ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 41, No. 4, 1982

ESPACES DE BANACH REPRESENTABLES

PAR
GILLES GODEFROY ET MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

We study the Banach spaces which are isomorphic to a subspace of $l^\infty(\mathbf{N})$ which is analytic in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. We prove structure theorems which show that some pathological situations cannot take place in this class. We show that a non-metrizable separable compact of Rosenthal has a continuous image which is not a compact of Rosenthal.

La structure des espaces de Banach généraux pouvant être très complexe, il est naturel de chercher à obtenir des théorèmes de structure pour des classes d'espaces vérifiant une propriété supplémentaire; c'est ce qui a été fait, par exemple, pour les espaces réticulés [9] ou les espaces à structure locale inconditionnelle. Par ailleurs, il peut être utile de savoir si un espace E est un espace dual. On sait par exemple [7] que dans la classe des espaces duaux, les propriétés de Krein–Milman et de Radon–Nikodym sont équivalentes. L'hypothèse de représentabilité que nous employons peut être considérée comme une extension très vaste de l'hypothèse "E est dual d'un espace séparable". Les exemples donnés montreront par ailleurs qu'on peut considérer que les sous-espaces "naturels" de $l^\infty(\mathbf{N})$, c'est-à-dire ceux dont la *définition* ne nécessite pas l'emploi de l'axiome du choix ou de l'hypothèse du continu, par exemple, vérifient l'hypothèse de représentabilité, et donc que certaines pathologies de structure ne se produiront pas dans les cas concrets.

DÉFINITIONS–NOTATIONS. La boule unité d'un espace de Banach X sera notée X_1. La topologie $\sigma(X', X)$ sur le dual X' de X sera notée ω^*. Un espace compact K sera dit *angélique* s'il possède les propriétés suivantes:

(1) Tout sous-ensemble de K relativement dénombrablement compact est compact.

(2) Tout point x de K adhérent à une partie A de K est limite d'une suite

Reçu le 25 octobre 1981

d'éléments de A. Il est clair qu'un compact angélique est en particulier séquentiellement compact.

Une partie D du dual d'un espace de Banach E sera dite *normante* si la fonction $\phi(x) = \sup\{|y(x)| \mid y \in D\}$ est une norme sur E équivalente à la norme initiale. Si D est une partie normante de E', on notera σ_D la topologie de la convergence simple sur D. La topologie σ_D, définie sur E, est une topologie plus faible que la topologie faible.

Soit $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble de $E \times E'$. La famille $\{x_\alpha, f_\alpha\}$ sera appelée *système biorthogonal* si on a $f_{\alpha'}(x_\alpha) = \delta_\alpha^{\alpha'}$. Un espace compact K sera dit *compact de Rosenthal* s'il est homéomorphe à un compact, pour la topologie de la convergence ponctuelle, de fonctions de première classe sur un polonais (5). Un espace topologique A est dit *analytique* s'il est image continue de l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ des irrationnels de $[0,1]$. Enfin, un espace de Banach E sera dit de *type dénombrable* s'il existe une partie D de E' normante dénombrable.

I. Les espaces représentables

DÉFINITION 1. Soit E un espace de Banach de type dénombrable. L'espace E sera dit *représentable* s'il existe un sous-espace X de $l^\infty(\mathbf{N})$, isomorphe à E, analytique dans l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

DÉFINITION 2. Soit E un espace de Banach de type dénombrable. L'espace E sera dit *universellement représentable* si tout sous-espace X de $l^\infty(\mathbf{N})$, isomorphe à E, est analytique dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Le lemma suivant éclaire la signification de ces définitions.

LEMME 3. *Soit E un espace de Banach de type dénombrable. Alors*:

(1) *E est représentable si et seulement s'il existe une partie dénombrable normante D de E' telle que (E, σ_D) soit analytique.*

(2) *E est universellement représentable si et seulement si pour toute partie dénombrable normante D de E', l'espace (E, σ_D) est analytique.*

DÉMONSTRATION. Si $D = \{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une partie dénombrable normante de E', l'application ϕ_D de E dans $l^\infty(\mathbf{N})$ qui envoie x sur $(f_n(x))$ est un isomorphisme entre E et le sous-espace $\phi_D(E)$ de $l^\infty(\mathbf{N})$; inversement, tout isomorphisme est obtenu de cette manière. Il suffit alors de traduire les définitions 1 et 2, en remarquant que la topologie induite par $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sur $\phi_D(E)$ se transforme par ϕ_D^{-1} en la topologie σ_D. C.Q.F.D.

Ci-dessous, un sous-espace X de $l^\infty(\mathbf{N})$ isomorphe à E sera appelé "représentation de E".

Exemples d'espaces universellement représentables

— Si E est séparable, toute représentation de E est un $K_{\sigma\delta}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

— $\dim E < \infty$ si et seulement si E admet une représentation comme $\mathscr{G}_{\delta}$ de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

— Si E'' est séparable, toute représentation de E est un $\mathscr{G}_{\delta\sigma}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

— Si K est un compact de Rosenthal séparable, toute représentation de l'espace $\mathscr{C}(K)$ est analytique dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ [5]. Plus précisément, si K est un compact séparable, on a l'équivalence suivante [5]

$$K \text{ de Rosenthal} \Leftrightarrow \mathscr{C}(K) \text{ est universellement représentable.}$$

— Si E est séparable, le dual E' de E est universellement représentable si et seulement si $E \not\supset l^1(\mathbf{N})$.

Exemples d'espaces représentables

— L'espace E est le dual d'un espace séparable si et seulement s'il existe une représentation de E qui soit K_σ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. En effet, si E est le dual d'un espace séparable X, soit D une partie dénombrable dense en norme dans X_1; (E, σ_D) est K_σ d'après la compacité préfaible de E'_1. Inversement, si (E, σ_D) est K_σ, soit $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$, le théorème de Baire applique à E muni de sa topologie forte montre que l'un des K_n est d'intérieur non vide et donc que E contient une boule B_0 (pour une norme équivalence) de centre 0 qui soit compacte pour σ_D l'espace E s'identifie alors au dual de l'espace des fonctions affines continues sur (B_0, σ_D) nulles en 0.

En particulier, le dual d'un espace séparable est représentable.

— Soit $c = 2^{\aleph_0}$. L'espace $l'(c)$ admet une représentation $K_{\sigma\delta}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. En effet, on identifie $l'(c)$ à l'espace $\mathcal{M}_a$ des mesures atomiques sur $[0,1]$; il suffit alors d'employer le fait que l'application $\mu \to \mu_d$, dont le noyau est $\mathcal{M}_a$, est de deuxième classe de Baire pour la topologie vague.

Plus généralement, si E est séparable, l'ensemble $\operatorname{Ext} E'_1$ des points extremaux de E'_1 est un $\mathscr{G}_\delta$ de (E'_1, ω^*) [2]; on en déduit que le sous-espace fortement fermé de E' engendré par $\operatorname{Ext}(E'_1)$ est représentable.

— Avec la même démonstration que ci-dessus, l'espace $\mathcal{M}_a$ des mesures de Radon diffuses sur $[0,1]$ admet une représentation $K_{\sigma\delta}$.

— L'espace $\mathscr{C}([0,1]^C)$ admet une représentation analytique. Ceci découle du lemme suivant, qui se démontre en utilisant les méthodes de [5]: Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une partie dénombrable dense dans $[0,1]^C$, formé de fonctions boréliennes sur $[0,1]$. Alors l'espace $\mathscr{C}([0,1]^C)$ muni de la topologie de la convergence simple sur la famille $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est analytique.

Nous verrons plus loin des exemples d'espaces non représentables.

II. Les théorèmes de structure

Le lemme technique suivant est essentiellement une adaptation d'un résultat de C. Stegall [11].

LEMME 4. *Soit E un espace de type dénombrable, non séparable et représentable. Soit D telle que (E, σ_D) soit analytique. Il existe dans $E \times E'$ un système biorthogonal $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, tel que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ muni de σ_D soit homéomorphe à l'ensemble de Cantor $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe une surjection continue

$$\phi : \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \to (E, \sigma_D).$$

On suppose E muni de la norme définie par la partie D. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Soit Ω le premier ordinal non dénombrable. Une récurrence transfinie facile montre qu'il existe des $(t_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ dans E, et des $(y_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ dans E', tels que

(1) $\|t_\alpha\| \leqq 1 \ \forall \alpha$,

(2) $\|y_\alpha\| < 1 + \varepsilon \ \forall \alpha$,

(3) si $\beta < \alpha$, $y_\alpha(t_\beta) = 0$ et $y_\alpha(t_\alpha) = 1$.

On choisit $\sigma_\alpha = \phi^{-1}(t_\alpha)$. L'espace topologique $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ est héréditairement de Lindelöf, donc tout σ_α, $\alpha \geqq \alpha_0$, où α_0 est un certain ordinal dénombrable, est point de condensation des $(\sigma_\gamma)_{\gamma<\Omega}$, c'est-à-dire que tout voisinage de σ_α dans $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ contient une infinité non-dénombrable de $(\sigma_\gamma)_{\gamma<\Omega}$.

Notons $\langle D \rangle$ l'espace vectoriel algébriquement engendré par D. Tout élément de D est continu sur (E, σ_D).

SOUS-LEMME. *Il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ qui vérifie:*

(1) *$A_n = \bigcup_{s\in S_n} B_s^n$, où $S_n = \{0,1\}^n$, et où B_s^n est une boule de rayon $\leqq 1/n$, pour une distance fixée sur $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ induisant la topologie usuelle.*

(2) *$B_s^{n+1} \subseteq B_{s/n}^n \ \forall s \in S_{n+1}$ (où s/n est l'élément de S_n formé des n premières coordonnées de s).*

(3) *Il existe $f_s^n \in \langle D \rangle$ telle que $\|f_s^n\| < 1 + \varepsilon$, et telle que*

(a') *$f_s^n \geqq 1 - \varepsilon$ sur $\phi(B_s^n)$,*

(b) *$|f_s^n| \leqq 1/n$ sur $\phi(B_{s'}^n)$,*

$\forall s' \neq s$, $s' \in S_n$.

DÉMONSTRATION DU SOUS-LEMME. Soit $\alpha_0 < \Omega$ tel que tout σ_α $(\alpha \geqq \alpha_0)$ soit point de condensation des $(\sigma_\gamma)_{\gamma<\Omega}$ et soit $\alpha_1 > \alpha_0$. Il existe $y_{\alpha_1} \in E'$ tel que:

$$y_{\alpha_1}[\phi(\sigma_{\alpha_1})] = 1, \qquad \|y_{\alpha_1}\| < 1 + \varepsilon.$$

L'espace E étant muni de la norme définie par D, la boule unité de $\langle D \rangle$ est ω^*-dense dans E_1'. Donc il existe $f_1^1 \in \langle D \rangle$ telle que

$$\|f_1^1\| < 1 + \varepsilon, \qquad f_1^1[\phi(\sigma_{\alpha_1})] = 1.$$

La fonction $f_1^1 \circ \phi$ est continue sur $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, donc l'ensemble

$$\phi^{-1}(V_1) = \phi^{-1}(\{x \in E \mid |f_1^1(\phi(\sigma_{\alpha_1}) - x)| < \varepsilon\})$$

est un voisinage de σ_{α_1} dans $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. On définit $B_1^1 = A_1$ comme une boule de rayon inférieur ou égal à 1, contenant σ_{α_1} et contenue dans $\phi^{-1}(V_1)$. Le couple (f_1^1, A_1) vérifie les propriétés annoncées.

Soient à présent $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2$, tels que σ_{β_1} et $\sigma_{\alpha_2} \in A_1$. On a

$$y_{\alpha_2}(\phi(\sigma_{\beta_1})) = 0; \qquad y_{\alpha_2}(\phi(\sigma_{\alpha_2})) = 1; \qquad \|y_{\alpha_2}\| = 1.$$

La boule unité de $\langle D \rangle$ est dense dans (E_1', ω^*), donc il existe $f_1^2 \in \langle D \rangle$ telle que

$$f_1^2(\phi(\sigma_{\beta_1})) = 0; \qquad f_1^2(\phi(\sigma_{\alpha_2})) = 1; \qquad \|f_1^2\| = 1.$$

Le point σ_{β_1} étant point de condensation des $(\sigma_\gamma)_{\gamma<\Omega}$, il existe $\alpha_3 > \alpha_2$ tel que $\sigma_{\alpha_3} \in A_1$, et $f_1^2(\phi(\sigma_{\alpha_3})) < \varepsilon/4$, puisque $f_1^2 \circ \phi$ est continue sur $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. On a alors

$$y_{\alpha_3}(\phi(\sigma_{\alpha_3})) = 1; \qquad y_{\alpha_3}(\phi(\sigma_{\alpha_2})) = 0; \qquad \|y_{\alpha_3}\| < 1 + \varepsilon.$$

Et toujours par densité de la boule unité de $\langle D \rangle$ dans (E_1', ω^*), il existe $f_2^2 \in \langle D \rangle$ telle que

$$\|f_2^2\| < 1 + \varepsilon; \qquad f_2^2(\phi(\sigma_{\alpha_3})) = 1; \qquad f_2^2(\phi(\sigma_{\alpha_2})) = 0.$$

On prend alors $B_1^2 \ni \sigma_{\alpha_2}$ et $B_2^2 \ni \sigma_{\alpha_3}$ des boules assez petites pour que $B_1^2 \cup B_2^2 \subsetneq A_1 = B_1^1$, de rayon $\leqq 1/2$ et telles que

$$f_1^2 > 1 - \varepsilon \quad \text{sur } \phi(B_1^2); \qquad f_1^2 < 1/2 \quad \text{sur } \phi(B_2^2),$$

$$f_2^2 > 1 - \varepsilon \quad \text{sur } \phi(B_2^2); \qquad f_2^2 < 1/2 \quad \text{sur } \phi(B_1^2),$$

ce qui est possible d'après la continuité des fonctions $f_1^2 \circ \phi$ et $f_2^2 \circ \phi$ sur $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. On poursuit ensuite la construction de façon analogue au premier pas, ci-dessus, de la récurrence, ce qui prouve le sous-lemme.

Terminons la démonstration du lemme 4. Soit $\rho \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. La suite $\{f_{\rho|n}^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans E'; soit $f_\rho \in E'$ un point ω^*-adhérent à la suite $(f_{\rho|n}^n)$. On définit $A : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ par $A(\rho) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_{\rho|n}^n$.

L'application A est une injection continue par construction et on a

(a) $f_{\rho|n}^n \geqq 1 - \varepsilon$ sur $B_{\rho|n}^n \Rightarrow f_\rho[\phi \circ A(\rho)] \geqq 1 - \varepsilon$,

(b) $f_{\rho'|n}^n \leqq 1/n$ sur $B_{\rho'|n}^n$ si $\rho \mid n \neq \rho' \mid n \Rightarrow f_\rho[\phi \circ A(\rho')] = 0$ si $\rho \neq \rho'$.

On en déduit que l'application $\phi \circ A$ est injective, et que le système $(\phi \circ A(\rho), (f_\rho(\phi \circ A(\rho)))^{-1} f_\rho)_{\rho \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}}$ est un système biorthogonal. Enfin, l'ensemble $(\phi \circ A(\rho))_{\rho \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}}$, image de l'espace compact $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ par une injection continue, est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$. C.Q.F.D.

On déduit immédiatement du lemma 4 le

THÉORÈME 5. *Soit E un espace de Banach de type dénombrable, représentable. Les énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *E est séparable,*

(2) *E ne contient pas de système biorthogonal à C éléments.*

Le théorème suivant permet de caractériser, parmi les espaces représentables, ceux qui sont universellement représentables.

THÉORÈME 6. *Soit E un espace de Banach de type dénombrable et rèprésentable. Les énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *E est universellement représentable,*

(2) $l^1(C) \not\subset E$,

(3) *l'espace compact* (E'_1, ω^*) *est angélique.*

DÉMONSTRATION. On suppose E muni de la norme définie par D.

(1) $\Rightarrow$ (3). L'espace (E, σ_D) est analytique. Le compact (E'_1, ω^*) apparaît comme un compact de fonctions sur l'espace analytique (E, σ_D), qui contient une partie dense (la boule unité de $\langle D \rangle$) formée de fonctions continues. Si E est universellement mesurable, tout $x \in E'_1$ est une fonction borélienne sur (E, σ_D). En effet, soit $D' = D \cup \{x\}$. L'espace $(E, \sigma_{D'})$ est analytique, et $\sigma_D > \sigma_D$. Il en résulte que les structure boréliennes déduites de $\sigma_{D'}$ et σ_D sont identiques, donc que x est une fonction borélienne. Or, d'après (1) tout compact de fonctions boréliennes sur un analytique qui contient une partie dense de fonctions continues est homéomorphe à un compact de fonctions lère classe sur un espace Polonais et est donc en particulier angélique.

(3) $\Rightarrow$ (2) est vrai, sans hypothèse sur E: Si $l'(C) \subset E$, alors $l^\infty(\mathbf{N})$ est quotient de E, donc E'_1 contient une copie de $\beta\mathbf{N}$, donc n'est pas angélique.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $l^1(C) \not\subset E$, alors $\beta N \not\subset E'_1$ d'après (13). La boule unité de $\langle D \rangle$ est une famille de fonctions continues sur l'analytique (E, σ_D) dont l'adhérence E'_1 pour la convergence simple ne contient pas $\beta\mathbf{N}$. Par conséquent E'_1 est formé de fonctions boréliennes sur (E, σ_D) [1]. Il est alors facile de voir que si D' est une partie normante dénombrable de E', les structures boréliennes induites par σ_D, $\sigma_{D'}$ et $\sigma_{D \cup D'}$ sont identiques. Or un espace métrisable séparable dont la tribu borélienne est celle d'un analytique est analytique [3] et donc $(E, \sigma_{D'})$ est analytique. C.Q.F.D.

Exemples d'espaces de type dénombrable non représentables. Applications

Dans ce qui suit, on dira qu'un compact séparable — respectivement un convexe compact séparable — est *représentable* si l'espace $\mathscr{C}(K)$ — respectivement l'espace $\mathscr{A}(K)$ des fonctions affines continues — est représentable.

(1) D'après le théorème 5, si K est représentable et non métrisable, alors $\mathscr{C}(K)$ contient un système biorthogonal de cardinal C. Or, K. Kunen [8] a construit (avec l'hypothèse du continu) un compact K_0 séparable non métrisable tel que $\mathscr{C}(K_0)$ ne contienne pas de système biorthogonal transfini. Le compact K_0 n'est pas représentable.

(2) D'après le théorème 6, si K est représentable et n'est pas séquentiellement compact, alors $\mathscr{C}(K)$ contient $l^1(C)$. Le compact K_1 construit par R. Haydon [6] (avec l'hypothèse du continu) n'est donc pas représentable.

(3) D'après le théorème 6, si K est représentable et infini et si $\mathscr{C}(K)$ est un espace de Grothendieck, alors $l^\infty(\mathbf{N})$ est quotient de $\mathscr{C}(K)$. Le compact K_2 construit par le second auteur [12] (avec l'hypothèse du continu) n'est donc pas représentable. Il en est de même du compact angélique K_3 ([12]: hypothèse du continu) tel que $l^\infty(\mathbf{N})$ soit quotient de $\mathscr{C}(K_3)$.

(4) Soit A un sous-ensemble non analytique de $[0,1]$. Soit I_A l'intervalle "éclaté aux points de A". Ce compact n'est pas un compact de Rosenthal [5]. La démonstration du théorème 6 nous montre alors que $\mathscr{C}(I_A)$ n'est pas représentable. Ce dernier exemple montre que construire un Banach non représentable revient à construire un sous-ensemble non analytique de $[0,1]$, puisque tout Banach non représentable est un sous-ensemble non analytique de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ qui est borel-isomorphe à $[0,1]$. Dans la mesure où les sous-ensembles "raisonnables" de $[0,1]$ sont analytiques, on peut considérer que les espaces de Banach de type dénombrable "raisonnables" sont représentables.

(5) Soit $\aleph_1$ le premier ordinal non dénombrable. Le théorème 6 permet de montrer facilement que $l^1(\aleph_1)$ est représentable si et seulement si $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. La négation de l'hypothèse du continu permet donc de construire un espace assez simple, à savoir $l^1(\aleph_1)$, qui n'est pas représentable.

(6) On dit qu'un espace de Banach E a la propriété $(\mathscr{C})$ si toute famille $(\mathscr{C}_\alpha)_{\alpha\in A}$ de convexes fermés bornés d'intersection vide contient une sous-famille denombrable d'intersection vide; cette propriété a été étudiée par R. Pol [10]. Le théorème 6 permet de montrer: *Soit E représentable. Alors: E a la propriété* $(\mathscr{C})$ *si et seulement si* (E'_1, ω^*) *est angélique.* On ne sait pas si l'équivalence ci-dessus est vraie en général.

(7) Soit K un convexe compact représentable. Le théorème 5 permet de

montrer: *Si tous les sous-ensembles convexes fermés de K sont séparables, alors K est métrisable.* On ne sait pas si l'implication est vraie en général.

(8) L'espace $l^\infty(\mathbf{N})$ muni de sa topologie faible est non métrisable et non séparable. Le théorème 5 permet de montrer, cependant, que tout sous-espace fermé de $l^\infty(\mathbf{N})$ qui est mesurable-souslinien dans (l^∞, ω) est analytique (c'est-à-dire séparable) dans (l^∞, ω).

III. Applications aux compacts de Rosenthal

Les compacts de Rosenthal sont le champ priviligié d'application des méthodes de ce travail.

Soit K un compact séparable. Il est montré dans [5] que K est un compact de Rosenthal si et seulement si l'espace $\mathscr{C}(K)$ est universellement représentable. Il est montré également que la classe des compacts de Rosenthal séparables est stable par image continue *ouverte*, mais n'est pas stable par image continue. Le théorème 7 ci-dessous va préciser ce dernier point, en montrant que les seuls compacts de Rosenthal séparables dont toutes les images continues sont des compacts de Rosenthal sont les compacts métrisables.

Rappelons que la tribu cylindrique d'un espace de Banach E, notée $\mathrm{Cyl}(E)$, est la tribu engendrée par les éléments de E', ou encore [4] par les fonctions continues sur l'espace topologique (E, ω).

Théorème 7. *Soit K un compact de Rosenthal. Les énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *K est métrisable.*

(2) *K est séparable et toute image continue de K est un compact de Rosenthal.*

(3) *K est séparable et l'espace $\mathscr{C}(K)$ est lindelöf pour la topologie faible.*

(4) *La tribu $\mathrm{Cyl}(\mathscr{C}(K))$ s'identifie à la tribu des boréliens faibles de $\mathscr{C}(K)$.*

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (3). Plus généralement, le théorème 5 montre qu'un espace de Banach représentable est lindelöf pour la topologie faible si et seulement s'il est séparable.

(1) $\Leftrightarrow$ (4). Si la boule unité de $\mathscr{C}(K)$ appartient à $\mathrm{Cyl}(\mathscr{C}(K))$, il existe une partie dénombrable D de $\mathscr{C}(K)$ qui sépare $\mathscr{C}(K)$. On en déduit que K est support d'une mesure de Radon, donc [5] que K est séparable. Il est facile de voir que la tribu cylindrique d'un espace universellement représentable est une tribu souslinienne. D'après le théorème 5, si E est universellement représentable et non séparable, la tribu $\mathrm{Cyl}(E)$ est distincte de la tribue des boréliens faibles de E puisque cette dernière a 2^C éléments; en effet, un système

biorthogonal de cardinal C fournit un sous-ensemble faiblement discret de E de cardinal C.

(1) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (1). Reprenons la démonstration du lemma 4 dans le cas où E est un espace $\mathscr{C}(K)$ (K compact de Rosenthal séparable). Soit D une partie dénombrable dense de K, telle que l'espace $\mathscr{C}(K)$ muni de la convergence simple sur D soit analytique [5]. Il est facile de voir que les $\{y_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ dans $\mathscr{C}(K)$ peuvent être pris de la forme $y_\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_{a_\alpha} - \varepsilon_{b_\alpha})$, où ε_{a_α} et ε_{b_α} sont les mesures de Dirac aux points a_α et b_α de K. On prend ensuite les éléments $(f^n_s)_{s\in S_n}$ de la forme $\frac{1}{2}(\varepsilon_{a^n_s} - \varepsilon_{b^n_s})$, où a^n_s et b^n_s appartiennent à D. Pour tout $\rho \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, la mesure f_ρ adhérente à la suite $(f^n_{s|n})$ est alors de la forme $f_\rho = \frac{1}{2}(\varepsilon_{a_\rho} - \varepsilon_{b_\rho})$. On associe à toute partie A de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ l'espace

$$E_a = \{g \in \mathscr{C}(K) \,|\, f_\rho(g) = 0 \ \forall \rho \in A\}.$$

D'après la forme des mesures f_ρ, l'espace E_A est une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{C}(K)$. Le lemme 4 montre que si $A \neq A'$, alors $E_A \neq E_{A'}$. Or la tribu $\mathrm{Cyl}(\mathscr{C}(K))$ a C éléments, donc il existe $A \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ tel que $E_A \notin \mathrm{Cyl}(\mathscr{C}(K))$. La tribu $\mathrm{Cyl}(\mathscr{C}(K))$ étant souslinienne, ceci implique que la tribu $\mathrm{Cyl}(E_A)$ *n'est pas* souslinienne. Or $E_A = \mathscr{C}(K')$ pour un certain compact K', image continue de K, et [5] montre que K' n'est pas de Rosenthal. C.Q.F.D.

Remarques et Questions

(i) A-t-on en général (4) $\Rightarrow$ (1)?

(ii) Dans (2), l'hypothèse "K séparable" est nécessaire comme le montre l'exemple du compactifié d'Alexandroff d'un ensembe discret de cardinal C.

(iii) Tout compact de Rosenthal séparable étant représentable, un *convexe* compact de Rosenthal héréditairement séparable est métrisable. L'exemple de l'intervalle éclaté montre qu'on ne peut se passer de l'hypothèse de convexité.

(iv) Le théorème 5 permet de montrer que *si E est représentable et non séparable, alors E a un quotient qui n'est pas de type dénombrable.* Ceci amène à se poser la question suivante: existe-t-il un sous-espace X non séparable de $l^\infty(\mathbf{N})$, tel que tout quotient de X soit de type dénombrable?

Bibliographie

1. J. Bourgain, D. H. Fremlin and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), 845–886.

2. G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, New York, 1969.

3. J. P. R. Christensen, *Topology and Bord-Structure*, North-Holland Mathematics Studies, 1974.

4. G. A. Edgar, *Measurability in Banach spaces*, Indiana Univ. J. Math. **26** (1977), 663–680.

5. G. Godefroy, *Compacts de Rosenthal*, Pacific J. Math. **91** (2) (1980).

6. R. Haydon, *On dual L^1-spaces and injective bidual Banach spaces*, Israel J. Math. **31** (1978), 142–152.

7. R. E. Huff and P. Morris, *Dual spaces with the Krein–Milman property have the Radon–Nikodym property*, Proc. Amer. Math. Soc.

8. K. Kunen, communication personnelle.

9. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Vol II, Springer-Verlag, 1979, p. 97.

10. R. Pol, *On a question of H. H. Corson and some related problems*, preprint (Warszawa).

11. C. Stegall, *The Radon–Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc.

12. M. Talagrand, *Utilisation de l'hypothèse du continu pour la construction d'espaces compacts*, C. R. Acad. Sci. Paris **289** (1979).

13. M. Talagrand, *Sur les espaces de Banach contenant $l^1(\tau)$*, Israel J. Math. **40** (1981), 324–330.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS — CEDEX 05, FRANCE