

älteren Kurven vor, die eine Prüfung unserer Hypothese ermöglicht. *Ruppels* und *Hodgsons* Bilder geben nicht α , sondern den Beiwert $\Omega = \alpha \sqrt{1 - m^2}$ wieder. Der Umkehrpunkt ist bei allen Kurven deutlich ausgeprägt. Nach Gl. 9 vermag Ω im Umkehrpunkt Extremwerte von $\Omega = 1$ anzunehmen. In der Tat kommt Abb. 1 für größere Öffnungsverhältnisse dem nahe.

4. Zusammenfassung. Die Gleichung für die Reibung der Strömung in Drossel-Meßgeräten besitzt den gleichen Aufbau wie die Rohrreibungs-Gleichung. Daraus läßt sich eine Formel für die Durchflußzahl α entwickeln, in der der Reibungseinfluß berücksichtigt wird. Durch Diskutieren dieser Formel werden die aus der Erfahrung bekannten Abhängigkeiten der Durchflußzahl von der Reynoldsschen Zahl erklärt. [RF 404]

Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung

Von W. PRAGER, Göttingen

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen)

1. Vergleich der elastischen Überschreitung der Fließgrenze mit dem Siedeverzug bei Flüssigkeiten – 2. Anwendung auf die Theorie der reinen Biegung – 3. Zusammenfassung

Bei Versuchen über den Eintritt des Fließens in Stäben, welche einem nicht homogenen Spannungszustand unterworfen wurden, beobachteten *Thum* und *Wunderlich*¹⁾ eine Erhöhung der Fließgrenze über diejenige des einfachen Zugversuchs. Das Ausmaß dieser Erhöhung hängt von der Art der Spannungsverteilung über den Stabquerschnitt ab. Bei der Besprechung dieser Ergebnisse bemerken *Thum* und *Wunderlich*, daß die beobachtete Erhöhung der Fließgrenze nicht im Einklang mit den seitherigen Anschauungen über die Fließgefahr steht.

1. Vergleich der elastischen Überschreitung der Fließgrenze mit dem Siedeverzug bei Flüssigkeiten. Im folgenden soll auf eine offenbar noch wenig bekannte Theorie aufmerksam gemacht werden, welche *Nakanishi*²⁾ zur Erklärung der Erhöhung der Fließgrenze bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung entwickelt hat³⁾. Den Ausgangspunkt dieser Theorie bildet die Vermutung, daß beim Zugversuch nach Erreichen der Streckgrenze σ_s die Dehnung der fließenden Stabelemente sprunghaft von der zu σ_s gehörenden elastischen Dehnung $\epsilon_a = \sigma_s/E$ zur Dehnung ϵ_b beim Verfestigungsbeginn übergeht, Abb. 1 (E = Elastizitätsmodul). Man kann sich diese Grundanschauung am einfachsten durch den Vergleich mit den Vorgängen beim Verdampfen einer Flüssigkeit klar machen. Abb. 2 zeigt die Isothermen der Kohlensäure nach *Clausius*⁴⁾, von denen wir eine herausgreifen wollen. Der Teil OA entspricht dem flüssigen, der Teil BC dem gasförmigen Zustand. Durchläuft man ausgehend vom Zustand O die Isotherme, so wird nach Erreichen des Zustands A die Flüssigkeit bei unverändert bleibendem Druck allmählich verdampfen. Der Übergang des einzelnen Flüssigkeitselementes vom flüssigen Zustand A in den gasförmigen Zustand B erfolgt sprunghaft; da aber während des Verdampfens eines Gramms Kohlensäure beide Aggregatzustände vorhanden sind, wächst das Gesamtvolumen stetig von v_a bis v_b . Ebenso kann man sich vorstellen, daß im Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Abb. 1, der Übergang von elastischen Zustand A zum plastischen Zustand am Verfestigungsbeginn B für das einzelne Element sprunghaft erfolgt, obwohl der Zugversuch infolge des gleichzeitigen Vorhandenseins elastischer und plastischer Stabteile ein allmähliches Anwachsen der Gesamtdehnung von ϵ_a bis ϵ_b zeigt⁵⁾. Diese Vorstellung wird durch verschiedene Beobachtungen gestützt. Schon das Auftreten scharf begrenzter plastischer

¹⁾ *A. Thum* u. *F. Wunderlich*, *Forschung* Bd. 3 (1932) S. 261.

²⁾ *F. Nakanishi*, *Reports Aeron. Research Inst. Tokyo*, Bd. 6 (1931) S. 83.

³⁾ Die hier gegebene Darstellung dieser Theorie, welche sich zum Teil von der von *Nakanishi* unterscheidet, wurde vom Verfasser in einer Vorlesung über Plastizitätstheorie an der Universität Göttingen im Sommersemester 1931 vorgetragen.

⁴⁾ Abb. 2 ist entnommen aus *M. Planck*, *Thermodynamik*, Leipzig 1905.

⁵⁾ Diese Auffassung wurde bereits von *J. Muir* u. *D. Binnie*, *Engineering* Bd. 122 (1926) S. 743, vertreten.

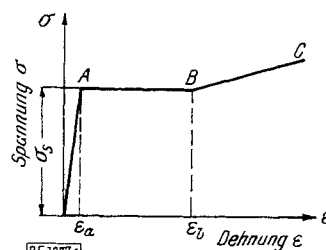


Abb. 1. Schematisches Spannungs-Dehnungsdiagramm für Stahl

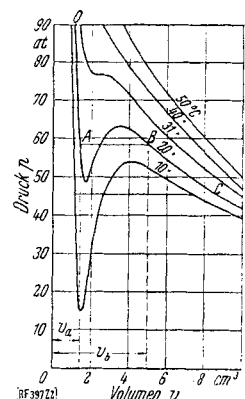


Abb. 2. Isothermen für 1 kg Kohlensäure nach *Clausius*⁴⁾

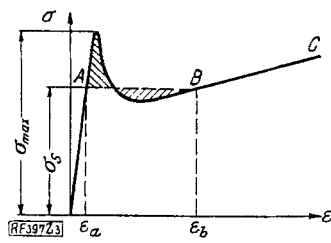


Abb. 3. Darstellung der sprunghaftesten Dehnungszunahme von Stahl an der Streckgrenze
Die schraffierten Flächen haben gleichen Inhalt

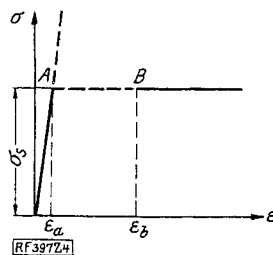


Abb. 4. Vereinfachte Darstellung des Vorganges nach Abb. 3 entsprechend der Theorie von Nakanishi

Bereiche, die durch Beobachtung der polierten Staboberfläche oder mit Hilfe der Fry'schen Ätzung festgestellt werden können, legt die Vermutung nahe, daß kein allmählicher Übergang vom elastischen zum plastischen Zustand stattfindet. Ferner haben Kuntze und Sachs⁶⁾ festgestellt, daß in den plastischen Bereichen eines gezogenen Rundstabs der Durchmesser sich sprunghaft um mehr als 1⁰/₀ vermindert, und schließlich hat Moser⁷⁾ beobachtet, daß die Brinellhärte der plastischen Teile eines gezogenen Flachstabssich sprunghaft um etwa 20⁰/₀ vergrößert. Bei weiterer Dehnung des Stabes ändern

sich Durchmesser und Härte der bereits geflossenen Stabteile solange nicht, bis das gesamte Stabmaterial den Zustand am Verfestigungsbeginn erreicht hat; erst von da ab tritt eine über den ganzen Stab gleichmäßige Verminderung des Durchmessers und eine Vergrößerung der Härte ein.

Für die Theorie von Nakanishi ist nun noch eine weitere Vorstellung von Bedeutung, die man sich ebenfalls durch den Vergleich mit den Vorgängen beim Verdampfen einer Flüssigkeit klar machen kann. Bekanntlich kann unter geeigneten Umständen ein Siedeverzug eintreten, d. h. es ist möglich, die Isotherme O A der Flüssigkeit noch über den Punkt A hinaus ein Stück zu durchlaufen. Die Verdampfung tritt dann für mehr oder weniger große Mengen der Flüssigkeit gleichzeitig ein. Entsprechend kann man sich das theoretische Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Stahl in der in Abb. 3 dargestellten Form vorstellen. Legt man in diesem Diagramm eine Parallele zur ε-Achse so, daß die beiden schraffierten Flächen zwischen der Kurve und dieser Parallelen gleichen Inhalt besitzen, so schneidet diese Parallele auf der σ-Achse die Fließspannung σ_s ab. Die Inhaltsgleichheit der beiden Flächen bedeutet nämlich, daß die Formänderungsarbeit, welche beim Durchlaufen der Kurve von A nach B geleistet wird, gleich der Formänderungsarbeit ist, welche beim Durchlaufen der Geraden von A nach B geleistet wird. Bei Zugrundlegung dieses Spannungs-Dehnungs-Diagramms ist der Fließvorgang nicht eindeutig bestimmt, vielmehr kann entweder beim Erreichen des Punktes A eine sprunghafte Dehnungsvergrößerung des einzelnen Stabelementes von ε_a nach ε_b eintreten, oder es kann ein Fließverzug zustande kommen, wobei die Spannung zunächst über die Spannung σ_s an der Streckgrenze wächst, und dann unter Abfall der Spannung auf σ_s eine sprunghafte Dehnungsvergrößerung ganzer Stabpartien eintritt. Die Theorie von Nakanishi verwendet eine vereinfachte Form dieses Spannungs-Dehnungs-Diagramms, Abb. 4. Die Überschreitung der Streckgrenze soll in völlig elastischer Weise erfolgen, eine obere Grenze für das Maß dieser Überschreitung (σ_{max} in Abb. 3) wird nicht berücksichtigt, und die Verfestigung, welche beim Punkte B einsetzt, wird vernachlässigt.

2. Anwendung auf die Theorie der reinen Biegung.

Wir wollen nun diese Vorstellungen auf die Theorie des Biegeversuchs anwenden. Die ältere Theorie der plastisch-elastischen Biegung nimmt an, daß nach Erreichen der Fließspannung in der äußersten Faser des Stabes die voll-elastische Spannungsverteilung, Abb. 5 a, über elastisch-plastische Spannungsverteilungen, Abb. 5 b, allmählich in die voll-plastische Spannungsverteilung, Abb. 5 c, übergeht. Diese Annahme kann bei den oben entwickelten Vorstellungen nicht aufrecht erhalten werden, weil dann bei den elastisch-plastischen Spannungsverteilungen unmittelbar nebeneinander Fasern des elastischen Gebietes mit der Dehnung ε_a und Fasern des plastischen Gebietes mit der Dehnung ε_b vorkämen, was mit Rücksicht auf den Stabzusammenhang nicht möglich ist. Wir haben vielmehr ein plötzliches Auftreten von Fließfiguren nach Abb. 6 zu erwarten, welche bis zur neutralen Faser des Stabes reichen. In der Tat zeigen auch Biegeversuche an Stäben mit polierter Oberfläche, daß die Fließfiguren sich

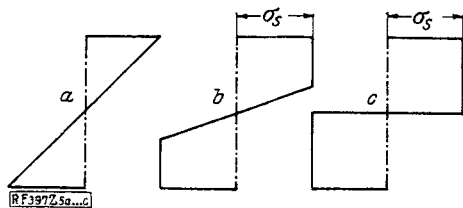


Abb. 5. Spannungsverteilung in einem gebogenen Stab nach der älteren Theorie
a) voll-elastisch; b) elastisch-plastisch; c) vollplastisch

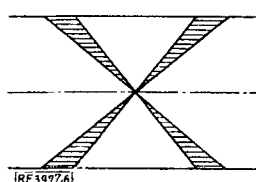


Abb. 6. Fließzonen (Fließfiguren) an einem gebogenen Stab schematisch

keineswegs auf die alleräußersten Fasern des Stabes beschränken, sondern, wie auch Thum und Wunderlich beobachtet haben, sofort ziemlich weit in die mehr nach der neutralen Faser zu ge-

⁶⁾ W. Kuntze u. G. Sachs, VDI-Zeitschr. Bd. 72 (1928) S. 1011.

⁷⁾ M. Moser, Stahl u. Eisen Bd. 48 (1928) S. 1601.

legenen Schichten hineinreichen. Daß sie nicht vollends bis zur neutralen Faser vordringen, dürfte durch die Verfestigung zu erklären sein, auf welche bei den obigen Überlegungen keine Rücksicht genommen wurde. Infolge der dreieckigen Form der Fließzonen der Abb. 6 bleiben die Ränder dieser Zonen gerade, so daß hier ein Anschluß an die Verformungen des elastischen Gebiets möglich ist. In den plastischen Zonen haben wir überall die Fließspannung σ_s , also eine voll-plastische Spannungsverteilung nach Abb. 5c. Die Spannungsverteilung im elastischen Gebiet in der unmittelbaren Umgebung der Fließzonen wird gestört sein, in größerer Entfernung wird aber eine voll-elastische Spannungsverteilung nach Abb. 5a auftreten. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Biegemomente beider Spannungsverteilungen einander gleich sein, und aus dieser Bedingung läßt sich die Erhöhung der Fließgrenze beim Biegeversuch ermitteln. Damit nämlich beide Spannungsverteilungen das gleiche Biegemoment liefern, muß die Randspannung der voll-elastischen Spannungsverteilung größer sein als diejenige der voll-plastischen Spannungsverteilung. Bedeutet W das Widerstandsmoment des Stabquerschnitts in bezug auf die Nulllinie und σ'_s die Randspannung der voll-elastischen Spannungsverteilung, so beträgt das zugehörige Biegemoment $M = \sigma'_s W$. Bedeutet weiter $S/2$ das statische Moment der oberhalb der Nulllinie liegenden Querschnittshälfte in bezug auf die Nulllinie, so beträgt das Biegemoment der voll-plastischen Spannungsverteilung $M = \sigma_s S$. Aus der Gleichheit beider Biegemomente folgt also

$$\sigma'_s = \sigma_s \frac{S}{W} \dots \dots \dots (1).$$

Gl. 1 werde angewendet auf die Werte der Zahlentafel 1 von *Thum* und *Wunderlich*¹⁾. In dieser Tafel sind die Werte von σ'_s zusammengestellt, welche aus dem gemessenen Biegemoment beim ersten Auftreten von Fließlinien unter Annahme einer voll-elastischen Spannungsverteilung für verschiedene I-förmige Stabquerschnitte berechnet wurden. Abb. 7 zeigt diese acht Querschnittsformen. Es lassen sich zwanglos zwei Gruppen bilden, die Stäbe 1 bis 4 besitzen dicke Stege, welche die beiden Flanschen in zuverlässiger Weise zu einem als ganzes wirkenden Querschnitt verbinden; die Stäbe 5 bis 8 haben wesentlich dünnere Stege, wodurch getrenntes Wirken der beiden Flanschen möglich ist.

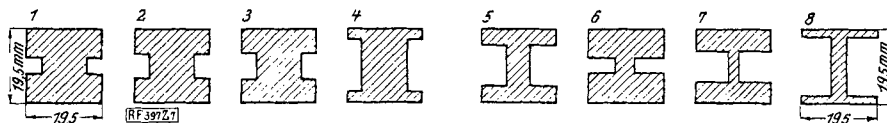


Abb. 7. Von *Thum* und *Wunderlich*¹⁾ untersuchte Querschnittsformen, 1/2 nat. Größe
Nr. 1 bis 4: Dicke Stege; Nr. 5 bis 8: Dünne Stege

Zahlentafel 1 Berechnung der Streckgrenze σ_s für die Stäbe nach Abb. 7 mittels Gl. 1
Die Werte σ'_s entsprechen den Werten in Zahlentafel 1 von *Thum* u. *Wunderlich*¹⁾

Stab nach Abb. 7	Stäbe mit dickem Steg				Stäbe mit dünnem Steg			
	1	2	3	4	5	6	7	8
σ'_s kg/mm ²	35,0	36,4	37,8	34,2	29,1	34,4	31,5	26,1
σ_s „	23,3	24,8	25,9	24,5	21,6	23,3	22,6	21,1

Rechnet man aus den von *Thum* und *Wunderlich* angegebenen Werten von σ'_s unter Verwendung von Gl. 1 die Spannung σ_s an der Streckgrenze aus, so ergeben sich die Werte in Zahlentafel 1 der vorliegenden Arbeit. Das Mittel der Werte in den Spalten 1 bis 4 beträgt 24,6 kg/mm² und stimmt in bemerkenswert guter Weise mit der von *Thum* und *Wunderlich* angegebenen Fließspannung $\sigma_{s1} = 24,7$ kg/mm² des Zugversuchs überein. Führt man die entsprechende Rechnung für die Stäbe 5 bis 8 durch, so erhält man die Werte der Spalten 5 bis 8 in Zahlentafel 1 der vorliegenden Arbeit. Das Mittel der Werte 5 bis 8 beträgt 21,15 kg/mm². Es liegt nahe, diese Erniedrigung der Fließspannung darauf zurückzuführen, daß die beiden Flansche durch die dünnen Stege nicht in hinreichender Weise zu einem als Ganzes wirkenden Querschnitt verbunden werden. Wie mir Herr Prof. *Thum* in Ergänzung der Angaben seines Aufsatzes mitteilte, sind die Versuche bei Biegung durch eine Einzellast in Stabmitte durchgeführt worden. In diesem Falle treten bei den Stäben mit dünnem Steg beträchtliche Schubspannungen am Übergang vom Flansch zum Steg auf. Diese Schubspannungen können ebenfalls auf einen früheren Eintritt des Fließens hinwirken.

3. Zusammenfassung. Die elastische Überschreitung der Streckgrenze bei Stahl wird mit dem Siedeverzug bei Flüssigkeiten verglichen. Die Ergebnisse einer sich aus dieser Auffassung ergebenden — von *F. Nakamishi* in anderer Weise begründeten — Theorie der plastischen Biegung gerader Stäbe werden angewendet auf Versuche, die *Thum* und *Wunderlich*¹⁾ in dieser Zeitschrift beschrieben haben. [RF 397]