel que $\mathrm{cf}(\tau) > \aleph_0$. Ce résultat semble avoir été oublié par les spécialistes, qui ont cherché à caractériser les espaces E contenant une copie de $l^1(\tau)$ par des conditions portant sur l'espace de Banach E' [1, 4]. Si pour $\kappa < \tau$ on a $\kappa^{\mathbf{N}} < \tau$, ce résultat découle de [4], 2-1 et 2-6. (Toutefois le cas le plus interessant est sans doute celui où $\tau = 2^{\aleph_0}$!) La clef sera un lemme combinatoire simple, qui aura d'ailleurs d'autres conséquences intéressantes. Dans le cas où τ est de la forme 2^κ, ceci signifie que $l^\infty(\kappa)$ est quotient de E si et seulement si E'_1 contient une copie de la compactification de Stone–Cech $\beta\kappa$ d'un ensemble discret de cardinal κ. On montrera enfin dans ce cas que E possède un quotient isométrique à $l^\infty(\kappa)$, c'est-à-dire qu'il existe une surjection T de E sur $l^\infty(\kappa)$ telle que pour $x \in l^\infty(\kappa)$, on a $\|x\| = \mathrm{Inf}\{\|y\|; T(y) = x\}$.

Received December 8, 1980 and in revised form March 30, 1981

I. Le résultat combinatoire

Soit Ω un ensemble. On dira [6] qu'une famille de couples $(X_i, Y_i)_{i\in I}$ de parties de Ω est indépendante si pour tous ensembles finis disjoints J, J' de I on a

$$Z(J,J') = \bigcap_{i\in J} X_i \cap \bigcap_{i\in J'} Y_i \neq \varnothing.$$

THÉORÈME 1. *Soient Ω un ensemble, I un ensemble tel que $\tau = \operatorname{card} I$ soit tel que $\operatorname{cf}(\tau) > \aleph_0$, et $(X_i, Y_i)_{i\in I}$ une famille indépendante de couples de parties de Ω. Soit J un ensemble avec $\operatorname{card} J < \operatorname{cf}(\tau)$. Soient des parties $(X_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ et $(Y_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ de Ω avec $X_{i,j} \subset X_i$ et $Y_{i,j} \subset Y_j$. Supposons que pour chaque i il existe une partie finie F_i de J telle que*

$$X_i \times Y_i \subset \bigcup_{j\in F_i} X_{i,j} \times Y_{i,j}. \tag{1}$$

Alors il existe $j \in J$ et une partie $I' \subset I$, avec $\operatorname{card} I' = \tau$ telle que la famille $(X_{i,j}, Y_{i,j})_{i\in I'}$ soit indépendante.

Ce résultat serait très aisé si l'on supposait que $\Omega = \{0,1\}^I$ et que $X_i = \{x \in \Omega;\ x(i) = 0\}$, $Y_i = \Omega \setminus X_i$. On utiliserait alors le théorème d'Erdös–Rado comme cela est maintenant classique [1, 3, 4, 7]. Mais il va falloir procéder un peu différemment.

PREUVE. Puisque $\operatorname{card} J < \operatorname{cf}(\tau)$, on se ramène au cas où $J = [1, n]$ est finie, et où $F_i = [1, n]$ pour tout $i \in I$. On dira qu'un sous-ensemble H de Ω possède la propriété (P) s'il existe des sous-ensembles finis disjoints J, J' de I tels que pour tous sous-ensembles finis L, L' de I, disjoints, et disjoints de $J \cup J'$, on a, avec les notations précédentes $Z(J \cup L, J' \cup L') \cap H \neq \varnothing$.

1ère Etape. Soit H un ensemble possèdant (P). Soient J et J' comme dans la définition précédente, et soit $i \in I \setminus (J \cup J')$. On va montrer qu'alors il existe $p \leqq n$ tels que chacun des deux ensembles $H \cap X_{i,p}$ et $H \cap Y_{i,p}$ possède la propriété (P). En effet, dans le cas contraire, on peut par induction sur $p \leqq n$, construire des ensembles disjoints L_p, L'_p de I, tels que si on pose $M_p = J \cup \bigcup_{r\leq p} L_r$ et $M'_p = J' \cup \bigcup_{r\leq p} L'_r$, M_p et M'_p soient disjoints et disjoints de J, J', ne contiennent pas i, et que l'un des deux ensembles $Z(M_p \cup \{i\}, M'_p) \cap H \cap X_{i,p}$; $Z(M_p, M'_p \cup \{i\}) \cap H \cap Y_{i,p}$ soit vide. Alors, puisque $J \subset M_n$, $J' \subset M'_n$, et que $i \notin M_n \cup M'_n$, il existe $x \in Z(M_p \cup \{i\}, M'_p) \cap H \subset X_i$ et $y \in Z(M_p, M'_p \cup \{i\}) \cap H \subset Y_i$. D'après (1), il existe $p \in [1, n]$ tel que $x \in X_{i,p}$, $y \in Y_{i,p}$. Mais ceci montre que

$$x \in Z(M_p, M'_p) \cap H \cap X_{i,p} = Z(M_p \cup \{i\}, M'_p) \cap H \cap X_{i,p},$$

$$y \in Z(M_p, M'_p) \cap H \cap Y_{i,p} = Z(M_p, M'_p \cup \{i\}) \cap H \cap Y_{i,p},$$

ce qui est absurde.

2ème Etape: la construction. On dira qu'une famille $(H_l)_{l \in L}$ de parties de X est ***compatible*** si elle est stable par intersections finies et si chaque ensemble H_l possède la propriété (P).

Pour une partie $A \subset [1, n]$ et une partie H de X possèdant la propriété (P), soit

$$I(A, H) = \{i \in I; \forall p \in A, \text{l'un des ensembles } H \cap X_{i,p}, H \cap Y_{i,p} \text{ ne possède pas la propriété (P)}\}.$$

Soit $A \subset [1, n]$ un ensemble de cardinal maximum tel qu'il existe une famille compatible $(H_l)_{l \in L}$, avec $\operatorname{card} L < \tau$, de sorte que $\operatorname{card} \bigcup_{l \in L} I(A, H_l) = \tau$.

D'après la première étape, $A \neq [1, n]$. Fixons $p \in [1, n] \setminus A$. Alors la maximalité de A montre qu'il existe I', $\operatorname{card} I' = \tau$, avec $\forall i \in I'$, $\forall l \in L$, $H_l \cap X_{i,p}$ et $H_l \cap Y_{i,p}$ possèdent la propriété (P).

Pour un ensemble H possèdent la propriété (P), et des parties finies disjointes J, J' de I, soit

$$T(H, J, J') = H \cap \bigcap_{i \in J} X_{i,p} \cap \bigcap_{i \in J'} Y_{i,p}.$$

Si $T(H, J, J')$ possède la propriété (P), soit

$$U(H, J, J') = \{i \in I'; \text{l'un des ensembles } T(H, J, J') \cap X_{i,p}, T(H, J, J') \cap Y_{i,p} \text{ ne possède pas la propriété (P)}\}.$$

On va par induction construire pour $\alpha < \tau$ des $i_\alpha \in I'$ tels que pour deux parties finies disjointes J, J' de $\{i_\alpha\}_{\alpha < \tau}$ et $l \in L$, $T(H_l, J, J')$ possède la propriété (P). Cela est immédiat, si l'on montre que pour une partie $I'' \subset I$, telle que $\operatorname{card} I'' < \tau$ et que pour toutes parties finies disjointes J, J' de I'', $T(H_l, J, J')$ possède la propriété (P) pour tout $l \in L$, on n'a pas

$$(*) \qquad \operatorname{card} \bigcup \{U(H_l, J, J'); J, J' \text{ disjointes finies} \subset I'', l \in L\} = \tau.$$

1er cas. $\operatorname{cf}(\tau) < \tau$. Soit $(\tau_\alpha)_{\alpha < \operatorname{cf}(\tau)}$ une suite cofinale dans τ. Pour chaque α il existe des parties finies J_α, J'_α disjointes de I' telles que $U(J, J_\alpha, J'_\alpha) \geqq \beta_\alpha$ (car sinon l'ensemble considéré en (*) aurait un cardinal $< \beta_\alpha . \operatorname{cf}(\tau)$).

On a $\operatorname{cf}(\operatorname{cf}(\tau)) = \operatorname{cf}(\tau) > \aleph_0$. Le théoréme d'Erdös–Rado [2] appliqué aux ensembles $L_\alpha = J_\alpha \cup J'_\alpha$ montre qu'il existe un ensemble $A \subset \mathrm{cf}(\tau)$, cofinal, et une partie finie $N \subset I$ telle que

$$\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta \Rightarrow L_\alpha \cap L_\beta = N.$$

On peut alors supposer qu'il existe $J, J' \subset N$, avec

$$\alpha \in A \Rightarrow J_\alpha \cap N = J,\ J'_\alpha \cap N = J'.$$

Pour F finie, $F \subset A$, posons $J_F = \bigcup_{\alpha \in F} J_\alpha$, $J'_F = \bigcup_{\alpha \in F} J'_\alpha$. Ce qui précède montre que $J_F \cap J'_F = \emptyset$. Ceci montre que la famille des $T(H_l, J_F, J'_F)$ pour $l \in L$, F finie dans I'', est compatible. Mais ceci contredit la maximalité de card A.

2ème cas. $\mathrm{cf}(\tau) = \tau$. Alors il existe $l \in L$, $J, J' \subset I''$, finies disjointes avec $\mathrm{card}(U(H_l, J, J')) = \tau$ ce qui contredit la maximalité de A.

II. Applications

Pour un cardinal κ, on désigne par $\beta\kappa$ la compactification de Stone–Čech d'un ensemble discret de cardinal κ. Puisque $[0,1]^{2^\kappa}$ contient une partie dense de cardinal κ, si un espace compact contient une copie de $\beta\kappa$ il s'envoie continuement sur $[0,1]^{2^\kappa}$, et la réciproque est aussi exacte, découlant du fait que $[0,1]^{2^\kappa}$ contient une copie de $\beta\kappa$, que l'on peut relever. Le résultat suivant, quoique abstrait, est crucial.

PROPOSITION 2. *Soit τ un cardinal régulier, et K un espace compact dont $[0,1]^\tau$ soit image continue. Soient $(E_j)_{j \in J}$ des sous-espaces de $\mathscr{C}(K)$ tels que $\bigcup_{j \in J} E_j$ sépare K. Si* $\mathrm{card}\, J < \mathrm{cf}(\tau)$, *il existe $j \in J$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, I' tel que* $\mathrm{card}\, I' = \tau$, *des $(f_i)_{i \in I'}$, $f_i \in E_j$, tels que les couples $(\{f_i \leqq a\}, \{f_i \geqq b\})_{i \in I}$ soient indépendants.*

PREUVE. Soit φ une surjection continue de X sur $[0,1]^\tau$. Pour $\alpha < \tau$, soient

$$X_\alpha = \varphi^{-1}(\{x \in [0,1]^\tau ; x(\alpha) = 0\}); \qquad Y_\alpha = \varphi^{-1}(\{x \in [0,1]^\tau ; x(\alpha) = 1\}).$$

Les couples $(X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha < \tau}$ sont indépendants. Pour chaque α, il existe un ensemble fini $(f_{\alpha,l})_{l \leqq n_\alpha}$ de fonctions de $\bigcup_{j \in J} E_j$, et des rationels $a_{\alpha,l} < b_{\alpha,l}$, tels que

$$X_\alpha \times Y_\alpha \subset \bigcup_{l \leqq n_\alpha} \{f_{\alpha,l} \leqq a_{\alpha,l}\} \times \{f_{\alpha,l} \geqq b_{\alpha,l}\}.$$

Le conclusion résulte alors sans peine du théorème 1.

THÉORÈME 3. *Soient τ un cardinal tel que* $\mathrm{cf}(\tau) > \aleph_0$, $\lambda < \mathrm{cf}(\tau)$, $(K_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ *des espaces compacts. Alors $[0,1]^\tau$ est image continue de $K = \Pi_{\alpha < \lambda} K_\alpha$ si et seulement s'il est image continue de l'un des K_α. En particulier si τ est de la forme 2^κ, K_α contient une copie de $\beta\kappa$ si et seulement si l'un des K_α contient une copie de $\beta\kappa$.*

PREUVE. On identifie chaque $\mathscr{C}(K_\alpha)$ à un sous-espace de $\mathscr{C}(K)$, et on applique le résultat précédent, qui montre qu'il existe $\alpha < \tau$, un ensemble I avec $\operatorname{card} I = \tau$, $a < b$, des $(f_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{C}(K_\alpha)$ tels que si on pose $g_i = \operatorname{Sup}(a, \operatorname{Inf}(f_i, b))$, l'image de $\mathscr{C}(K)$ par l'application $x \to (g_i(x))_{i\in I}$ contienne $\{a, b\}^I$. Ceci montre le résultat, car $[0,1]^\tau$ est injectif et image continue de $\{a, b\}^I$.

Le résultat suivant permet en particulier de simplifier [8] et [9].

THÉORÈME 4. *Soient τ un cardinal tel que* $\operatorname{cf}(\tau) > \aleph_0$, *et E un espace de Banach. Soit A une partie totale de E. Alors si E_1' s'envoie continuement sur $[0,1]^\tau$, il existe une partie $B \subset A$ de cardinal τ, et équivalente à la base canonique de $l^1(\tau)$. Si τ est de la forme 2^κ, alors E_1' contient $\beta\kappa$ si et seulement si $l^\infty(\kappa)$ est quotient de E.*

PREUVE. On applique la proposition 2 avec $K = E_1'$, et $A_n = \{x \in A, \|x\| \leqq n\}$ pour parties séparant E. La première assertion résulte alors de [4]. La seconde résulte du fait que si E contient une copie de $l^1(\tau)$, alors puisque $l^\infty(\kappa)$ est injectif et image continue de $l^1(\tau)$, il est image continue de E, et que réciproquement, puisque $l^\infty(\kappa)$ contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\tau)$, et que l'on peut relever de tels espaces, si E possède $l^\infty(\kappa)$ pour quotient, il contient $l^1(\tau)$. C.Q.F.D.

Il est naturellement possible d'exploiter les résultats précédents de multiples façons. Par exemple si E est un espace de Banach réticulé, et E_1' a $[0,1]^\tau$ pour image continue, il existe un isomorphisme *positif* de $l^1(\tau)$ dans E. Si E_1' contient $\beta\kappa$, $l^\infty(\kappa)$ est quotient de K par une application *positive*. Voici une autre application moins évidente.

PROPOSITION 5. *Soit K un espace compact et τ un cardinal quelconque. Alors si l'ensemble $M_a(K)$ des mesures atomiques sur K de masse $\leqq 1$ contient un ensemble vaguement homéomorphe à $\beta\tau$, K contient une copie de $\beta\tau$.*

PREUVE. Pour $n, p \in \mathbf{N}$, soit A_n^p l'ensemble des $\mu \in M_a(K)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\lambda + \nu$, où $\|\nu\| \leqq p^{-1}$ et λ est atomique et charge au plus n points. C'est un fermé vague, et $M_a(K) = \bigcup_n A_n^p$ pour tout p. L'ensemble $\check{\tau}$ des éléments de $\beta\tau$ qui ne sont portés par aucune partie de cardinal $< \tau$ est compact, et on montre sans peine qu'une intersection dénombrable non vide d'ouverts y contient une copie de $\beta\tau$. Il existe donc une suite $n(p)$ d'entiers telle que $\bigcap_p A_{n(p)}^p$ contienne une copie de $\beta\tau$. Soit

$$B = \left\{(\alpha_n) \in l_1(\mathbf{N}), \forall p \sum_{i \geqq n(p)} |\alpha_i| < p^{-1}\right\}.$$

C'est un compact de $l_1(\mathbf{N})$. L'application φ de $K^{\mathbf{N}} \times B$ dans $M_a(K)$ qui envoie

$((x_n),(\alpha_n))$ sur $\Sigma_n \alpha_n \delta_{x_n}$ est continue lorsque $M(K)$ est muni de la topologie vague, et son image contient $\bigcap_p A^p_{n(p)}$, donc une copie de $\beta\tau$, donc K contient $\beta\tau$ d'après le théorème 3. C.Q.F.D.

III. Quotient de $l^\infty(\tau)$

La première assertion du résultat suivant est annoncée dans [5].

Théorème 6. *Soit τ un cardinal infini quelconque et soit $|||\,.\,|||$ une norme sur $l^\infty(\tau)$, équivalente à la norme usuelle $\|\,.\,\|$. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour chaque n, il existe un sous-espace E_n de $l^\infty(\tau)$, isomorphe à $l^\infty(\tau)$, tel que sur E_n*

$$(\delta - 2^{-n})\|\,.\,\| \leqq |||\,.\,||| \leqq (\delta + 2^{-n})\|\,.\,\|.$$

De plus $l^\infty(\tau)$, $|||\,.\,|||$ possède un quotient isométrique à $l^\infty(\tau)$.

Preuve. Sur $l^{\infty\prime}(\tau)$ on désigne encore par $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ les normes duales de $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ respectivement. Chaque $x \in l^\infty(\tau)$ peut être vu comme une mesure finiement additive sur τ. On désigne par $|x|$ sa variation. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties de τ de cardinal τ. Pour $I \in \mathcal{T}$, soit

$$a(I) = \operatorname{Sup}\left\{\frac{|x|(I)}{|||\,x\,|||}\ ;\ x \in l^\infty(\tau)\right\},$$

$$b(I) = \operatorname{Inf}\{a(J), J \in \mathcal{T}, J \subset I\}.$$

Soit I_n une suite décroissante de $\mathcal{T}$ telle que $a(I_{n+1}) \leqq b(I_n) + 2^{-n}$ pour tout n. On peut supposer que card $I_n \setminus I_{n+1} = \tau$.

Pour chaque n, soit $(J_{n,\alpha})_{\alpha<\tau}$ une partition de $A_n \setminus A_{n+1}$ en τ ensembles de cardinal τ. Pour chaque n, α, soit $x_{n,\alpha} \in l^{\infty\prime}(\tau)$ tel que

$$|||\,x_{n,\alpha}\,||| = 1, \qquad |x_{n,\alpha}|(J_{n,\alpha}) \geqq a(J_{n,\alpha}) - 2^{-n}.$$

Soit $L_{n,\alpha} \subset J_{n,\alpha}$ tel que

$$x_{n,\alpha}(\chi_{L_{n,\alpha}} - \chi_{J_{n,\alpha}\setminus L_{n,\alpha}}) \geqq a(J_{n,\alpha}) - 2^{-n+1}.$$

Pour tout α, n, définissons l'élément $u_{\alpha,n}$ de $l^\infty(\tau)$ par $u_{\alpha,n} = \chi_L - \chi_M$ où $L = \bigcup_{p\geqq n} L_{p,\alpha}$; $M = \bigcup_{p\geqq n} J_{p,\alpha} \setminus L_{p,\alpha}$. Pour $a = (a_\alpha) \in l^\infty(\tau)$, soit $\varphi_n(a) = \Sigma_\alpha a_\alpha u_{\alpha,n}$, le sens à donner à cette série étant évident, les $u_{\alpha,n}$ ayant des supports disjoints.

Soit $\delta = \sup_n b(I_n)$. Pour tout n on a $a(I_n) \leqq b(I_{n-1}) + 2^{-n+1} \leqq \delta + 2^{-n+1}$. Pour $a \in l^\infty(\tau)$ et $x \in l^{\infty\prime}(\tau)$, on a

$$|x(\varphi_n(a))| \leqq \|\varphi_n(a)\|\,|x|(I_n) \leqq \|a\|\,.\,|||\,x\,|||\,.(\delta + 2^{-n+1})$$

d'où $|||\,\varphi_n(a)\,||| \leqq \|a\|\,.(\delta + 2^{-n+1})$.

D'autre part, pour tout α, et tout $p \geqq n+1$ on a

$$|x_{p,\alpha}|(J_{p,\alpha}) \geqq a(J_{p,\alpha}) - 2^{-p} \geqq b(I_{n-1}) - 2^{-p} \geqq a(I_n) - 2^{-n+1}$$
$$\geqq |x_{p,\alpha}|(I_n) - 2^{-n+1}$$

d'où $|x_{p,\alpha}|(I_n \setminus J_{p,\alpha}) \leqq 2^{-n+1}$. Un calcul analogue montre que

$$\delta - 2^{-n+1} \leqq x_{p,\alpha}(\chi_{L_{p,\alpha}} - \chi_{J_{p,\alpha} \setminus L_{p,\alpha}}) \leqq \delta + 2^{-n+1}$$

d'où sans peine

$$|x_{p,\alpha}(\varphi_n(a)) - \delta_{a_\alpha}| \leqq \|a\| 2^{-n+3}. \tag{2}$$

Ceci étant vrai pour tout α, on a $|||\varphi(a)||| \geqq \|a\|(\delta - 2^{-n+3})$ ce qui prouve la première assertion. Pour prouver la seconde, soit pour tout α une valeur d'adhérence vague de $(x_{p,\alpha})_p$, et $\theta : l^\infty(\tau) \to l^\infty(\tau)$ donné par $\theta(a) = (x_\alpha(a))_\alpha$. Puisque $|||x_{\alpha,n}||| = 1$, on a $|||x_\alpha||| \leqq 1$ d'où $\|\theta(a)\| \leqq |||a|||$. D'autre part (2) montre que

$$\|\theta(\delta^{-1}\varphi_n(a)) - a\| \leqq \delta^{-1}\|a\| 2^{-n+3}.$$

Puisque $|||\delta^{-1}\varphi_n(a)||| \leqq \|u\|(1 + \delta 2^{-n+1})$ il est alors aisé de conclure de façon standard.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Argyros et S. Negropontis, *Universal embeddings of l_α^1 into (X) and $L^*(\mu)$*, *Topology*, Vol. 1, 4th Colloquium Budapest 1978, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 23, 1980, pp. 75–128.

2. P. Erdös et R. Rado, *Intersection theorems for systems of sets*, J. London Math. Soc. **35** (1960), 85–90; *Part II*, J. London Math. Soc. **44** (1969), 467–479.

3. J. Hagler, *On the structure of S and $\mathscr{C}(S)$ for S dyadic*, Trans. Amer. Math. Soc. **214** (1975), 415–428.

4. R. Haydon, *On Banach spaces containing $l_1(\tau)$ and types of measures on compact spaces*, Israel J. Math. **28** (1977), 313–324.

5. J. R. Partington, *Equivalent norms on spaces of bounded functions*, Israel J. Math. **35** (1980), 205–209.

6. H. P. Rosenthal, *A characterisation of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **71** (1974), 2411–2413.

7. M. Talagrand, *Non existence de certaines sections mesurables et contre-exemples en théorie du relèvement*, Proceedings "Measure Theory, Oberwolfach 1979", Lecture Notes in Math. **794**, Springer-Verlag, 1980.

8. M. Talagrand, *Un nouveau $\mathscr{C}(K)$ de Grothendieck*, Israel J. Math. **37** (1980), 181–191.

9. M. Talagrand, *Sur les mesures définies par une application Pettis-integrable*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 475–483.

EQUIPE D'ANALYSE — TOUR 46
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75230 — PARIS CEDEX 05 FRANCE