SUPPLEMENTO AL VOLUME IX, SERIE X N. 2, 1958
DEL NUOVO CIMENTO 3° Trimestre

Sur une généralisation non linéaire de la mécanique ondulatoire et les propriétés des fonctions d'ondes correspondantes.

G. PETIAU

Institut Henri Poincaré - Paris

(ricevuto il 30 Gennaio 1958)

SOMMAIRE. — **1.** Introduction. – **2.** Les solutions principales de l'équation de Klein-Gordon. – **3.** Les ondes planes généralisées déduites des fonctions elliptiques de Jacobi. – **4.** Les solutions ondes planes des équations d'ondes non linéaires $\square\,\psi+\alpha\psi+\gamma\psi^3=0$. – **5.** La composition des fonctions d'ondes dans les théories non linéaires. – **6.** Solutions invariantes et solutions radiales des équations précédentes.

1. – Introduction.

Je me propose d'exposer ici quelques résultats que j'ai obtenu dans la recherche et l'étude des solutions de quelques types d'équations d'ondes non linéaires susceptibles de généraliser les équations d'ondes de la mécanique ondulatoire.

De nombreux auteurs ont déjà cherché à introduire des équations d'ondes non linéaires en partant soit d'une étude phénoménologique des interactions, soit en cherchant une théorie non linéaire dont la théorie quantique des champs soit une approximation.

J'ai adopté un tout autre point de vue en cherchant si des considérations très générales pouvaient sinon indiquer exactement, tout au moins restreindre les classes d'équations d'ondes non linéaires susceptibles d'être introduites. Partant d'une analyse des types de solutions de l'équation d'ondes de Klein-Gordon, j'ai été amené [16-18] à en examiner les généralisations acceptables. Réciproquement, ces généralisations satisfont à des équations d'ondes généralisations de l'équation de Klein-Gordon. Dans le cas des ondes planes j'ai été amené [16] ainsi à retrouver un type d'équations non linéaires déjà rencontré par R. FINKELSTEIN, R. LE LEVIER, M. RUDERMAN [6], L. SCHIFF [20] et N. ROSEN et H. B. ROSENSTOCK [19].

2. – Les solutions principales de l'équation de Klein-Gordon.

La mécanique ondulatoire usuelle représente les corpuscules sans spin par des fonctions d'ondes $\psi(x, y, z, t)$ solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(1) \qquad \begin{cases} \square\psi + \mu_0^2\psi = 0, \\ \square = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \qquad \mu_0 = \dfrac{m_0 c}{\hbar}, \qquad \hbar = \dfrac{h}{2\pi}. \end{cases}$$

Bien que des théorèmes généraux montrent l'équivalence de tous les systèmes complets de solutions des équations d'ondes, les applications de la mécanique ondulatoire montrent qu'il est nécessaire suivant les problèmes examinés, d'utiliser des systèmes de base adaptés possédant par exemple des symétries particulières. Dans une généralisation non linéaire de la mécanique ondulatoire qui semble souhaitable à différents égards il est possible que certains systèmes de base soient seuls à considérer, l'équivalence entre système pouvant ne résulter que d'une dégénéréscence associée à l'approximation linéaire.

Suivant les problèmes étudiés les principaux types de solutions de l'équation de Klein-Gordon sont:

a) les solutions du type ondes planes,

b) » » ondes invariantes,

c) » » ondes sphériques,

d) » » ondes guidées.

a) Les solutions du type « ondes planes » s'obtiennent à partir de l'équation (1) en supposant que les fonctions $\psi(x, y, z, t)$ ne dépendent que d'une seule variable soit τ, combinaison linéaire de x, y, z, t

$$\tau = \frac{1}{\hbar}[Wt - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})] = Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}),$$

par l'intermédiaire de quatre constantes (W, P_1, P_2, P_3) ou (K, K_1, K_2, K_3) telles que

$$W^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 \qquad \text{ou} \qquad K^2 = \boldsymbol{K}^2 + \mu_0^2.$$

La fonction $\psi(\tau)$ solution de (1) est alors solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\psi(\tau)}{d\tau^2} + \psi(\tau) = 0 \,. \tag{2}$$

La solution générale de (2) est une combinaison de deux types de solutions, les unes paires ψ_c, les autres impaires ψ_s

$$\psi_c = A \cos\tau \,, \qquad \psi_s = B \sin\tau \,. \tag{3}$$

Les fonctions $\psi(\tau) = \psi(Kct - (\boldsymbol{Kx}))$ peuvent être considérées comme résultant d'une transformation de Lorentz appliquée à la solution particulière du système propre $\psi(t)$, solution de (1) indépendante de x, y, z. On a alors

$$\tau = \mu_0 ct = \frac{2\pi}{h} m_0 c^2 t \,.$$

Les ondes planes (3) soient $\psi(\tau)$ forment un système complet de solutions de (1), fonctions de τ, uniformes, périodiques et d'amplitudes bornées.

b) Les solutions invariantes s'obtiennent à partir de (1) en considérant les solutions particulières de cette équation qui ne dépendent que d'une seule variable celle-ci étant un invariant relativiste.

On prend généralement pour cette variable

$$u = \sqrt{c^2t^2 - r^2} \,, \tag{4}$$

ou

$$u^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \,.$$

On voit facilement que

$$\Box = \frac{d^2}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d}{du} \,. \tag{5}$$

L'équation (1) détermine alors $\psi(u)$ par

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{3}{u}\frac{d}{du} + \mu_0^2\right]\psi(u) = 0 \,. \tag{6}$$

C'est encore une équation différentielle dont la solution générale s'exprime au moyen de fonctions de Bessel d'ordre un

$$\psi(u) = \frac{A}{u} J_1(\mu_0 u) + \frac{B}{u} N_1(\mu_0 u) = \frac{C_1}{u} H_1^{(1)}(\mu_0 u) + \frac{C_2}{u} H_1^{(2)}(\mu_0 u) \,, \tag{7}$$

(J_1, N_1 fonctions de Bessel de première et de seconde espèces, $H_1^{(1)}$ et $H_1^{(2)}$ fonctions de Hankel d'ordre 1 correspondantes).

c) et *d*) Pour l'introduction des ondes sphériques et des ondes guidées [18] nous allons maintenant supposer qu'il existe un repère privilégié R_0 dans lequel les fonctions d'ondes $\psi(x, y, z, t)$ s'expriment sous forme du produit d'une fonction de t, $\psi_1(t)$ et d'une fonction des variables d'espace, $\psi_2(x, y, z)$ ou $\psi_2(r, \theta, \varphi)$:

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \psi_1(t)\psi_2(x, y, z) = \psi_1(t)\psi_2(r, \theta, \varphi)\,. \tag{8}$$

Nous aurons alors

$$\psi_2(\boldsymbol{x})\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}t^2}(t) - \psi_1(t)\Delta\psi_2(\boldsymbol{x}) + \mu_0^2\psi_1\psi_2 = 0\,.$$

Introduisant deux constantes, λ_1, λ_2 telles que

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_0^2\,,$$

$\psi_1(t)$ et $\psi_2(\boldsymbol{x})$ satisferont aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\psi_1}{\mathrm{d}t^2}(t) + \lambda_1\psi_1(t) = 0\,,\\ &\Delta\psi_2(x, y, z) + \lambda_2\psi_2(x, y, z) = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(Nous supposerons λ_1 et λ_2 réels et nous nous bornerons ici au cas $\lambda_1 > 0$ afin de ne pas introduire de solutions de type évanescent par rapport à t. Ces solutions amorties au cours du temps ne doivent pas être écartées dans une étude générale que je ne fais pas ici).

Nous obtenons alors pour la fonction $\psi_1(t)$

$$\psi_1(t) = c_1 \exp[i\sqrt{\lambda_1}ct] + c_2 \exp[-i\sqrt{\lambda_1}ct] = c_1' \cos(\sqrt{\lambda_1}ct) + c_2' \sin(\sqrt{\lambda_1}ct)\,. \tag{10}$$

Pour $\psi_2(x, y, z)$ deux cas sont à considérer:

1) $\lambda_1 > \mu_0^2$, $\lambda_2 > 0$.

$$\Delta\psi_2 + \lambda_2\psi_2 = 0\,,$$

admet alors pour solutions acceptables

$$\psi_2(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}[AJ_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_2}r) + RN_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_2}r)]y_l^m(\theta, \varphi)\,; \tag{11}$$

2) $\lambda_1 < \mu_0^2$, $\lambda_2 < 0$.

$$\Delta\psi_2 - |\lambda_2|\psi_2 = 0\,,$$

a pour solutions restant bornées quand $r \to \infty$

(12) $$\psi_2(r, \theta, \varphi) = \frac{A}{\sqrt{r}} K_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{|\lambda_2|}\, r) y_l^m(\theta, \varphi) .$$

Si nous nous bornons au cas $l = 0$ nous n'avons plus à considérer les fonctions sphériques $y_l^m(\theta, \varphi)$ et il reste

(13) $$\psi_2(r, \theta, \varphi) = \psi_2(r) .$$

On a donc dans les cas ci-dessus

(14) $$\psi_2(r) = A' \frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}\, r)}{r} + B' \frac{\cos(\sqrt{\lambda_2}\, r)}{r} .$$

(15) $$\psi_2(r) = \frac{A''}{r} \exp\left[-\sqrt{|\lambda_2|}\, r\right] .$$

Les solutions dites « ondes sphériques » de la mécanique ondulatoire orthodoxe sont obtenues à partir de ces expressions en posant

(16) $$\lambda_1 = \frac{W^2}{\hbar^2 c^2} = K^2 , \qquad \lambda_2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = |\boldsymbol{K}|^2 ,$$

d'où $$\lambda_1 - \lambda_2 = K^2 - |\boldsymbol{K}|^2 = \mu_0^2 .$$

On a alors nécessairement $\lambda_1 > \mu_0^2$ et pour $l = 0$ la solution onde sphérique générale s'écrit

(17) $$\psi_{\text{sph.}} = \psi_1(t)\psi_2(r) = [c_1' \cos Kct + c_2' \sin Kct]\, A' \left[\frac{\sin |\boldsymbol{K}| r}{r} + A'' \frac{\cos |\boldsymbol{K}| r}{r}\right] =$$
$$= c_1'' \frac{\sin(Kct \mp |\boldsymbol{K}| r)}{r} + c_2'' \frac{\cos(Kct \mp |\boldsymbol{K}| r)}{r} .$$

La mécanique ondulatoire orthodoxe considère également le cas particulier des solutions ci-dessus pour lequel on a

(18) $$\lambda_1 = 0 , \qquad \psi = \psi_2(r) .$$

On est alors dans le cas 2) ci-dessus. $\lambda_1 = 0$ entraine $|\lambda_2| = \mu_0^2$ et

(19) $$\psi = \psi(r) = \psi_2(r) = \frac{c_0}{r} \exp[-\mu_0 r] .$$

Cette solution, en fixant la valeur de la constante C_0, est considérée comme représentant le champ $\psi(r)$ créé par une source C_0 localisée au point $r = 0$ dans le système propre du corpuscule (ici le repère R_0).

On passe des solutions $\psi = \psi_1(t)\psi_2(x, y, z)$ avec $\psi_1(t)$, $\psi_2(x, y, z)$ donnés par (10), (11) et (12) ou (10), (14) et (15) aux solutions du type « Ondes guidées » pour lesquelles le corpuscule est localisé et décrit une trajectoire (rectiligne et uniforme en l'absence de champ extérieur) en effectuant sur les fonctions ψ une transformation de Lorentz dépendant explicitement du temps.

Pour un corpuscule se déplaçant le long de l'axe OZ avec la vitesse v nous poserons

$$ct = \cosh \gamma ct' - \sinh \gamma z', \qquad z = \cosh \gamma z' - \sinh \gamma ct',$$

$$x = x', \qquad y = y', \qquad \operatorname{tgh} \gamma = v,$$

d'où

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + \cosh^2 \gamma (z' - \operatorname{tgh} \gamma ct')^2,$$

$$\sqrt{\lambda_1} t = \sqrt{\lambda_1}(\cosh \gamma ct' - \sinh \gamma z').$$

Ecrivant encore

$$\sqrt{\lambda_1} = \mu_1, \qquad K_1 = \mu_1 \cosh \gamma, \qquad \boldsymbol{K}_1 = \mu_1 \sinh \gamma,$$

$$\sqrt{\lambda_1} t = K_1 ct' - |\boldsymbol{K}_1| z',$$

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + \left(\frac{K_1}{\mu_1}\right)^2 [z' - vt']^2 = \varrho'^2,$$

nous obtenons alors l'expression de l'« onde guidée »

$$(20) \qquad \psi'(x', y', z', t') =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} c_1' \cos \\ c_1'' \sin \end{matrix} \; (K_1 ct' - |\boldsymbol{K}_1| z') \right\} \cdot \left\{ A' \frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}\varrho')}{\varrho'} + A'' \frac{\cos(\sqrt{\lambda_2}\varrho')}{\varrho'} \right\}.$$

Le terme en A'' introduit une singularité polaire qui se déplace avec la vitesse v ($\varrho' = 0$ pour $x' = y' = 0$, $z' = vt'$). Même si l'on se borne à la partie régulière, une structure définie dans R_0 par une combinaison de solutions du type (10), (11) et (12) ou (10), (14) et (15) engendre une solution combinaison des $\psi'(x', y', z', t')$ ci-dessus déplacée avec la vitesse v.

La solution particulière

$$\psi = \psi(r) = \frac{c_0 \exp[-\mu_0 r]}{r},$$

conduit à la solution guidée

$$(21) \qquad \psi(x', y', z', t') = \frac{c_0 \exp\left[-\mu_0 (x'^2 + y'^2 + \cosh^2 \gamma (z' - vt')^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[x'^2 + y'^2 + \cosh^2 \gamma (z' - vt')^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

interprétée ordinairement comme champ de Yukawa d'une source en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\operatorname{tgh} \gamma = v$.

De même les solutions du type onde plane rentrent dans le schéma des ondes guidées lorsque nous posons $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\psi = \psi_1(t)$.

3. – Les ondes planes généralisées déduites des fonctions elliptiques de Jacobi.

Dans une extension de la mécanique ondulatoire basée sur l'équation de Klein-Gordon nous devrons généraliser soit l'ensemble des types de solutions que nous venons de considérer soit seulement certaines d'entre elles que des raisons physiques nous conduisent à considérer comme rattachées plus directement à la représentation de la matière.

Si nous considérons d'abord les solutions du type ondes planes, nous avons vu qu'elles pouvaient être considérées comme résultant d'une transformation du groupe de Lorentz appliquée aux solutions particulières du système propre

$$\psi_s = A' \sin \tau_0 \,, \qquad \psi_c = A'' \cos \tau_0 \,, \tag{22}$$

avec

$$\tau_0 = \mu_0 c t = \frac{2\pi}{h} m_0 c^2 t = 2\pi \nu_0 t \,. \tag{23}$$

Cette forme de solution met en évidence un caractère fondamental de la représentation des corpuscules en mécanique ondulatoire sur lequel M. L. DE BROGLIE a souvent insisté: Dans le système propre du corpuscule la fonction d'ondes associe à celui-ci une « horloge », c'est-à-dire une fonction périodique du temps propre de période $T = h/m_0 c^2$ (ou de fréquence $\nu_0 = m_0 c^2/h$).

Si nous voulons généraliser cette conception tout en essayant d'enrichir la notion de corpuscule en introduisant non plus la seule constante intrinsèque $\nu_0 = m_0 c^2/h$ mais deux ou plusieurs constantes, la généralisation la plus immédiate consiste à prendre comme fonction d'ondes représentant le corpuscule dans son système propre, au lieu des fonctions circulaires $\cos \tau$ ou $\sin \tau$, certaines des fonctions elliptiques de Jacobi possédant une période réelle et une période imaginaire pure. La définition de ces fonctions introduit un paramètre k réel, compris entre 0 et 1. Pour $k = 0$, ces fonctions redonnent $\sin \tau$ et $\cos \tau$. La donnée de k équivaut à introduire un paramètre intrinsèque supplémentaire.

La théorie des fonctions de Jacobi introduit trois fonctions principales:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{sn}(u, k) & \text{de périodes} & 4K \text{ et } 4iK' \,, \\ \operatorname{cn}(u, k) & » & 4K \text{ et } 4iK' \,, \\ \operatorname{dn}(u, k) & » & 2K \text{ et } 2iK' \,. \end{array}$$

Les périodes $K(k)$ et $K'(k)$ sont définies par l'intégrale

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

et par

$$K'(k) = K(k') . \qquad \text{avec } k'^2 = 1 - k^2.$$

A partir de ces trois fonctions on construit un système de 12 fonctions elliptiques en adjoignant à $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ leurs inverses et leurs quotients:

$$\operatorname{ns} u = \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{nc} u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \qquad \operatorname{nd} u = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{sc} u = \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \qquad \operatorname{sd} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{cd} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{ds} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \operatorname{dc} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

on a notamment entre ces fonctions les relations

$$\operatorname{sn}(u + K, k) = \operatorname{cd}(u, k),$$

$$\operatorname{cn}(u + K, k) = -k' \operatorname{sd}(u, k),$$

$$\operatorname{dn}(u + K, k) = k' \operatorname{nd}(u, k),$$

$$\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u, \qquad \operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{tgh} u,$$

$$\operatorname{cn}(u, 0) = \cos u, \qquad \operatorname{cn}(u, 1) = \frac{1}{\cosh u},$$

$$\operatorname{dn}(u, 0) = 1, \qquad \operatorname{dn}(u, 1) = \frac{1}{\cosh u}.$$

On trouvera dans de nombreux livres de mathématiques appliquées l'étude des propriétés de ces fonctions. A titre indicatif je ne citerai que les ouvrages d'Appel et Lacour [1], de Greenhill [9], de Tricomi [22] et l'excellente petite monographie de Bowman [2].

La généralisation des fonctions d'ondes solutions ondes planes de l'équation de Klein-Gordon nous amène à poser $u = \tau$ d'où

$$\tau = 4K(k)\nu_0 t = 4K(k) \frac{m_0 c^2}{h} t = \frac{m_0 c^2}{\hbar'} t = \mu_0 c t . \tag{24}$$

$4K$ est ici l'analogue du facteur 2π du cas trigonométrique et ceci nous conduit à introduire une nouvelle constante de Planck réduite

$$\hbar' = \frac{h}{4K(k)}, \tag{25}$$

remplaçant la constante usuelle $\hbar = h/2\pi$, μ_0 sera lié à la masse dynamique m_0 par l'intermédiaire de $\hbar'$,

$$\mu_0 = \frac{m_0 c}{\hbar'}. \tag{26}$$

Dans le système propre, nous avons la possibilité de définir des fonctions d'ondes doublement périodiques, paires et impaires, se réduisant respectivement à $\sin\tau$ et $\cos\tau$ pour $k=0$ suivant deux choix

a) soit $\operatorname{sn}(\tau, k)$ et $\operatorname{cd}(\tau, k)$,

b) soit $\operatorname{cn}(\tau, k)$ et $\operatorname{sd}(\tau, k)$.

En outre, nous pouvons définir une fonction d'ondes doublement périodique se réduisant pour $k=0$ à une constante en considérant les fonctions

c) $\operatorname{dn}(\tau, k)$ et $\operatorname{nd}(\tau, k)$.

Nous allons maintenant examiner les équations différentielles du second ordre que le choix de ces fonctions nous conduit à adopter pour généraliser l'équation

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\psi(\tau) + \psi(\tau) = 0 .$$

Pour cela nous examinerons les équations différentielles du second ordre dont les solutions sont les fonctions elliptiques de Jacobi.

A) L'équation

$$y'^2 + (1-2k^2)y^2 + k^2y^4 - k'^2 = 0 ,$$

a pour solutions

$$y = \operatorname{cn} u \quad \text{si} \quad y(0) = 1 ,$$

$$y = k' \operatorname{sd} u \quad \text{si} \quad y(0) = 0 .$$

Par suite

$$y'' + (1-2k^2)y + 2k^2y^3 = 0 ,$$

a pour solutions

$$y = \operatorname{cn} u \quad \text{si} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 ,$$

$$y = k' \operatorname{sd} u \quad \text{si} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = k'.$$

$B)\quad y'^2 + (1+k^2)y^2 - k^2y^4 - 1 = 0\,,$

a pour solutions

$$y = \operatorname{sn} u \qquad \text{si} \qquad y(0) = 0\,,$$

$$y = \operatorname{cd} u \qquad \text{si} \qquad y(0) = 1\,.$$

Par suite

$$y'' + (1+k^2)y - 2k^2y^3 = 0\,,$$

a pour solutions

$$y = \operatorname{sn} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1\,,$$

$$y = \operatorname{cd} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

C) L'équation

$$y'^2 - (1+k'^2)y^2 + y^4 + k'^2 = 0\,,$$

a pour solutions

$$y = \operatorname{dn} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = 1\,,$$

$$y = k' \operatorname{nd} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = k'.$$

Par suite,

$$y'' - (1+k^2)y + 2y^3 = 0\,,$$

a pour solutions

$$y = \operatorname{dn} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

$$y = k' \operatorname{nd} u \qquad \text{pour} \qquad y(0) = k', \quad y'(0) = 0\,.$$

Revenant des équations différentielles vérifiées par les fonctions $\psi(\tau)$ aux équations aux dérivées partielles déterminant les fonctions $\psi(x, y, z, t)$ on voit immédiatement par correspondance que

$$A)\quad (27) \qquad \begin{cases} \psi_c = \lambda \quad \operatorname{cn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})),\, k\right]\,, \\ \psi_s = \lambda k' \operatorname{sd}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})),\, k\right]\,, \end{cases}$$

sont solutions particulières de

$$(28) \qquad \square\psi + (1 - 2k^2)\mu_0^2\psi + \frac{2k^2\mu_0^2}{\lambda^2}\psi^3 = 0\,,$$

$$(\mu_0^2 = K^2 - |\boldsymbol{K}|^2)\,.$$

$$B) \quad (29) \qquad \begin{cases} \psi_s = \lambda \operatorname{sn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})), k\right], \\ \psi_c = \lambda \operatorname{cd}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})), k\right], \end{cases}$$

sont solutions particulières de

$$(30) \qquad \Box\psi + (1 + k^2)\mu_0^2\psi - \frac{2k^2\mu_0^2}{\lambda^2}\psi^3 = 0 .$$

$$C) \quad (31) \qquad \begin{cases} \psi_{\mathrm{dn}} = \lambda \ \operatorname{dn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})), k\right], \\ \psi_{\mathrm{nd}} = \lambda k' \operatorname{nd}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})), k\right], \end{cases}$$

sont solutions particulières de

$$(32) \qquad \Box\psi - (1 + k'^2)\mu_0^2\psi + \frac{2\mu_0^2}{\lambda^2}\psi^3 = 0 .$$

Les équations (28), (30), (32) ont été déjà rencontrées par de nombreux auteurs notamment L. Schiff [20], N. Rosen et H. B. Rosentock [19], R. Finkelstein, R. Le Levier et M. Ruderman [6], B. J. Malenka [13], D. Ivanenko [11].

Ces équations s'écrivent d'une façon générale

$$(33) \qquad \Box\psi + \alpha\psi + \gamma\psi^3 = 0 ,$$

α et γ désignant deux constantes.

4. – Les solutions ondes planes des équations d'ondes non linéaires $\Box\psi + \alpha\psi + \gamma\psi^3 = 0$.

Réciproquement nous allons utiliser les résultats ci-dessus pour caractériser les solutions ondes planes des équations (33) que nous répartirons en quatre types

$$(34) \qquad \begin{cases} (\mathrm{A}) \quad \Box\psi + \mu_1^2\psi + \mu_2^2\psi^3 = 0 , \\ (\mathrm{B}) \quad \Box\psi + \mu_1^2\psi - \mu_2^2\psi^3 = 0 , \\ (\mathrm{C}) \quad \Box\psi - \mu_1^2\psi + \mu_2^2\psi^3 = 0 , \\ (\mathrm{D}) \quad \Box\psi - \mu_1^2\psi - \mu_2^2\psi^3 = 0 . \end{cases}$$

Plus précisément, nous allons déterminer lorsqu'elles existent sous des conditions que nous préciserons les solutions de ces équations du type ondes planes d'amplitudes bornées.

A) L'équation (A) admet pour solutions les ondes planes

$$\psi = \lambda \operatorname{cn}[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})) + \xi_0, k], \tag{35}$$

avec

$$K^2 - |\boldsymbol{K}|^2 = \mu_0^2,$$

$$\mu_0 = \frac{m_0 c}{\hbar'},$$

en déterminant μ_0 et k par

$$(1 - 2k^2)\mu_0^2 = \mu_1^2, \qquad \frac{2k^2\mu_0^2}{\lambda^2} = \mu_2^2,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \mu_0^2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2\lambda^2, \\ k^2 &= \frac{\mu_2^2\lambda^2}{2(\mu_1^2 + \mu_2^2\lambda^2)}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Ici on a toujours $0 \leqslant k^2 \leqslant \frac{1}{2}$. L'onde plane n'est jamais apériodique. La masse dynamique réduite μ_0 est toujours supérieure à μ_1 tandis que la masse dynamique vraie m_0 a pour valeur

$$m_0 = \frac{h\mu_0}{4cK(k)}.$$

Si $\mu_0 > \mu_1$ est fixé, λ et k sont déterminés par

$$\lambda^2 = \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{\mu_2^2}, \qquad k^2 = \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2\mu_0^2}. \tag{37}$$

Si au lieu de μ_0, m_0 est donné la détermination de k est plus complexe: on devra dans ce cas résoudre l'équation transcendante

$$(1 - 2k^2)K^2(k) = \frac{h^2\mu_1^2}{16m_0^2c^2}. \tag{38}$$

Si l'on se donne les trois constantes μ_1, μ_2 et k, $(0 \leqslant k^2 \leqslant \frac{1}{2})$ alors

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{2k^2\mu_1^2}{\mu_2^2(1 - 2k^2)}, \\ \mu_0^2 &= \frac{\mu_1^2}{1 - 2k^2} \qquad \text{et} \qquad m_0^2c^2 = \frac{\mu_1^2}{16K^2(1 - 2k^2)}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Les ondes planes (35) sont solutions de (A) quelques soient les conditions initiales $\psi(0)$ ou $\psi'(0)$. Pour $\xi_0 = 0$, $\psi = \lambda \operatorname{cn} \tau$, pour $\xi_0 = K$, $\psi = \lambda k' \operatorname{sd} \tau$.

B) Les équations de la forme

$$\Box\psi + \mu_1^2\psi - \mu_2^2\psi^3 = 0\,, \tag{34B}$$

admettent pour solutions les ondes planes d'amplitudes bornées

$$\psi = \lambda \operatorname{sn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})) + \xi_0, k\right], \qquad K^2 - |\boldsymbol{K}|^2 = \mu_0^2\,, \tag{40}$$

avec ici

$$\left|\begin{aligned} \mu_0^2 &= \mu_1^2 - \frac{\mu_2^2\lambda^2}{2}\,, \\ k^2 &= \frac{\mu_2^2\lambda^2}{2\mu_1^2 - \mu_2^2\lambda^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

La condition $0 \leqslant k^2 < 1$ entraîne

$$0 \leqslant \lambda^2 \leqslant \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\,.$$

Ceci correspond à des restrictions sur les données initiales.

En effet la solution ci-dessus n'existe que si les conditions initiales satisfont aux conditions

$$(\psi'(0))^2 \leqslant \frac{\mu_1^2}{2\mu_2^2}\,,$$

et

$$(\psi(0))^2 \leqslant \frac{1}{\mu_2^2}\left[\mu_1^2 - \sqrt{2\mu_2^2(\psi'(0))^2}\right].$$

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, les solutions ondes planes de (B) sont des fonctions elliptiques de Jacobi devenant périodiquement non bornées et il ne semble pas que de telles fonctions soient susceptibles de représenter une structure corpusculaire physiquement réalisable.

Réciproquement la donnée de μ_0^2, μ_1^2, μ_2^2 détermine λ^2 et k^2 par

$$\left|\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{2(\mu_0^2 - \mu_1^2)}{\mu_0^2}\,, \\ k^2 &= \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{\mu_0^2}\,. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Cette solution devient apériodique pour $\lambda^2 = \mu_1^2/\mu_2^2$. Alors $\mu_0^2 = \mu_1^2/2$ et

$$\psi_s = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,\mathrm{tgh}\,(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}))\,, \qquad \psi_c = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,. \tag{43}$$

La relation $m_0 c = \hbar\mu_0/4K$ montre alors que si $\mu_0 = \mu_1/\sqrt{2}$ reste fini, $K(1) \to \infty$, la masse propre dynamique m_0 tend vers zéro.

C) Les équations du type (C)

$$\Box\psi - \mu_1^2\psi + \mu_2^2\psi^3 = 0\,, \tag{34C}$$

admettent quelque soient les conditions initiales des solutions ondes planes soit du type $\lambda\,\mathrm{cn}\,\tau$ soit du type $\lambda\,\mathrm{dn}\,\tau$.

— C_1 —

$$\psi = \lambda\,\mathrm{dn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})) + \xi_0, k\right]\,, \tag{44}$$

satisfait aux équations (C), μ_0^2 et k^2 étant déterminés par

$$\mu_0^2 = \frac{\mu_2^2\lambda^2}{2}\,, \qquad k^2 = \frac{2(\mu_2^2\lambda^2 - \mu_1^2)}{\mu_2^2\lambda^2}\,, \tag{45}$$

sous la condition

$$\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \leqslant \lambda^2 \leqslant \frac{2\mu_1^2}{\mu_2^2}\,.$$

Pour $\xi_0 = 0$, $\psi = \lambda\,\mathrm{dn}\,\tau$; pour $\xi_0 = K$, $\psi = \lambda k'\,\mathrm{nd}\,\tau$.

Pour $|\lambda| = \mu_1/\mu_2$, $k = 0$, ψ se réduit à une constante: $\psi = \mu_1/\mu_2$.

Pour $k^2 = 1$ soit $|\lambda| = \mu_1\sqrt{2}/\mu_2$, ψ devient apériodique

$$\left(\mathrm{dn}\,(u, 1) = \frac{1}{\cosh u}\right)\,,$$

mais alors $\mu_0^2 = \mu_1^2$, $k' \to 0$. Il faut que la masse propre dynamique m_0 tende vers zéro.

Réciproquement si μ_0^2, μ_1^2, μ_2^2 sont données

$$\lambda^2 = \frac{2\mu_0^2}{\mu_2^2}\,, \qquad k^2 = \frac{2\mu_0^2 - \mu_1^2}{\mu_0^2}\,,$$

sous la condition $\mu_1^2/2 \leqslant \mu_0^2 \leqslant \mu_1^2$.

— C_2 —

$$\psi = \lambda\,\mathrm{cn}\left[(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})) + \xi_0, k\right]\,, \tag{46}$$

avec

$$\tfrac{1}{2} \leqslant k^2 \leqslant 1 ,$$

est solution de (C).

(Pour $\xi_0 = 0$, $\psi_c = \lambda \operatorname{cn} \tau$, pour $\xi_0 = \mp K$, $\psi_s = \pm \lambda k' \operatorname{sd} \tau$).

μ_0^2 et k^2 sont alors déterminés par

$$(47) \qquad \begin{cases} \mu_0^2 = \mu_2^2\lambda^2 - \mu_1^2 , \\ k^2 = \dfrac{\mu_2^2\lambda^2}{2(\mu_2^2\lambda^2 - \mu_1^2)} , \end{cases}$$

sous la condition

$$\lambda^2 \geqslant \frac{2\mu_1^2}{\mu_2^2} .$$

Pour $\lambda^2 = 2\mu_1^2/\mu_2^2$, $k^2 = 1$, ψ devient apériodique

$$(48) \qquad \psi_c = \frac{\mu_1\sqrt{2}}{\mu_2} \frac{1}{\cosh \tau} .$$

Réciproquement si μ_0^2, μ_1^2, μ_2^2 sont donnés

$$(49) \qquad \lambda^2 = \frac{\mu_0^2 + \mu_1^2}{\mu_2^2} , \qquad k^2 = \frac{\mu_0^2 + \mu_1^2}{2\mu_0^2} , \qquad (\mu_0^2 \geqslant \mu_1^2) .$$

D) Les équations du type

$$(34\mathrm{D}) \qquad \Box\psi - \mu_1^2\psi - \mu_2^2\psi^3 = 0 ,$$

n'admettent pas de solutions ondes planes d'amplitudes bornées.

En effet les solutions de l'équation différentielle associée

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} - \mu_1^2\psi - \mu_2^2\psi^3 = 0 ,$$

sont suivant les conditions initiales de l'une des formes

$$\lambda \operatorname{tn} \tau , \qquad \lambda \frac{\operatorname{sn} \tau}{\operatorname{cd} \tau} , \qquad \lambda \operatorname{nc} \tau .$$

Ces fonctions doublement périodiques deviennent périodiquement non bornées et ne sont pas physiquement acceptables. Ceci conduit à écarter les équations du type (D).

Dans les trois cas (A), (B), (C) nous avons obtenu des solutions ondes planes du type stationnaire.

La mécanique ondulatoire linéaire considère surtout les ondes planes du type « progressif » c'est à dire de la forme

$$\psi = A \exp\left[i(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}))\right],$$

correspondant aux solutions

$$\psi = A \exp[\pm i\tau], \qquad (\tau = Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x})),$$

de

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi(\tau) = 0 .$$

On peut se proposer de déterminer pour (34A), (34B), (34C) des ondes du même type se réduisant pour $\mu_2 = 0$ aux fonctions $A \exp[\pm i\tau]$.

Si l'on considère l'équation

$$y''_{x^2} + \omega^2 y(x) = 0 ,$$

l'intégration directe donne

$$y'^2 + \omega^2 y^2 = \chi_0 = \text{const} .$$

$\chi_0 \neq 0$ conduit aux ondes stationnaires $\sqrt{\chi_0/\omega^2}\sin\omega x$ et $\sqrt{\chi_0/\omega^2}\sin\omega x$ tandis que $\chi_0 = 0$ conduit à $y = A \exp[\pm i\omega x]$.

Ici l'équation différentielle associée à l'équation (34A) par exemple soit

$$\psi''_{\tau^2} + \mu_1^2\psi + \mu_2^2\psi^3 = 0 ,$$

donne par intégration directe

$$(\psi'_\tau)^2 + \mu_1^2\psi^2 + \frac{\mu_2^2}{2}\psi^4 = \chi_0 .$$

$\chi_0 \neq 0$ conduit aux solutions réelles stationnaires considérées précédemment.

$\chi_0 = 0$ conduit à un autre type de solutions.

Posant $\psi = 1/\chi$ on voit facilement que si $\chi_0 = 0$

$$\psi(\tau) = \frac{1}{C_1 \exp[i\mu_1\tau] - C_2 \exp[-i\mu_1\tau]}, \tag{50}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes liées par la relation

$$C_1 C_2 = \frac{\mu_2^2}{8\mu_1^2} . \tag{51}$$

Posant $1/C_1 = \lambda_1$, $1/C_2 = -\lambda_2$, on écrit encore

$$(52) \qquad \psi(\tau) = \frac{\lambda_1}{\exp[i\mu_1\tau] - (\mu_2^2/8\mu_1^2)\lambda_1^2 \exp[-i\mu_1\tau]} = $$

$$= \frac{\lambda_2}{\exp[-i\mu_1\tau] - (\mu_2^2/8\mu_1^2)\lambda_2^2 \exp[i\mu_1\tau]},$$

ou encore

$$(53) \qquad \psi(\tau) = \frac{\lambda_1}{\exp[i\mu_1\tau](1 + \mu_2^2\lambda_1^2/8\mu_1^2) - (\mu_2^2/4\mu_1^2)\lambda_1^2 \cos\mu_1\tau} =$$

$$= \frac{\lambda_2}{[1 + (\mu_2^2/8\mu_1^2)\lambda_2^2] \exp[-i\mu_1\tau] - (\mu_2^2/4\mu_1^2)\lambda_2^2 \cos\mu_1\tau}.$$

Ces fonctions sont simplement périodiques. On voit facilement sur ces expressions comment s'opère lorsque $\mu_2 \to 0$ le passage aux solutions du cas de Klein-Gordon.

L'onde plane $\psi(Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}))$, $(K^2 - |\boldsymbol{K}|^2 = \mu_1^2)$ n'est jamais purement progressive. A côté du terme progressif figure un terme stationnaire. Ceci peut encore s'interpréter en disant que les ondes planes de ce type ne sont jamais uniquement à énergie positive ou uniquement à énergie négative. Un terme de battement accompagne toujours le terme principal progressif à énergie positive ou négative.

5. – La composition des fonctions d'ondes dans les théories non linéaires.

Les équations (34A), (34B), (34C) ne sont pas linéaires et la somme de deux solutions n'est pas une solution. Néanmoins et c'est là un point sur lequel je veux insister maintenant, il existe pour les ondes planes solutions de ces équations un théorème d'addition ou si l'on préfère un théorème de composition.

Celui-ci va résulter immédiatement des théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.

Considérons la fonction $\operatorname{cn} u$. On a vu que

$$\operatorname{cn}(u + K) = -k'\operatorname{sd} u, \qquad \operatorname{sd}(u + K) = \frac{1}{k'}\operatorname{cn} u.$$

On peut montrer que les théorèmes d'addition des fonctions elliptiques tels qu'ils sont donnés dans les traités classiques prennent également la forme suivante

$$
(54)\qquad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{cn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \mp k'^2 \operatorname{sd}u \operatorname{sd}v}{1 \pm k^2 \operatorname{cn}u \operatorname{sd}v \operatorname{cn}v \operatorname{sd}v},\\
\operatorname{sd}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{sd}u \operatorname{cn}v \pm \operatorname{sd}v \operatorname{cn}u}{1 \mp k^2 \operatorname{sd}u \operatorname{cn}u \operatorname{sd}v \operatorname{cn}v},\\
\operatorname{sn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{sn}u \operatorname{cd}v \pm \operatorname{cd}u \operatorname{sn}v}{1 \mp k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{cd}v \operatorname{sn}v \operatorname{cd}v},\\
\operatorname{cd}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{cd}u \operatorname{cd}v \mp \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v}{1 \pm k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{cd}v \operatorname{sn}v \operatorname{cd}v}.
\end{aligned}\right.
$$

Si l'on considère pour un corpuscule représenté par l'équation (34A) des états τ_1 et τ_2 auxquels correspondent les fonctions d'ondes

$$
(55)\qquad \left\{\begin{aligned}
\psi_c^{(1)} &= \lambda \operatorname{cn}\tau_1, \qquad & \psi_s^{(1)} &= \lambda k' \operatorname{sd}\tau_1,\\
\psi_c^{(2)} &= \lambda \operatorname{cn}\tau_2, \qquad & \psi_s^{(2)} &= \lambda k' \operatorname{sd}\tau_2,
\end{aligned}\right.
$$

à la fonction d'état $(1)+(2)$ ou $\psi(\tau_1+\tau_2)$ correspondent les fonctions

$$
(56)\qquad \left\{\begin{aligned}
\psi_c^{(1)+(2)} &= \lambda \quad \operatorname{cn}(\tau_1+\tau_2, k),\\
\psi_s^{(1)+(2)} &= \lambda k' \operatorname{sd}(\tau_1+\tau_2, k).
\end{aligned}\right.
$$

Le théorème d'addition donne alors

$$
(57)\qquad \left\{\begin{aligned}
\psi_c^{(1)+(2)} &= \frac{\lambda^3[\psi_c^{(1)}\psi_c^{(2)} - \psi_s^{(1)}\psi_s^{(2)}]}{\lambda^4 + (k^2/k'^2)\,\psi_s^{(1)}\psi_s^{(2)}\psi_c^{(1)}\psi_c^{(2)}},\\
\psi_s^{(1)+(2)} &= \frac{\lambda^3[\psi_s^{(1)}\psi_c^{(2)} + \psi_s^{(2)}\psi_c^{(1)}]}{\lambda^4 - (k^2/k'^2)\psi_s^{(1)}\psi_s^{(2)}\psi_c^{(1)}\psi_c^{(2)}}.
\end{aligned}\right.
$$

La possibilité de construire des fonctions d'état à deux corpuscules à partir des fonctions d'états à un corpuscule rend possible la construction d'un espace d'états nécessaire pour introduire une seconde quantification.

La seconde quantification a été généralement considérée comme nécessitant une théorie linéaire. Il me semble que ceci n'est pas nécessaire mais que la seconde quantification est essentiellement attachée à la possibilité de construire des états à 2, 3, ... n particules à partir des états à une particule. Pour cela, il suffit que dans la théorie considérée, il existe un théorème d'addition ou de composition des états, c'est à dire qu'à partir des fonctions représentant un état à n particules et un état à une particule on puisse construire un état à $n+1$ particules.

Les fonctions d'ondes acceptables seront donc celles admettant un théorème d'addition. Cette condition, nécessaire mais non suffisante, semble *a priori* très large. Néanmoins nous allons voir que l'on peut apporter à la détermination de ces fonctions une solution particulière remarquable.

En effet, WEIERSTRASS a démontré un théorème remarquable (voir par exemple le traité des fonctions elliptiques de HANCKOCK [10]) qui répond à notre question.

WEIERSTRASS appelle théorème d'addition algébrique une relation algébrique liant les fonctions $\Phi(u)$, $\Phi(v)$, $\Phi(u+v)$, et voici son théorème:

« Toute fonction pour laquelle il existe un théorème d'addition algébrique est une fonction elliptique ou l'une de ses dégénérescences ».

L'application de ce théorème aux solutions ondes planes nous conduit d'une façon limitative aux équations d'ondes considérées ci-dessus.

Toutefois la nature algébrique d'un théorème d'addition des fonctions d'ondes ne s'impose pas du point de vue de l'interprétation physique et rien ne nous conduit à penser que la nature obéisse à des règles traduites par des lois algébriques.

Je vais d'ailleurs considérer maintenant un exemple simple d'équations d'ondes généralisant les équations précédentes et pour lequel il existera un théorème d'addition non algébrique pour les ondes planes.

Pour cela je considère les équations d'ondes non linéaires

$$(58)\qquad \begin{cases} (\alpha) & \Box\psi + \mu_1^2 \sin\psi = 0\,, \\ (\beta) & \Box\psi + \mu_1^2 \sinh\psi = 0\,. \end{cases}$$

Si l'on considère que ces équations sont « approchées » par les équations obtenues en remplaçant $\sin\psi$ et $\sinh\psi$ par les premiers termes de leurs développements en séries ces équations sont les généralisations de

$$(59)\qquad \begin{cases} (\alpha') & \Box\psi + \mu_1^2\psi - \dfrac{\mu_1^2}{6}\psi^3 = 0\,, \\ (\beta') & \Box\psi + \mu_1^2\psi + \dfrac{\mu_1^2}{6}\psi^3 = 0\,. \end{cases}$$

Si l'on pose alors $\psi = \lambda\varphi$, $\mu_1^2\lambda^2/6 = \mu_2^2$, on obtient pour φ les équations

$$(60)\qquad \begin{cases} (\alpha'') & \Box\varphi + \mu_1^2\varphi - \mu_2^2\varphi^3 = 0\,, \\ (\beta'') & \Box\varphi + \mu_1^2\varphi + \mu_2^2\varphi^3 = 0\,. \end{cases}$$

On retrouve les équations des types (34A) et (34B) précédents.

Les solutions du type « ondes planes » des équations (58α) et (58β) peuvent s'obtenir sans difficulté.

Si l'on pose

$$\tau = Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}) \,, \qquad \text{avec } K^2 - |\boldsymbol{K}|^2 = \mu_0^2,$$

les solutions « ondes planes » de (58α) et (58β) seront de la forme

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \psi(\tau) \,,$$

$\psi(\tau)$ étant solution des équations *différentielles*

$$(61) \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2\psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + \dfrac{\mu_1^2}{\mu_0^2} \sin \psi(\tau) = 0 \,, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2\psi(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + \dfrac{\mu_1^2}{\mu_0^2} \sinh \psi(\tau) = 0 \,, \end{array}\right.$$

ou

$$(62) \qquad \left\{\begin{array}{ll} (\alpha) & \psi''_{\tau^2} + \chi_1 \sin \psi(\tau) = 0 \,, \\[1ex] (\beta) & \psi''_{\tau^2} + \chi_1 \sinh \psi(\tau) = 0 \,. \end{array}\right.$$

Nous allons examiner les solutions de (62α), celles de (62β) s'obtenant par une analyse parallèle.

L'équation (62α) est bien connue en physique: c'est l'équation du mouvement pendulaire:

Alors que l'équation de Klein-Gordon associait au corpuscule dans son système propre le mouvement d'un oscillateur sinusoidal, les équations non linéaires considérées ici lui associent un mouvement pendulaire.

Les solutions de

$$(58\alpha) \qquad \Box\psi + \mu_1^2 \sin \psi = 0 \,,$$

ne sont définies qu'à un multiple de 2π près. Si $\psi_0(\tau)$ est solution il en sera de même de

$$\psi_1(\tau) = \psi_0(\tau) + 2n\pi \,.$$

De même si l'on pose

$$\psi_2(\tau) = \psi_0(\tau) \pm \frac{n\pi}{2} \,,$$

les fonctions $\psi_2(\tau)$ satisfont à

(58γ) $$\Box\psi_2(\tau) + \mu_1^2 \cos \psi_2(\tau) = 0 \, .$$

Les solutions de (58α) permettent donc d'écrire immédiatement celles de (58β) et de (58γ)

Pour obtenir les solutions ondes planes de (58α) il nous suffit de considérer l'équation différentielle (62α) qui par intégration directe donne

(63) $$(\psi_\tau')^2 - 2\chi_1 \cos \psi = \chi_0 \, ,$$

χ_0 étant une constante telle que

$$\chi_0 = \psi_0'^2 - 2\chi_1 \cos \psi_0 \, .$$

Nous en déduisons

(64) $$(\psi_\tau')^2 = (\chi_0 + 2\chi_1)\left[1 - \frac{4\chi_1}{\chi_0 + 2\chi_1} \sin^2 \frac{\psi}{2}\right] ,$$

et ceci nous conduit à considérer deux cas

$$1) \qquad \frac{4\chi_1}{\chi_0 + 2\chi_1} \leqslant 1 \qquad \text{soit} \qquad \chi_0 \geqslant 2\chi_1 \, .$$

Posant $k^2 = 4\chi_1/(\chi_0 + 2\chi_1)$,

(65) $$(\psi_\tau')^2 = \frac{4\chi_1}{k^2}\left[1 - k^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}\right] ,$$

$$2) \qquad \frac{4\chi_1}{\chi_0 + 2\chi_1} = k_1^2 > 1 \, ,$$

d'où

(67) $$(\psi_\tau')^2 = \frac{4\chi_1}{k_1^2}\left[1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}\right] .$$

Dans le premier cas, on a immédiatement

$$2\int_0^{\psi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \pm \frac{2\sqrt{\chi_1}}{k} \tau + 2\xi_0 \, ,$$

ou

$$F\left(\frac{\psi}{2}, k\right) = \pm \frac{\sqrt{\chi_1}}{k} \tau + \xi_0 \, ,$$

$F(\varphi, k)$ désignant l'intégrale elliptique de Legendre

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}\,.$$

Introduisant la fonction $\mathrm{am}\,(u, k) = \varphi$ telle que

$$\sin\varphi = \mathrm{sn}\,(u, k) \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi = \mathrm{cn}\,(u, k)\,,$$

on obtient

$$\frac{\psi}{2} = \mathrm{am}\left(\pm\frac{\sqrt{\chi_1}}{k}\tau + \xi_0, k\right), \tag{68}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\frac{\psi}{2} &= \mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{\chi_1}}{k}\tau + \xi_0, k\right), \\ \cos\frac{\psi}{2} &= \mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\chi_1}}{k}\tau + \xi_0, k\right). \end{aligned}\right. \tag{69}$$

$0 \leqslant k^2 \leqslant 1$ entraine la condition

$$\cos^2\frac{\psi_0}{2} \leqslant \frac{\psi_0'^2}{4\chi_1}\,.$$

La solution du second cas pour lequel

$$\cos^2\frac{\psi_0}{2} > \frac{\psi_0'^2}{4\chi_1}\,,$$

ce qui exige

$$\psi_0'^2 < 4\chi_1\,,$$

se déduit de la solution du premier cas par la relation

$$F(\varphi, k_1) = kF(\varphi_1, k)\,,$$

avec

$$\varphi_1 = \arcsin\,(k_1 \sin\varphi)\,,$$

ou par la formule dite du module réciproque

$$\mathrm{sn}\,(ku, k_1) = k\,\mathrm{sn}\,(u, k)\,,$$

qui nous donne ici

$$\sin\frac{\psi}{2} = k\,\mathrm{sn}\,(\sqrt{\chi_1}\tau + \xi_1, k)\,. \tag{70}$$

Nous avons donc dans le cas considéré des expressions simples au moyen des fonctions elliptiques des ondes planes solutions des équations d'ondes (58).

Il existe encore ici un théorème d'addition pour les fonctions d'ondes solutions du type ondes planes.

En effet, soit

$$\tau_1 = K_1ct - (\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x})\,, \qquad \tau_2 = K_2ct - (\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x})\,,$$

avec

$$K_1^2 - (\boldsymbol{K}_1)^2 = K_2^2 - (\boldsymbol{K}_2)^2 = \mu_0^2\,,$$

$\psi(\tau_1)$ et $\psi(\tau_2)$ désignant les solutions précédentes, $\psi(\tau_1+\tau_2)$ s'exprime au moyen de $\psi(\tau_1)$ et de $\psi(\tau_2)$.

En effet nous avons

$$\psi(\tau) = 2\,\mathrm{am}\left[\frac{\sqrt{\chi_1}}{k}\,\tau + \xi_0\right].$$

Le théorème d'addition des fonctions $\mathrm{am}\,u$ nous donne

$$\begin{aligned}\mathrm{am}\,(u_1 \pm u_2) &= \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_2) \pm \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_1) = \\ &= \mathrm{arctg}\left[\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_2}\right] \pm \mathrm{arctg}\left[\frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_1}\right],\end{aligned} \tag{71}$$

$$(\sin\varphi_1 = \mathrm{sn}\,u_1\,, \qquad \cos\varphi_1 = \mathrm{cn}\,u_1\,, \qquad \sin\varphi_2 = \mathrm{sn}\,u_2\,, \qquad \cos\varphi_2 = \mathrm{cn}\,u_2)\,.$$

On en déduit immédiatement le théorème d'addition correspondant pour les fonctions $\psi(\tau_1)$, $\psi(\tau_2)$. Il n'est pas nécessaire de souligner le caractère non algébrique de ce théorème d'addition.

Il peut être intéressant de rattacher les ondes planes solutions des équations (34A), (34B), (34C) aux développements de la théorie quantique des champs.

Ceci revient à exprimer les ondes planes du cas (34A) par exemple, de la forme

$$\psi(\tau) = \lambda\,\mathrm{cn}\,\tau = \lambda\,\mathrm{cn}\,[\mu_0 ct, k]\,, \tag{72}$$

dans le système propre, au moyen des fonctions

$$A\cos\tau' = A\cos\mu_0' ct, \qquad \text{ou} \qquad A\sin\tau' = A\sin\mu_0' ct\,. \tag{73}$$

La théorie des fonctions elliptiques nous fournit immédiatement deux développements de ce type.

a) Le développement en série de Fourier des fonctions elliptiques nous donne pour $\operatorname{cn} u$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos\left[(2n+1)\frac{\pi u}{2K}\right], \tag{74}$$

avec

$$q = \exp\left[-\pi\frac{K'}{K}\right].$$

Nous en déduisons

$$\psi(\tau) = \lambda \operatorname{cn}(\mu_0 ct, k) = \lambda\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}}\cos(\mu_n' ct), \tag{75}$$

avec

$$\mu_n' = (2n+1)\frac{\pi}{2K}\mu_0 . \tag{76}$$

L'onde $\psi(\tau)$ peut être considérée comme résultant d'une série particulière d'ondes planes solutions d'équations de Klein-Gordon avec une suite de masses propres réduites μ_n' multiples impairs de la masse propre réduite

$$\mu_0' = \frac{\pi}{2K}\mu_0 < \mu_0 . \tag{77}$$

b) Le développement en produit infini des fonctions elliptiques donne pour $\operatorname{cn} u$:

$$\operatorname{cn} u = 2q^{\frac{1}{4}}k'^{2}k^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi u}{K}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+2q^{2n}\cos(\pi u/K)+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos(\pi u/K)+q^{4n-2}}\right]. \tag{78}$$

Ceci nous donne

$$\psi(\tau) = \lambda \operatorname{cn}[\mu_0 ct, k] = 2q^{\frac{1}{4}}k'^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos\mu_0' ct\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+2q^{2n}\cos\mu_0' ct+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\mu_0' ct+q^{4n-2}}\right], \tag{79}$$

avec ici

$$\mu_0' = \frac{\pi}{K}\mu_0 , \tag{80}$$

d'où

$$\mu_0' \geqslant \mu_0 , \qquad \text{pour } \pi/2 \leqslant K(k) < \pi,$$

$$\mu_0' < \mu_0 . \qquad \text{pour } K(k) > \pi:$$

L'onde plane $\psi(\tau)$ s'exprime donc au moyen d'un produit infini de combinaisons d'ondes planes solutions d'une équation de Klein-Gordon pour un corpuscule de masse propre réduite $\mu_0' = (\pi/K)\mu_0$.

6. – Solutions invariantes et solutions radiales des équations précédentes.

Nous complèterons cette étude en examinant brièvement pour les équations du type

$$\square\psi + \mu_1^2\psi \pm \mu_2^2\psi^3 = 0\,, \tag{34}$$

les solutions du type « ondes invariantes » $\psi(u)$ avec $u^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$, et les solutions du type $\psi = \psi(r)$ avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Ces solutions particulières sont déterminées par les équations différentielles

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} + \frac{3}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + \mu_1^2\right]\psi(u) \pm \mu_2^2\psi^3 = 0\,, \tag{81}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \mu_1^2\right]\psi(r) \mp \mu_2^2\psi^3 = 0\,. \tag{82}$$

Les équations de ce type ont fait l'objet de nombreuses études mathématiques notamment de R. O. FORNAGUERA [7], de M. CIMINO [3] et de JAICHNICYM [12]. Leur intégration ne semble pas rattachable à des transcendantes caractérisées jusqu'ici.

Nous n'indiquerons que quelques résultats relatifs au cas $\mu_1 = 0$.

Les équations (81) et (82) se réduisent alors à

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} + \frac{3}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right]\psi(u) \pm \mu_2^2\psi^3 = 0\,, \tag{83}$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right]\psi(r) \mp \mu_2^2\psi^3 = 0\,. \tag{84}$$

L'équation (83) admet la solution particulière remarquable

$$\psi(u) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\mu_2 u}\,,$$

d'où l'on déduit l'onde invariante singulière sur le cone de lumière

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\mu_2\sqrt{c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}}\,. \tag{85}$$

L'équation (84) sous la forme

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right]\psi(r) + \mu_2^2\psi^3(r) = 0 ,$$

se ramène à l'équation d'Emden [4] étudiée notamment par E. A. MILNE [14], N. FAIRCLOUGH [5], R. H. FOWLER [8].

En effet, si l'on pose

$$\psi(r) = \frac{1}{\mu_2}\varphi(r) ,$$

$\varphi(r)$ est déterminée par l'équation

$$\varphi''_{r^2} + \frac{2}{r}\varphi'_r + \varphi^3 = 0 ,$$

qui est la forme canonique de l'équation d'Emden adoptée par E. A. MILNE [14].

Si $\varphi(r)$ est une solution, on voit immédiatement que

$$\lambda\varphi(\lambda r) ,$$

est également une solution.

E. A. MILNE a étudié les différentes formes de solutions $\varphi(r)$ telles que

$$\varphi(r_0) = 0 , \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = -\frac{1}{C^{\frac{1}{2}}} ,$$

pour $r_0 = 1$ suivant les différentes valeurs de C. Il a montré notamment qu'il existe une seule intégrale positive telle que $\varphi(1) = 0$ et qui pour $r = 0$ prenne une valeur $\varphi(0)$ restant finie. Réciproquement (solution d'Emden) si on considère une solution $\varphi(r)$ qui pour $r = 0$ prend une valeur finie (pour laquelle on peut poser $\varphi(0) = 1$ avec une valeur convenable de λ) et telle que $(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r)_{r=r_0} = 0$, on trouve la fonction tabulée par N. FAIRCLOUGH [5] qui s'annule pour $r = r_0 = 6.9011$ et en ce point $\varphi'(r_0) = -0.40231$ et $r_0^2\varphi'(r_0) = -2.0150$.

L'intégrale générale de

$$\varphi''_{r^2} + \frac{2}{r}\varphi'_r + \varphi^3 = 0 ,$$

dépend ici des deux constantes λ et C. Pour toute valeur finie de λ, il existe pour $\varphi(0)$ donné une valeur de $C = C_0$ pour laquelle il existe une solution. Cette solution s'annule pour $r = r_0$ et la tangente a cette solution pour $r = r_0$ définit $C = C_0$. Pour les autres valeurs de $C \neq C_0$ il existe des solutions $\varphi(r, C)$

telles que $\varphi(r_0, C) = \varphi(r_0, C_0)$ mais divergentes pour $r \to 0$, les unes tendant vers $+\infty$, les autres vers $-\infty$. E. A. MILNE a montré l'allure générale de ces fonctions sur un diagramme. Toutefois je ne crois pas que l'analyse de Milne ait été étendue au domaine $r > r_0$ sauf dans l'étude générale de R. O. FORNAGUERA et dans une note de JAIČNICYM dont les résultats ne semblent pas se raccorder avec ceux de Milne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. APPELL et E. LACOUR: *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications* (Paris, 1922).
[2] F. BOWMAN: *Introduction to Elliptic Functions* (London, 1953).
[3] M. CIMINO: *Boll. Un. Mat. Ital.*, **11**, 499 (1956).
[4] R. EMDEN: *Gaskugeln*, p. 199 (1907).
[5] N. FAIRCLOUGH: *Monthly Notices*, **91**, 55 (1930).
[6] R. FINKELSTEIN, R. LE LEVIER et M. RUDERMAN: *Phys. Rev.*, **83**, 326 (1951).
[7] R. O. FORNAGUERA: *Nuovo Cimento*, **1**, 132 (1955).
[8] R. H. FOWLER: *Monthly Notices*, **91**, 63 (1931).
[9] A. G. GREENHILL: *Les fonctions elliptiques et leurs applications* (Paris, 1895).
[10] H. HANCKOCK: *Lectures on the Theory of Elliptic Functions* (London, 1910).
[11] D. IVANENKO: *Suppl. Nuovo Cimento*, **5**, 349 (1957).
[12] B. G. JAIČNICYM: *Žurn., Ėxp. Teor. Fiz.*, **31**, 1082 (1956).
[13] B. J. MALENKA: *Phys. Rev.*, **85**, 686 (1951).
[14] E. A. MILNE: *Monthly Notices*, **91**, 4 (1930).
[15] P. MITTELSTAEDT: *Zeits. f. Phys.*, **137**, 545 (1954).
[16] G. PETIAU: *Compt. Rend. Ac. Sci. Paris*, **244**, 1890 (1957).
[17] G. PETIAU: *Compt. Rend. Ac. Sci. Paris*, **244**, 2580 (1957).
[18] G. PETIAU: *Comp.. Rend. Ac. Sci. Paris*, **245**, 293 (1957).
[19] R. ROSEN et H. B. ROSENSTOCK: *Phys. Rev.*, **85**, 257 (1952).
[20] L. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **84**, 1, 10 (1951); **86**, 856 (1952); **92**, 766 (1953).
[21] N. E. THIRRING: *Zeits. f. Naturf.*, **7a**, 63 (1952).
[22] F. TRICOMI: *Funzioni ellittiche* (Bologna, 1951).