

Zur Theorie der Farben

Von

Dr. J. J. Müller.

Hierzu Tafel VII.

Jede der drei Grössen Farbenton, Sättigung, Helligkeit, welche das Bewusstsein in einer Farbenempfindung unterscheidet, ist einer unabhängigen Reihe von Bestimmungsweisen fähig und bildet somit für sich eine Mannigfaltigkeit. Näher findet von der einen zur andern Bestimmungsweise ein stetiger Uebergang statt und die Vergleichung der einzelnen Quanta jeder Mannigfaltigkeit kann durch Messung geschehen. Der Beweis für den letzteren Satz ist ein metaphysischer und kann, so viel ich sehe, nur für die Intensität der Empfindung geführt werden, wo er denn auch sofort aus diesem Begriffe entspringt. Auf die Intensität sind aber Farbenton und Sättigung zurückführbar. Das bestimmte Einzelne der vorliegenden Grössengattung, die Farbe, ist also bestimmbar durch drei unabhängig von einander und stetig veränderliche messbare Grössen; die Farben bilden daher eine stetige Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, deren Quanta in Einheiten ausdrückbar sind*). Da dieser

*) Vergl. Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhdl. der k. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen XIII.

Helmholtz, Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachrichten d. k. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen 1868.

allgemeine Gesichtspunkt geeignet ist, manchen Lichtstrahl auf den Weg zu werfen, den die Erforschung der Mannigfaltigkeit zu betreten hat, und zur Discussion eigenthümlicher neuer Aufgaben anregt, so mag es erlaubt sein, ihn innezuhalten.

Die Eigenthümlichkeit der Beziehungen, welche zwischen den Punkten der Mannigfaltigkeit der Farben bestehen und darum die letztere vor anderen characterisirt, ist die, dass im Allgemeinen erst zwischen fünf Punkten eine Gleichung besteht. Daraus folgt, wie schon Herr Helmholtz hervorhebt, dass die Bewegung eines Punktsystemes der Mannigfaltigkeit mit relativen Verschiebungen seiner Elemente nach drei Hauptrichtungen verknüpft ist. Die nähere Form dieser Verschiebungen bestimmt sich, wenn die Ortsbestimmung in der Mannigfaltigkeit auf Grössenbestimmungen zurückgeführt wird; sie ist eben deswegen auch erst nach der räumlichen Construction der Mannigfaltigkeit möglich. Nur die allgemeine Natur derselben lässt sich jetzt schon andeuten.

Die Farbentafel hat die Eigenthümlichkeit, dass je zwei Complementärfarben in einer durch den Ort des Weiss gehenden Geraden liegen. Hierdurch ist der Winkel zwischen den entsprechenden Farben zweier complementären Paare festgesetzt, ohne Rücksicht auf den numerischen Werth, welchen dass Bewusstsein dem Farbenintervalle beilegt. Im Allgemeinen ist dieser nun keineswegs für beide der Gleiche. Dasselbe gilt für die Festsetzung des Abstandes der Farbenorte vom Weiss. Wenn diese gemäss dem Princip, dass die Quantitäten der Farben gleich werden, wenn die subjectiven Helligkeiten dieselben sind, aus den complementären Mengen der Complementärfarben geschieht, so ist dabei nicht berücksichtigt, ob bei zwei Farben gleiche Theile jener Abstände gleichen Graden der Sättigungsunterschiede für das

Auge entsprechen. Auch dies wird im Allgemeinen nicht der Fall sein. Im ersten Falle werden die Flächenelemente der Tafel nicht gleichwerthig, im zweiten die Massenelemente, die man, bei Repräsentation der Mengen durch Senkrechte zur Tafel, auch als lineare Elemente auffassen kann. Beide Widersprüche lösen sich also nur durch jene Dehnungen des Punktsystemes bei seiner Bewegung.

Die Mannigfaltigkeit der Farben — und dies unterscheidet sie, wie die Ausmessung des Gesichtsfeldes durch das Augenmaass, in einer neuen Hinsicht von der gleichfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit des Raumes — ist als Einheitliches eine Function gewisser neuer Veränderlicher, die in den Eigenschaften des Auges begründet sind. Für zwei grosse Gruppen, das normale und das farbenblinde Auge konnte über die Richtigkeit dieses Satzes kein Zweifel auftauchen; die Strenge aber, mit der er auch für die verschiedenen physiologischen Zustände gilt, verdient hervorgehoben zu werden.

In der That, die Erregung in einer Faser des Opticus ist eine Funktion des Lichtes, das auf ihr peripheres Ende fällt, und ihrer Erregbarkeit. Das Licht, das unmittelbar die Erregung bedingt, hängt aber ab von den Eigenschaften des Lichtes, das in das Auge fällt, und von den Veränderungen, welche dieselben im Auge erleiden. Von diesen drei Variablen ist nun im Allgemeinen nur die Eigenschaft des Lichts vor dem Eintritt in's Auge für die verschiedenen Augen dieselbe, mit den beiden andern muss daher die Erregung noch variiren. Letztere selber ist aber erst durch eine neue veränderliche Funktion mit der Empfindung verknüpft.

Etwas anschaulicher zeigt sich dies auch so. Wenn durch Ermüdung die Erregbarkeit der Retina geschwächt oder durch Adaptation erhöht ist, so wird dieselbe Reizstärke dort eine geringere, hier eine grössere Empfindungs-

intensität bewirken. Und wenn jene Aenderung eine Grundfaser vorzugsweise betrifft, der Reiz aber einer gemischten Farbe entspricht, so müssen zu den Verschiedenheiten der Intensität solche des Farbtones hinzukommen. Wenn andererseits durch stärkere Anhäufung des Pigments im gelben Fleck die grünblauen Strahlen in einem Auge stärker absorbirt werden als in einem andern, so wird dort das Weiss des unmittelbaren Sonnenlichts einen röthlichern Character annehmen, relativ zu dem Weiss des zweiten Auges.

Es geht hieraus hervor, dass die Farbentafel, die ein Beobachter aus seinen Versuchen construirt, im Allgemeinen nur für die beobachtende Stelle seines Auges streng richtig und auch da eine Funktion der Erregbarkeit ist. Für die Beobachtung ergibt sich die wichtige Forderung, die Erregbarkeit möglichst constant zu erhalten.

1. Thatsächliche Grundlagen der Farbentheorie.

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Punkten der Manigfaltigkeit werden durch die Mischung der Farben gewonnen. Die Mischungsversuche müssen daher die eigentliche Grundlage der Farbentheorie bilden. Da sie aber stets die Veränderungen des Lichts im Auge einschliessen, so entsteht die weitere Aufgabe, den Einfluss dieser für ihre Elimination zu ermitteln.

In den folgenden Untersuchungen war dieser Gesichtspunkt maassgebend. Sie sind im Institute des Herrn Geheim-Rathes Helmholtz ausgeführt. Die Güte, mit der mein hochverehrter Lehrer mir seine Unterstützung zuwandte, verbindet mich ihm in unwandelbarer Dankbarkeit.

Ueber die Mischung der Spectralfarben.

1.

In den Untersuchungen der Herren Helmholtz und Manwell über die Mischung der Spectralfarben*) liegt ein Widerspruch hinsichtlich des Verhaltens der Sättigung, welche die Mischfarben relativ zu den entsprechenden homogenen Farben des Spectrum zeigen. Von dem Verhalten der Sättigung hängt nun gleichzeitig ab die Form der Farbentafel, die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der objectiven Auffassung der Farbmischung und die Bestimmtheit oder Unbestimmtheit der physiologischen Farbentheorie aus den Mischungsversuchen. Es ist daher gerechtfertigt, wenn diese Sättigung zum Object einer neuen Untersuchung gemacht wurde.

Der für Experimentaluntersuchungen allgemein gültige Grundsatz, die Erscheinungen in den einfachst möglichen Abhängigkeiten darzustellen, verlangt die Mischung von zwei Spectralfarben. Diese Methode ist darum den Manwell'schen Bestimmungen aus der Mischung dreier Spectralfarben zu Weiss vorzuziehen. In der That, letztere führt nicht nur eine grössere Anzahl von Variablen ein, sie implicirt auch die quantitative Bestimmung der Farben, während jene, soweit es sich nur um die allgemeine Form der Mannigfaltigkeit handelt, rein qualitativ möglich ist. Eine Messung der Intensität der Farbenempfindung ist bei der logarithmischen Natur und dem verschiedenen Grade der Funktionen, welche die Abhängigkeit der Helligkeit von der Lichtstärke ausdrücken, bis jetzt gar nicht möglich. Auf die Lichtstärken influencirt ausserdem die ganze Reihe der vom

*) Helmholtz, Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben. Pogg. Ann. 87. 15. Physiol. Optik. 279. 945.

Manwell, On the Theorie of Compound Colours, and the Relations of the Colours of the Spectrum. Phil. Trans. 1860. 57.

Lichte durchstrahlten Medien in viel complicirter Weise als auf die Qualitäten des Lichtes.

Aus diesem Gesichtspunkte entspringt unmittelbar die allgemeine Forderung der Versuche: Es sind zwei Farbenfelder, das eine gebildet aus einer homogenen Spectralfarbe, das andere gemischt aus zwei Spectralfarben, bei gleichem Farbentone und gleicher Helligkeit in ihrer Sättigung zu vergleichen. — Diese Prüfung ist über das ganze Feld der Combinationen zweier Spectralfarben, soweit in experimentellen Untersuchungen von solchen überall die Rede sein kann, auszudehnen. Nur die complementären Farben fallen aus der Reihe.

Für die Ausführung der Versuche ergibt sich aus dieser allgemeinen Forderung die Aufgabe, zwei solche spectrale Felder veränderlich in Ton und Helligkeit der einzelnen homogenen Farben neben einander herzustellen. — Es ist dabei aus leicht ersichtlichen Gründen der subjectiven Methode der Vorzug zu geben.

Dies erreichte ich durch die folgende Anordnung (Siehe Fig. 1.). Von einem feststehenden Spiegel reflectirt, fällt das diffuse Licht des Himmels durch die Spalten eines Schirmes S_1 , welcher in eine Oeffnung des Fensterladens eingefügt ist, in das verdunkelte Beobachtungszimmer. Der Schirm enthält zwei übereinander befindliche verticale Spalten von 3 Cm. Höhe, welche, horizontal gegen einander beweglich, in beliebiger Entfernung von einander und beliebiger Breite eingestellt werden können. Der untere rechte Spalt (s. Fig. 1a., die eine schematische Andeutung von dem Schirme giebt) heisse s'_1 , der obere links s''_1 . — In drei Meter Entfernung von S_1 sind Prisma und Linse aufgestellt, welche von s'_1 und s''_1 zwei spectrale Bilder entwerfen. Das Prisma P ist ein gleichseitiges Münchener Flintglasprisma, die Linse L eine achromatische Steinheil'sche Linse von 40 Cm. Brennweite. Hinter

der Linse befindet sich ein Diaphragma D, dessen rechteckförmige Oeffnung in der Richtung der Breite mittels einer Schraube beliebig erweitert oder verengt werden kann. — Im Orte der spectralen Bilder steht der von Herrn Helmholtz construirte und Pogg. Ann. XCIV. S. 3, sowie Physiol. Optik. S. 304 beschriebene Schirm S_2 , dessen beide verticale Spalten s'_2 und s''_2 genannt sein sollen; s'_2 sei, von der Rückseite des Schirmes gesehen, der rechte, s''_2 der linke. Auf der vordern Seite sind (wie in Fig. 1b. besonders gezeichnet) auf den versilberten Schlitten die zwei reinen Spectren σ_1 und σ_2 wahrzunehmen; sie liegen über einander, σ_1 , das s'_1 entspricht oben, σ_2 dem Spalt s''_1 entsprechend unten, und sind horizontal gegen einander verschoben: σ_1 gegen s''_2 und σ_2 gegen s'_2 hin.

Sind die Spalten s'_2 und s''_2 geöffnet, so fallen im Allgemeinen vier Spectralfarben durch dieselben; es kann aber mit Leichtigkeit die eine davon abgeblendet werden, so dass jetzt, wie verlangt, drei homogene Farben für die Beobachtung zur Verfügung stehen. Diese treffen das Objectiv eines astronomischen Fernrohrs F, welches unmittelbar hinter S_2 auf das Diaphragma D eingestellt ist. Es vereinigt zunächst alle drei durch die Spalten gegangenen Farben in ein einziges Farbenfeld von der Form der Oeffnung des Diaphragma. Durch ein zwischen S_2 und das Objectiv des Fernrohrs passend eingeschobenes, sehr schwach ablenkendes Prisma p (von 3 brechendem Winkel) kann aber immer eine solche Trennung derselben erzielt werden, dass zwei Farbenfelder neben oder über einander erscheinen: das eine gemischt aus zwei Farben, das andere gebildet von der dritten Farbe. Unmittelbare Berührung beider wird durch Einstellung der Breite des Diaphragma D erreicht. — Sind durch die Lage und Breite von s'_1 und s''_1 die Spectren σ_1 und σ_2 gegeben, so hängt der Farbenton der Felder

noch ab von dem Orte der Spalten s_2' und s_2'' in den Spectren, und ihre Helligkeit von der Breite dieser Spalten. Beide, Farbenton und Helligkeit der drei homogenen Farben passend herauszufinden, ist die jedesmalige Aufgabe des Versuches. Ehe ich die Art, wie diese Bestimmung geschieht, näher bespreche, will ich einige Bemerkungen beifügen über die Bedingungen, welchen die einzelnen Theile der Zusammenstellung zu genügen haben.

Es kommt in der Anordnung Alles darauf an, möglichst homogene Spectralfarben zu gewinnen und den Farbenfeldern die möglichst zweckmässige Form für die Vergleichung zu geben. Die erste Forderung verlangt die Herstellung reiner Spectren und die Einstellung der Spalten s_2' und s_2'' in den Ort derselben, parallel den Frauenhoferschen Linien. Für den ersten Punkt müssen die Spalten in S_1 schmal und vertical sein; das Prisma P soll symmetrisch zu denselben, mit verticaler brechender Kante im Minimum der Ablenkung aufgestellt werden; die Linse L und das Diaphragma D sind symmetrisch in Beziehung auf die Symmetrieaxe der Spalten in S_1 und des Prisma P zu stellen, wenn man sich dieselbe durch das Prisma im Minimum der Ablenkung gebrochen denkt; die Oeffnung von D endlich darf nur den mittleren, nicht zerlegten Theil des Lichtbündels durchlassen. Diesen Bedingungen konnte ich theils durch Beurtheilung von blossem Auge, theils durch die Benützung von Reflexions- und Brechungsbildern in einer Weise Genüge leisten, welche für die vorliegenden Zwecke vollkommen befriedigt. — Die richtige Einstellung der Spalten des Schirmes S_2 in den Ort des Spectrum wird durch das Verschwinden der different farbigen Säume des Feldes erkannt, welches eine einzelne Farbe, durch einen Spalt fallend, liefert. Sehr zweckmässig controlirt man sie, indem man durch den Spalt hindurch mit einer

passend gewählten Lupe einen Theil des Spectrum betrachtet. Die Fraunhoferschen Linien müssen dann gleichzeitig mit den Rändern des Spaltes deutlich und parallel zu den letztern erscheinen, und bei Bewegung des Auges darf keine perspectivische Erscheinung beider gegen einander eintreten. Diese Beobachtung giebt gleichzeitig eine Controle für die Einstellung des Prisma in's Minimum der Ablenkung: die horizontalen und verticalen Linien des Spectrum müssen gleichzeitig deutlich gesehen werden. — Diffuses weisses Licht, welches, von den Wänden oder Objecten des Zimmers reflectirt, gegen die optischen Apparate strömt, wurde durch Schirme möglichst abgehalten; Reflexionen des Lichts in den Apparaten selber (an der Rückfläche des Prisma und den metallischen Flächen des Schirmes S_2 und des Diaphragma) war durch Schwärzung der Theile vorgebeugt.

Die Beurtheilung der Farbenfelder verlangt die Berücksichtigung der folgenden Momente. Es ist bekannt, dass ein farbiges Feld für eine feine Beurtheilung durchaus eine hinreichende scheinbare Grösse haben muss. Bei passender Wahl der Vergrößerung des Fernrohrs lässt sich auch bei bescheidener Grösse des Prisma P dies immer leicht erreichen. Die Helligkeit der Farbenfelder darf weder zu schwach noch blendend sein. Grosse Tageshelligkeit ist immer am Günstigsten, da sich dann die Spalten am meisten verengern, also die Spectren am reinsten und die einzelnen Farben in den kleinsten Intervallen herstellen lassen; zu geringe Stärke des Tageslichtes darf keineswegs durch Erweiterung der Spalten compensirt werden. — Farbige Säume durch partielle Deckung beider Felder oder theilweises Auseintreten der beiden Farben des Mischfeldes sind durch sorgfältige Einstellung des Fernrohrs und zweckmässige Richtung der brechenden Kante des Prisma p zu vermeiden. Prisma P und Linse L müssen von Ungleichartig-

keiten oder Unreinigkeiten frei sein, da sich alle in vergrössertem Maassstabe als dunkle Flecke im Farbenfelde präsentiren.

Im Versuche sind vor Allem die drei willkürlich gewählten Spectralfarben zu gewinnen. Zur Bestimmung der sechs Grössen, welche ihre Farbentöne und Helligkeit ausdrücken, dienen Breite und Lage der vier Spalten. Da in S_2 zwei Farben immer durch denselben Spalt gehen, so sind zwei Paare von diesen 8 Veränderlichen von einander abhängig, ihre Zahl reducirt sich aber auf 6, der nothwendigen und hinreichenden Anzahl. — Für die Einstellung der Spalten s_2' und s_2'' im Spectrum wird in den meisten Fällen einfach das blosse Auge genügen, indem man sich eben, ohne nähere Angaben zu beabsichtigen, einfach die Aufgabe stellt, zwei gewählte Farben zu einer dritten zu mischen. Wo es sich aber um die genauere Bestimmung des Ortes jener Farben im Spectrum, der relativen Lage zu den Frauenhoferschen Linien oder der Wellenlänge, handelt, da ist ein complicirteres Verfahren nöthig, das unten näher besprochen wird.

Liegen die drei homogenen Farben in den Feldern vor, so ist man bei der eigentlichen Aufgabe angelangt, durch genaue Abstufung ihrer Lichtstärken, d. h. der vier Spaltbreiten, Farbenton und Helligkeit der Felder gleich zu machen. Ist dies erreicht, so kann die Sättigung beider verglichen werden. Bei diesem Verfahren sind, soll es übereinstimmende Resultate liefern, gewisse Vorichtsmaassregeln zu beobachten. Dem beobachtenden Auge ist am Ocular des Fernrohrs eine feste und symmetrische Lage zu geben. Schwankt es hin und her, so tritt von der einen Farbe bald mehr bald weniger Licht durch die Pupille und die Farbenfelder variiren, ohne dass objectiv etwas geändert worden wäre. Die Accommodation des Auges muss sorgfältig der Mischfarbe angepasst sein; denn mit dem Auftreten von ausschliesslichen

Zerstreuungskreisen für die eine Farbe erscheint an dem Rande diese Farbe allein und dann färbt sich gewöhnlich das ganze übrige Feld in der entsprechenden Farbe. Sowohl Nachbilder als Contrasterscheinungen sind wohl in Betracht zu ziehen. Ihr Einfluss ergibt sich meist leicht bei Wiederholung der Vergleichung in verschiedener Reihenfolge und kleinen Aenderungen der Lichtstärke einer der drei Farben. Subjective Erscheinungen mischen sich bisweilen bei engem Spalte in S_2 sehr störend in die Felder. Man kann ihnen durch etwas grössere Breite dieser Spalten, bei Verengerung derjenigen in S_1 , einigermassen, begegnen. Die Verschiedenheit der Empfindung bei Aenderung des Ortes des Netzhautbildes ist schon hervorgehoben; sie sowohl als analoge Unterschiede in den Empfindungen beider Augen werden von den meisten Beobachtern, die beide aufmerksam vergleichen, sofort wahrgenommen.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind die folgenden. Zunächst boten sich naturgemäss die nahe beisammenliegenden Farben des Spectrum der Untersuchung dar. Für sie sind die Ergebnisse übersichtlich in folgender Tabelle zusammengestellt. Es ist dabei die Sättigung der Mischfarbe, wo keine Verminderung zu bemerken war, als spectral, wo aber eine solche sich zeigte, als weisslich oder weiss, je nach dem Grade der Verminderung, bezeichnet.

Componenten.		Mischfarbe.	Sättigung.
Roth	Gelb	Orange	Spectral
Orange	Gelbgrün	Gelb	Spectral
Gelb	Grün	Gelbgrün	Weisslich
Gelbgrün	Blaugrün	Grün	Weiss
Grün	Cyan	Blaugrün	Weisslich
Blaugrün	Indigo	Cyan	Spectral
Cyan	Violett	Indigo	Spectral

Diese Tabelle zeigt in den Sättigungsgraden der Mischfarben eine durchaus symmetrische Anordnung in Beziehung auf das Grün. Alle Mischungen, wo Grün nicht auftritt, sind von demselben Sättigungsgrade wie die entsprechende Spectralfarbe; alle, wo es auftritt, zeigen eine Sättigungsverminderung und zwar ist diese klein, wenn Grün eine der Componenten bildet, stärker, wenn es die Mischfarbe selbst ist. Es geht daraus hervor, dass das Grün jedenfalls eine ausgezeichnete Stellung in der Farbenreihe einnimmt.

Dies zeigte sich auch in den Mischungen von Gelb und Blaugrün zu Grün oder Gelbgrün und von Cyan und Gelbgrün zu Grün oder Blaugrün, welche alle weisslich ausfielen — Ebenso in der jetzt sich anschliessenden Reihe von Mischungen, wo die Componenten weiter auseinander im Spectrum liegen. Die Resultate dieser Reihe sind in der folgenden Doppeltabelle zusammengestellt. Es ist darin unter Roth das äusserste, gewöhnlich sichtbare Roth des Spectrum verstanden, unter Violett die Farbe zwischen den Linien G und H, unter Grün die Farbe zwischen C und F, etwas näher jener Linie, unter Gelbgrün die Farbe von E bis C, unter Blaugrün diejenige der blauen Seite von F. Diese Definitionen sollen aber zunächst nur approximativen Sinn haben.

Compon.	Mischfarbe.	Sättigung.	Compon.	Mischfarbe.	Sättigung.
Roth	Orange Gelb	Spectral	Violett	Indigo Cyan	Spectral
Gelbgrün		Spectral	Blaugrün		Spectral
Roth	Orange Gelb Gelbgrün	Weisslich	Violett Grün	Indigo Cyan Blaugrün	Weisslich
Grün		Weisslich			Weisslich
		Weisslich			Weisslich

Die Beobachtungen, welche beide Tabellen enthalten, lassen sich so zusammenfassen: Alle Farben von Roth

bis Gelbgrün einerseits, alle vom Violett bis zum Blaugrün andererseits geben unter sich Mischfarben von der Sättigung der entsprechenden dazwischen liegenden Spectralfarben. Grün mit irgend einer Farbe gemischt giebt eine Sättigungsverminderung.

Da die Farben der Enden des Spectrum sich wieder nähern, so waren zu den angeführten Mischungen noch die folgenden zu fügen.

Componenten.		Mischfarbe.	Sättigung.
Violett	Orange	Roth	Weisslich
Roth	Cyan	Indigo	Weisslich
		Violett	Weisslich
Roth	Indigo	Violett	Weisslich

Die Mischfarben sind hier alle weisslich. Eine besondere Anmerkung verdient jedoch die Mischung von Roth und Indigo zu Violett. Die geringere Sättigung der Mischfarbe gegenüber dem homogenen Violett ist zwar deutlich herauszufinden; aber doch giebt es Fälle, wo die beiden Felder kaum von einander unterschieden werden können. Man befindet sich hier oft, wie auch schon Herr Aubert erwähnt, in der eigenthümlichen Lage, dass man zwar sicher einen Unterschied der Felder erkennt, aber nicht anzugeben weiss, ob er in der Sättigung oder in der Helligkeit oder im Farbentone liegt. Lässt er sich noch als der Helligkeit angehörend erkennen, und bringt man dann die Helligkeiten auf möglichste Gleichheit, so findet man die Mischfarbe deutlich weisslicher als die spectrale Farbe. Letzteres ist gerade bei den besten Tageshelligkeiten und bei der sorgfältigsten Vermeidung aller Nachbilder der Fall.

Ueberhaupt ist bei den Mischungen der dritten Tabelle eine sehr genaue Beobachtung der oben besprochenen

Cautelen gefordert. In's Besondere sind wohl die erste und letzte derselben die schwierigsten von allen. Hier treten jene eigenthümlichen, von dem Schwanken der Accommodation bedingten Erscheinungen ganz besonders zu Tage. Von der einen Farbe muss immer nur ausserordentlich wenig gewählt werden; der eine Spalt in S_2 wird damit sehr enge, so dass die subjectiven Erscheinungen im Farbenfelde sehr begünstigt werden. Endlich könnte wohl ein psychischer Grund mit im Spiele sein, der in dem Auftreten einer sehr reinen Grundfarbe in der Mischung läge. Sind ja doch Roth und Grünblau ebenfalls nur sehr schwer zu Weiss zu vereinigen, und entspricht ja die berühmteste Zusammenstellung der Farben, die Triade Roth, Grün, Violett der italienischen Maler, den drei Grundempfindungen.

Es wurde oben schon hervorhoben, dass eine Beobachtung strenge nur für das eine Auge Gültigkeit hat. Beispiele von Verschiedenheiten für meine beiden Augen sind folgende. Eine Mischung von Roth und Gelbgrün, welche dem rechten Auge Grün im Vergleich zu dem spectralen Gelb erschien, war für das linke zu roth. Eine Mischung von Violett und Blaugrün, welche das rechte Auge von dem spectralen Indigo nicht unterschied, erschien dem linken mehr Cyanblau. Roth und Indigo, für das rechte Auge zusammengesetzt zu einem Violett, das im Farbentone dem spectralen gleich war, zeigten dem linken Auge eine Purpurnuance. Violett und Orange für das linke Auge zu Roth zusammengesetzt, boten dem rechten ein Rosa dar. Diese Unterschiede erklären sich unter der Annahme, dass jedesmal die brechbareren Strahlen der Mischung vom Pigmente des rechten Auges weniger stark absorbirt werden, als von dem des linken.

Die obigen Beobachtungen weichen von den Resultaten, die Th. Young, Helmholtz und Manwell gewonnen, einigermassen ab. Wenn ich diesen hochbe-

rühmten Männern gegenüber die Resultate mir zu vergleichen erlaube, so widerspricht dies ebenso einer geziemenden Bescheidenheit als meiner tiefen Verehrung für sie. Doch mag das Vertrauen in die Richtigkeit der Methode und das Bewusstsein gewissenhafter Beobachtung es rechtfertigen, die Gründe zu suchen, welche die Abweichungen bedingen konnten.

Th. Young sagt*): „It is certain, that the perfect sensations of yellow and of blue are produced respectively by mixtures of red and green and of green and violet light.” Wenn auch Young, so viel mir bekannt ist, nirgends ausführliche Mittheilungen über Farbmischungen gemacht, so ist doch aus der Bestimmtheit seines Ausdruckes, sowie aus der Aenderung der Wahl der Grundfarben in seiner zweiten Besprechung derselben zu schliessen, dass er seinen Satz auf eigene Versuche stützt, zumal da die Resultate seiner Vorgänger alle sehr von ihm abweichen**). Die Verschiedenheit dieser Resultate Young's von den oben mitgetheilten, könnte davon herrühren, dass seine Methode geringe Sättigungsunterschiede nicht zu erkennen erlaubte, oder dass er in beiden Mischungen nicht ganz denselben Ton des Grün benützt hat.

Die Abweichungen von den Beobachtungen des Herrn Helmholtz***) bestehen darin, dass ich eine Anzahl von Mischfarben weniger gesättigt fand. Doch beziehen sie sich nur auf sehr geringe Sättigungsverminderungen

*) Th. Young, Lectures on natural philosophy I. 439. 440.

***) Vergl. auch Herschel (Light Art 518) und Dove (Farbenlehre 34). Da die Annahme von Roth, Gelb und Blau als Grundfarben in der Abhandlung: „on the theory of light and colours, read Nov. 12. 1801”, die Annahme von Roth, Grün und Violett in den Lectures 1807 sich findet, so müssen die Versuche in dieses Intervall fallen.

****) Helmholtz, Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben Pogg. Ann. 87. 45. Müller's Archiv 1852. 461. Physiol. Optik. 279. Die obige Vergleichung bezieht sich auf die Tabelle der letzteren Stelle.

und sind wohl in der Kleinheit der Felder in den Versuchen des Herrn Helmholtz begründet.

Herr Manwell*) zieht aus seinen Farbentafeln zunächst den Schluss: „The orange and yellow of the spectrum are chromatically equivalent to mixtures of red and green. They are neither richer nor paler than the corresponding mixtures, and the only difference is that the mixture may be resolved by a prism, whereas the colour in the spectrum cannot be resolved. — In the same way the colours from the primary green to blue are chromatically identical with mixtures of these.“ Dies schliesst um so weniger erhebliche Abweichungen von meinen Versuchen ein, wenn man in den Manwell'schen Tafeln die ganz deutlich vorhandene Abrundung der Ecke B (namentlich in Fig. 4) berücksichtigt, nur wäre die Krümmung hier etwas weniger brechbar. Herr Manwell zieht aber für die Enden des Spectrum den zweiten Schluss: the extreme ends of the spectrum are probably equivalent to mixtures of red and blue, but they are so feeble in illumination that experiments on the same plan with the rest can give no result, but they must be examined by some special method.“ Wäre dieser Schluss richtig, so würde er wesentliche Verschiedenheiten von meinen Resultaten involviren. Ich werde mir unten erlauben, näher auf die Discussion dieses Punctes einzugehen.**)

*) Manwell, On the Theory of Compound Colours. Phil. Trans. 1860. 57.

**) Es braucht der Widerspruch nicht hervorgehoben zu werden, in welchem die obigen Beobachtungen mit der fast allgemein angenommenen Regel stehen, dass die Sättigungsverminderung der Mischfarbe in gewissem Sinne proportional sei der Entfernung der gemischten Farben im Spectrum. Interessant aber ist ihre Beziehung zu den Consequenzen, zu welchen die Theorie des Mitschwingens in den nervösen Organen schon ihre Begründer geführt hat: „dass gar kein, einer homogenen Farbe identischer Farbenton durch Mischung erlangt werden kann.“ Grailich. Wiener Sitzungsber. XII. Math. nat. Cl. 283.

2.

Die mitgetheilten Versuche führten zu dem Resultate, dass das eigentliche Grün des Spectrum in allen Mischungen, mag die zweite Componente sein, welche sie wolle, eine Sättigungsverminderung der Mischfarbe gegenüber der entsprechenden spectralen Farbe bedingt. Oben waren für die nähere Definition dieses Grün als Grenzen desselben die Fraunhoferschen Linien C und F angenommen, ohne übrigens nähere Genauigkeit damit beanspruchen zu wollen. Es sollen jetzt diese Grenzen genau bestimmt werden.

Wird in der Mischung des Grün mit einer weniger brechbaren Farbe von den weniger brechbaren Tönen des Grün zu den brechbareren fortgeschritten, bei der Mischung mit einer brechbareren Farbe aber umgekehrt von den brechbareren Tönen zu den weniger brechbaren, so lässt sich die Aufgabe in präciser Fassung so ausdrücken: Es soll bestimmt werden, für welche Wellenlänge des Grün in jeder dieser Reihen die Sättigungsverminderung anfängt, merklich zu werden.

Ich wählte die Mischungen mit Roth und Violett zu Gelb und Cyan und ging dort von E aus über C gegen F, hier von c über F gegen C hin.

Die Zusammenstellung des Apparates war ganz dieselbe, wie die oben beschriebene. Durch den einen Spalt des Schirmes S_2 fiel nur das Grün des einen Spectrum (die in ihn fallende Farbe des andern war abgeblendet), durch den andern Spalt fielen entweder Roth oder Violett von demselben Spectrum und Gelb oder Blau von dem andern. Ein Spalt war somit für das Grün allein zur Verfügung. Durch Drehen der verticalen Schraube seines Schlittens konnte er in stetigem Gange über die Töne des Grün verschoben werden. Beobachtete man dabei mit einer passend gewählten Lupe durch den Spalt

die Partie des Spectrum, welche in ihn fiel, so konnte man leicht die dunkeln Linien derselben erkennen und so die Lage, welche der Spalt im Spectrum hatte, genau bestimmen.

In der ersten Versuchsreihe fiel durch den Spalt s_2'' das Grün des Spectrum σ_1 , durch s_2' das Roth von σ_1 und das Gelb von σ_2 . Zunächst stand s_2'' im Gelbgrün, die Linie E war deutlich in ihm zu sehen. Die Mischfarbe konnte vom Auge nicht vom spectralen Gelb unterschieden werden. Ich verschob jetzt s_2'' successive ganz wenig gegen das Grün und brachte die beiden Farbenfelder jedesmal in Ton und Helligkeit zu möglicher Gleichheit, bis ich ein schwaches Weisslichwerden der Mischfarbe gegenüber dem spectralen Gelb bemerkte. War dies der Fall, so konnte ich die Liniengruppe C mitten im Spalte wahrnehmen. Stellte ich nachher diese Linie auf den linken Rand des Spaltes ein — das Grün war dabei etwas weniger brechbar — so konnte ich keinen Unterschied in der Sättigung der Farbenfelder mehr wahrnehmen. Der Spalt s_2'' hatte dabei eine Weite von 0,5 Mm. Diese Bestimmung zeigte in Wiederholungen sehr gute Uebereinstimmung. Die Abweichungen waren immer nur solche, dass ich entweder noch eine Spur von Sättigungsunterschied erkannte, wenn C am linken Rande des Spaltes war, oder erst eine solche, wenn C mit dem rechten sich deckte.

In der zweiten Versuchsreihe fiel durch den Spalt s_2' das Grün des Spectrum σ_2 , durch s_2'' Violett von σ_2 und Blau von σ_1 . Zunächst stand s_2' beträchtlich jenseits von F im Blaugrün: die Mischfarbe war dem spectralen Blau in jeder Beziehung ähnlich. Schob ich nun durch Drehen der verticalen Schraube den Spalt gegen F hin, bis ich eben eine Sättigungsabnahme bemerkte, so übernahm jetzt die Linie F genau die Rolle von C; auch hier waren die bei Wiederholungen eintretenden

Schwankungen ganz analoge. Die Linie F bestimmt somit den Anfang des Weisslichwerdens der brechbareren Mischungen des Grün.

Es geht hieraus hervor, dass das Grün, welches bei Mischung mit irgend einer andern Farbe immer eine Sättigungsverminderung relativ zur entsprechenden Spectralfarbe bedingt, für meine Augen durch die Frauenhofer'schen Linien C und F begrenzt ist, somit das Intervall von 5171—4860 Hunderttausendtel Millimeter Wellenlänge umfasst.

Für die Beurtheilung der Genauigkeit dieser Bestimmung will ich anführen, dass, wie sich aus der Spaltweite und dem Abstände von C und F leicht berechnen liess, die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen 10 Einheiten der Wellenlänge nicht überschritten haben. Auch mag beigefügt sein, dass ich für die beiden Augen keinen Unterschied in der Lage der Grenzen bemerkt habe.

Diese Bestimmung gibt die Sättigungsverhältnisse, wie sie das Auge in Wirklichkeit unterscheidet und ist eben darum an eine Eigenthümlichkeit desselben gebunden, die hier noch hervorzuheben ist. Das Auge unterscheidet nämlich nur endliche Grade der Sättigung. Die obigen Ergebnisse sagen dabei strenge nur: Bei Mischung von Roth mit successive brechbareren Tönen des Gelbgrün und von Violett mit immer weniger brechbaren Tönen des Blaugrün wird dort bei C, hier bei F dieser endliche Grad des Sättigungsunterschiedes überschritten und darum vom Auge eben wahrgenommen. Nun ist bekannt, dass dieser Werth selber mit der Farbe wechselt. Daraus folgt, dass die Bestimmungen von C und F nicht ganz gleichartig sind. Letzteres entspricht einer geringeren Menge von beigemischtem Weiss als ersteres. Auf gleiche Mengen des hinzuzufügenden Weiss

reducirt, würde somit die untere Grenze etwas näher gegen E hin fallen. —

Werden in den Mischungen des Grün mit Roth von C an successive brechbarere und brechbarere Töne, in den Mischungen mit Violett von F an stetig weniger brechbare Töne gewählt, so nimmt die Sättigungsverminderung je von Null an continuirlich zu, bis sie dort bei der Complementärfarbe des Roth, hier bei derjenigen des Violett zu einem Weiss führt. Daraus folgt, dass zwischen C und F eine Wellenlänge existiren muss, welche gleiche Sättigungsabnahme für beide Mischungen gibt. Wird der Begriff Sättigungsverminderung in dem weitern Sinne, der ihn unabhängig von der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges macht, gefasst, so lässt sich dieser Farbenton als diejenige Wellenlänge des Grün definiren, welche mit Roth und Violett zwei Mischfarben erzeugt, die aus den entsprechenden Farben des Spectrum durch Addition derselben Menge Weiss erhalten werden können. — Wählt man die Mischfarben so, dass sie gleiche Stellung zu den zu mischenden Farben haben, so gewinnt dieser Ton des Grün, welches für beide keinen Unterschied in der Sättigungsabnahme gibt, eine gewisse Analogie zu einem ideellen Tone des Grün, der für beide keine Sättigungsabnahme bedingt, und wird damit für die theoretischen Betrachtungen von Wichtigkeit. Es ist der grüne Ton, der mit der grössten relativen Menge Purpur Weiss gibt, steht also dem Roth und Violett zur Seite, die mit der grössten relativen Menge Blaugrün und Gelbgrün Weiss erzeugen.

Die Bestimmung dieses Farbentones beruht, ausser auf der willkürlichen Wahl von Violett und Roth, als Farben mit denen er gemischt werden soll, noch auf der Wahl der Mischfarben, welche je ein bestimmtes Verhältniss in den Abständen von den Componenten implicirt. Dies macht eine genaue Ermittlung durchaus un-

möglich; doch kann wenigstens annähernd eine solche versucht werden, wenn man jenen Lagen der Mischfarben wahrscheinliche Werthe beilegt. Da die Sättigungsverminderung einer Farbe durch Beimischung einer gewissen Quantität Weiss, von der Helligkeit der Farbe wesentlich mit abhängt, so setzen die obigen Betrachtungen gleiche Helligkeiten der Mischfarben voraus. Diese Gleichheit ist nun wieder im Allgemeinen nicht strenge zu erreichen, sie konnte aber doch im Versuche als annähernd erfüllt betrachtet werden. Als Mischfarben wählte ich nämlich Gelbgrün und Blaugrün, den Linien C und F entsprechend. In den grünen Tönen des Spectrum ändert sich aber die Helligkeit nicht auffallend, sie durfte aber für C und F als gleich betrachtet werden. Dann entsprach im Versuche der Gleichheit der Helligkeiten Gleichheit der Spaltbreiten.

Ich stellte nun nach einander zwei Paare von Mischungen dar; das eine war eine Mischung von Roth mit Grün und eine solche aus Gelbgrün von der Brechbarkeit der Linie C mit Weiss; das andere war gebildet aus Violett, welches mit Grün, und aus Blaugrün (F), welches mit Weiss gemischt war. Das homogene Blaugrün hatte dieselbe Helligkeit wie das homogene Gelbgrün, und die Menge des Weiss war für beide dieselbe. Die Felder jedes Paares wurden auf gleiche Helligkeit und gleichen Farbenton gebracht; in dem einen Paare war ausserdem Gleichheit der Sättigung durch passende Wahl des Weiss erzielt. Es war dasjenige Grün zu finden, für welches jetzt auch in dem andern Paare Gleichheit der Sättigung existirte.

Hiezu diente mir die folgende Modification der früheren Versuchsanordnung. Der Schirm S_1 war ersetzt durch einen zweiten mit drei analogen verticalen Spalten von je 2 Cm. Höhe, die immer leicht in eine solche Stellung zu bringen waren, dass durch den einen Spalt des

Schirmes S_2 Gelbgrün von der Brechbarkeit der Linie C, Blaugrün von derjenigen der Linie F und ein dazwischen liegendes Grün fielen; der andere Spalt des Schirmes S_2 war dann disponibel für Roth oder Violett. S_1 enthielt nun weiter einen linearen Spalt w von der Länge der drei ersten zusammen, bestimmt, das in die Mischungen eingehende Weiss zu liefern. Hierzu war seitlich von dem Prisma P, ganz in der Nähe desselben, ein Spiegel so aufgestellt, dass die von w ausgegangenen Lichtstrahlen erst an ihm, dann an der zweiten brechenden Fläche des Prisma reflectirt wurden. Auf dem Schirme S_2 zeigte sich ausser den drei Spectren — ein Schirm, senkrecht zu S_1 , verhinderte, dass w auf S_2 ein viertes Spectrum erzeugte — ein lineares weisses Bild von einer Höhe, die gleich ist der Summe der Breiten jener drei. Durch passende Lage des Spiegels wurde dieses weisse Bild mit den Linien C und F, welche dann seine beiden Enden bildeten, zur Deckung gebracht.

Im Versuche waren zunächst das Grün der Linie C und ein weisses lineares Bild von der Grösse dieser Linie und sie deckend (hiezuhier war w von oben her hinreichend zugedeckt) benutzt; sie bildeten, durch ein Prisma schwach abgelenkt, das eine Farbenfeld. Mit ihnen zusammen fiel das Grün des mittleren Spectrum σ_3 durch den Spalt s_2'' , während s_2' auf das Roth desselben Spectrum eigestellt war. Waren Farbentöne, Helligkeiten und Sättigungsgrade der Felder gleichgemacht, so wurde s_2' an die Stelle von s_2'' gebracht, was sich durch Beobachtung des linearen weissen Bildes oder einer der Linien C und F sehr genau erreichen liess; s_2' und s_1'' erhielten gleiche Breiten mit s_2'' und s_1' . Wurde dann noch w ebenso weit von unten her zugedeckt, wie vorher von oben und s_2'' auf Violett eingestellt, so waren die beiden andern Felder gewonnen. Das zusammengesetzte Blaugrün wurde dem mit Weiss gemischten in

Ton und Helligkeit möglichst ähnlich gemacht, und hierauf die Sättigung beider verglichen. Im Allgemeinen fällt diese nicht gleich aus. Der Ton des Grün und die Menge des Weiss werden alsdann zweckentsprechend geändert und Gleichheit der Felder hergestellt. Die Controlle muss jetzt in umgekehrter Reihenfolge mit der ersten Mischung angestellt und das Verfahren so lange fortgesetzt werden, bis für dasselbe Grün und dieselbe Menge Weiss beide Paare der Mischfelder Gleichheit der Sättigung zeigen.

War dies erreicht, so wurden die dunkeln Linien des bestimmten grünen Tones mikroskopisch beobachtet; sie lassen sich, wenn s_1 “ sorgfältig symmetrisch verengert worden war, im Spalte des Schirmes S_2 mit grosser Deutlichkeit wahrnehmen. Wenn zum Voraus alle Linien, die bei sehr weitem Spalte in S_2 zwischen C und F erkannt werden konnten, aufgezeichnet waren, so war die sichtbare Gruppe sofort bestimmt. Ausserdem wurde durch eine kleine, sich leicht ergebende Reihe von Ablesungen an der Scala des Schirmes der Ort ermittelt, den der Spalt in dem Zwischenraume zwischen den Linien C und F einnahm. Mit Hülfe dieser Beobachtungen liess sich die Liniengruppe des grünen Tones in den Kirchhoff'schen Tafeln mit Sicherheit wiederfinden. Dann konnten den Tabellen von Ditscheiner*) die Wellenlängen für dieselben sofort entnommen werden.

Das System von Linien, das ich zwischen C und F wahrnahm, habe ich in Fig. 3 wiederzugeben versucht; die relative Lage der Linien ist dieselbe wie in der Tafel II. des Herrn Kirchhoff, nur sind die Entfernungen im Verhältniss von 10:1 reducirt. Die specielle Gruppe, die ich in drei Versuchen bis auf sehr geringe Abweichungen der Lage immer im Spalte erkannte, ist

*) Ditscheiner, Wiener Sitzgsber. 1864. L. II. 296.

mit Gr. bezeichnet. Diese drei Linienpaare entsprechen den folgenden Linien der Kirchhoff'schen Tabelle II.:

1867.1	1834.3 und 1833.4	1750.4
1854.9	1821.4 und 1818.7	1737.7

Die Tabellen von Ditscheiner ergeben dafür folgende Wellenlängen in hunderttausendtel Millimeter:

5017	5040	5097
5027	—	5109

Das Mittel aus dem ersten und letzten dieser Werthe, das als wahrscheinlicher Werth der gesuchten Wellenlänge des Grün dienen mag, ist 5063.

Die Abstände dieses Ortes von den Linien C und F sind 108 und 203 Wellenlängen, weichen also kaum erheblich von dem Verhältniss 1:2 ab. Ich habe schon hervorgehoben, dass dieser Werth nur als ein näherungsweise bestimmter betrachtet werden darf.

Ueber die Abhängigkeit der Fluorescenz der Retina von der Wellenlänge und Intensität des auffallenden Lichtes.

Für die qualitativen Mischungsversuche werden von den Veränderungen, welche die Lichtstrahlen im Auge noch vor ihrer erregenden Wirkung erleiden, von besonderer Wichtigkeit die Aenderungen ihrer Brechbarkeit. Das Studium der Fluorescenz im Auge muss daher mit zu den Grundlagen der Farbentheorie gerechnet werden. Wie bekannt zeigen sowohl Cornea und Linse als Retina Fluorescenz; es ist aber klar, dass nur die Fluorescenz der letzteren von wesentlichem Einflusse auf die Resultate der Farbenmischung sein kann. Denn die von der Linse und Hornhaut ausgesandten Strahlen werden sich in diffuser Weise über die ganze Retina verbreiten und dürfen so dem Eigenlicht derselben zugezählt werden. Der Einfluss des letzteren muss aber auf alle Farben ein gleichmässiger sein.

Zu grösserer Einfachheit der Darstellung nenne ich im Folgenden: Fluorescenzlicht diejenige eigenthümliche Farbenercheinung, welche beim Auffallen eines homogenen Lichtbüschels auf eine fluorescirende Substanz dem blossen Auge sich darbietet; Fluorescenzspectrum die prismatisch zerlegte Farbenercheinung, die durch das Auffallen eines homogenen Lichtbüschels auf die fluorescirende Substanz neu erzeugt ist. Die Helligkeit und Farbe des Fluorescenzlichtes sowohl als die Mannigfaltigkeit des Fluorescenzspectrum und die Intensität jedes ihrer Elemente sind Functionen der Wellenlänge und der Intensität des auffallenden Lichtes. Diese Abhängigkeit soll für die Retina untersucht werden.

Die Untersuchung geschah an der herausgeschnittenen möglichst frischen Retina nach einer Methode, welche der von Herrn Helmholtz angewandten*) sehr ähnlich ist. Wie überall, wo es sich um Erkennen sehr geringer Grade von Fluorescenz handelt, musste auf die Retina Licht von nur einer bestimmten Brechbarkeit, dieses aber in möglichst grosser Stärke, auffallen, was die Herstellung eines vollkommen homogenen und möglichst intensiven Strahlenbüschels bei vollkommener Ablendung allen diffusen Lichtes von der Retina forderte. Damit war dann auch von selbst die für die specielle Richtung der Untersuchung geeignete Methode gegeben. Weiter musste jede Spur falsch dispergirten weissen Lichtes vermieden und einer Täuschung durch fremde Fluorescenz vorgebeugt sein. Ich suchte diesen Forderungen in folgender Weise nachzukommen. (Fig 2).

Vom Heliostaten H reflectirt fielen die Sonnenstrahlen durch einen beliebig zu erweiternden verticalen Spalt s_1 von 4 Cent. Höhe in 3 Meter Entfernung auf eine achromatische Linse L von 40 Cm. Brennweite. In der Mitte

*) Helmholtz, Pogg. Ann. 94. 205.

der Brennweite nahm sie das Münchener Flintglasprisma P von 60° brechendem Winkel, die Kante vertical und im Minimum der Ablenkung auf. Das von ihm entworfene spectrale Bild des Spaltes s, fiel auf den von Herrn Helmholtz construirten Schirm S, es war sehr hell, aber unrein, ja, in der Mitte in kleiner Ausdehnung ganz weiss. Von diesem Spectrum wurde jetzt ein kleiner Theil, einer bestimmten Brechbarkeit entsprechend, herausgegriffen, um ihm durch eine zweite Zerlegung die Homogenität zu verschaffen. Durch den einen Spalt S (er soll durch denselben Buchstaben bezeichnet sein wie der Schirm) fiel nämlich dieser Theil in 25 Cm. Entfernung auf ein verticales Quarzprisma p, von 50° brechendem Winkel. Unmittelbar hinter ihm stehend, entwarf eine achromatische Linse l von 5 Cm. Brennweite ein spectrales Bild von S auf einem schwarzen Schirm s_2 aus Carton. Dieses Spectrum zeigte den sehr hellen linearen Streifen, der der gewählten Farbe entsprach und jetzt als homogen betrachtet werden konnte; daran schloss sich die Reihe der schwächeren Farben, die von der ursprünglichen Beimischung von Weiss zu jenem Streifen herrührte. Der Schirm s_2 enthielt einen verticalen, beliebig zu erweiternden Spalt. Ueber seine Rückseite wurde die Netzhaut in nicht zu dicker Lage ausgebreitet; sie blieb meistens ohne Weiteres auch in dieser verticalen Lage sofort an ihm haften. Dem Spalte wurde eine solche Lage gegeben, dass nur die intensive gewählte Farbe durch ihn auf die Netzhaut fiel. Auf der letzteren war dann von der Rückseite aus nur dieses eine helle Bild zu sehen. Es wurde durch ein zweites Quarzprisma p_2 nicht in der Richtung des direct durchgehenden Lichtes betrachtet. Die brechende Kante dieses Prisma kann horizontal nach der Methode von Stokes, oder, was vielleicht hier noch passender ist, ebenfalls vertical wie diejenige der übrigen gestellt sein.

Die Versuche waren immer an sehr hellen Sommertagen angestellt. Das Beobachtungszimmer war möglichst verdunkelt, eine Reihe aufgestellter Schirme suchte das noch vorhandene Licht von der Retina abzuhalten. Um dasjenige Licht das in p_1 und l etwa noch diffus zerstreut worden war, fortzuschaffen, war unmittelbar vor dem Schirme s_2 eine blaue Glasplatte B aufgestellt. Durch die besondere Art der Application der Retina war endlich jede Fluorescenz eines Trägers (z. B. von Glasplatten, in deren Wahl man nicht vorsichtig genug sein kann) ausgeschlossen. Die Versuche waren immer an ganz frischen, unmittelbar nach dem Tode des Thieres herausgeschnittenen Rindsaugen angestellt.

Es ist ersichtlich, dass die oben präcis gefasste Aufgabe sich bei der Retina nicht in der Allgemeinheit in genauen Messungen lösen lässt, wie es dort gefordert ist. Es giebt aber einzelne ausgezeichnete Punkte, deren Kenntniss ein vollkommen richtiges Gesamtbild jener Functionen verschafft. Diese suchte ich zu ermitteln.

Zunächst lässt sich die Abhängigkeit des Fluorescenzspectrum von der Wellenlänge des erzeugenden Lichtes im Allgemeinen leicht auf folgende Weise demonstrieren. Der Spalt S steht zunächst im Violett, etwa in der Mitte zwischen den Linien G und H . Man sieht durch p_2 ein helles violettes Bild, an welches sich ein zwar schwaches, aber doch sehr deutliches Spectrum anreicht, das mit Ausnahme des Violett sämtliche Farben des gewöhnlichen prismatischen Sonnenspectrum zeigt. Wird die blaue Glasplatte B unmittelbar vor das Prisma p_2 gehalten, so verschwindet das Fluorescenzspectrum vollständig. — Jetzt wird der Spalt S durch Drehen der verticalen Schraube des entsprechenden Schlittens oder, bei grösseren Excursionen durch Verschiebung des ganzen Schirmes in seiner eigenen Ebene gegen die weniger brechbaren Strahlen gerückt, die blaue Glasplatte steht

wieder vor der Retina. Sofort wird das Fluorescenzspectrum sichtlich schwächer, und wenn S im weniger brechbaren Blau angekommen ist, so verschwindet es gänzlich. Man sieht in diesem Falle nur das helle blaue Bild des primitiven Spectrum. Für das Indigo ist dagegen das Fluorescenzspectrum bei vollkommen richtiger Accommodation noch mit Sicherheit zu erkennen; es ist auch da ganz vollständig. — Wird nun der Spalt S wieder in's Violett gerückt, so ist das Fluorescenzspectrum wieder in relativ starker Helligkeit da. Dieses Wechselspiel lässt sich beliebig wiederholen. Es geht daraus hervor, dass bei den betreffenden Intensitätsverhältnissen des Versuches ($s_1 = 6$ mm, $S = 2,5$ mm) die Retina relativ starke Fluorescenz zeigt im violetten Lichte, nur sehr schwache im Indigo, keine oder wenigstens kaum erkennbare Spuren im Cyan.

Wird andererseits der Spalt S von der Mitte zwischen G und H gegen das Ende des Violett gerückt, so nimmt die Fluorescenz ebenfalls sehr ab, um für die ultravioletten Strahlen eine minimale zu werden. Diese Beobachtungen mit den erstern zusammengehalten ergeben, dass für das Sonnenspectrum die Fluorescenz der Retina zwischen G und H ein Maximum erreicht, und nach beiden Seiten sowohl gegen die weniger brechbaren als gegen die brechbareren Strahlen hin rasch abnimmt.

Ich suchte nun näher zu bestimmen, für welche Wellenlänge des Sonnenspectrum die Fluorescenz der Retina eben merklich zu werden anfangt. Hiezu stellte ich den Spalt S zunächst wieder in das Violett, ich sah dann ganz deutlich das Fluorescenzspectrum. Hierauf verschob ich S so lange in das Blau, bis ich bei der grössten Aufmerksamkeit noch die geringste Spur von dem Fluorescenzspectrum wahrnahm. Wurde dann der Spalt S mittelst der verticalen Schraube noch ein wenig gegen

das weniger brechbare Ende verschoben, so verschwand auch diese letzte Spur. Sie wurde jedoch wieder hergestellt und hierauf, analog wie bei der Bestimmung der ausgezeichneten Wellenlänge des Grün, durch einige Ablesungen an der Scala des Schlittens der Ort bestimmt, welchen der Spalt im Spectrum einnahm. Macht man, was bei der hier überall erreichbaren Genauigkeit wohl erlaubt ist, die Voraussetzung, dass beim Uebergange von F nach G die Aenderung der Wellenlänge proportional der Entfernung von F erfolgt, so lässt sich aus den Wellenlängen dieser Linien leicht diejenige jenes Ortes finden.

Die Messungen wurden bei derselben Breite (6 mm.) des Spaltes s_1 an einem ganz frischen Stücke Retina so rasch hinter einander ausgeführt, als es die Sorgfalt, mit welcher Einstellung und Ablesung geschehen mussten, erlaubte. In der von ihnen in Anspruch genommenen Zeit kommen weder die Eigenschaften der Retina (durch Austrocknung), noch die Helligkeit des Sonnenspectrum (durch Aenderung des Standes der Sonne) sich wesentlich geändert haben. So fand ich in drei Wiederholungen die Wellenlänge für den Anfang der Fluorescenz (in Hunderttausendtel Millimetern):

4481; 4450; 4452.

Eine weitere Versuchsreihe bezog sich auf die Abhängigkeit des retinalen Fluorescenzspectrum von der Helligkeit des Sonnenspectrum. Es leuchtet ein, dass bei der obigen Anordnung der Versuche eine Variation der Helligkeit des Sonnenspectrum in eben so einfacher als genauer Weise durch Aenderung der Breite des Spaltes s_1 erzielt werden konnte. Da das Fluorescenzspectrum, wie oben erwähnt, auch bei den geringsten eigenen Helligkeiten ein vollständiges war, so war jetzt weiter nicht auf eine Aenderung seiner Mannigfaltigkeit zu achten. Den Einfluss der Helligkeit des Sonnenspec-

trum auf seine Intensität glaubte ich am Passendsten in folgender Weise darzulegen.

Der Spalt s_1 hat zunächst eine geringe Breite; S wird so lange gegen das weniger brechbare Blau verschoben, bis das Fluorescenzspectrum eben verschwindet. Nun wird s_1 weiter gemacht; dann tritt sofort das Fluorescenzspectrum deutlich hervor, während es bei Reduction der Breite von s_1 auf den ursprünglichen Werth wieder verschwindet. Die Helligkeit des Fluorescenzspectrum wächst also mit der Intensität des Sonnenspectrum. Mit dem Wachsen des letzteren rückt der Ort, wo das Fluorescenzspectrum eben merklich wird, in dem Sonnenspectrum gegen das weniger brechbare Ende.

Um eine Anschauung davon zu gewinnen, wie viel sich der Anfang der Fluorescenz bei bestimmter Aenderung der Intensität des Sonnenlichtes in der Scala seiner Wellenlängen verschiebt, war nur für eine Anzahl von verschiedenen Breiten des Spaltes s_1 der Ort des Anfanges der Fluorescenz zu bestimmen. Ich habe solche Messungen in der oben beschriebenen Weise ausgeführt für die Spaltbreiten 3, 6, 9 mm. Die Beobachtungen waren wieder an demselben Stücke Retina und möglichst rasch nach einander ausgeführt. Es ergaben sich in der Reihenfolge jener Breiten folgende Wellenlängen für den Anfang der Fluorescenz:

4291; 4514; 4646.

Bei der ersten Erweiterung des Spaltes s_1 rückte also der Ort des Anfanges der Fluorescenz um 223, bei der zweiten ebenso grossen um 132 Einheiten der Wellenlänge gegen die grösseren Wellenlängen.

Die Helligkeit des Fluorescenzlichtes erreicht zwischen G und H ein Maximum und nimmt sowohl gegen das Blau als gegen das

violette Ende rasch ab. Sie wächst mit der Helligkeit des erregenden Lichtes.

Die Mannigfaltigkeit seiner Strahlen umfasst alle Strahlen von der Wellenlänge des erregenden Lichtes bis zum Roth. Das Fluorescenzlicht ist daher weisslich.

Der letzte Punkt scheint eine kleine Abweichung von den Resultaten der Untersuchungen, die Herr Helmholtz über die Fluorescenz im ultravioletten Lichte*) ausführte, darzubieten. Im Fluorescenzspectrum der ultravioletten Strahlen fehlt nämlich das Roth. Ursache dieser Verschiedenheit mag die sehr viel geringere Intensität des ultravioletten Lichtes gegenüber der Intensität der oben angewandten Strahlen sein. Dies musste einmal eine geringere Intensität des Fluorescenzlichtes bedingen, als es hier der Fall war. Weiter fehlte das sehr helle Bild des primitiven Spectrum, das sich hier überall an das Fluorescenzspectrum anschloss und daher ein relatives Zurücktreten des Grün und Blau gegenüber dem Roth bedingen konnte. Damit war in den Versuchen des Herrn Helmholtz die Möglichkeit gegeben, noch grüne und blaue Strahlen wahrzunehmen, wo keine rothen mehr vorhanden waren, was in den meinigen nicht der Fall war. Der Ausdruck der thatsächlichen Verhältnisse mag daher der sein: Wenn die Helligkeit des retinalen Fluorescenzlichtes einen gewissen Grad erreicht, so sind alle Strahlen in ihm enthalten von der erregenden Farbe bis zum Roth; erreicht sie jenen Grad nicht, so fehlt das Roth. Dort muss daher die Farbe desselben eine weissliche, hier eine bläulichgrüne sein.

Absorptionserscheinungen im Auge müssen namentlich auf quantitative Bestimmungen in Farbmischungen von grösstem Einfluss werden. Sie mögen

*) Helmholtz, Pogg. Ann. 94. 205.

daher hier wenigstens angedeutet werden. Bekanntlich hat schon Herr Stokes in seiner berühmten Abhandlung über die Fluorescenz vielfach aufmerksam gemacht auf den Zusammenhang zwischen Fluorescenz und Absorption. Die Intensitäten beider entsprechen sich stets, beide erreichen in demselben Orte des primären Spectrum ihr Maximum*). Daraus folgt zunächst, dass in der Retina eine Absorption der Lichtstrahlen auftritt, die für das Violett eine maximale ist.

Bei Hornhaut und Linse ist für das Violett eine starke Fluorescenz nachgewiesen**). Für das Blau ist sie, wenigstens für grössere Intensität ebenfalls sicher. Man überzeugt sich davon leicht an seinem eigenen Auge wie für das Violett. Fällt ein sehr helles blaues Strahlenbündel von der Seite her auf die Cornea, so verbreitet sich im Gesichtsfelde ein weisslich grüner Schimmer, während ein zweiter Beobachter die Linse in ähnlichem Lichte erblickt. Daraus ergibt sich eine Absorption der blauen und violetten Strahlen durch Hornhaut und Linse von selber.

Die schon erwähnte eigenthümliche Absorption der blaugrünen Strahlen im Pigmente des gelben Fleckes ist neuerdings von den Herrn Manwell, Helmholtz und Schultze hervorgehoben worden.

Die hier hervorgehobenen Sätze gewinnen für die Theorie der Farbenmischung Wichtigkeit. Vor Allem ist hervorzuheben, dass im Auge des Beobachters die Fluorescenzerscheinungen unzweifelhaft schon bei viel geringeren Intensitäten des auf die Retina fallenden Lichtes, als die obigen sind, einen solchen Grad erreichen, dass sie von Einfluss sein müssen auf die durch jenes Licht bewirkte Empfindung. Es wurde schon angedeutet,

*) Stokes, Ueber die Veränderung der Brechbarkeit des Lichtes. Phil. Trans. 1852 (II.) Pogg. Ann. Ergzb. IV. 227.

***) Helmholtz, phys. Optik. 233. 267.

dass in den obigen Versuchen die allerschwächsten Grade der Fluorescenz, die das Auge des Beobachters an einer präparirten Netzhaut wahrzunehmen im Stande ist, wahrscheinlich nicht beobachtet wurden. Aber wäre auch dieser Grad erreicht gewesen, so bliebe noch zu erwägen, dass die Intensität des Fluorescenzlichtes durch Zusammensetzung der Intensitäten der einzelnen Farben im Fluorescenzspectrum entsteht, und dass die Strahlen des letzteren von der präparirten Retina aus bis auf die Retina des Beobachters ein sehr complicirtes System von Medien zu durchlaufen haben. Und dem zerlegenden Prisma sowohl, als in den Medien des Auges ist dabei reichliche Gelegenheit zu Reflexion und Absorption und damit zur Reduction der kleinen Lichtmasse unter ihren Schwellenwerth geboten. Dies alles fällt bei der Fluorescenz im eigenen Auge weg.

Die Fluorescenz der Retina wirft sofort neues Licht auf die Thatsache, dass unter allen Theilen des Spectrum der Farbenton des violetten (und übervioletten) Lichtes am Veränderlichsten ist bei veränderter Lichtstärke. Insbesondere dürfte beim Violett und Blau der Uebergang in Weiss bei gesteigerter Intensität durch die Fluorescenz unterstützt sein. Und in der That, er zeigt sich gerade bei diesen Farben am aller Auffallendsten, während doch der bevorzugte Uebergang einer Grundfarbe in Weiss sehr sonderbar erscheinen muss.

Es sind jetzt die obigen qualitativen Mischungsversuche zu beleuchten. Wie bereits angemerkt, kann bei ihnen von den Absorptionserscheinungen ganz abgesehen werden, denn diese können ja nur auf die Mengen der Farben Einfluss haben, die gar nicht bestimmt wurden. Fluorescenzerscheinungen können aber wiederum nur in den Fällen, wo Blau oder Violett in die Mischung getreten sind, vermuthet werden. Hier treten nun zwei Hauptfälle auf, die Mischungen von Blaugrün (F) und Violett zu

spectralem Blau und von Roth mit Indigo zu einem Violett, das oft fast ebenso gesättigt wie das spectrale erscheint.

Es sollen zunächst das homogene und gemischte Blau betrachtet werden. Hier ist die Helligkeit des spectralen Blau zwar grösser als die des Violett. Für das Violett ist aber die Fluorescenz relativ grösser, ihre absolute Stärke darf also wohl als nahe gleich der des Blau angenommen werden. Dann ist beiden Farbenempfindungen Blau Weiss in gleichem Maasse beigemischt und ihre Gleichheit bedingt daher auch Gleichheit der Sättigung der Farbenempfindungen, die wir ohne Fluorescenz haben würden. — Liegen aber ein homogenes und gemischtes Violett vor, so verhält sich alles umgekehrt. Die Helligkeit des Violett ist grösser als die des Blau, und das Blau hat eine schwächere relative Fluorescenz. Dies bedingt, dass dem gemischten Violett sehr wenig Weiss beigemischt ist, während das homogene durch solches sehr verändert sein kann. Hier also wird die Mischfarbe verglichen mit einer schon weisslich gemachten Farbe. Wenn sie daher dieser gleich ist, so muss dies als ein Beweiss dafür angesehen werden, dass die Mischfarbe weisslich ist. Wenn sie aber, wie ich wirklich beobachtete, noch weniger gesättigt ist als die homogene Farbe, so ist dies ein Beweis a fortiori für die Beimischung von Weiss.

Nach dieser Discussion der Fluorescenz der Retina, können die oben mitgetheilten Beobachtungen im Verbande mit den übrigen Thatsachen der Mischung der Spectralfarben in folgendem Mischungsgesetze ausgedrückt werden:

1) Es gibt im Spectrum zwei Gebiete (Roth bis b und Violett bis F), innerhalb deren jede Combination von zwei Farben in stetig sich änderndem Verhältnisse ihrer Mengen Mischfarben gibt, die einem stetigen Uebergange der Farbentöne von der einen zur andern Farbe im Spectrum entsprechen.

2) Es gibt im Spectrum Combinationen von zwei Farben, welche für ein stetig sich änderndes Verhältniss ihrer Mengen, Mischfarben liefern, die einer stetigen Aenderung der Sättigung der einen und andern Farbe bis zu vollem Weiss entsprechen (Complementärfarben).

3) Alle übrigen Combinationen zweier Farben des Spectrum in allen möglichen Verhältnissen der Mengen geben, wenn die Farben weniger weit von einander entfernt sind als Complementärfarben, die zwischen ihnen liegenden Farben des Spectrum, wenn sie aber weiter von einander abstehen als Complementärfarben, die Farben zwischen jeder von ihnen und dem entsprechenden Ende des Spectrum und Purpur — je in variabler Sättigung.

Eine Anschauung von der Genauigkeit dieses Gesetzes gewährt ein Blick auf die physikalischen und physiologischen Leistungen der Apparate. Die Forderung an die im Versuche benutzten Instrumente ist, homogene Farben für die Mischung zu liefern. Die Reinheit einer Farbe verlangt*) zunächst, dass der ihr entsprechende austretende und einfallende Strahl gleiche Winkel mit den Flächen des Prisma bilden. Dies ist nur für eine Farbe möglich, während in den Mischungen immer eine Anzahl von Farben, welche dasselbe Prisma lieferte, benutzt wurden. Weiter ist strenger Parallelismus der Strahlen mit dem Hauptschnitte des Prisma gefordert. Im Versuche war durch die mässige Entfernung (3 Meter) des Prisma von den Spalten immer ein endlicher Oeffnungswinkel der Strahlenbüschel bedingt. Endlich müssen für die Homogenität der Farben nicht nur die Lichtquellen linear sein, sondern auch die Wellenlängen der Farben einem verschwindend kleinen Intervalle $\delta\lambda$ ange-

*) Vergl. Helmholtz, physiol. Optik 249 ff.

hören, d. h. alle Spalten müssen linear sein. Die Spalten in S_1 hatten oft eine Breite von 10—15 mm., die in S_2 eine solche von 1—1,5 mm. Es fragt sich daher, welchen Einfluss muss die durch diese Umstände bedingte Unreinheit der Farben haben? Da die Verhältnisse des Versuches wenigstens nahe Annäherungen an die strengen Forderungen sind, so kann schon objectiv die Unreinheit der Farben nur gering sein. Relativ zu den Leistungen des Auges im Erkennen von Unterschieden der Farben, darf sie aber wohl als verschwindend klein betrachtet werden.

Die Kenntniss der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für Sättigungsgrade müsste zu einer numerischen Bestimmung der Genauigkeit der obigen Beobachtungen über die Farbmischung, insbesondere der Bestimmung der Grenzen des Grün und des Ortes seines ausgezeichneten Tones führen. Die vorhandenen Versuche über dieselbe*) ermöglichen zwar bei dem Mangel einer Vergleichung der Helligkeiten verschiedener Farben eine solche Berechnung nicht. So viel sich aber aus den Angaben des Herrn Aubert übersehen lässt, ist die Leistungsfähigkeit des Auges in dieser Beziehung beträchtlich. Er fand für eine rotirende, intensiv farbige Scheibe weniger als einen Grad Weiss als hinreichend, um eine merkliche Aenderung in der Sättigung hervorzurufen. Aehnliche Versuche führten mich zu analogen Resultaten. Daher mag den Mischungsversuchen die volle Genauigkeit beigelegt werden, die an der Grundlage einer Theorie der Farben gesucht werden muss.

2. Ueber die räumliche Darstellung der Mannigfaltigkeit der Farben, der Farbentafel.

Aus den experimentell gewonnenen Sätzen soll nun die geometrische Farbentafel abgeleitet werden.

*) Aubert, Netzhaut 144 ff.

Zunächst ist nach der Analyse der Veränderungen des Lichtes im Auge einleuchtend, dass zu unterscheiden sind eine Farbentafel, welche die Farben wiedergibt, wie sie dem Auge erscheinen, und eine solche, welche sie so darstellt, wie sie ohne die im Auge vorhandenen Veränderungen des Lichtes erscheinen würden. In der That alle Farben, deren Strahlen Fluorescenz in der Retina erregen, erscheinen zu wenig gesättigt, sie müssen daher eigentlich in grösseren Abstand vom Weiss gerückt werden, als die Beobachtung ergibt. Alle Farben, deren Strahlen merklich absorbirt werden, erscheinen bei einer gewissen objectiven Lichtstärke relativ zu wenig hell und sind also ebenfalls in zu geringer Sättigung in die Tafel eingeführt, auch sie müssen daher eine grössere Distanz vom Weiss erhalten. Es soll zunächst die den Beobachtungen unmittelbar entsprechende Form gefunden werden.

Es geht aus dem Mischungsgesetze hervor, dass die Farbentafel ausgezeichnet sein wird, ausser durch die Lage je zweier Complementärfarben auf einer durch den Ort des Weiss gehenden Geraden, noch durch die weitere Eigenthümlichkeit, dass der geometrische Ort aller Farben vom Roth bis zur Linie b und aller vom Violett bis zur Linie F je eine Gerade ist. Diese Geraden sind verbunden an ihren innern Enden durch eine kurze bogenförmig gekrümmte Linie, das Gebiet des Grün, an ihren äussern Enden durch eine dritte Gerade, den geometrischen Ort der gesättigten Purpurtöne.

Dieser allgemeine Charakter der Farbencurve muss sich in allen Formen wiederfinden. Ihre nähere Gestalt hängt bekanntlich ab von der Wahl von vier Parametern und kann daher durch gewisse Bedingungen gewisse Eigenthümlichkeiten annehmen. Diese sind freilich nicht ganz beliebig wählbar. So ist es beispielsweise ganz unmöglich, der Farbencurve die Kreisform von Newton*)

*) Newton, Optice lib I., pars II. prop. VI.

zu geben; denn diese implicirt, dass je zwei endlich von einander entfernte Farben Mischfarben erzeugen, die weniger gesättigt sind als die dazwischen liegenden Töne des Spectrum.

Es sollen nach dem Vorgange des Herrn Helmholtz die Einheiten der Farben so gewählt sein, dass ihre Mengen gleich sind, wenn sie dem Auge gleich hell erscheinen*). Dann wird die Curve der Farben sehr nahe die von Herrn Helmholtz gegebene Form annehmen, nur ihre beiden Schenkel werden statt leicht gebogen, gerade ausfallen. Die äussern Grenzen dieser Geraden sind gebildet von dem äussersten Roth und dem brechbarsten Tone des Violett, der noch keine Umkehr zum Blau zeigt; die innern Grenzen fallen nach den obigen Bestimmungen mit den Linien b und F zusammen. Der Scheitel des sie verbindenden Bogens darf als identisch betrachtet werden mit der oben bestimmten Wellenlänge des Grün, die mit Roth und Violett gleiche Sättigungsverminderung der Mischfarbe gab: 5063.

Die angedeutete allgemeine Form der Tafel darf wohl mit Recht als eine allgemeine Eigenschaft des normalen Auges angesehen werden. Die specielleren Momente derselben bleiben immer Eigenthümlichkeiten des grad beobachtenden Auges. Wenn ich mir erlaube, einige Bemerkungen über diesen nähern Verlauf beizufügen, so können sie daher im Allgemeinen nur individuelle Gültigkeit haben.

Die relative Lage der ausgezeichneten Punkte der Farbencurve suchte ich durch die Ermittlung der complementären Wellenlängen zu Roth und Violett näher zu bestimmen. Analog zu den früheren Versuchen stellte ich neben einander zwei weisse Felder her, das eine aus den zwei complementären Farben des Spectrum gebildet, das andere von unzerlegtem Sonnenlichte gewonnen. Im

*) Helmholtz, Pogg. Ann. 94, 24. Optik 288.

Schirme S_1 wurden beide Spalten benutzt. Sie lieferten zwei Spectren auf S_2 , denen leicht eine solche relative Lage gegeben werden konnte, dass die beiden zum Voraus annähernd bekannten Complementärfarben durch den einen Spalt in S_2 fallen, während der andere für das Weiss disponibel blieb. Letzteres wurde, wie oben, von einem Spalt in S_1 durch doppelte Reflexion seiner Strahlen an einem seitlichen Spiegel und an der hintern brechenden Fläche des Prisma gewonnen. Jener Spalt in S_2 wurde nun genauer auf eine dunkle Linie im Roth oder Violett eingestellt. Der die Complementärfarbe liefernde Spalt in S_1 war dann so lange zu verschieben, bis die beiden weissen Felder möglichst gleich ausfielen. War dies erreicht, so wurden die dunkeln Linien der Complementärfarben beobachtet und aus ihnen wie oben die Wellenlänge der Farbe abgeleitet.

Die Bestimmungen zeigten bei Wiederholungen sehr gute Uebereinstimmung für jedes einzelne Auge. Dagegen stellte sich durchweg ein kleiner Unterschied für dieselbe Bestimmung bei beiden Augen ein, der zwar gering, aber doch immer grösser als die Schwankungen der Werthe für jedes einzelne Auge, ausfiel. Die folgende Tabelle gibt die Resultate meiner Messungen. An der rothen Grenze des Spectrum konnte ich wegen zu rasch sinkender Helligkeit nicht über die Linie C hinausgehen; am violetten Ende war aus gleicher Ursache keine Bestimmung für H möglich; ohne die Spalten zu breit zu machen konnte ich hier die von Herrn Ditscheiner mit B bezeichnete Linie nicht überschreiten. Ich wählte daher geradezu C und B als die Töne des Roth und Violett.

Farbe.	Wellenlänge.	Compl. Farbe.	Wellenlänge.	
			links.	rechts.
Roth	C=6556	Blaugrün	4875	4865
Violett	B=4225	Gelb	5591	5608

Diese Werthe weichen beträchtlich von den Messungen des Herrn Helmholtz *) ab und bedingen demgemäss eine etwas andere Lage des Weiss in der Tafel für meine Augen. —

Aus den discutirten ausgezeichneten Punkten der Farbencurve und unter Berücksichtigung der Angaben des Herrn Helmholtz über die relative Sättigung der Farben suchte ich in Fig. 4 die wahrscheinlichste Form dieser Farbentafel zu geben. Als genau ist in ihr jedoch nur die Natur des geometrischen Ortes der Farben von C bis b und von B bis F, sowie der gesättigten Purpurtöne anzusehen; die relativen Lagen aller Farben zu einander und zu Weiss sind rein geschätzt. Eben deswegen können auch die strenge geforderten Reductionen der Orte des Blaugrün und des brechbaren Endes des Spectrum hier von keiner weitem Bedeutung sein. Die Verschiedenheit der Tafeln für meine beiden Augen sind nur gering; sie ergeben sich leicht aus den Unterschieden der Complementärfarben, die für das linke Auge eine kleine Verschiebung des Ortes des Weiss gegen die blauen Töne hin verlangen. —

Herr Maxwell **) hat seine Farbentafel nach dem allgemeinem Princip, welches die Intensitäten der Grundfarben für willkürlich erklärt, construiert; demgemäss musste die Gestalt jener Tafel eine andere sein als die der oben abgeleiteten, insbesondere sind am violetten Ende alle Farbtöne sehr zusammengedrängt. Abgesehen hievon hat nun zwar die Tafel des Herrn Maxwell mit der obigen das gemeinsame, dass auch sie für die Orte zweier Gruppen von Spectralfarben zwei Gerade aufweist. Wesentlich verschieden sind aber die Orte des äussersten Roth und des Indigo in der Nähe einer Geraden, welche das brechbarste Roth mit dem brechbar-

*) Helmholtz, Pogg. Ann. 94. 15. Optik 277.

**) Phil. Trans. 1860. 57.

sten Cyan verbindet. Die Complementärfarben fallen ganz anders aus als die Messungen des Herrn Helmholtz. Der die Geraden verbindende Bogen hat eine weniger brechbare Lage im Spectrum relativ zu dem oben bestimmten. Es ist weder möglich, die Ursachen dieser Unterschiede alle in individuelle Eigenthümlichkeiten der Augen zu verlegen, noch sie in etwaiger Verschiedenheit der Vollkommenheit der Versuche zu suchen. Die Differenzen der Tafeln müssen also auf einer wesentlichen Verschiedenheit der beiden Bestimmungen beruhen.

So viel ich übersehe, kann diese nur die sein: Herr Manwell hat seine Tafel aus quantitativen Bestimmungen von Lichtstärken berechnet, während die oben gegebene aus qualitativen Versuchen gefolgert ist. Daraus folgt zunächst, dass ebensowohl Fluorescenz und Absorption im Auge, als Absorption in Prismen und Linse auf die Resultate seiner Messungen von Einfluss sein mussten. Fluorescenz ist im Violett und Indigo durchweg und bei grösseren Intensitäten auch im Cyanblau wohl zu berücksichtigen. Absorption musste für dieselben Strahlen, die Fluorescenz erregen, für das Blaugrün im gelben Flecke und für das brechbarere Ende des Spectrum in Prismen und Linse vorhanden sein. Nun erfolgt allerdings die Absorption des Lichtes proportional der Stärke des auffallenden und die Einheiten der Grundfarben sind willkürlich wählbar. Daher konnten Absorptionserscheinungen von keinem wesentlichen Einflusse auf die Construction sein. Anders aber die Fluorescenz. Berücksichtigt man diese, so ordnen sich die Orte des Indigo in die Fortsetzung des geometrischen Ortes der Töne von Grün bis Cyan. Nach den Manwell'schen Tafeln wäre das Indigo im spectralen Sättigungsgrade mischbar aus brechbarem Roth und brechbarstem Cyan. Ich habe diesen Versuch mit besonderer Sorgfalt angestellt, es gelang

mir aber nie, auch nur annähernd jenen Sättigungsgrad zu erreichen. Vielleicht ist in den Abweichungen, welche die Töne beider Enden des Spectrum zeigen, auch die von Herrn Manwell selber angedeutete Unsicherheit der Bestimmung zu berücksichtigen, dies dürfte namentlich für den in seinen beiden Tafeln auffallend schwankenden Ort des äussersten Roth gelten.

Die Messungen des Herrn Manwell sind Bestimmungen objectiver Lichtmengen. In der Farbentafel kann aber nur von subjectiver Helligkeit der Intensität der Empfindung, die Rede sein. In dem Falle nun, dass Proportionalität zwischen objectiver und subjectiver Intensität bestände, könnte jene allerdings im Maasse dieser werden. Die Intensität der Empfindung steht aber in einer logarithmischen Abhängigkeit von der Intensität des Reizes, und diese Function ist für verschiedene Farben von verschiedenem Grade. Herr Manwell hat also nicht nur kleine Helligkeiten zu klein und grosse zu gross in die Rechnung eingeführt, beides ist für die verschiedenen Farben ausserdem in verschiedenem Maasse geschehen.

Wenn auch die Discussion dieser Momente in Folge mangelnder Data sich nicht eingehend führen und so ihr Einfluss auf die Construction sich nicht berechnen lässt, so müssen doch die Resultate des unmittelbaren Verfahrens der qualitativen Versuche in ihrem Widerstreite mit den Constructionen des Herrn Manwell als die richtigen angesehen werden.

Aus der Form der Farbentafel lässt sich die nähere Form der Anfangs erwähnten relativen Verschiebungen, welche die Elemente eines Punktsystemes der Mannigfaltigkeit bei seiner Bewegung erfahren, ableiten. Es müssen hiezu Bestimmungen der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges für die Farbentöne und die Sättigungsgrade der Farben des Spectrum benutzt werden. Solche

liegen bis jetzt nur über die Unterscheidung der Farbtöne, ausgeführt von Herrn Mandelstamm*), vor. Es können daher auch nur die auf sie bezüglichen Dehnungen discutirt werden. Wird das Grössenelement des Tonunterschiedes dargestellt durch das Winkelement der Tafel, so lautet die Frage: Welches ist für jeden Ort der Tafel die Grösse dieses Winkelements oder umgekehrt, welchen Werth hat das Winkelement an jedem Orte der Tafel?

Es ist klar, dass in einem gegebenen Orte des Spectrum die Unterschiedsempfindlichkeit für den Ton desselben in Beziehung steht zu dem Sättigungsgrade und der Geschwindigkeit der Sättigungsänderung in ihm. Wird die Unterschiedsempfindlichkeit ε umgekehrt proportional gesetzt der Grösse des Theiles, innerhalb dessen das Auge keinen Unterschied im Farbentone empfindet, so muss in der Farbentafel, wenn σ die Sättigung und ω den Winkel bezeichnen, den das betreffende Element der Farbencurve mit seinem Radius vector bildet, sein:

$$\varepsilon = c \frac{1}{\sigma} \sin \omega$$

wo c eine Constante bedeutet. Ein Blick auf die Tafel zeigt nun, dass im Gelb das Minimum der Sättigung nahe zusammenfällt mit dem Senkrechtstehen des Radius vector zur Curve. Der Punkt, wo die Abweichung von beiden Forderungen am geringsten ist, soll μ heissen; er fällt etwa in die Mitte zwischen D und E. Nach dem Gesagten muss für den ihm entsprechenden Ton die grösste Unterschiedsempfindlichkeit vorhanden sein. Von ihm aus nimmt gegen die Enden des Spectrum die Sättigung stetig zu; ω aber zeigt ein complicirteres Verhalten. Gegen das rothe Ende wird es stetig kleiner, dahin muss daher die Unterschiedsempfindlichkeit continuirlich

*) E. Mandelstamm, Beitrag zur Physiologie der Farben, dieses Archiv XIII, 399.

abnehmen. Gegen die brechbareren Töne hin nimmt ω zuerst ab, wächst dann wieder bis 90° , um nachher in eine stetige Abnahme überzugehen. Somit muss es für diese Abtheilung des Spectrum einen Punct ν geben, wo ein relatives Maximum der Unterschiedsempfindlichkeit existirt, er fällt in die Nähe der Linie F. Von ihm aus muss gegen das Violett hin die Unterschiedsempfindlichkeit stetig abnehmen. Von μ und ν gegen den ausgezeichneten Ton des Grün muss ε gleichzeitig abnehmen, doch im ersten Falle mehr.

Nun ergeben die Versuche, die Herr E. Mandelstamm unter Leitung des Herrn Helmholtz angestellt hat, für die verschiedenen Regionen des Spectrum folgende Verhältnisszahlen der Unterschiedsempfindlichkeit:

Für C	D	$D\frac{1}{2}$	E	E	$b\frac{1}{2}$	F	G
19	465	205	214	400	410	270	

Die Unterschiedsempfindlichkeit für Farbtöne erreicht also zwar bei F ein relatives Maximum, das absolute fällt aber auf D; andererseits ist sie zwar für C minimal, nicht aber auch für G.

Mit diesen thatsächlichen Verhältnissen tritt die Farbentafel nur unter den folgenden Annahmen in Uebereinstimmung. Von D und F erhält gegen μ hin das Winkelement einen immer kleineren Werth; diese Veränderung muss von D gegen μ hin viel rascher ausfallen, als von F gegen μ . Beim Uebergange von F zu G muss relativ zu dem von D zu C das Winkelement einen stetig grösser werdenden Werth annehmen.

Analog hat man auch die Verschiebungen in den die Mengen repräsentirenden Senkrechten zur Tafel abzuleiten.

Denkt man sich in der angedeuteten Weise für jede Ortsbestimmung der Mannigfaltigkeit die Grössenbestimmung ausgeführt, so lassen sich eine Reihe allgemeiner Sätze über die Farben aufstellen. Behält man die Schwer-

punktsconstruction bei, so sind sie identisch mit den Sätzen über die Zusammensetzung paralleler Kräfte. Wählt man die Repraesentation der Farbenintensitäten durch Längen von Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, so sind es diejenigen über die Zusammensetzung der Kräfte überhaupt.

3. Zur physiologischen Farbentheorie.

Die räumliche Darstellung der Mannigfaltigkeit der Farben ist eindeutig bestimmt durch die Wahl der Orte und Einheiten dreier Farben. Dieser Thatsache legte man die objective Bedeutung bei, dass die Mannigfaltigkeit selber eine stetige Reihe von Combinationen dieser Farben in variabelem Verhältnisse ihrer Mengen sei. Letzteres waren die einfachen Farben*). Sollte der Satz nur sagen, dass man sich alle Farben als gewinnbar denken könne aus drei wirklichen Farben, so müsste die Bedingung erfüllt sein, dass die Farbentafel ein genaues Dreieck sei; die Eckpunkte desselben wären dann die Orte der einfachen Farben. Dieses ist nun in der oben construirten Tafel strenge nicht der Fall; die Orte der grünen Töne bilden eine bogenförmig gekrümmte Linie, während allerdings alle übrigen Theile der Farbencurve gerade ausfallen. Die Existenz der einfachen Farben darf daher nur als erste Annäherung zugegeben werden; sie waren Roth, Grün ($\lambda = 5063$) und Violett. — Dass die Tafeln des Herrn Manwell den allmäligen Uebergang der Schenkel im Grün ebenfalls zeigen, ist schon erwähnt; die nur approximativ richtige Annahme der einfachen Farben gilt daher auch

*) Leonardo da Vinci, Trattato della pittura 1651. Cap. LXXI. „Colori semplici dorrandò quelli che non sono composti, ne si possono comporre per via di mistione d'altri colori.“

für sie. Als dritte einfache Farbe scheint aber aus ihr Cyan hervorzugehen; die Ursachen welche diese Verschiedenheit erklären möchten, sind oben ausgeführt, nach jenen Bemerkungen ist Violett als das richtigere Resultat anzusehen.

Sollte der obige Satz aber ein Ausdruck des tatsächlichen Verhaltens der Farben sein, d. h. sollten in Wirklichkeit die Spectralfarben zusammengesetzt sein aus drei qualitativ verschiedenen Lichtarten, so wäre dies zwar auch bei der strengen Nichtexistenz einfacher Farben im obigen Sinne möglich; die neuen einfachen Farben brauchten ja nicht identisch zu sein mit wirklich vorhandenen Farben. Aber dieser Satz dürfte erst auf Grund einer ganz neuen Versuchsreihe ausgesprochen werden. Dass Herr Brewster, welcher diese zu liefern versuchte, irrte, hat Herr Helmholtz nachgewiesen.

Es kann also auch jetzt noch „eine Reduction der Farben auf drei Grundfarben“ immer nur subjective Bedeutung haben, es kann sich nur darum handeln, die Farbenempfindungen auf drei Grundempfindungen zurückzuführen. Setzt man die Thatsachlichkeit dieses Satzes als erwiesen, so ist die nächste Aufgabe, die Natur der Grundfarben zu ermitteln.

Da diese Aufgabe eine Eigenschaft des Auges zum Angelpunkte hat, so verlangt ihre Lösung eine Variation dieser Eigenschaften und kann unter Voraussetzung constanter physiologischer Zustände des Auges nie gewonnen werden. Daraus folgt, dass aus den Mischungsversuchen für das normale Auge allein eine Bestimmung der Grundfarben streng gar nicht möglich ist. In dem besonderen Falle aber, wo die Existenz dreier einfacher Farben sich aus denselben ergibt, sind mit grosser Wahrscheinlichkeit diese auch als die Grundfarben anzusehen. In der That, ist die tatsächliche sensorielle Zusammensetzung der Farben aus drei Grundfarben nachgewiesen und

lassen sich in Wirklichkeit durch Mischung dreier bestimmter Farben die übrigen erhalten, so ist die einfachste Annahme die, dass jene subjective Zusammensetzung diese objectiv mögliche sei; und wenn in Wirklichkeit gewisse Empfindungen nie durch Zusammensetzung erhalten werden können, so berechtigt Nichts anzunehmen, dass sie zusammengesetzt sind. Bindend ist freilich dieser Schluss nicht; auch bei Voraussetzung einfacher Farben könnten immer noch drei Grundfarben angenommen werden, welche gesättigtere Abstufungen solcher Farben wären, die sich aus jenen mischen lassen.

Aus den Mischungsversuchen folgt daher jetzt mit grosser Wahrscheinlichkeit, dass die physiologischen Grundfarben Roth, Grün ($\lambda = 5063$) und Violett sind. Die Sättigungsverminderung, welche das Grün in allen Mischungen bedingt, verlangt aber, dass die Grundfarbe Grün gesättigter sei als das Grün des Spectrum. Die Aenderung des Tones jeder Farbe bei sehr vermehrter Intensität des Lichtes, Ermüdungserscheinungen und gewisse Beobachtungen an Farbenblinden fordern ausserdem, dass alle drei Grundfarben wesentlich gesättigter seien als das Roth und Violett des Spectrum und jenes schon gesättigtere Grün.

Die Annahme von Roth und Grün als Grundfarben ist mit den, aus der Untersuchung Farbenblinder gewonnenen Resultaten in voller Uebereinstimmung. Die dritte Grundfarbe ist durch solche Untersuchungen nicht ermittelt; die Santoninversuche, die einen Ersatz dafür bieten möchten, scheinen für das Violett zu sprechen. Dass das Violett und nicht Blau als dritte Grundfarbe erscheint, hat insofern etwas Auffallendes, als die erstere Empfindung sich schon wieder dem Roth nähert. In dem Umstand aber, dass die Schwingungszahl der violetten Strahlen ungefähr die doppelte ist von der des Roth, die

Ursache eines Mitschwingens der rothen Fasern bei dieser Wellenlänge und darum einen Wahrscheinlichkeitsgrund für das Blau als dritte Grundfarbe zu sehen, scheint mir den experimentell begründeten Ansichten über das Wesen der Nervenerrregung zu widersprechen. Keine der Grundfasern schwingt für die tiefere ultraroth Octave mit; und wie die Consequenzen der Theorie des Mitschwingens mit den Thatsachen stimmen, ist oben angedeutet. Neben Roth und Grün ist Violett von den Begründern der Theorie, Young und Helmholtz, Blau von den Herren Maxwell und Fick angenommen worden*).

Aus der Farbentafel lässt sich das Curvensystem ableiten, welches die Vertheilung der Erregung in den drei Fasergattungen (oder die relativen Intensitäten der drei verschiedenen Erregungsprocesse in derselben Faser) als Function der Wellenlänge im Spectrum darstellt; es muss dabei die Gesammterregung für alle Farbtöne als constant angenommen werden. Abstrahirt man zunächst von der unbekanntem Differenz der Sättigung, welche die Grundfarben Roth und Violett gegenüber den entsprechenden Spectralfarben und die Grundfarbe Grün relativ zu dem Grün zeigt, das eine dem Durchschnitte der Geraden Cb und BF der Tafel (Fig. 4) entsprechende Sättigung hat, so kann man den Verlauf dieser Curven bis auf die Lage der Abscisse annähernd angeben (Fig. 5). In den Tönen C, Gr und B welche den Grundfarben entsprechen, muss je eine der Fasern maximal erregt sein; in Gr ist diese maximale Erregung aber verbunden mit einer kleinen Erregung der beiden andern Fasern. Für die Intervalle Cb und BF ist die Erregung wechselnd auf je zwei Fasern vertheilt, in dem Gebiete CF ist Erregung

*) Young, Lectures I. 439.

Helmholtz, Optik 291.

Maxwell, Trans. 1860. 78.

Fick, Anat. u. Phys. d. Sinnesorg. 292.

in allen dreien vorhanden. Unter Berücksichtigung jener Sättigungsdifferenz ist die Abscisse tiefer (nach C' Gr' B') zu verlegen und die Curve des Roth und Violett von den Punkten b und F an, wo sie in die Richtung CB übergehen, über die übrigen Töne des Spectrum zu verlängern.

Dieses Curvensystem ermöglicht die Ableitung eines zweiten, welches die Vertheilung der elementaren Empfindungsintensitäten bei constanter Gesammt-erregung für die verschiedenen Farbtöne des Spectrum darstellt. Die Untersuchungen der Herren Fechner und Fick machen es nämlich höchst wahrscheinlich, dass die Abhängigkeit, in welcher die Empfindungsintensität von der Nerven-erregung steht, eine logarithmische Function ist. Diese müsste zwar für die verschiedenen Fasergattungen der Retina von verschiedenem Grade sein; doch mag hievon, da die Verhältnisse ja alle nur geschätzte sind, abgesehen werden. Für die mittleren Grade der Gesammt-erregung nehmen dann die Curven für die elementaren Empfindungen ungefähr die in Fig. 6 gegebene Form an und die jedesmalige Summe der elementaren Empfindungen wird durch die stärker gezeichnete Curve angedeutet. Für eine bestimmte Gesammt-erregung nimmt diese Summe also für die Grundfarben die kleinsten, für Gelb und Blau die grössten Werthe an.

Dies führt nun auf einen fundamentalen Punkt der Theorie. Wenn auch nicht gerade angenommen werden darf, dass die Intensität der Farbenempfindung gleich sei der Summe der Intensitäten der elementaren Empfindungen, so ist es andererseits doch unwahrscheinlich, dass diese sehr verschiedenen Summen derselben Farbenintensität entsprechen. Am wahrscheinlichsten ist wohl die Annahme, dass mit der Summe der elementaren Empfindungsintensitäten auch die Intensität der Farbe wächst. Dann lässt sich die gefundene Beziehung auch so aus-

sprechen: Für eine bestimmte Gesamterregung ist die Intensität der Farbenempfindung (die Helligkeit) für die Grundfarben die kleinste, für Gelb und Blau die grösste. Dies entspräche der punktirten Linie der Fig. 6.

Umgekehrt muss jetzt für eine gegebene Intensität der Empfindung (Helligkeit) die grösste Erregung stattfinden, wenn sie einer Grundfarbe angehört, kleinere, wenn sie gemischten zukommt. Wenn die Erregung nur in einer Grundfarbe stattfindet, ist die Empfindung am schwächsten, wenn sie auf zwei gleichmässig vertheilt ist, ist letztere am grössten. Auf alle drei Fasern ausgedehnt folgt für das Weiss, dass es bei einer gegebenen Intensität die kleinste Gesamterregung erfordert.

Es ergeben sich hieraus einige interessante Consequenzen. Bei intermittirender Beleuchtung z. B. muss für das Zustandekommen einer gleichmässigen Empfindung die Summe der Dauer eines hellen und dunkeln Sectors, gleiche Helligkeit vorausgesetzt, für die Grundfarben die grösste sein. Die positiven Nachbilder der Grundfarben müssen am längsten dauern. Wenn die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Nervenirregung mit der Grösse der letzteren wächst, so muss eine Mischfarbe *et. par.* eine grössere Zeit für die Wahrnehmung erfordern, als die Grundfarben. Die experimentelle Untersuchung dieser Punkte muss rückwärts Licht auf die gemachte Hypothese werfen.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich über die Beziehungen zwischen Reiz und Empfindung anstellen; hier finden die Entwicklungen, die Herr Fechner über die Vertheilung der Empfindungsintensitäten macht*), Anwendung. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Constanten in den Functionen, welche die Abhängigkeit der Erregung vom Reiz ausdrücken, für die ver-

*) Fechner, Psychophysik II. 68.

schiedenen FaserGattungen sehr verschieden ausfallen müssen. —

Die physiologische Theorie der Farben führt die Fähigkeit des Auges, in einer Lichtempfindung die drei Qualitäten Farbenton, Sättigung und Helligkeit zu unterscheiden, auf die Unterscheidung von Empfindungsintensitäten allein zurück. Daraus folgt unmittelbar, dass, wenn die Intensität der Empfindung als eine messbare Grösse zugegeben ist, auch die Unterschiede der Farbtöne und Sättigungsgrade messbare Grösse sind. Die begriffliche Messbarkeit der Intensität wurde aber oben hervorgehoben*). Es ist somit die Voraussetzung bewiesen, welche der dargelegten Auffassung der Farben als eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen zu Grunde lag. Interessant ist, dass im Lichte der physiologischen Theorie der Farben die verschiedenen Variablen der Mannigfaltigkeit, ganz wie beim Raume, Grössen derselben Gattung sind.

*) Vergl. Kant, Kritik der reinen Vernunft. p. 146 der Rosenkranz'schen Ausgabe.

Winterthur, im August 1869.



Fig. 1

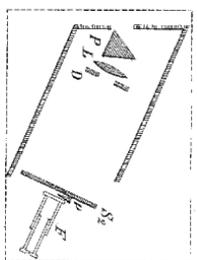


Fig. 1a.

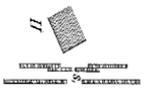


Fig. 2

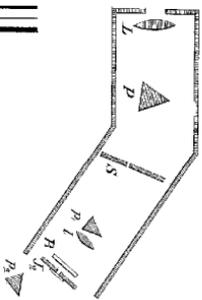


Fig. 2a.



Fig. 2b.



Fig. 1a.

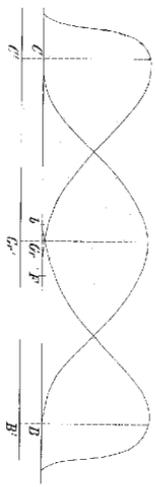


Fig. 5

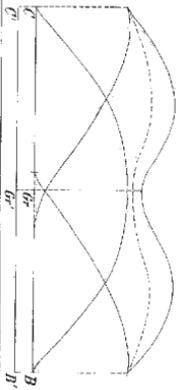


Fig. 6

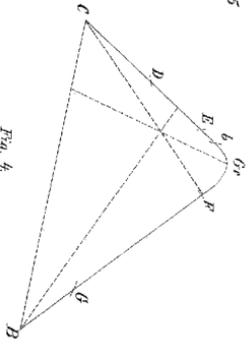


Fig. 4