IL NUOVO CIMENTO Vol. I, N. 1 1° Gennaio 1955

Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien.

H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann
Max-Planck-Institut für Physik - Göttingen (Deutschland)

(ricevuto il 22 Novembre 1954)

Summary. — A new formulation of quantized field theories is proposed. Starting from some general requirements we derive a set of equations which determine the matrix-elements of field operators and the S-Matrix. These equations contain no renormalization constants, but only experimental masses and coupling parameters. The main advantage over the conventional formulation is thus the elimination of all divergent terms in the basic equations. This means that no renormalization problem arises. The formulation is here restricted to theories which do not involve stable bound states. For simplicity we derive the equations for spin 0 particles, however the extension to other cases (e.g. quantum electrodynamics) is obvious. The solutions of the equations are discussed in a power-series expansion. They are then identical with the renormalized expressions of the conventional formulation. However, the equations set up here are not restricted to the application of perturbation theory.

1. – Einleitung.

Um die Problemstellung dieser Arbeit zu verdeutlichen, sei zunächst auf einige unbefriedigende Züge der gebräuchlichen Formulierung von Feldtheorien hingewiesen:

1) Während es möglich ist, für die sog. renormierbaren Theorien im Rahmen einer Entwicklung nach Kopplungsparametern endliche Resultate für die Matrixelemente der (renormierten) Feldoperatoren und der S-Matrix zu erhalten, ist es bisher nicht gelungen, die Grundgleichungen derartiger Theorien konvergent zu formulieren. Wir meinen damit die Tatsache, daß sowohl in den Feldgleichungen als auch in den Vertauschungsrelationen der renormierten Operatoren divergente Renormierungskonstanten auftreten.

2) Die erwähnten endlichen Resultate lassen sich nur über divergente Zwischenrechnungen gewinnen, die im Zuge der Renormierung vorzunehmen sind. Wenn auch die zur Abspaltung dieser divergenten Terme notwendigen Vorschriften eindeutig formuliert werden können, so sind sie doch eng an die Störungsrechnung gebunden.

Diese Umstände wirken sich sowohl bei der Behandlung prinzipieller Fragen als auch bei der Anwendung der Theorie nachteilig aus. Einmal erschweren sie eine Beantwortung der Frage nach der Existenz von Lösungen der Grundgleichungen (etwa für die Quantenelektrodynamik), zum anderen steht die notwendige Abspaltung (divergenter) Renormierungsglieder einer konsequenten Anwendung anderer Näherungsverfahren als der Entwicklung nach einer Kopplungskonstanten im Wege.

Der von uns im folgenden unternommene Versuch einer Neuformulierung quantisierter Feldtheorien verfolgt das Ziel, die eben geschilderten Schwierigkeiten zu vermeiden. Wesentliches Merkmal dieser Formulierung ist, daß wir Gleichungen ableiten, die im Gegensatz zu den gebräuchlichen Grundgleichungen divergenzfrei sind. Sie reichen im Prinzip aus zur Bestimmung der Matrixelemente der Feldoperatoren und der S-Matrix. Die physikalisch bedeutungslosen Renormierungskonstanten sind vollständig aus der Theorie eliminiert; d.h. sowohl in den Grundgleichungen als auch in allen weiteren Beziehungen kommen nur renormierte Feldoperatoren sowie experimentelle Massen und Kopplungsparameter vor, so daß es kein Renormierungsproblem gibt. Feldgleichungen und kanonische Vertauschungsrelationen der Operatoren werden nicht benutzt. Dieser Verzicht erscheint unerläßlich, wenn man nur mit renormierten Größen arbeiten will.

Es ist hervorzuheben, daß wir eine Neuformulierung, jedoch keine Abänderung der physikalischen Grundlagen der Quantenfeldtheorie im Auge haben. Dies äußert sich darin, daß die störungstheoretischen Lösungen unserer Gleichungen identisch sind mit den entsprechenden renormierten Ausdrücken der üblichen Formulierung. Bei der Ableitung des Gleichungssystems wird nicht vorausgesetzt, daß die Lösungen sich nach einem Kopplungsparameter entwickeln lassen. Insofern bedeutet eine eventuell divergierende störungstheoretische Reihe hier keine prinzipielle Schwierigkeit für die Diskussion der Frage, ob exakte Lösungen der Grundgleichungen existieren.

Wir beschränken uns vorläufig auf die Formulierung von Theorien, in denen keine stabilen gebundenen Teilchen auftreten. Dies sollte z.B. für die Quantenelektrodynamik ausreichen. Um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, geben wir die Gleichungen für den Fall an, daß nur eine Teilchensorte vorhanden ist; nämlich Teilchen vom Spin 0 und der Masse m, deren Wechselwirkung zu beschreiben ist. Die Entwicklung läßt sich jedoch unmittelbar auf andere Fälle (z.B. die Quantenelektrodynamik) übertragen.

Für die Ableitung der von uns benutzten Gleichungen sind lediglich einige sehr allgemeine Voraussetzungen notwendig. Die Gleichungen enthalten dementsprechend viele Lösungen; die invarianten Lösungen entsprechen lokalen Feldtheorien. Die einzelnen Möglichkeiten der Wechselwirkung werden durch Randbedingungen charakterisiert, die bei der Auflösung der Gleichungen zu stellen sind. Diese Auflösung wird vorläufig nur im Rahmen der Störungsrechnung betrachtet. Auf die Behandlung nichtlokaler Felder und auf Fragen, die mit nichtrenormierbaren Theorien zusammenhängen, wird nicht eingegangen.

2. – Allgemeines.

Wir beginnen mit der Darlegung der allgemeinen Grundlagen. Unsere Absicht ist, eine quantentheoretische Formulierung der lokalen, skalaren Felder ohne gebundene Zustände zu geben, die sich von den bekannten Formulierungen darin auszeichnet, daß sie die Schwierigkeiten der Ultraviolettdivergenzen grundsätzlich vermeidet. D.h.: Bereits die Grundgleichungen der Theorie selbst sollen frei von Ultraviolettdivergenzen sein. Es ist klar, daß wir zu diesem Zweck so geläufige methodische Hilfsmittel, wie die Hamiltonfunktion kanonischer Feldvariablen, die kanonischen Vertauschungsrelationen oder das Feynman-Schwingersche Variationsprinzip nicht brauchen können, da diese alle divergente Renormierungskonstanten enthalten. Wir müssen uns also nach noch allgemeineren Eigenschaften quantisierter Felder umsehen, die von solchen Divergenzschwierigkeiten unbelastet und deshalb zur Grundlegung unserer Theorie geeignet sind. Dazu zählt die Existenz einer invarianten, unitären S-Matrix, deren Matrixelemente als beobachtbare Größen zwangsläufig endlich sein müssen. Hierdurch wäre aber erst der Rahmen allgemeiner quantisierter Felder abgesteckt. Zur Kennzeichnung der lokalen Felder muß man darüber hinaus in geeigneter Weise die Forderung der Kausalität stellen. Da es bisher nicht gelungen ist, die Kausalität als Eigenschaft der S-Matrix selbst zu formulieren, entschließen wir uns zur Einführung eines Feldoperators und gehen damit wesentlich über die Konzeption einer reinen S-Matrixtheorie hinaus.

Wir denken uns ein Feld durch einen linearen, hermitischen Operator $A(x)$ des Hilbertraums beschrieben. Diesen « Feldoperator » $A(x)$ (er entspricht genau dem sog. « renormierten Feldoperator » früherer Formulierungen) gilt es nun in seinen Eigenschaften weiter einzuschränken. Das geschieht, indem wir an ihn die drei folgenden Forderungen stellen:

1) Invarianzprinzip. Die Theorie soll invariant sein gegenüber Lorentztransformationen, Translationen, sowie Spiegelungen in Raum und Zeit.

2) Kausalitätsforderung. Der raumartige Kommutator des Feldoperators

soll verschwinden:

$$[A(x), A(y)] = 0\,, \tag{1}$$

wenn $x - y$ ein raumartiger Vektor ist.

3) Asymptotenbedingung. Der Feldoperator $A(x)$ soll für $x_0 \to -\infty$ und $x_0 \to +\infty$ in die wechselwirkungsfreien Feldoperatoren $A_{\text{in}}(x)$ bzw. $A_{\text{out}}(x)$ zur Teilchenmasse m übergehen.

Diese drei Forderungen an den Feldoperator $A(x)$ werden die einzige Voraussetzung unserer Theorie quantisierter, skalarer und lokaler Felder ohne gebundene Zustände bilden. Sie sollen, ihrer Bedeutung wegen, noch kurz erläutert werden.

Das Invarianzprinzip ist wohl so selbstverständlich, daß sich eine weitere Erörterung erübrigt. Hinsichtlich seiner mathematischen Formulierung sei auf die einschlägigen Arbeiten (1) verwiesen.

Die vorliegende Form der Kausalitätsbedingung (2) besagt ganz klar, daß Feldwirkungen in zueinander raumartig liegenden Punkten unabhängig sind. Sie dürfte anderen gebräuchlichen Kausalitätsbegriffen (3) äquivalent sein.

Über den anschaulichen Sinn der Asymptotenbedingung (4) ist zu sagen: Sie bringt zum Ausdruck, daß in jedem System wechselwirkender Bosonen, wenn man nur lange genug wartet, die Teilchen mit wachsender Zeit auseinanderstreben, um sich für genügend große Zeiten wie wechselwirkungsfreie Bosonen einer bestimmten Masse m zu verhalten. Die Asymptotenbedingung beschränkt demnach die Theorie auf solche Felder, die keine gebundenen Zustände zulassen, sondern nur Streuung, Erzeugung oder Vernichtung von Bosonen der Masse m beschreiben. Da im nächsten Kapitel aus der Asymptotenbedingung sehr weitgehende Folgerungen gezogen werden, ist eine präzise mathematische Fassung unerläßlich. Wir beginnen mit der Definition der ein- und auslaufenden Felder. $A_{\text{in}}(x)$ und $A_{\text{out}}(x)$ sollen natürlich den üblichen wechselwirkungsfreien Feldgleichungen und Vertauschungsrelationen genügen:

$$(\Box - m^2)A_{\text{in}}(x) = 0\,, \qquad [A_{\text{in}}(x), A_{\text{in}}(x')] = i\Delta(x - x') \ \text{(5)}. \tag{2}$$

---

(1) E. WIGNER: *Ann. of. Math.*, **30**, 149 (1939).

(2) Diese Form ist z.B. auch in der Arbeit M. GELL-MANN, M. L. GOLDBERGER und W. E. THIRRING: *Phys. Rev.*, **95**, 1612 (1954) gebraucht worden.

(3) E. C. G. STÜCKELBERG und G. WANDERS: *Acausalité de l'intéraction non-locale*, Manuskript, 1954.

(4) Über die prinzipielle Bedeutung einer Asymptotenbedingung für die Grundlagen der Feldtheorie vgl. R. HAAG: *On Quantum Field Theories*, Manuskript, 1954.

(5) Es wird außerdem verlangt, daß $A_{\text{in}}(x)$, $A_{\text{out}}(x)$ eine irreduzible Darstellung dieser Vertauschungsrelationen geben.

Es soll ferner Zustände Ω_{in} und Ω_{out} mit der Eigenschaft

(3) $$A^{+}_{\text{in}}(x)\Omega_{\text{in}} = 0\,, \qquad A^{+}_{\text{out}}(x)\Omega_{\text{out}} = 0$$ [6]

geben. Besondere Aufmerksamkeit erfordert die Präzision des Grenzübergangs $x_0 \to \pm\infty$. Es liegt vielleicht nahe

$$\lim_{x_0\to-\infty} (\Phi, A(x)\Psi) = \lim_{x_0\to-\infty} (\Phi, A_{\text{in}}(x)\Psi)$$

zu schreiben, doch sagt dies zu wenig aus, da die Matrixelemente der rechten Seite für normierbare Zustände punktweise gegen Null gehen. Wir führen stattdessen Operatoren

(4) $$A^f(t) = i\iint\limits_{x_0=t}\left\{A(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_0} - f(x)\frac{\partial A(x)}{\partial x_0}\right\}d_3x\,,$$

und entsprechend $A^f_{\text{in}}(t)$, $A^f_{\text{out}}(t)$ ein. Hier ist $f(x)$ eine beliebige normierte Lösung positiver Frequenzen der Klein-Gordongleichung, d.h.

$$(\Box - m^2)f(x) = 0\,, \qquad -i\iint\left\{f\frac{df^*}{\partial x_0} - f^*\frac{\partial f}{\partial x_0}\right\}d_3x = 1\,.$$ [7]

Der Asymptotenbedingung geben wir nun die Form

(5) $$\begin{cases}\lim\limits_{\tau\to-\infty} (\Phi, A^f(\tau)\Psi) = (\Phi, A^f_{\text{in}}(t)\Psi)\\ \lim\limits_{\tau\to+\infty} (\Phi, A^f(\tau)\Psi) = (\Phi, A^f_{\text{out}}(t)\Psi)\end{cases}$$

worin die rechten Seiten unabhängig von t, also konstant sind.

Es folgen zum Abschluß des Kapitels noch einige leicht nachzuweisende Konsequenzen aus den genannten drei Forderungen.

Aus Ω_{in} läßt sich durch fortgesetzte Anwendung des Operators $A_{\text{in}}(x)$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraumes aufbauen, desgleichen ein zweites durch Anwendung von $A_{\text{out}}(x)$ auf Ω_{out}. Man braucht dazu lediglich ein System $f_\alpha(x)$ von Lösungen der Klein-Gordongleichung die nur positive

---

[6] Diese Bedingungen müssen zur Kennzeichnung der freien Felder hinzugefügt werden, da die kanonischen Vertauschungsrelationen inäquivalente Darstellungen zulassen. Vgl. K. O. FRIEDRICHS: *Math. Aspects of the Quantum Theorie of Fields* (New York, 1953).

[7] Der zeitunabhängige Operator $A^f_{\text{in}}(t)$ erzeugt also ein Teilchen mit der Wellenfunktion $f(x)$. Im Gegensatz zu $A_{\text{in}}(x)$ führen diese Operatoren bei Anwendung auf einen normierten Zustand nicht aus dem Hilbertraum heraus.

Frequenzen enthalten und der Orthonormalitätsrelation

$$-i\int\left\{f_\alpha \frac{\partial f_\beta^*}{\partial x_0} - f_\beta^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_0}\right\} d_3x = \delta_{\alpha\beta}\,,$$

sowie der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha(x) f_\alpha^*(x') = i\Delta^+(x-x')$$

gehorchen. Die beiden Orthonormalsysteme sind dann:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{\text{in}} \\ \Phi_{\text{in}}^{\alpha} = A_{\text{in}}^{\alpha}\Omega_{\text{in}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{\text{in}}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \dfrac{1}{\sqrt{p_{\alpha_1\ldots\alpha_k}}} A_{\text{in}}^{\alpha_1}\ldots A_{\text{in}}^{\alpha_k}\Omega_{\text{in}}\,, \end{array}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega_{\text{out}} \\ \Phi_{\text{out}}^{\alpha} = A_{\text{out}}^{\alpha}\Omega_{\text{out}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{\text{out}}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \dfrac{1}{\sqrt{p_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}}} A_{\text{out}}^{\alpha_1}\ldots A_{\text{out}}^{\alpha_k}\Omega_{\text{out}}\,. \end{array}\right.$$

Hierin bedeuten die Abkürzungen

$$A_{\text{out}}^{\alpha} = A_{\text{out}}^{f_\alpha}(t)\,,\qquad A_{\text{in}}^{\alpha} = A_{\text{in}}^{f_\alpha}(t)\,,\qquad p_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = n_1!\,n_2!\ldots n_r!\,,$$

wenn je n_i der Indizes α_j untereinander gleich sind.

Die S-Matrix wird durch

$$(8)\qquad S_{(\alpha)(\beta)} = (\Phi_{\text{out}}^{(\alpha)}, \Phi_{\text{in}}^{(\beta)})$$

definiert, wenn (α), (β) die Indexkombinationen

$$(\alpha) = \alpha_1, \ldots \alpha_k\,,\qquad (\beta) = \beta_1, \ldots, \beta_l$$

bedeuten. Es folgt unmittelbar die Unitarität der S-Matrix, sowie die Beziehung

$$(9)\qquad A_{\text{out}} = S^\dagger A_{\text{in}} S\,.$$

Gelegentlich sprechen wir von «gemischten Matrixelementen» des Feldoperators oder dessen Produktbildungen. Gemeint sind dann Ausdrücke der Form

$$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}},\ A(x)\Phi^{(\beta)}_{\text{in}}),$$

die sich links auf einen Zustand des Orthonormalsystems (7), rechts auf einen Zustand des Systems (6) beziehen.

Aus Asymptotenbedingung und Invarianzprinzip folgt die Existenz eines Energie-Impulsvektors P_μ mit den Eigenschaften

$$-i\,[P_\mu,\ A(x)] = \frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu}\,, \tag{10}$$

$$-i\,[P_\mu,\ A_{\text{in}}(x)] = \frac{\partial A_{\text{in}}(x)}{\partial x_\mu}\,, \qquad -i\,[P_\mu,\ A_{\text{out}}(x)] = \frac{\partial A_{\text{out}}(x)}{\partial x_\mu}\,,$$

ferner

$$\Omega_{\text{in}} = \Omega_{\text{out}} = \Omega \tag{11}$$

(der willkürliche Phasenfaktor ist gleich Eins gesetzt). P_μ erfüllt aus Invarianzgründen

$$P_\mu \Omega = 0.$$

Die Definition von Φ^α_{in} bzw. Φ^α_{out} zeigt, daß $(\Omega,\ A(x)\Phi^\alpha_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}})$ eine Lösung der Klein-Gordongleichung ist. Mit der Asymptotenbedingung folgt dann

$$\left\{\begin{aligned} (\Omega,\ A(x)\Phi^\alpha_{\text{in}}) &= (\Omega,\ A_{\text{in}}(x)\Phi^\alpha_{\text{in}}) = f_\alpha(x)\ (^8) \\ (\Omega,\ A(x)\Phi^\alpha_{\text{out}}) &= (\Omega,\ A_{\text{out}}(x)\Phi^\alpha_{\text{out}}) = f_\alpha(x) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

und daraus $\Phi^\alpha_{\text{in}} = \Phi^\alpha_{\text{out}}$. Eine weitere Folge der Asymptotenbedingung ist das Verschwinden des Vakuumerwartungswerts von $A(x)$:

$$(\Omega,\ A(x)\Omega) = (\Omega,\ A_{\text{in}}(x)\Omega) = 0\,. \tag{13}$$

3. – Die Reduktionsformel.

Nach vollzogener Grundlegung der Theorie wird man fragen, welche Feldtypen die genannten Voraussetzungen erfüllen und wie sich gegebenenfalls

(8) Diese Beziehungen, die sich hier als natürliche Folge der Asymptotenbedingung ergeben, sind früher VON KÄLLÉN zur Festlegung der Renormierungskonstanten benutzt worden. G. KÄLLÉN: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952).

S-Matrix und Feldoperator berechnen lassen. Die allgemeine Operatorform der Voraussetzungen scheint zur Beantwortung dieser Fragen wenig geeignet. Es soll deshalb Aufgabe dieses Kapitels sein, ein den drei Forderungen äquivalentes Gleichungssystem zu entwickeln, das einer analytischen Behandlung zugänglich ist. Wir werden dabei den Umstand ausnützen, daß sich als Folge der Asymptotenbedingung die Matrixelemente von Feldoperator und S-Matrix geschlossen auf Vakuum-τ-Funktionen (damit sind Vakuumerwartungswerte von T-Produkten aus Feldoperatoren gemeint) zurückführen lassen. D.h.: Es genügt, sich auf die Vakuum-τ-Funktionen zu beschränken. Diese lassen sich aber im Prinzip aus einem unendlichen Gleichungssystem (System A) berechnen, das wir gegen Ende dieses Kapitels aufstellen werden. Die Ableitung des Systems A setzt allein die Asymptotenbedingung voraus. Invarianzprinzip und Kausalitätsforderung bewirken die Invarianz der Vakuum-τ-Funktionen. Somit wird die Aufgabe, alle Felder $A(x)$, die den drei Grundforderungen Invarianz, Kausalität und Asymptotenbedingung genügen, festzustellen und zu berechnen, auf die Diskussion der invarianten Lösungen des Systems A zurückgeführt [9].

Diese « Reduktion » von S-Matrix und Feldoperator ist nur ein Spezialfall der allgemeinen *Reduktionsformel*, die besagt, daß sich die gemischten Matrixelemente eines beliebigen T-Produktes von Feldoperatoren in elementarer Weise geschlossen durch die Vakuumerwartungswerte der T-Produkte ausdrücken lassen. Die Reduktionsformel ist eine Folge der Asymptotenbedingung. Sie wird im Anhang auf funktionale Weise in voller Allgemeinheit formuliert und bewiesen. Hier beweisen wir sie nur soweit, als zur Reduktion der S-Matrix und zur Aufstellung des Systems A notwendig ist.

Die Asymptotenbedingung sei in der Form (5) vorausgesetzt. Ferner gelte die Beziehung

$$\Omega_{\text{in}} = \Omega_{\text{out}} = \Omega\,.$$

Wir beweisen zuerst den Spezialfall

$$(\Omega,\, T(x_1, \ldots, x_n)\Phi^{\alpha}_{\text{in}}) = -\,i\int K_y\tau(x_1, \ldots, x_n, y)f_\alpha(y)\,\mathrm{d}^4y \tag{14}$$

der Reduktionsformel, worin zur Abkürzung

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T\{A(x_1) \ldots A(x_n)\}$$

$$K_y = \Box_y - m^2$$

(9) Man kann auch ausgehend von der Kommutatorbedingung (1) zu einer Analyse möglicher Feldtheorien kommen, vgl. dazu die in (4) zitierte Arbeit.

gesetzt ist, und

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = \big(\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n)\Omega\big) \tag{15}$$

die Vakuum-τ-Funktion von n Argumenten bedeutet. Aus der Definition von $\Phi^\alpha_{\rm in}$ folgt:

$$(\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n)\Phi^\alpha_{\rm in}) = (\bar{T}(x_1, \ldots, x_n)\Omega,\ A^\alpha_{\rm in}\Omega)\ .$$

Anwendung der Asymptotenbedingung auf die rechte Seite gibt:

$$\begin{aligned}(\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n)\Phi^\alpha_{\rm in}) &= \lim_{y_0\to-\infty} (\bar{T}(x_1, \ldots, x_n)\Omega,\ A^\alpha(y_0)\Omega) \\ &= i \lim_{y_0\to-\infty}\int (\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n, y)\, \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} f_\alpha(y)\, \mathrm{d}^3y \\ &= -i\int\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\tau_0(x_1, \ldots, x_n, y)\, \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} f_\alpha(y)\mathrm{d}^4y\right\},\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen:

$$A^\alpha(t) = A^{f_\alpha}(t)\ ,\qquad f(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}}g(x) = f(x)\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x_0} - g(x)\cdot\frac{\partial f(x)}{\partial x_0}\,,$$

da der Randterm bei $y_0 = +\infty$

$$i \lim_{y_0\to+\infty}\int (\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n, y)\Omega)\, \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} f_\alpha(y)\, \mathrm{d}^3y = (\Omega,\ A^\alpha_{\rm out}T(x_1, \ldots, x_n)\Omega)\ ,$$

wegen

$$(A^\alpha_{\rm out})^*\Omega = 0\ ,$$

verschwindet.

$$i\int\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\tau_0(x_1, \ldots, x_n, y)\, \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial y_0}} f_\alpha(y)\right\}\mathrm{d}^4y\ ,$$

gibt nach einigen Umformungen, die vom Verschwinden räumlicher Randterme Gebrauch machen, die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung (14).

Nach diesem Muster beweist man ebenso die Beziehung

$$(\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n)\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}_{\rm in}) = \int K_y(\Omega,\ T(x_1, \ldots, x_n, y)\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\rm in})f_{\alpha_{k+1}}(y)\,\mathrm{d}^4y\ . \tag{16}$$

Daraus folgt ohne weiteres durch vollständige Induktion die Formel

$$\begin{aligned}(\Omega,\ T(x_1 \ldots x_n)\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\rm in}) &= \\ &= (-i)^k\int K_{y_1} \ldots K_{y_k}\tau(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_k)f_{\alpha_1}(y_1) \ldots f_{\alpha_k}(y_k)\,\mathrm{d}^4y_1 \ldots \mathrm{d}^4y_k\ .\end{aligned} \tag{17}$$

Dies ist die Reduktionsformel für solche Matrixelemente von T-Produkten, die links auf das Vakuum bezogen sind. Danach können die zwischen Vakuum und einem beliebigen Zustand des Orthonormalsystems (6) genommenen Matrixelemente von T-Produkten aus den Vakuum-τ-Funktionen errechnet werden. Durch Übergang zu konjugiert komplexen Größen gewinnt man die Reduktionsformel für Matrixelemente von T-Produkten, die rechts auf das Vakuum bezogen sind.

Wir wenden uns nun der Reduktion der S-Matrix zu. Unsere Absicht ist, das Matrixelement

$$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, \Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) \qquad (\alpha) = \alpha_1, \dots, \alpha_k, \quad (\beta) = \beta_1, \dots, \beta_l$$

auf Vakuum-τ-Funktionen zurückzuführen, zunächst für den Fall, daß keiner der Indizes α_i mit einem der Indizes β_i übereinstimmt. Die Verallgemeinerungen von Gl. (16) lauten dann:

$$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, T(x_1 \dots x_n)\Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) = -i\int K_\xi(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, T(x_1 \dots x_n\xi)\Phi^{\beta_1 \dots \beta_{l-1}}_{\text{in}}) f_{\beta_l}(\xi)\, \mathrm{d}^4\xi\,,$$

$$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, T(x_1 \dots x_n)\Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) = -i\int K_\eta(\Phi^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}_{\text{out}}, T(x_1 \dots x_n\eta)\Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) f^*_{\alpha_k}(\eta)\, \mathrm{d}^4\eta.$$

Durch vollständige Induktion folgt:

$$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, \Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) = (-i)^{k+l}\int K_{\xi_1} \dots K_{\xi_k} K_{\eta_1} \dots K_{\eta_l} \tau(\xi_1 \dots \xi_k \eta_1 \dots \eta_l) f^*(\xi_1) \dots f^*(\xi_k) \cdot$$
$$\cdot f(\eta_1) \dots f(\eta_l)\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_k\, \mathrm{d}^4\eta_1 \dots \mathrm{d}^4\eta_l\,.$$

Hieraus leitet man leicht eine Normalform für den durch

(18) $$(\Phi^{(\alpha)}_{\text{out}}, \Phi^{(\beta)}_{\text{in}}) = (\Phi^{(\alpha)}_{\text{in}}, S\Phi^{(\beta)}_{\text{in}})$$

definierten Operator S ab:

(19) $$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!}\int K_1 \dots K_n \varphi(x_1 \dots x_n) : A_{\text{in}}(x_1) \dots A_{\text{in}}(x_n) : d^4x_1 \dots d^4x_n\,.$$

Die Funktionen $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bedeuten die Vakuum-φ-Funktionen ([10]), die aus den Vakuum-τ-Funktionen nach der Wick'schen Regel mit der Kontraktions-

([10]) Zur Definition der τ- und φ-Funktionen vgl. z.B. die Arbeit W. ZIMMERMANN: *Suppl. al Nuovo Cimento*, **11**, 43 (1954), Abschnitt 4, deren Bezeichnungsweise wir hier übernehmen.

funktion Δ_F gebildet sind. Gl. (19) gilt ganz allgemein, unabhängig von der im Anfang gemachten Annahme über die Indizes. Es ist zu beachten, daß zur Ausführung der Integrale im Impulsraum die Vakuum-τ-Funktionen lediglich für solche Koordinaten bekannt sein brauchen, die auf dem Massenhyperboloid liegen. Nur die so eingeschränkten Vakuum-τ-Funktionen gehen in die Berechnung der S-Matrix ein.

Zum Abschluß leiten wir das unendliche Gleichungssystem A ab, das zur Bestimmung der Vakuum-τ-Funktionen dienen soll. Wir gehen von der einfachen Operatoridentität

$$T\{A(x_1) \dots A(x_n)\} = \sum_v \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) T\{A(x_1) \dots A(x_{n-1})\} A(x_n)$$

aus, worin $\sum\limits_v$ die Summation über alle $n-1$ Vertauschungen einer Koordinate x_i mit x_n bedeutet. Bildung des Vakuumerwartungswerts und Zerlegung der rechten Seite gibt:

$$(\Omega, T(x_1, \dots, x_n)\Omega) = \sum_v \sum_{(\alpha)} \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) (\Omega, T(x_1 \dots x_n) \Phi_{\text{in}}^{(\alpha)}) (\Phi_{\text{in}}^{(\alpha)}, A(x_n)\Omega) =$$

$$= \sum_v \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) (\Omega,\ T(x_1 \dots x_{n-1}) \Phi_{\text{in}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}) (\Phi_{\text{in}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, A(x_n)\Omega)\,.$$

Drückt man jetzt noch auf der rechten Seite die Matrixelemente nach Reduktionsformel (17) durch Vakuum-τ-Funktionen aus, so hat man das gewünschte Gleichungssystem für die Vakuum-τ-Funktionen allein ([11]):

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \sum_v \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) i^k \int d^4\xi_1 \dots d^4\xi_k\, d^4\eta_1 \dots d^4\eta_k$$

$$\text{(A)} \qquad K_{\xi_1} \dots K_{\xi_k} \tau(x_1 \dots x_{n-1} \xi_1 \dots \xi_r) \Delta^+(\xi_1 - \eta_1) \dots \Delta^+(\xi_k - \eta_k) K_{\eta_1} \dots K_{\eta_k} \tau^*(x_n \eta_1 \dots \eta_k).$$

Aus Invarianzprinzip und Kausalitätsforderung folgt, daß die Vakuum-τ-Funktionen invariante Funktionen sind. Um eine Übersicht über alle den drei Forderungen Invarianz, Kausalität und Asymptotenbedingung gehorchenden Felder zu gewinnen, genügt es also, die invarianten Lösungen des Systems A zu untersuchen.

Wir erwähnen noch ein ganz ähnlich gebautes Gleichungssystem A′ für

([11]) In der üblichen Formulierung der Feldtheorie erfüllen die renormierten störungstheoretischen Entwicklungen der Vakuum-τ-Funktionen das System A identisch. Der Beweis kann analog den in der Notiz W. ZIMMERMANN: *Nuovo Cimento*, **11**, 416 (1954) skizzierten Überlegungen durchgeführt werden.

die Funktionen τ, das sich ausgehend von der Operatorenidentität

$$T\{A(x_1)\dots A(x_n)\} = \sum_{v} \theta(x_n - x_1)\dots \theta x_n - x_{n-1})A(x_n)T\{A(x_1)\dots A(x_{n-1})\}$$

ebenso erhalten läßt. Das System A' ist dem System A äquivalent

Ein weiteres Gleichungssystem der Vakuum-τ-Funktionen, das für praktische Anwendungen geeignet erscheint, kann aus der Identität

$$\sum_{(\beta)} (\Phi^{(\alpha)}_{\text{in}}, \Phi^{(\beta)}_{\text{out}})(\Phi^{(\beta)}_{\text{out}}, TA(x_1)A(x_2)\Phi^{(\gamma)}_{\text{in}}) = \tag{20}$$

$$= \theta(x_1 - x_2) \sum_{(\beta)} (\Phi^{(\alpha)}_{\text{in}} A(x_1)\Phi^{(\beta)}_{\text{out}})(\Phi^{(\beta)}_{\text{out}}, A(x_2)\Phi^{(\gamma)}_{\text{in}}) + \text{Symm.}$$

durch Einsetzen der Reduktionsformel gewonnen werden. Auch dieses System ist dem System A äquivalent.

4. – Diskussion des Gleichungssystems A.

Angesichts der wenigen Voraussetzungen, die zur Ableitung des Systems A erforderlich waren, wird man erwarten, daß diese Gleichungen eine große Zahl von Lösungen besitzen. Dieser Abschnitt verfolgt das Ziel, einen Überblick über die invarianten Lösungen zu geben und insbesondere zu zeigen, wie man durch Stellung von Randbedingungen bestimmte Lösungen aussondern kann. Wir beschränken uns dabei auf eine störungstheoretische Diskussion der Gleichungen.

Zunächst sei vermerkt, daß selbstverständlich die bekannten τ-Funktionen eines freien Feldes eine exakte Lösung des Systems A bilden. Sie lauten:

$$\tau(x_1, x_2) = \Delta_F(x_1 - x_2)\,; \qquad \tau(x_1, \dots, x_{2n+1}) = 0\,,$$

$$\tau(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{n} \sum_{\mu<\nu} \Delta_F(x_\mu - x_\nu)\tau(x_1 \dots x_{\mu-1}, x_{\mu+1} \dots x_{\nu-1}, x_{\nu+1} \dots x_{2n})\,. \tag{21}$$

Für die weitere Behandlung ist es zweckmässig, zu den in Kap. **3** bereits eingeführten Funktionen $\varphi(x_1 \dots x_n)$ überzugehen. Man kann das System leicht in ein Gleichungssystem für die φ-Funktionen umformen (vgl. Anhang (A.11)). Wir wollen nun die φ-Funktionen in einer ersten vom freien Feld abweichenden Näherung bestimmen. Es wird sich zeigen, daß diese Berechnung eine über die 1. Näherung hinausgehende Bedeutung hat und eine Übersicht über die möglichen Lösungen des Systems A in beliebiger Näherung vermittelt. Es sei

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = g\varphi^{(1)} + g^2\varphi^{(2)} + \dots\,.$$

Wir nehmen an, daß in 1. Näherung ($\sim g$) nur eine bestimmte Funktion

$\varphi(x_1 \dots x_n)$ von Null verschieden ist, d.h. vom freien Feld abweicht ([12]). Aus (A) folgt dann für $\varphi^{(1)}(x_1, \dots, x_n)$

$$(22)\qquad \varphi^{(1)}(x_1, \dots x_n) =$$

$$= \sum_v \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \left\{ \int K_{\xi n} \varphi^{(1)}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \Delta^+(\xi_n - x_n)\, \mathrm{d}^4\xi_n + \right.$$

$$\left. + i^{2(n-1)} \int \Delta^+(x_1 - \xi_1) \dots \Delta^+(x_{n-1} - \xi_{n-1}) K_{\xi_1} \dots K_{\xi_{n-1}} \varphi^{(1)*}(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_{n-1} \right\}.$$

Es ist bequem, diese Gleichung nicht nach $\varphi(x_1 \dots x_n)$, sondern nach einer Funktion $\omega(x_1 \dots x_n)$ aufzulösen, mit

$$(23)\qquad \varphi(x_1 \dots x_n) = \int \Delta_F(x_1 - \xi_1) \dots \Delta_F(x_n - \xi_n) \omega_n(\xi_1, \dots, \xi_n)\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_n .$$

(22) geht damit über in

$$(22')\qquad \int \Delta_F(x_1 - \xi_1) \dots \Delta_F(x_n - \xi_n) \omega^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_n)\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_n =$$

$$= \sum_v \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \cdot$$

$$\cdot \int \{ \Delta_F(x_1 - \xi_1) \dots \Delta_F(x_{n-1} - \xi_{n-1})(-i) \Delta^-(x_n - \xi_n) \omega^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_n) +$$

$$+ i\Delta^+(x_1 - \xi_1) \dots i\Delta^+(x_{n-1} - \xi_{n-1}) \Delta_F(x_n - \xi_n) \omega^{(1)*}(\xi_1 \dots \xi_n) \}\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_n .$$

Mit Anwendung der Beziehungen

$$-i\Delta^-(x) = \Delta_F(x) + i\Delta_R(x)\,; \qquad i\Delta^+(x) = \bar{\Delta}_F(x) - i\Delta_R(x)$$

folgt aus (22')

$$(24)\qquad \sum_v \theta(x_1 - x_n) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \cdot$$

$$\cdot \int \{ \Delta_F(x_1 - \xi_1) \dots \Delta_F(x_{n-1} - \xi_{n-1}) \Delta_R(x_n - \xi_n) \omega^{(1)}(\xi_1, \dots \xi_n) +$$

$$+ i\Delta^+(x_1 - \xi_1) \dots i\Delta^+(x_{n-1} - \xi_{n-1}) \Delta_R(x_n - \xi_n) \omega^{(1)*}(\xi_1, \dots, \xi_n) \}\, \mathrm{d}^4\xi_1 \dots \mathrm{d}^4\xi_n = 0 .$$

Es wird sich herausstellen, daß invariante Funktionen $\omega^{(1)}$ nur dann ungleich Null sind, wenn alle Zeiten $x_{10}, \dots, x_{n0}$ übereinstimmen. Wegen der Invarianz

([12]) Dies entspricht dem Fall, daß bei einer Lagrangeformulierung ein Kopplungsterm mit n Feldoperatoren vorhanden ist.

folgt daraus, daß auch die räumlichen Komponenten der Argumente gleich sein müssen; d.h. die Funktionen $\omega^{(1)}$ bestehen aus Produkten von vierdimensionalen δ-Funktionen und deren Ableitungen.

Wir beweisen diese Aussagen zunächst für $\omega^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ und übertragen dann das Resultat auf beliebiges n. Für $\omega^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ lautet (24)

$$(24') \quad \theta(x_1 - x_3)\theta(x_2 - x_3)\int\{\Delta_F(x_1 - \xi_1)\Delta_F(x_2 - \xi_2)\Delta_R(x_3 - \xi_3)\omega^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \\ - \Delta^+(x_1 - \xi_1)\Delta^+(x_2 - \xi_2)\Delta_R(x_3 - \xi_3)\omega^{(1)*}(\xi_1\xi_2\xi_3)\}\, d^4\xi_1\, d^4\xi_2\, d^4\xi_3 + \\ + \theta(x_2 - x_1)\theta(x_3 - x_1)\{\ \} + \theta(3, 1; 2)\{\ \} = 0\ .$$

Durch Anwendung von Klein-Gordonoperatoren folgt

$$\omega^{(1)}(x, x_2, x_3) = 0 \quad \text{wenn} \begin{cases} x_{10},\ x_{20} > x_{30} \\ x_{20},\ x_{30} > x_{10} \\ x_{30},\ x_{10} > x_{20}\,. \end{cases}$$

Aus dem in Kap. 3 erwähnten Gleichungssystem (A′) folgt ebenso, daß

$$\omega^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{wenn} \begin{cases} x_{10},\ x_{20} < x_{30} \\ x_{20},\ x_{30} < x_{10} \\ x_{30},\ x_{10} < x_{20}\,. \end{cases}$$

Diese Bedingungen besagen, daß in $\omega^{(1)}(x_1, x_2, x_3)$ alle Zeiten gleich sein müssen. Unter den danach verbleibenden invarianten Funktionen gibt es drei Lösungen der Gleichung (24′). Sie lauten im Orts- bzw. im Impulsraum (g_{31}, g_{32}, g_{33} sind reelle Konstanten):

1) $\omega^{(1)} = ig_{31}\,\delta(x_1 - x_2)\,\delta(x_2 - x_3)\,;$ bzw. $ig_{31}\cdot\delta(p_1 + p_2 + p_3)\,,$

2) $\omega^{(1)} = ig_{32}(\Box_{x_1} + \Box_{x_2} + \Box_{x_3})\,\delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3)\,;$
bzw. $-ig_{32}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\cdot\delta(p_1 + p_2 + p_3)\,,$

3) $\omega^{(1)} = ig_{33}(\Box_1\,\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} + \Box_2\,\partial_{\mu_3}\partial_{\mu_1} + \Box_3\,\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2})\,\delta(x_1 - x_2)\,\delta(x_2 - x_3)\,;$
bzw. $ig_{33}(p_1^2(p_2p_3) + p_2^2(p_3p_1) + p_3^2(p_1p_2))\delta(p_1 + p_2 + p_3)\,.$

Wir verifizieren dies am Beispiel der Lösung (1). Hierfür lautet (24′)

$$\theta(1, 2; 3)\int\{\Delta_F(x_1 - \xi)\Delta_F(x_2 - \xi) + \Delta^+(x_1 - \xi)\Delta^+(x_2 - \xi)\}\cdot \\ \cdot\Delta_R(x_3 - \xi)\,d^4\xi + \theta(2, 3;\ 1) \ldots + \ldots = 0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, da wegen $x_{10},\ x_{20} > x_{30} > \xi_0$ die Δ_F-Funktionen durch $i\Delta^+$ ersetzt werden können.

Es sind jedoch nicht beliebig hohe Ableitungen von δ-Funktionen Lösungen, da im allgemeinen durch die Differentiation der Δ_F-Funktionen Zusatzterme auftreten, die die Äquivalenz von Δ_F und $i\Delta^+$ zerstören. Man kann zeigen, daß es nur die angegebenen drei Lösungen gibt.

Für $\omega^{(1)}(x_1, \ldots, x_n)$ erhält man ähnliche Resultate. Man stellt wieder fest, daß Produkte von δ-Funktionen und einige Ableitungen dieser Funktionen die Gleichungen (24) erfüllen. Für $\omega^{(1)}(x_1, \ldots, x_n)$ gibt es n unabhängige Lösungen in denen willkürliche Parameter $g_{n1}, \ldots, g_{nn}$ auftreten. Im Impulsraum stellen sie symmetrische Polynome in den Variablen $p_1, \ldots, p_n$ dar, die dadurch charakterisiert sind, daß die Potenzsumme je zweier Impulse kleiner als vier ist.

Die so gewonnenen Funktionen $\varphi^{(1)}$ (bzw. $\omega^{(1)}$) stimmen mit den Ausdrücken überein, die man bei Benutzung der üblichen Formulierung von Feldtheorien in 1. Näherung erhält. Dabei entsprechen natürlich δ'-Funktionen Theorien mit Ableitungskopplung.

Es zeigt sich also, daß die hier diskutierten Gleichungen formal (d.h. bis auf Renormierungsterme) den konventionellen Feldgleichungen äquivalent sind. Wenn wir z.B. die Konstanten $g_{31}, g_{41}, \ldots, g_{n1}$ als von Null verschieden vorgeben, so entspricht dies einer Lagrangefunktion mit dem Kopplungsterm

$$L' = g'_{31} A^3(x) + g'_{41} A^4(x) + \ldots + g'_{n1} A^n(x) .$$

Die Konstanten g_{i1} und g'_{i1} stimmen dabei in erster Näherung überein.

Durch die angegebenen Lösungen der (homogenen) Gleichungen für die $\varphi^{(1)}$-Funktionen sind Parameter $g_{n1}, \ldots, g_{nn}$ ($n=3, 4, \ldots$) eingeführt worden, die als Kopplungskonstanten fungieren. Wenn diese Konstanten vorgegeben sind (also $\varphi^{(1)}$ bekannt ist), so kann man versuchen, die φ-Funktionen höherer Näherung in einer Potenzreihenentwicklung nach diesen Konstanten mit Hilfe des Systems A zu bestimmen. In 2. Näherung erhält man für $\varphi^{(2)}$ eine inhomogene Gleichung, in deren inhomogenen Gliedern die Funktionen 1. Näherung auftreten. Der homogene Teil der Gleichung für $\varphi^{(2)}$ ist identisch mit der schon behandelten Gleichung für $\varphi^{(1)}$. $\varphi^{(2)}$ ist also bis auf Lösungen dieser homogenen Gleichung bestimmt. Dieser Sachverhalt gilt in beliebiger Ordnung der Störungsrechnung.

Die notwendige Festlegung der bei der Durchführung der Störungsrechnung auftretenden homogenen Lösungen kann nun dadurch geschehen, daß man an die Lösungen des Systems A Randbedingungen stellt, indem man einiges über das asymptotische Verhalten der Funktionen ω vorgibt. Im einparametrigen Fall (etwa nur $g_{n1} \neq 0$) lautet diese Vorgabe: $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ soll (in jeder Näherung) für große Impulse einen konstanten Term g_{n1} enthalten; es soll keine Terme der Form $g_{n2}(p_1^2 + \ldots p_n^2)$; $g_{n3}(p_1^2 p_2 p_3 + \ldots)$, etc., enthalten, die den anderen Lösungen der homogenen Gleichung für $\omega^{(1)}(x_1 \ldots x_n)$ entsprächen. Alle anderen Funktionen ω sollen asymptotisch keine Terme enthalten, die konstant sind oder den homogenen Gleichungen entsprechende Polynome darstellen. Allgemein gibt man also die Kopplungskonstanten und damit ein diesen Konstanten entsprechendes asymptotisches Verhalten der Funktionen ω vor [13].

Bekanntlich gibt es unter den einparametrigen Theorien genau zwei, die im Rahmen der üblichen Formulierung renormierbar sind. Für diese ist g_{31} bzw. g_{41} ungleich Null. (Kopplung $\sim A^3$ bzw. $\sim A^4$). Mit diesen Randbedingungen hat das System A in jeder Näherung eindeutig bestimmte Lösungen, die den renormierten Ausdrücken entsprechen [14].

Die in diesem Kapitel gemachten Aussagen beziehen sich natürlich nur auf die Störungsrechnung (beliebiger Ordnung). Insofern kommt hier einer der Vorzüge des Systems A, das eine Diskussion renormierbarer Theorien ohne Einschränkung auf die Störungsrechnung ermöglichen sollte, nicht zur Geltung. Jedoch dürfte auch die störungsmäßige Behandlung mit dem System A konsequenter als das sonst übliche Verfahren sein, da hier nur mit divergenzfreien Gleichungen gearbeitet wird. Auf die Einzelheiten der Störungsrechnung gehen wir hier nicht ein, da dies angesichts des Modellcharakters des zugrundegelegten skalaren Feldes nicht lohnend erscheint.

ANHANG

Funktionale Formulierungen.

Der ein Funktional der Raumzeitfunktion $J(x)$ darstellende geordnete Operator [15]

$$T \exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} A(x)J(x)\,\mathrm{d}x\right] = \mathcal{T}\{t_2, t_1; J\}$$

ist durch die Integralgleichung

$$\mathcal{T}\{t_2, t_1; J\} = 1 + i\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{T}\{t_2, x_0; J\}J(x)A(x)\,\mathrm{d}x \tag{A.1}$$

---

[13] Diese Vorgabe entspricht im Ortsraum einer Festlegung der Funktionen ω für gleiche Argumente durch δ-Funktionen und deren Ableitungen.

[14] Für die nichtrenormierbaren Theorien gibt es innerhalb der Störungsrechnung keine Lösungen des Systems A; z.B. existiert für derartige Randbedingungen die Δ'_F-Funktion in g^2-Näherung nicht.

[15] Zu den Eigenschaften dieses von Schwinger eingeführten Operators vgl. K. SYMANZIK: *Zeits. f. Naturf.*, **10a**, 809 (1954) und dort angegebene Literatur.

bestimmt. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{T}\{+\infty, -\infty; J\} \equiv \mathfrak{T}\{J\} \qquad \text{und} \qquad \langle|\mathfrak{T}\{J\}|\rangle = \mathfrak{T}_0\{J\}\,,$$

wobei wir der Übersichtlichkeit halber die Diracsche Schreibweise mit dem Vakuum $|\rangle$ verwenden.

Zufolge

$$\mathfrak{T}_0\{J\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \tau_n\{J\}}{n!}\,,$$

mit

$$\tau_n\{J\} \equiv \int \dots \int \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n\, \tau(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n)\,,$$

ist dieses Funktional das erzeugende Funktional der Vakuum-τ-Funktionen (Gl. (15)), die sich aus $\mathfrak{T}_0\{J\}$ durch funktionales Differenzieren und Nullsetzen von J gewinnen lassen. Den Operator

$$\mathfrak{T}\{J\} = \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} |(\alpha)\rangle\langle(\alpha)|\mathfrak{T}\{J\}|(\beta)\rangle\langle(\beta)|$$

selbst gewinnen wir, indem wir für $|(\alpha)\rangle$ das Orthonormalsystem der auslaufenden asymptotisch freien Teilchen, für $|(\beta)\rangle$ das der einlaufenden Teilchen einsetzen (Gl. (7), (6)). Benutzung der Asymptotenbedingung (5) und der aus (A.1) folgenden Relation

$$\text{(A.2)} \qquad \frac{\delta}{\delta J(x)} \mathfrak{T}\{J\} = i\mathfrak{T}\{+\infty, x_0; J\} A(x) \mathfrak{T}\{x_0, -\infty; J\}$$

gibt

$$\text{(A.3)} \qquad \langle(\alpha)|\mathfrak{T}\{J\}|(\beta)\rangle = \langle(\alpha)|\mathfrak{T}\{J\} \frac{1}{\sqrt{P_{(\beta)}}} \prod_{\nu=1}^{n} \left[i\int A_{\text{in}}^{(-)}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\beta_\nu}(x)\, \mathrm{d}_3x \right] |\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{P_{(\beta)}}} \prod_{\nu=1}^{n} \left[\lim_{x_0 \to -\infty} \int \frac{\delta}{\delta J(x)} \overleftrightarrow{\partial_0} f_{\beta_\nu}(x)\, \mathrm{d}_3x \right] \langle(\alpha)|\mathfrak{T}\{J\}|\rangle$$

mit der Abkürzung

$$f(x) \overleftrightarrow{\partial_0} g(x) = -g(x) \frac{\partial}{\partial x_0} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_0} g(x).$$

Entsprechend wird für $\varphi_{(\alpha)}$ eingesetzt. Mit der Vollständigkeitsrelation erhalten wird durch Summation über alle Anfangs- und Endzustände:

$$\text{(A.4)} \quad \mathfrak{T}\{J\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, n'!} \left[\sum_{\alpha} i \int A_{\text{out}}^{(-)}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} f_\alpha(x)\, \mathrm{d}_3x \cdot \lim_{x'_0 \to +\infty} \int f_\alpha^*(x') \overleftrightarrow{\partial'_0} \frac{\delta}{\delta J(x')}\, \mathrm{d}_3x' \right]^n |\rangle \cdot$$

$$\cdot \langle| \left[\sum_{\beta} \lim_{y_0 \to -\infty} \int \frac{\delta}{\delta J(y)} \overleftrightarrow{\partial_0} f_\beta(y)\, \mathrm{d}_3y \cdot i \int f_\beta^*(y') \overleftrightarrow{\partial'_0} A_{\text{in}}^{(+)}(y')\, \mathrm{d}_3y' \right]^{n'} \mathfrak{T}_0\{J\} =$$

$$= \exp\left[\lim_{x_0 \to \infty} \int A_{\text{out}}^{(-)}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \frac{\delta}{\delta J(x)}\, \mathrm{d}_3x \right] |\rangle\langle| \exp\left[\lim_{y_0 \to -\infty} \int \frac{\delta}{\delta J(y)} \overleftrightarrow{\partial_0} A_{\text{in}}^{(+)}(y)\, \mathrm{d}_3y \right] \mathfrak{T}_0\{J\}.$$

Um die Randintegrale durch Volumenintegrale ersetzen zu können, ist zu erreichen, daß die Integrale über den jeweils gegenüberliegenden Rand verschwinden. In (A.4) ist dies noch nicht der Fall. (Denn (A.3) folgt aus (A.2) und der Asymptotenbedingung nur dann, wenn $J(x)$ am Rande hinreichend stark verschwindet; dann aber dürfen in der Umgebung des Randes weitere funktionale Ableitungen nicht beliebig vorgenommen werden, was der Grund für das Nichtverschwinden der bei der Umformung von (A 4) auftretenden Randintegrale ist.) Daher gehen wir durch

$$\mathcal{T}\{J\} = \exp\left[-\frac{J\Delta_F J}{2}\right]\mathcal{S}_0\{J\}, \tag{A.5}$$

mit

$$\mathcal{S}_0\{J\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\varphi_n\{J\}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int\ldots\int \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,\varphi(x_1\ldots x_n)J(x_1)\ldots J(x_n)$$

zum erzeugenden Funktional der Vakuum-φ-Funktionen über ([10]). Zur Abkürzung ist hier und in ähnlichen späteren Ausdrücken Matrixmultiplikation vorausgesetzt, also

$$J\Delta_F J \equiv \iint J(x)\Delta_F(x-x')J(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'$$

$$A_{\text{in}}\boldsymbol{K}\frac{\delta}{\delta J} \equiv \int A_{\text{in}}(x)(\Box_x - m^2)\frac{\delta}{\delta J(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{usw.}$$

Einsetzen von (A.5) in (A.4) gibt

$$\mathcal{T}\{J\} = \exp\left[\int_{x_0=\infty} A^{(-)}_{\text{out}}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\frac{\delta}{\delta J(x)}\,\mathrm{d}_3x\right]\exp\left[\frac{-J\Delta_F J}{2}\right]|\rangle\cdot$$

$$\cdot\langle|\exp\left[-\int_{y_0=-\infty} J(y)\Delta_F(y-y')\overleftrightarrow{\partial'_0}A^{(+)}_{\text{in}}(y')\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}_3y'\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\int_{z_0=-\infty}\frac{\delta}{\delta J(z)}\overleftrightarrow{\partial_0}A^{(+)}_{\text{in}}(z)\,\mathrm{d}_3z\right]\mathcal{S}_0\{J\} =$$

$$= \exp\left[-\frac{J\Delta_F J}{2}\right]\exp\left[\int_{x'_0=\infty} J(x)\Delta_F(x-x')\overleftrightarrow{\partial'_0}A^{(-)}_{\text{out}}(x')\,\mathrm{d}_3x'\,\mathrm{d}x\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\int_{y_0=\infty} A^{(-)}_{\text{out}}(y)\overleftrightarrow{\partial_0}\frac{\delta}{\delta J(y)}\,\mathrm{d}_3y\right]S^{+}\cdot\exp\left[-\int_{z_0=-\infty} J'(z)\Delta_F(z-z')\overleftrightarrow{\partial'_0}A^{(+)}_{\text{in}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}_3z'\right]\cdot$$

$$\cdot\exp\left[\int_{z''_0=-\infty}\frac{\delta}{\delta J(z'')}\overleftrightarrow{\partial''_0}A^{(+)}_{\text{in}}(z'')\,\mathrm{d}_3z''\right]\varphi_0\{J\}\Big|_{J'=J}$$

oder

$$(\text{A.6a})\qquad S\mathcal{T}\{J\} = \exp\left[-\frac{J\Delta_F J}{2}\right] : \exp[iJA_{\text{in}}]\exp\left[-A_{\text{in}}\boldsymbol{K}\frac{\delta}{\delta J}\right] : \mathcal{S}_0\{J\}$$

und

$$(\text{A.6b})\qquad \mathcal{T}\{J\}S = \exp\left[-\frac{J\Delta_F J}{2}\right] : \exp[iJA_{\text{out}}]\exp\left[-A_{\text{out}}\boldsymbol{K}\frac{\delta}{\delta J}\right] : \mathcal{S}_0\{J\}$$

und mit $J = 0$ schließlich

$$(\text{A.7})\qquad S = :\mathcal{S}_0\{-A_{\text{in}}\boldsymbol{K}\}: = :\mathcal{S}_0\{-A_{\text{out}}\boldsymbol{K}\}:$$

(Bei der Rechnung sind der Reihe nach die Volterra-Formel

$$(\text{A.8})\qquad \exp\left[J'\frac{\delta}{\delta J}\right]\mathcal{F}\{J\} = \mathcal{F}\{J+J'\}\exp\left[J'\frac{\delta}{\delta J}\right]$$

($\mathcal{F}\{J\}$ ein beliebiges Funktional),

$$\int\limits_{x_0, x_0' = \mp\infty} A^{(\pm)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\Delta_F(x-x')\overleftrightarrow{\partial_0'}A^{(\pm)}_{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(x')\,\mathrm{d}_3x\,\mathrm{d}_3x' = 0\,,$$

$$S = :\exp\left[i\int A^{(-)}_{\text{in}}(x)\overleftrightarrow{\partial_0}A^{(+)}_{\text{out}}(x)\,\mathrm{d}_3x\right]:$$

und

$$A_{\text{out}}(x) = S^+A_{\text{in}}(x)S\,,\qquad A_{\text{in}}(x) = SA_{\text{out}}(x)S^+$$

verwendet worden. Dabei ist in der zuletzt benutzten Formel für die S-Matrix zwischen den $A^{(-)}_{\text{in}}$- und den $A^{(+)}_{\text{out}}$-Operatoren anstelle des Einheitsoperators der Operator $|\rangle\langle|$ eingesetzt zu denken. Die in (A.6) erfolgte Ersetzung der Randintegrale durch Volumenintegrale, welche bei (A.4) nicht zulässig war, ist hier erlaubt.)

(A.7) ist die Normalform der S-Matrix (Gl. (19)), (A.6a,b) sind die in Kap. **3** erwähnten allgemeinen Reduktionsformeln, durch die Matrixelemente geordneter Operatoren auf Vakuumerwartungswerte zurückgeführt werden.

Mit

$$\widehat{J}(x', x) = J(x')\theta(x'-x)\qquad \text{und}\qquad \overline{\mathcal{T}}\{J\} = (\mathcal{T}\{J\})^+$$

läßt sich (A.1) auch schreiben:

$$\mathcal{T}\{J\} = 1 - \int\limits_{x_0=-\infty}^{+\infty} J(x)\mathcal{T}\{\widehat{J}\}\frac{\delta}{\delta J''(x)}\overline{\mathcal{T}}\{J''\}\,\mathrm{d}x\Big|_{J''=0}\,.$$

Bilden des Vakuumerwartungswerts und Benutzung von (A.4) gibt die funktionale Form des Systems A:

$$\text{(A.9)}\quad \mathcal{T}_0\{J\} = 1 - \int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \langle\,|\exp\left[\int\limits_{x_0=-\infty} \frac{\delta}{\delta J'(x')} \overleftrightarrow{\partial_0'} A_{\text{in}}^{(+)}(x')\,\mathrm{d}_3x'\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\int\limits_{x_0''=-\infty} A_{\text{in}}^{(-)}(x'') \overleftrightarrow{\partial_0'} \frac{\delta}{\delta J''(x'')}\,\mathrm{d}_3x''\right]|\rangle \cdot \frac{\delta}{\delta J''(x)} \mathcal{T}_0\{J'\}\overline{\mathcal{T}}_0\{J''\}\,\mathrm{d}x \Big|_{\substack{J'=\widehat{J}\\ J''=0}} =$$

$$= 1 - \int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \frac{\delta}{\delta J''(x)} \exp\left[-\iint\limits_{x_0', x_0''=-\infty} \frac{\delta}{\delta J'(x')} \overleftrightarrow{\partial_0'} i\Delta^{(+)}(x'-x'') \overleftrightarrow{\partial_0''} \frac{\delta}{\delta J''(x'')}\,\mathrm{d}_3x'\,\mathrm{d}_3x''\right] \cdot$$

$$\cdot\, \mathcal{T}_0\{J'\}\overline{\mathcal{T}}_0\{J''\}\,\mathrm{d}x \Big|_{\substack{J'=\widehat{J}\\ J''=0}} =$$

$$= 1 - \int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \frac{\delta}{\delta J''(x)} \exp\left[\frac{\delta}{\delta J'} \overleftarrow{K} i\Delta^{(+)} \overrightarrow{K} \frac{\delta}{\delta J''}\right] \mathcal{T}_0\{J'\}\overline{\mathcal{T}}_0\{J''\}\,\mathrm{d}x \Big|_{\substack{J'=\widehat{J}\\ J''=0}}.$$

Hieraus folgt wegen

$$\text{(A.10)}\quad \mathcal{T}_0\{J\} = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0} \mathcal{T}_0\{\widehat{J}\} = 1 + \int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \frac{\delta}{\delta J'(x)} \mathcal{T}_0\{J'\}\,\mathrm{d}x \Big|_{J'=\widehat{J}}$$

nach Einsetzen von (A.5) und mehrmaliger Benutzung von (A.8)

$$\int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \exp\left[-\frac{\widehat{J}\Delta_F\widehat{J}}{2}\right]\left(-\int \Delta_F(x-x')\widehat{J}(x',x)\,\mathrm{d}x' + \frac{\delta}{\delta J'(x)}\right)\mathcal{S}_0\{J'\}\,\mathrm{d}x \Big|_{J'=\widehat{J}} =$$

$$= -\int\limits_{x_0=-\infty}^{\infty} J(x) \exp\left[-\frac{\widehat{J}\Delta_F\widehat{J}}{2}\right]\left[\int \Delta^{(-)}(x-x')\left(-i\widehat{J}(x',x) + \boldsymbol{K}_{x'} \frac{\delta}{\delta J'(x')}\right)\mathrm{d}x' + \frac{\delta}{\delta J''(x)}\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\frac{\delta}{\delta J'} \overleftarrow{K} i\Delta^{+} \overrightarrow{K} \frac{\delta}{\delta J''}\right] \mathcal{S}_0\{J'\}\overline{\mathcal{S}}_0\{J''\}\,\mathrm{d}x \Big|_{\substack{J'=\widehat{J}\\ J''=0}}.$$

Wie sich durch Reihenentwicklung nach Potenzen von J zeigen läßt, folgt aus dieser Gleichung, daß die ähnliche Gleichung, in der beiderseits der Faktor $\exp[-J\Delta_F J/2]$ weggelassen ist, ebenfalls gilt. Damit erhalten wir schließlich unter Benutzung der (A.10) entsprechenden Beziehung für $\mathcal{S}_0\{J\}$ als in φ-Funktionen geschriebene Zusammenfassung des Systems A:

$$\text{(A.11)}\quad \mathcal{S}_0\{J\} = 1 - \iint J(x)\Delta^{(-)}(x-x')\boldsymbol{K}_{x'} \frac{\delta}{\delta J'(x')} \mathcal{S}_0\{J'\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \Big|_{J'(x')=\widehat{J}(x',x)} -$$

$$- \int J(x) \frac{\delta}{\delta J''(x)} \exp\left[J'\Delta^{(+)}\boldsymbol{K} \frac{\delta}{\delta J''}\right] \exp\left[\frac{\delta}{\delta J'} \overleftarrow{K} i\Delta^{(+)} \overrightarrow{K} \frac{\delta}{\delta J''}\right] \mathcal{S}_0\{J'\}\overline{\mathcal{S}}_0\{J''\}\,\mathrm{d}x \Big|_{\substack{J'=\widehat{J}\\ J''=0}}.$$

RIASSUNTO (*)

Si propone una nuova formulazione delle teorie di campo quantizzate. Partendo da alcuni requisiti generali, si deriva una serie di equazioni che determinano gli elementi di matrice degli operatori di campo e la matrice S. Queste equazioni non contengono costanti di rinormalizzazione ma solo masse sperimentali e parametri d'accoppiamento. Il principale vantaggio rispetto alla formulazione convenzionale è, pertanto, l'eliminazione di tutti i termini divergenti dalle equazioni fondamentali. Sono così eliminati i problemi di rinormalizzazione. La formulazione è, in questo lavoro, ristretta alle teorie che non considerano stati legati stabili. Per semplicità deriviamo le equazioni per le particelle con spin nullo; tuttavia, l'estensione ad altri casi (ad esempio, all'elettrodinamica quantistica) è immediata. Si discutono le soluzioni delle equazioni mediante uno sviluppo in serie di potenze. Esse sono allora identiche alle espressioni rinormalizzate della formulazione convenzionale. Tuttavia, l'applicazione delle equazioni date nel presente lavoro non è limitata alla teoria delle perturbazioni.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*