ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 29, No. 4, 1978

PRODUITS INFINIS DE RESOLVANTES

PAR
H. BREZIS ET P. L. LIONS

ABSTRACT
This paper is concerned with the convergence of the sequence $x_n = (I+\lambda_n A)^{-1}x_{n-1}$ where A is maximal monotone and $\lambda_n > 0$. Various assumptions on A and λ_n are considered.

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur maximal monotone. On étudie la convergence de produits infinis de la forme $\Pi_{p=1}^{\infty}(I+\lambda_p A)^{-1}x$ où $\{\lambda_p\}$ est une suite de réels positifs; plus précisément on définit par récurrence la suite $x_n = (I+\lambda_n A)^{-1}x_{n-1}$, $x_0 = x$. Au paragraphe I on suppose que A est linéaire; on montre d'abord que si $\Sigma\lambda_p^2 = \infty$ alors $x_n \to Px$ — projection orthogonale de x sur $N(A)$ et $|Ax_n| \leqq (\Sigma_{p=1}^{n}\lambda_p^2)^{-1/2}|x|$.

On précise ce résultat dans deux cas particuliers importants. Lorsque $A^* = A$, il suffit de supposer que $\Sigma\lambda_p = \infty$ et l'on obtient

$$|Ax_n| \leqq \left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p\right)^{-1}|x|.$$

Lorsque $R(A)$ est fermé on montre par exemple que si $\lambda_p \equiv 1$ alors les convergences de $|x_n - Px|$ et de $|Ax_n|$ vers zéro sont géométriques. On indique enfin divers exemples et contrexemples.

Au paragraphe II on suppose que A est nonlinéaire et que $0 \in R(A)$; on montre d'abord que si $\Sigma\lambda_p^2 = \infty$, alors x_n converge faiblement vers une limite $l \in A^{-1}\{0\}$ et $|Ax_n| \to 0$. Lorsque $A = \partial\varphi$ est le sous-différentiel d'une fonction convexe, il suffit de supposer que $\Sigma\lambda_p = \infty$; si de plus φ est paire, alors x_n converge fortement vers l.

I — Etude de $\Pi_p\,(I+\lambda_p A)^{-1}$ pour A linéaire

I.1 *Le cas général*

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{R}$. Soit $A: D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire maximal monotone de domaine dense. On note $N(A)$ le noyau de A et

Received July 8, 1977

$R(A)$ l'image de A, de sorte que $H = \overline{R(A)} \oplus N(A)$ (somme directe hilbertienne). On désigne par P la projection orthogonale sur $N(A)$.

Soit $\{\lambda_n\}_{n \geqq 1}$ une suite de réels, $\lambda_n > 0$; étant donné $x \in H$, on définit par récurrence

(1) $$x_n = (I + \lambda_n A)^{-1} x_{n-1}, \qquad x_0 = x.$$

On pose

$$\mu_n = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p \quad \text{et} \quad \nu_n = \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p^2 \right)^{1/2}.$$

Proposition 1. *On suppose que* $\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^2 = \infty$. *Alors*

(2) $$\lim_{n \to \infty} x_n = Px,$$

(3) $$|Ax_n| \leqq \frac{1}{\nu_n} |x|.$$

Démonstration. On a

$$x_n + \lambda_n A x_n = x_{n-1}.$$

D'où il résulte que

(4) $$|x_n|^2 + \lambda_n^2 |Ax_n|^2 \leqq |x_{n-1}|^2$$

et par sommation il vient

(5) $$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^2 |Ax_p|^2 \leqq |x|^2.$$

Comme la suite $|Ax_n|$ est décroissante on obtient (3).

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut écrire x sous la forme

(6) $$x = Ay + r + Px \quad \text{avec } |r| < \varepsilon$$

et donc

$$x_n = Ay_n + r_n + Px \quad \text{avec} \quad |r_n| < \varepsilon,$$

avec $y_n = (I + \lambda_n A)^{-1} y_{n-1}$, $y_0 = y$ et $r_n = (I + \lambda_n A)^{-1} r_{n-1}$, $r_0 = r$. Par suite

$$|x_n - Px| \leqq |Ay_n| + \varepsilon \leqq 2\varepsilon$$

pour n assez grand puisque $Ay_n \to 0$ d'après ce qui précède.

REMARQUE 1. Pour toute suite (λ_n) telle que $\Sigma_{p=1}^{\infty}\lambda_p^2<\infty$ et $\Sigma_{p=1}^{\infty}\lambda_p=\infty$ on peut construire un exemple tel que x_n ne converge pas.

EXEMPLE. Dans $H=\mathbf{R}^2$ on considère A = rotation de $+\pi/2$. En notation complexe on a donc $x_n = x\,\Pi_{p=1}^{n}(1+i\lambda_p)^{-1}$ et $|Ax_n|=|x_n|=|x|\,\Pi_{p=1}^{n}(1+\lambda_p^2)^{-1/2}$ converge vers une limite >0 si $x\neq 0$. Par suite $x_n=|x_n|\exp(-i\,\Sigma_{p=1}^{n}\theta_p)$ avec $tg\theta_n=\lambda_n$ $(0<\theta_n<\pi/2)$ ne converge jamais puisque $\Sigma_{p=1}^{\infty}\theta_p=\infty$.

REMARQUE 2. Soit $f\in R(A)$ et soit $X=\{u\in D(A);\ Au=f\}$. On désigne par P_X la projection orthogonale sur X. Alors sous l'hypothèse de la proposition 1 la suite définie par récurrence par

$$x_n=(I+\lambda_nA)^{-1}(x_{n-1}+\lambda_nf),\qquad x_0=x \tag{7}$$

vérifie $\lim_{p\to\infty}x_n=P_Xx$ et $|Ax_n-f|\leqq(1/\nu_n)\mathrm{dist}(x,X)$. En effet on a

$$x_n-P_Xx=\prod_{p=1}^{n}(I+\lambda_pA)^{-1}(x-P_Xx) \tag{8}$$

et donc aussi

$$Ax_n=A\prod_{p=1}^{n}(I+\lambda_pA)^{-1}(x-P_Xx). \tag{9}$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.

Considérons maintenant le cas particulier où $\lambda_n\equiv 1$.

PROPOSITION 2. *Pour tout $x\in H$ on a*

$$\|A(I+A)^{-n}\|\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\quad et\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,|A(I+A)^{-n}x|=0. \tag{10}$$

Si de plus $x\in R(A^k)+N(A)$ avec k entier $\geqq 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty}n^{k/2}|(I+A)^{-n}x-Px|=0\quad et\quad \lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}(k+1)}|A(I+A)^{-n}x|=0. \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. La première assertion de (10) résulte de la Proposition 1. Comme $\Sigma_{p=1}^{\infty}|Ax_p|^2\leqq|x|^2$, on en déduit que $\sum_{p=[n/2]}^{n}|Ax_p|^2\to 0$ quand $n\to\infty$. Donc $\frac{1}{2}n\,|Ax_n|^2\to 0$ quand $n\to\infty$. Pour tout entier $k\geqq 1$ on a

$$\begin{aligned}|A^k(I+A)^{-nk}x|&\leqq\|A^{k-1}(I+A)^{-n(k-1)}\|\,|A(I+A)^{-n}x|\\&\leqq\frac{1}{n^{\frac{1}{2}(k-1)}}|A(I+A)^{-n}x|.\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} n^{k/2}|A^k(I+A)^{-nk}x| = 0$.

Enfin si p est un entier, on pose $n = [p/k]$ et l'on a alors

$$\begin{aligned} p^{k/2}|A^k(I+A)^{-p}x| &\leqq p^{k/2}|A^k(I+A)^{-nk}x| \\ &\leqq [k(n+1)]^{k/2}|A^k(I+A)^{-nk}x|. \end{aligned} \tag{12}$$

Lorsque $p \to \infty$, alors $n \to \infty$ et le dernier terme de (12) tend vers zéro. On en déduit (11).

Remarque 3. Pour tout entier $k \geqq 1$, l'ensemble $R(A^k) + N(A)$ est dense dans H. En effet $R(A^k)$ coincide avec $D(B^k)$ où $B = (A_{|R(A)\cap D(A)})^{-1}$ est un opérateur maximal monotone dans $\overline{R(A)}$ de domaine $D(B) = R(A)$; on sait alors que $D(B^k) = R(A^k)$ est dense dans $\overline{R(A)}$.

Remarque 4. La convergence de x_n vers Px peut être arbitrairement lente en générale — même si A est autoadjoint (cf. Remarque 6). D'autre part, pour tout $\alpha > 1/2$ on peut construire un exemple tel que $|A(I+A)^{-n}| \geqq C/n^\alpha$.

Exemple. Soit $H = l_2(\mathbf{C})$ et soit $A(u^1, u^2, \cdots, u^k, \cdots)$

$$\left(iu^1, \frac{iu^2}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{iu^k}{\sqrt{k}}, \cdots\right)$$

(noter que A peut aussi être réalisé comme un opérateur monotone sur $l_2(\mathbf{R}) \times l_2(\mathbf{R})$). Partant de $x = (x^k)_{k\geqq 1}$ avec $x^k = 1/k^\alpha$ et $\alpha > 1/2$ on a

$$|Ax_n|^2 \geqq \sum_{k\geqq n} \frac{1}{(1+1/n)^n} \frac{1}{k^{1+2\alpha}} \sim \frac{C}{n^{2\alpha}}.$$

I.2 *Cas où A est autoadjoint (ou angle borné)*

Lorsque A est autoadjoint (ou plus généralement angle borné) on peut améliorer les estimations précédentes. En particulier il suffit de supposer que $\Sigma_{p=1}^\infty \lambda_p = \infty$ (au lieu de l'hypothèse $\Sigma_{p=1}^\infty \lambda_p^2 = \infty$ qui est plus restrictive).

On suppose que A est angle borné i.e. il existe $a \geqq 0$ tel que

$$\forall x, y \in D(A) \quad |(Ax, y) - (Ay, x)| \leqq 2a(Ax, x)^{1/2}(Ay, y)^{1/2}. \tag{13}$$

Théorème 3. *On suppose que* $\Sigma_{p=1}^\infty \lambda_p = \infty$. *Alors la suite* x_n *définie par* (1) *vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = Px, \tag{14}$$

$$|Ax_n| \leqq \frac{C}{\mu_n}|x|, \tag{15}$$

où C dépend seulement de a.

DÉMONSTRATION. On sait (cf. [2] Proposition 1) que

$$\forall x, y \in D(A),\ \forall \alpha > 0\ \ (Ax, y) \leqq \frac{\sigma}{\alpha}(Ax, x) + \alpha(Ay, y) \tag{16}$$

avec $\sigma = (1/4)(1 + a^2)$.

En particulier si $x \in D(A^2)$ on a

$$|Ax|^2 \leqq \frac{\sigma}{\alpha}(Ax, x) + \alpha(A^2x, Ax).$$

Choisissant $x = x_n$, il vient

$$\begin{aligned}\lambda_n|Ax_n|^2 &\leqq \frac{\sigma}{\alpha}(x_{n-1} - x_n, x_n) + \alpha(Ax_{n-1} - Ax_n, Ax_n)\\ &\leqq \frac{\sigma}{2\alpha}(|x_{n-1}|^2 - |x_n|^2) + \alpha(|Ax_{n-1}|^2 - |Ax_n|^2).\end{aligned}$$

Remplaçant α par $\alpha\mu_{n-1}$ et multipliant par μ_{n-1} on obtient

$$\lambda_n\mu_{n-1}|Ax_n|^2 \leqq \frac{\sigma}{2\alpha}(|x_{n-1}|^2 - |x_n|^2) + \alpha\mu_{n-1}^2(|Ax_{n-1}|^2 - |Ax_n|^2)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sigma}{2\alpha}(|x_{n-1}|^2 - |x_n|^2) + \alpha(\mu_{n-1}^2|Ax_{n-1}|^2 - \mu_n^2|Ax_n|^2)\\ &\quad + \alpha(\mu_n^2 - \mu_{n-1}^2)|Ax_n|^2.\end{aligned} \tag{17}$$

Mais $\mu_n^2 - \mu_{n-1}^2 = \lambda_n(2\mu_{n-1} + \lambda_n)$, et donc choisissant $\alpha = 1/4$ dans (17) on est conduit à

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\lambda_n\mu_{n-1}|Ax_n|^2 &\leqq 2\sigma(|x_{n-1}|^2 - |x_n|^2) + \tfrac{1}{4}(\mu_{n-1}^2|Ax_{n-1}|^2 - \mu_n^2|Ax_n|^2)\\ &\quad + \tfrac{1}{4}\lambda_n^2|Ax_n|^2\end{aligned}$$

ce qui implique par sommation

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sum_{p \geqq 2}\lambda_p\mu_{p-1}|Ax_p|^2 &\leqq 2\sigma|x_1|^2 + \tfrac{1}{4}\lambda_1^2|Ax_1|^2 + \tfrac{1}{4}\sum_{p \geqq 2}\lambda_p^2|Ax_p|^2\\ &\leqq (2\sigma + \tfrac{1}{4})|x|^2 \quad \text{(grâce à (5)).}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(18)\qquad 2\sum_{p\geqq 2}\lambda_p\mu_{p-1}|Ax_p|^2+\sum_{p\geqq 1}\lambda_p^2|Ax_p|^2\leqq(8\sigma+2)|x|^2.$$

Notant que $2\sum_{p=2}^n\lambda_p\mu_{p-1}+\sum_{p=1}^n\lambda_p^2=\mu_n^2$ et utilisant le fait que la suite $|Ax_n|$ est décroissante on déduit de (18) que $\mu_n^2|Ax_n|^2\leqq(8\sigma+2)|x|^2$ et (15) en résulte.

Enfin (14) se déduit de (15) comme (2) se déduit de (3).

Considérons à présent le cas particulier où $\lambda_n\equiv 1$.

PROPOSITION 4. *On suppose que* A *vérifie* (13), *alors on a* $\forall x\in H$,

$$(19)\qquad |A(I+A)^{-n}x|\leqq\frac{C}{n}|x|\quad et\quad \lim_{n\to\infty} n\,||A(I+A)^{-n}x|=0$$

(*où* C *dépend seulement de* a).

Si de plus $x\in R(A^k)+N(A)$ $(k\geqq 1)$ *alors*

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty} n^k|(I+A)^{-n}x-Px|=0\quad et\quad \lim_{n\to\infty} n^{k+1}|A(I+A)^{-n}x|=0.$$

DÉMONSTRATION. Appliquant (15) on obtient la première partie de (19). Noter que d'après (18) on a $\sum_{p=1}^\infty p|Ax_p|^2<\infty$, ce qui conduit à $\lim_{n\to\infty}n|Ax_n|=0$. On prouve (20) comme dans la démonstration de la Proposition 2.

REMARQUE 5. Appliquant (15) avec $\lambda_k=t/n$ $\forall k$, on obtient $\forall x\in H$, $\forall n\geqq 1$ et $\forall t>0$,

$$\left|A\left(I+\frac{t}{n}A\right)^{-n}x\right|\leqq\frac{C}{t}|x|.$$

Passant à la limite quand $n\to\infty$ on trouve $|AS(t)x|\leqq(C/t)|x|$ où $S(t)$ désigne le semi-groupe engendré par $-A$; on retrouve ainsi le fait que $S(t)$ est un semi-groupe analytique (cf. par exemple [2]).

REMARQUE 6. La convergence de $x_n=(I+A)^{-n}x$ vers Px peut être arbitrairement lente même si $A^*=A$.

EXEMPLE. Soit $H=l_2(\mathbf{R})$ et soit $A(u^1,u^2,\cdots,u^k,\cdots)=(u^1,u^2/2,\cdots,u^k/k,\cdots)$.

On part de $x=(x^k)_{k\geqq 1}$ où $x^k=(\delta_k-\delta_{k+1})^{1/2}$ et δ_k est une suite arbitraire qui décroit vers zéro.

On a

$$|x_n|^2=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(1+1/k)^{2n}}(\delta_k-\delta_{k+1})\geqq\sum_{k\geqq n}\frac{1}{(1+1/n)^{2n}}(\delta_k-\delta_{k+1})\geqq\frac{1}{(1+1/n)^{2n}}\delta_n.$$

Notons par ailleurs que si l'on prend $x = (x^k)_{k\geqq 1}$ et $x^k = 1/k^\beta$ avec $\beta > 1/2$, alors

$$|Ax_n|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^{2n}} \frac{1}{k^{2+2\beta}} \geqq \sum_{k\geqq n} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} \frac{1}{k^{2+2\beta}} \sim \frac{C}{n^{1+2\beta}}$$

et donc $|Ax_n| \geqq C/n^{1/2+\beta}$.

I.3 *Cas où $R(A)$ est fermé. Exemples*

Lorsque $R(A)$ est fermé les résultats de convergence obtenus aux §I.1 et §I.2 peuvent être complétés.

THÉORÈME 5. *On suppose que $R(A)$ est fermé. Alors il existe $\alpha > 0$ (qui dépend seulement de A) tels que $\forall x \in H$*

$$|x_n - Px| \leqq \left[\prod_{p=1}^{n} (1+\alpha^2\lambda_p^2)\right]^{-1/2} |x| \tag{21}$$

et

$$|Ax_n| \leqq \lambda_n^{-1} \left[\prod_{p=1}^{n-1} (1+\alpha^2\lambda_p^2)\right]^{-1/2} |x|. \tag{22}$$

En particulier lorsque $\lambda_n \equiv 1$, les convergences sont géométriques i.e.

$$|(I+A)^{-n}x - Px| \leqq k^n |x| \quad et \quad |A(I+A)^{-n}x| \leqq k^{n-1}|x| \tag{23}$$

avec $k = (1+\alpha^2)^{-1/2} < 1$.

Si de plus $A^* = A$, on a

$$|x_n - Px| \leqq \prod_{p=1}^{n} (1+\alpha\lambda_p)^{-1} |x| \tag{24}$$

et

$$|Ax_n| \leqq \lambda_n^{-1} \prod_{p=1}^{n-1} (1+\alpha\lambda_p)^{-1} |x|. \tag{25}$$

En particulier lorsque $\lambda_n \equiv 1$ les convergences sont gómétriques avec $k = (1+\alpha)^{-1}$ et α est la première valeur propre strictement positive de A.

DÉMONSTRATION. On a $H = H_1 \oplus N(A)$ avec $H_1 = R(A)$ et $D(A) \cap H_1$ est dense dans H_1. L'opérateur $A_1 = A_{|D(A)\cap H_1}$ est bijectif de $D(A) \cap H_1$ sur H_1. D'après le théorème du graphe fermé il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha |x| \leqq |A_1 x| \qquad \forall x \in D(A) \cap H_1. \tag{26}$$

Or

$$(x_n - Px) + \lambda_n A x_n = (x_{n-1} - Px) \tag{27}$$

et $x_n - Px \in R(A)$ (par récurrence).

Comme $|x_n - Px|^2 + \lambda_n^2 |Ax_n|^2 \leqq |x_{n-1} - Px|^2$ et d'après (26) $\alpha |x_n - Px| \leqq |Ax_n|$, on obtient $|x_n - Px|(1 + \alpha^2 \lambda_n^2)^{1/2} \leqq |x_{n-1} - Px|$; ce qui prouve (21) et (22).

Supposons maintenant que $A^* = A$; on pose

$$\beta = \operatorname{Inf}\{(Ax, x);\ x \in N(A)^\perp \cap D(A) \text{ et } |x| = 1\}.$$

Montrons que $\beta > 0$; de sorte que β est la première valeur propre strictement positive de A.

En effet soit $x \in N(A)^\perp \cap D(A)$ et soit $y \in R(A) \cap D(A)$ tel que $x = Ay$. D'après Cauchy–Schwarz on a

$$\begin{aligned} |x|^2 = (x, Ay) &\leqq (Ax, x)^{1/2}(Ay, y)^{1/2} \leqq |x|^{1/2}|y|^{1/2}(Ax, x)^{1/2} \\ &\leqq |x|^{1/2}\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{1/2}(Ax, x)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par conséquent $(Ax, x) \geqq \alpha |x|^2$ et $\beta \geqq \alpha > 0$.

Notons enfin que grâce à (27) on a

$$|x_n - Px|^2 + \lambda_n \beta |x_n - Px|^2 \leqq |x_{n-1} - Px|\,|x_n - Px|$$

ce qui implique (24) et (25).

REMARQUE 7. On se place dans le cadre de la Remarque 2 et on suppose de plus que $R(A)$ est fermé, alors les convergences de x_n vers $P_X x$ et de Ax_n vers f sont géométriques; lorsque $A^* = A$ le rapport de convergence est $k = (1 + \alpha)^{-1}$ où α est la première valeur propre strictement positive de A.

EXEMPLES.

(a) *Un exemple elliptique*

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné régulier et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{28}$$

(où ν désigne la normale extérieure à Ω).

On pose $\bar{f} = (1/|\Omega|)\int_\Omega f dx$. Le problème (28) possède une solution (unique à une constante près) si et seulement si $\bar{f} = 0$. Nous supposerons donc $\bar{f} = 0$.

Appliquant la Remarque 7 avec $H = L^2(\Omega)$, $Au = -\Delta u$, $D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ \partial u/\partial \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ on est conduit au

COROLLAIRE 6. *Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$; on définit par récurrence la suite*

$$-\Delta u_{n+1} + u_{n+1} = f + u_n \quad sur \ \Omega, \qquad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} = 0 \quad sur \ \partial\Omega$$

alors u_n converge géométriquement en norme $H^2(\Omega)$ vers la solution u de (28) *qui vérifie $\bar{u} = \bar{u}_0$.*

En effet, il suffit de remarquer que sur $D(A)$ la norme H^2 est équivalente à la norme du graphe. On peut préciser la valeur du rapport de convergence $k = 1/(1+\lambda_2)$ où λ_2 est la seconde valeur propre de A (c'est la première valeur propre strictement positive).

(b) *Un exemple parabolique*

On considère le problème suivant

$$(29) \qquad \frac{du}{dt} + Lu = f(t) \quad \text{sur }]0,T[, \quad u(0) = u(T) \text{ où } L : D(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

est un opérateur linéaire maximal monotone autoadjoint dans $\mathcal{H}$ (Hilbert réel). Etant donné $f \in L^2(0,T;\mathcal{H})$ on note $\bar{f} = (1/T)\int_0^T f(t)dt$.

Posons $H = L^2(0,T;\mathcal{H})$ et $Au = du/dt + Lu$ avec

$$D(A) = \{u \in H;\ u(t) \in D(L) \text{ p.p.}, Lu \in H, \frac{du}{dt} \in H \text{ et } u(0) = u(T)\}.$$

Alors A est maximal monotone et de plus

$$R(A) = \{f \in H;\ \bar{f} \in R(L)\}.$$

Etablissons ce dernier point en suivant une suggestion de A. Haraux.

Supposons d'abord que $f \in R(A)$; alors $f = Au$ et on vérifie que $\bar{u} \in D(L)$ et $L\bar{u} = \bar{f}$. Inversement supposons que $\bar{f} \in R(L)$; soit u_ε la solution de

$$(30) \qquad \varepsilon u_\varepsilon + \frac{du_\varepsilon}{dt} + Lu_\varepsilon = f \quad \text{sur} \quad (0,T), \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T).$$

On notera que

$$(31) \qquad \left|\frac{du_\varepsilon}{dt}\right|_H^2 + |Lu_\varepsilon|_H^2 \leqq |f|_H^2$$

et que

$$\varepsilon\bar{u}_\varepsilon + L\bar{u}_\varepsilon = \bar{f} = L\varphi.$$

Par conséquent $|\bar{u}_\varepsilon| \leqq |\varphi|$ est d'après (31), $|u_\varepsilon|_H$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$. Le passage à la limite dans (30) quand $\varepsilon \to 0$ est alors immédiat.

En particulier $R(A)$ est fermé dans H si $R(L)$ est fermé dans $\mathscr{H}$ et dans ce cas on peut appliquer le Théorème 5.

On en déduit par exemple que si $f \in L^2(Q)$ $(Q = \Omega \times (0,T))$ vérifie $\int_Q f(x,t)dxdt = 0$, alors la suite définie par récurrence

$$u_{n+1} + \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} - \Delta u_{n+1} = u_n + f \quad \text{sur } Q,$$

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u_{n+1}(x,0) = u_{n+1}(x,T) \qquad \text{sur } \Omega$$

converge vers l'unique solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{sur } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(x,0) = u(x,T) \qquad \text{sur } \Omega$$

vérifiant $\int_Q u(x,t)dt = \int_Q u_0(x,t)dxdt$.

De plus $u_n \to u$ dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ et $\partial u_n/\partial t \to \partial u/\partial t$ dans $L^2(Q)$ gómétriquement avec un rapport de convergence k qui est précisé par le résultat suivant

Proposition 7. *On suppose que $R(L)$ est fermé et on note*

$$\theta = \operatorname{Inf}\{(Lx,x);\ x \in N(L)^\perp \cap D(L),\ |x| = 1\} > 0$$

alors (23) *a lieu avec*

$$k = \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{1+\theta}, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{T^2}}}\right\}. \tag{32}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $\|(I+A)^{-1}_{|R(A)}\| \leqq k$. Soit donc $f \in R(A)$ et soit u la solution de

$$u + \frac{du}{dt} + Lu = f \quad \text{sur } (0,T), \quad u(0) = u(T). \tag{33}$$

Comme $\mathscr{H} = R(L) \oplus N(L)$, on note $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in R(L)$ et $v_2 \in N(L)$.

Donc (33) est équivalent à

$$u_1 + \frac{du_1}{dt} + Lu_1 = f_1 \quad \text{sur } (0, T), \qquad u_1(0) = u_1(T), \tag{34}$$

$$u_2 + \frac{du_2}{dt} = f_2 \quad \text{sur } (0, T), \qquad u_2(0) = u_2(T), \tag{35}$$

L'hypothèse $f \in R(A)$ exprime que $\int_0^T f(t)dt \in R(L)$ et donc comme $\int_0^T u_2(t)dt = 0$ on a

$$\int_0^T f_2(t)dt = 0. \tag{36}$$

De (34) on déduit que

$$|u_1|_H \leqq \frac{1}{1+\theta}|f_1|_H. \tag{37}$$

Par ailleurs de (35) on déduit que

$$|u_2|_H^2 + \left|\frac{du_2}{dt}\right|_H^2 = |f_2|_H^2. \tag{38}$$

Comme $\int_0^T u_2(t)dt = 0$ (d'après (35) et (36)) on peut appliquer l'inégalité de Poincaré

$$\left|\frac{du_2}{dt}\right|_H^2 \geqq \frac{4\pi^2}{T^2}|u_2|_H^2$$

et on conclut que

$$|u_2|_H \leqq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{T^2}}}|f_2|_H. \tag{39}$$

Combinant (37) et (39) on obtient le résultat.

II — Etude de $\Pi_p (I + \lambda_p A)^{-1}$ pour A nonlinéaire

II.1 *Le cas général*

Soit A un opérateur (nonlinéaire) maximal monotone tel que $0 \in R(A)$; on note $F = A^{-1}0$.

Soit $(\lambda_n)_{n \geqq 1}$ une suite de réels, $\lambda_n > 0$; on définit par récurrence

$$x_n = (I + \lambda_n A)^{-1} x_{n-1}, \qquad x_0 = x. \tag{40}$$

Si A est multivoque on conviendra que $Ax_n = (1/\lambda_n)(x_{n-1} - x_n)$.

PROPOSITION 8. *On suppose que* $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p^2 = \infty$. *Alors*

(41) $\quad x_n$ *converge faiblement vers une limite* $l \in F$,

(42) $$|Ax_n| \leqq \frac{1}{\nu_n} \operatorname{dist}(x, F).$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que $(Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \geqq 0$ i.e. $(Ax_n - Ax_{n-1}, Ax_n) \leqq 0$ et donc la suite $|Ax_n|$ est décroissante. Etant donné $u \in F$, on a

$$|x_n - u|^2 + \lambda_n^2 |Ax_n|^2 \leqq |x_{n-1} - u|^2,$$

ce qui implique que

(43) $$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^2 |Ax_p|^2 \leqq |x - u|^2;$$

d'où (42).

Pour prouver (41) on utilise le lemme d'Opial (cf. [9]).[†] Notons d'abord que pour tout $u \in F$ la suite $|x_n - u|$ est décroissante. D'autre part si $x_{n_k} \rightharpoonup l$, alors $l \in F$ puisque $Ax_{n_k} \to 0$ (cf. par exemple [3]).

REMARQUE 8. Choisissant $\lambda_n \equiv 1$ on voit que $(I + A)^{-n}$ converge faiblement; ce résultat était connu (cf. [4] et [9]) car $(I + A)^{-1}$ peut s'écrire sous la forme $(I + T)/2$ où T est une contraction admettant un point fixe.[††] Notons aussi qu'en général $(I + A)^{-n}$ ne converge pas fortement (cf. [8]). Toutefois on sait (cf. [1]) que si A est *impair*, alors $(I + A)^{-n}$ converge fortement. Nous ne savons pas si $\Pi_p (I + \lambda_p A)^{-1}$ converge fortement lorsque A est impair et $\Sigma_p \lambda_p^2 = \infty$.

REMARQUE 9. Il est évident que si $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p < \infty$, alors la suite x_n définie par (40) converge fortement (mais en général la limite n'est pas un élément de F) puisque $|x_n - x_{n-1}| \leqq \lambda_n |Ax_n| \leqq \lambda_n |Ax_1|$ et donc $\Sigma_{n \geqq 2} |x_n - x_{n-1}| < \infty$.

REMARQUE 10. Considérons le cas où $\Sigma \lambda_p = \infty$ et $\Sigma \lambda_p^2 < \infty$. Alors la suite x_n définie par (40) ne converge pas nécessairement (cf. Remarque 1). Néanmoins on peut montrer (P. L. Lions, à paraître) que $\Sigma_{p=1}^{n} \lambda_p x_p / \Sigma_{p=1}^{n} \lambda_p$ converge faiblement vers un élément de $A^{-1}\{0\}$.

[†]Soit $F \subset H$, $F \neq \emptyset$ et soit (x_n) une suite vérifiant:

(a) $\forall u \in F$, $|x_n - u|$ converge,

(b) si x_{n_k} converge faiblement vers y, alors $y \in F$.

Alors x_n converge faiblement vers une limite.

[††]Lorsque $\lambda_n \geqq c > 0$, (41) est démontré dans [10] par la même méthode.

REMARQUE 11. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D(A) \qquad |Ax - Ay| \geqq \alpha |x - y| \tag{44}$$

(i.e. A est bijectif et A^{-1} est lipschitzien). Alors $x_n \to l$ dès que $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p^2 = \infty$; plus précisément il est clair que

$$|x_n - l| \leqq |x - l| \prod_{p=1}^{n} (1 + \alpha^2 \lambda_p^2)^{-1/2}.$$

En particulier si $\lambda_n \equiv 1$, la convergence est géométrique (ce cas est considéré dans [10]).

S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in D(A) \qquad (Ax - Ay, x - y) \geqq \alpha |x - y|^2 \tag{45}$$

alors $x_n \to l$ dès que $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p = \infty$; plus précisément il est clair que

$$|x_n - l| \leqq |x - l| \prod_{p=1}^{n} (1 + \alpha \lambda_p)^{-1};$$

ce cas est à rapprocher de [7]. Notons enfin que (45) est vérifié lorsque $A = \partial\varphi$ (φ convexe s.c.i.) et A^{-1} est lipschitzien de rapport $1/\alpha$ (cf. [2]).

II.2 *Cas où $A = \partial\varphi$ (ou A demi-positif)*

Lorsque $A = \partial\varphi$ est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i., il suffit de supposer que $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p = \infty$ pour obtenir la convergence de x_n.

THÉORÈME 9. *On suppose que $A = \partial\varphi$ et que $\Sigma_{p=1}^{\infty} \lambda_p = \infty$. Alors*

(46) *x_n converge faiblement vers une limite $l \in F$,*

$$|Ax_n| \leqq \frac{\sqrt{2}}{\mu_n} \operatorname{dist}(x, F). \tag{47}$$

Si de plus A est impair, alors x_n converge fortement.

REMARQUE 12. Lorsque $\lambda_n \equiv 1$ on obtient pour $A = \partial\varphi$ $|A(I + A)^{-n} x| \leqq (\sqrt{2}/n) \operatorname{dist}(x, F)$. Remplaçant A par $(t/n)A$ on voit que

$$\left| A\left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n} x \right| \leqq \frac{\sqrt{2}}{t} \operatorname{dist}(x, F).$$

Quand $n \to \infty$, on retrouve l'effet régularisant du semi-groupe engendré par $-A$ (cf. [3]).

DÉMONSTRATION. On a $\forall u$

$$\varphi(u)-\varphi(x_n) \geqq (Ax_n, u-x_n) = \frac{1}{\lambda_n}(x_{n-1}-x_n, u-x_n)$$

(48)

$$\geqq \frac{1}{2\lambda_n}(|u-x_n|^2-|u-x_{n-1}|^2).$$

Soit $u \in F$; on peut supposer que $\varphi(u)=0$ et que $\varphi \geqq 0$ sur H. On déduit alors de (48) que

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \varphi(x_p) \leqq \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(x,F)^2. \tag{49}$$

D'autre part on a

$$\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n) \geqq \lambda_n |Ax_n|^2 \tag{50}$$

et donc

$$\mu_{n-1}\varphi(x_{n-1})-\mu_n\varphi(x_n)+\lambda_n\varphi(x_n) \geqq \lambda_n\mu_{n-1}|Ax_n|^2$$

et par sommation il vient

$$\sum_{p\geqq 2} \lambda_p\mu_{p-1}|Ax_p|^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p\varphi(x_p) \leqq \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}(x,F)^2.$$

Par ailleurs d'après (43) on sait que $\Sigma\,\lambda_p^2|Ax_p|^2 \leqq \operatorname{dist}(x,F)^2$. Donc

$$2\sum_{p\geqq 2} \lambda_p\mu_{p-1}|Ax_p|^2 + \sum_{p\geqq 1} \lambda_p^2|Ax_p|^2 \leqq 2\operatorname{dist}(x,F)^2.$$

En utilisant le fait que la suite $|Ax_n|$ décroit on conclut que $\mu_n^2|Ax_n|^2 \leqq 2\operatorname{dist}(x,F)^2$. On établit que $x_n \rightharpoonup l$ comme dans la démonstration de la Proposition 8.

Pour prouver que x_n converge fortement dans le cas où A est impair (φ pair) on utilise une technique introduite par R. Bruck (cf. [5]). D'après (50) la suite $\varphi(x_n)$ est décroissante. Choisissant $u=-x_p$ avec $p \geqq n$ dans (48) on obtient donc $|x_n+x_p| \leqq |x_{n-1}+x_p|$. D'où il résulte que pour p fixé la suite $n \mapsto |x_n+x_p|$ est décroissante lorsque n varie entre 1 et p. En particulier $|x_p+x_p| \leqq |x_n+x_p|$ pour $1 \leqq n \leqq p$ i.e. $4|x_p|^2 \leqq |x_n+x_p|^2$. Comme $|x_n+x_p|^2+|x_n-x_p|^2 = 2|x_n|^2+2|x_p|^2$ on en déduit que $|x_n-x_p|^2 \leqq 2|x_n|^2-2|x_p|^2$ et donc la suite (x_n) est de Cauchy.

On peut même établir la convergence faible de x_n sous l'hypothèse $\Sigma_{p=1}^{\infty}\lambda_p = \infty$

pour la classe des opérateurs demi-positifs A (qui inclut les $\partial\varphi$). On dit que A est demi positif (cf. [5]) s'il existe $y_0 \in F$ tel que $\forall u_n \in D(A)$, $\forall f_n \in Au_n$ avec $u_n \rightharpoonup u$ et $|f_n|$ borné, alors $(f_n, u_n - y_0) \to 0$ implique $u \in F$.

THÉORÈME 10. *On suppose que A est demi positif, et que* $\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p = \infty$. *Alors* x_n *converge faiblement vers une limite* $l \in F$.

On utilisera le

LEMME 1. *Sous les hypothèses du Théorème* 10, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \forall n \geqq N, \exists m$ *avec* $N \leqq m \leqq n$ *vérifiant*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon,$$

$$(Ax_m, x_m - y_0) < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. Comme $y_0 \in F$, on a $(Ax_k, x_k - y_0) \geqq 0$. D'autre part

$$\tfrac{1}{2}|x_k - y_0|^2 + \lambda_k (Ax_k, x_k - y_0) \leqq \tfrac{1}{2}|x_{k-1} - y_0|^2$$

et donc

$$\sum \lambda_k (Ax_k, x_k - y_0) < \infty. \tag{51}$$

Soit $P = \{k\,; (Ax_k, x_k - y_0) \geqq \varepsilon\}$, de sorte que grâce à (51) $\sum_{k \in P} \lambda_k < \infty$. En particulier $\sum_{k \in P} |x_k - x_{k-1}| < \infty$; soit donc N_1 tel que $\sum_{k \in P, k \geqq N_1} |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$. Fixons ensuite $N \leqq N_1$ tel que $(Ax_N, x_N - y_0) < \varepsilon$ (ceci est possible grâce à (51) et à l'hypothèse $\sum \lambda_p = \infty$).

Etant donné $n \geqq N$, distinguons deux cas:

Cas 1. $n \notin P$; on choisit $m = n$,

Cas 2. $n \in P$; on choisit pour m le plus grand entier $k < n$ tel que $k \notin P$. Notons que $m \geqq N$ et que $\{m+1, \cdots, n\} \subset P$. D'où

$$|x_n - x_m| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 10. Appliquons le lemme d'Opial. Si $x_{n_k} \rightharpoonup l$, montrons que $l \in F$. D'après le lemme 1, on peut construire une suite $m_k \to \infty$ telle que $|x_{n_k} - x_{m_k}| \to 0$ et $(Ax_{m_k}, x_{m_k} - y_0) \to 0$. D'où $x_{m_k} \rightharpoonup l$ et $l \in F$ puisque A est demi-positif.

REMARQUE 13. Le Théorème 10 et sa démonstration sont à rapprocher des résultats de [6].

REMARQUE 14. Supposons maintenant comme dans [10] et [7] que la suite (x_n) ne vérifie pas $x_n = (I + \lambda_n A)^{-1}x_{n-1}$ mais seulement $|x_n - (I + \lambda_n A)^{-1}x_{n-1}| < \varepsilon_n$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, alors

(a) $x_n \rightharpoonup l$ pour A général et $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \infty$,

(b) $x_n \rightharpoonup l$ pour $A = \partial\varphi$ (ou A demi positif) et $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$,

(c) $x_n \to l$ pour $A = \partial\varphi$, A impair et $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$.

DÉMONSTRATION. Pour k fixé, on construit la suite $\xi_n(k)$ définie par

$$\xi_0(k) = x_k, \qquad \xi_1(k) = (I + \lambda_{k+1}A)^{-1}x_k, \cdots, \qquad \xi_n(k) = (I + \lambda_{k+n}A)^{-1}\xi_{n-1}(k).$$

Moyennant les hypothèses sur A et λ_k on sait que $\xi_n(k) \rightharpoonup \xi(k)$ dans les cas a) et b) et $\xi_n(k) \to \xi(k)$ dans le cas c).

D'autre part on vérifie aisément que

$$|\xi_n(k) - \xi_{n+1}(k-1)| \leqq \varepsilon_k \tag{52}$$

et donc à la limite $|\xi(k) - \xi(k-1)| \leqq \varepsilon_k$.

Par conséquent $\xi(k)$ est de Cauchy et $\xi(k) \to l$ quand $k \to \infty$.

Enfin appliquant (52) avec $n = 0$ et k, $n = 1$ et $k - 1, \cdots, n$ et $k - n$ avec $k > n$ on obtient par addition

$$|x_k - \xi_{n+1}(k - n - 1)| \leqq \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1} + \cdots + \varepsilon_{k-n}$$

i.e. remplaçant k par $k + n$ on a

$$|x_{k+n} - \xi_{n+1}(k-1)| \leqq \varepsilon_{k+n} + \varepsilon_{k+n+1} + \cdots + \varepsilon_k.$$

On a

$$x_{k+n} - l = x_{k+n} - \xi_{n+1}(k-1) + \xi_{n+1}(k-1) - \xi(k-1) + \xi(k-1) - l.$$

On fixe d'abord k assez grand pour que

$$(\varepsilon_{k+n} + \cdots + \varepsilon_k) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\xi(k) - l| < \varepsilon.$$

et puis n assez grand pour que $\xi_{n+1}(k-1) - \xi(k-1)$ appartienne à un voisinage de 0 (faible ou fort suivant les cas). C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 587–590.

2. J. B. Baillon and G. Haddad, *Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et n-cycliquement monotones*, Israel J. Math. **26** (1977), 137–150.

3. H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones*, Lecture note n°5, North-Holland, 1973.

4. F. Browder and W. Petryshyn, *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 571–575.

5. R. Bruck, *Asymptotic convergence of nonlinear contraction semi-groups in Hilbert space*, J. Functional Analysis **18** (1975), 15–26.

6. R. Bruck, *An interative solution of a variational inequality for certain monotone operators in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 890–892, Corrigendum **82** (1976).

7. M. Crandall and A. Pazy, *On the range of accretive operators*, Israel J. Math. **27** (1977), 235–246.

8. A. Genel and J. Lindenstrauss, *An example concerning fixed points*, Israel J. Math. **22** (1975), 81–86.

9. Z. Opial, *Weak convergence of the successive approximations for nonexpansive mappins in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

10. R. T. R. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control **14** (1976), 877–898.

DEPT. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS VI
4 PL. JUSSIEU
75230 PARIS 05, FRANCE

AND

E.N.S.
45 RUE D'ULM
75230 PARIS 05, FRANCE