

LA R-ÉQUIVALENCE SUR LES GROUPES ALGÈBRIQUES RÉDUCTIFS DÉFINIS SUR UN CORPS GLOBAL

Philippe GILLE

La R-équivalence est une relation d'équivalence sur les points rationnels d'une variété algébrique introduite par Manin [Mn]. Soit X/k une variété algébrique définie sur un corps k . La R-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de X engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R-équivalents s'il existe une k -application rationnelle φ de la droite projective \mathbf{P}_k^1 dans X , définie en 0 et 1, et telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Le résultat principal de ce travail est le théorème de finitude suivant :

Théorème B. — Soit G un k -groupe algébrique réductif défini sur un corps global k . Alors l'ensemble des classes de R-équivalence de $G(k)$ est fini.

Ce résultat et le chemin pour y parvenir sont conformes à la philosophie de la théorie de la descente sur les variétés rationnelles de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS3]. Les ingrédients arithmétiques de ce théorème sont le cas des tores déjà démontré par Colliot-Thélène et Sansuc [CTS1], un principe de Hasse de Kato et Saito [KS] et un théorème « ergodique » de Margulis [Ma] traitant le cas d'un groupe semi-simple simplement connexe. Pour démontrer le théorème B pour un groupe semi-simple, il est donc naturel d'étudier le comportement par isogénie de la R-équivalence. Le point clef de cet article est de montrer que le comportement par isogénie de la R-équivalence est lié à la question suivante purement algébrique : Soit $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps k et soit L/k une extension finie de corps. Existe-t-il un principe de norme pour le groupe abélien $G(k)/\lambda(\tilde{G}(k))$, i.e. existe-t-il une application norme naturelle $N_{L/k} : G(L)/\lambda(\tilde{G}(L)) \rightarrow G(k)/\lambda(\tilde{G}(k))$? On donne dans la section II une réponse partielle à cette question.

Théorème A. — Soient $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une k -isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps k , de noyau le k -groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Soit $R(k, G) \subset G(k)$ le sous-groupe (normal) des éléments R-équivalents à e . Notons $N_{L/k} : H_{\text{fppf}}^1(L, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ la corestriction de L à k et $\varphi_k : G(k) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ l'application caractéristique associée à λ . Alors, on a

$$N_{L/k}(\varphi_L(R(L, G))) \subset \varphi_k(R(k, G)).$$

En particulier, on obtient ainsi une nouvelle démonstration du principe de norme de Knebusch sur le groupe engendré par les valeurs non nulles d'une forme quadratique. On donne une seconde application de l'étude des principes de norme qui est la preuve uniforme (§ IV) du théorème suivant, où les cas des groupes exceptionnels E_6 et E_7 sont nouveaux. L'ensemble $S(G)$ des entiers de torsion d'un groupe absolument presque k -simple G a été défini par Serre ([Se2] § 2.2).

Théorème C. — Soit k un corps. Soit G un k -groupe algébrique connexe, semi-simple, absolument presque k -simple d'un des types A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7 . Soit $(k_i/k)_{i=1, \dots, r}$ une famille d'extensions finies de corps dont les degrés sont premiers à l'ensemble $S(G)$ des entiers de torsion de G . Si les groupes G_{k_i} sont déployés ($i = 1, \dots, r$), alors le groupe G_k est déployé.

Ce travail est issu d'une thèse de doctorat réalisée sous la direction de Jean-Louis Colliot-Thélène. Je le remercie vivement. Je remercie aussi M. S. Raghunathan et A. S. Merkurjev pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

0. Notations et rappels	200
I. Préliminaires	203
II. R-équivalence et principe de norme	205
III. Finitude de la R-équivalence pour les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global. ...	215
IV. Extensions non déployantes de groupes algébriques semi-simples	226
Appendice A. Flèches résidus	229
Appendice B. Démonstration d'un principe de Hasse sur les groupes de normes.....	232

0. Notations et rappels

Soit k un corps et \bar{k} une clôture algébrique de k . On rappelle qu'une k -algèbre étale est une k -algèbre finie, qui est un produit d'extensions de corps séparables de k . Si P est un polynôme séparable de $k[t]$, on note k_P l'algèbre étale $k_P = k[t]/P$.

0.1. Droites affine et projective. — On note \mathbf{A}_k^1 (resp. \mathbf{P}_k^1) la droite affine (resp. projective) et $k(t)$ le corps des fonctions de la droite projective. On note ∞ le point fermé à l'infini de \mathbf{P}_k^1 . Si M est un point fermé de \mathbf{P}_k^1 , on note O_M l'anneau local en M , \hat{O}_M son complété, \hat{K}_M le corps des fractions de \hat{O}_M et $k(M)$ le corps résiduel de O_M . On note $\eta : \text{Spec}(k(t)) \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ le point générique de la droite projective.

0.2. Soient X une variété algébrique intègre définie sur k . On note $X(k)$ l'ensemble des k -points rationnels de X . Si L/k est une extension de corps, on note $X_L = X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(L)$ l'extension des scalaires de X à L et $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. On dit que X est k -rationnelle si X est k -birationnelle à un espace affine. Soit Y une variété algébrique définie sur L et supposons que l'extension L/k est finie. On note alors $R_{L/k} Y$ la restriction des scalaires, à la Weil, de L à k de Y (cf. [BLR], p. 191).

0.3. Cohomologie (cf. [Mil], [SGA3], [SGA4]). — Soit X un schéma quasi-compact. On considère sur X les sites X_{zar} , $X_{\text{ét}}$ et X_{fppf} . Si \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur X sur un site \mathcal{S} , on note $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$ le i -ème groupe de cohomologie de \mathcal{F} . Si $X = \text{Spec}(A)$, on écrit parfois $H^i_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{F})$ au lieu de $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$. Enfin, la cohomologie étale étant la plus utilisée, on pose $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$. Soit G un X -schéma en groupes, plat de type fini. Suivant la définition de Demazure [Dm], on dira que G est un X -schéma en groupes semi-simple (resp. réductif) s'il est lisse et affine sur X et si ses fibres géométriques sont des groupes algébriques semi-simples (resp. réductifs) connexes. On prend les mêmes notations pour la cohomologie non abélienne que pour la cohomologie abélienne (définie par le procédé de Čech). Rappelons que si G/X est affine, l'ensemble $H^1_{\text{fppf}}(X, G)$ classe les torsseurs sur X sous G (cf. [Mil], p. 120), et que si G/X est lisse, l'application naturelle $H^1(X, G) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(X, G)$ est bijective (cf. [SGA3], Exp. XXIV).

On sait que la cohomologie galoisienne sur un corps k [Se1] s'identifie à la cohomologie étale de $\text{Spec}(k)$.

0.4. Groupes de type multiplicatif et normes. — Nous renvoyons aux exposés IX et X de Grothendieck dans [SGA3] pour les définitions et les propriétés des groupes de type multiplicatif. On note \mathbf{G}_m le groupe multiplicatif $\text{Spec}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mu_n = \text{Spec} \left(\frac{\mathbf{Z}[t]}{t^n - 1} \right)$ le groupe multiplicatif des racines n -ièmes de l'unité. Un X -tore T est dit quasi-trivial s'il est isomorphe à un tore $R_{X'/X} \mathbf{G}_m$ où $X' \rightarrow X$ est un morphisme étale fini. Soit S un X -groupe de type multiplicatif. On note \hat{S} (resp. \hat{S}^0) le faisceau des caractères (resp. co-caractères) de S pour la topologie fppf défini par $\hat{S}(U) = \text{Hom}_{\mathbb{V}-\text{gr}}(S_U, \mathbf{G}_{m,U})$ (resp. $\hat{S}^0(U) = \text{Hom}_{\mathbb{V}-\text{gr}}(\mathbf{G}_{m,U}, S_U)$). Rappelons que le faisceau \hat{S} est représentable par un X -schéma en groupes et ainsi l'accouplement $S \times \hat{S} \rightarrow \mathbf{G}_{m,X}$ induit une dualité parfaite entre les X -groupes de type multiplicatif de type fini et les X -groupes constants commutatifs tordus à engendrement fini (*loc. cit.*, exp. X, § 5).

Si μ désigne un X -schéma en groupe fini de type multiplicatif et n un entier satisfaisant $\mu^n = 1$, on note $\mu(-1)$ le tordu à la Tate de μ , *i.e.* le faisceau pour la topologie fppf sur X défini par $\mu(-1)(U) = \text{Hom}_{\mathbb{V}-\text{gr}}(\mu_{n,U}, \mu_U)$, qui ne dépend pas de l'entier n .

Le but de la fin de ce paragraphe est de construire, quand la base est un corps, des morphismes de normes pour les groupes de cohomologie plate des faisceaux représentables (en particulier pour les groupes de type multiplicatif). Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre suivant. Soient $f: Y \rightarrow X$ un morphisme fini localement libre (X connexe) et G/X un schéma en groupe commutatif. Selon Deligne ([SGA4], exp. XVII, 6.3.13.1, 6.3.14.a), il existe un morphisme trace

$$\text{Tr}_f: f_* f^* G \rightarrow G,$$

qui est un morphisme de faisceaux sur X_{fppf} . On ne sait pas en général définir des morphismes de normes pour les groupes de cohomologie pour la topologie fppf, même en

degré cohomologique 1. En effet, le morphisme naturel $H_{\text{fppf}}^1(X, f_* f^* G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(Y, f^* G)$ n'est pas toujours un isomorphisme ([SGA3], exp. XXIV, § 8.5) et on ne peut donc pas prendre son inverse. Toutefois, si X'/X est un morphisme fidèlement plat et de type fini, l'adjonction donne lieu, pour $i \geq 0$, à un isomorphisme des groupes de cohomologie de Čech $u^i : \check{H}_{\text{fppf}}^i(X'/X, f_* f^* G) \simeq \check{H}_{\text{fppf}}^i(Y'/Y, f^* G)$, où Y' désigne le produit fibré $Y \times_X X'$. On note $(\text{Tr}_f)_*^i : \check{H}_{\text{fppf}}^i(X'/X, f_* f^* G) \rightarrow \check{H}_{\text{fppf}}^i(X'/X, G)$ et on définit le morphisme de norme

$$N_{Y/X} = (\text{Tr}_f)_*^i \circ (u^i)^{-1} : \check{H}_{\text{fppf}}^i(Y'/Y, f^* G) \rightarrow \check{H}_{\text{fppf}}^i(X'/X, G).$$

Considérons maintenant le cas $X = \text{Spec}(k)$, $Y = \text{Spec}(L)$ où L/k est une extension finie de corps, et $X' = \text{Spec}(\bar{k})$. On sait que $H_{\text{fppf}}^i(\bar{k}, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$ et pour tout faisceau \mathcal{F} sur X_{fppf} (cf. [Mil], exemple 3.4.e, p. 112). Par suite, on a bien défini des morphismes de normes $N_{L/k} : H_{\text{fppf}}^i(L, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^i(k, G)$ pour tout schéma en groupe commutatif G/k .

0.5. Flèches résidus (cf. Appendice B). — Soit K un corps complet pour une valuation discrète normalisée, *i.e.* à valeurs dans \mathbf{Z} (surjectivement), et d'anneau de valuation O d'idéal maximal \mathfrak{m} , de corps résiduel $k = O/\mathfrak{m}$. Soit μ un O -groupe de type multiplicatif fini. Il existe une application naturelle appelée flèche résidu, $\partial : H_{\text{fppf}}^1(K, \mu) \rightarrow \mu(-1)(k)$ telle que l'on ait la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(O, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(K, \mu) \xrightarrow{\partial} \mu(-1)(k) \rightarrow 0.$$

Pour $\mu = \mu_{n,0}$, la suite ci-dessus n'est pas autre chose que la suite

$$1 \rightarrow O^\times/O^{\times n} \rightarrow K^\times/K^{\times n} \rightarrow \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Si μ un k -groupe de type multiplicatif fini, les flèches résidus induisent une suite exacte de localisation

$$0 \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \bigoplus \mu(-1)(k(M)) \xrightarrow{\oplus N_{k(M)/k}} \mu(-1)(k) \rightarrow 0,$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective \mathbf{P}_k^1 .

Soit $c \in H^1(k(t), \mu)$ comme ci-dessus. Si $\partial_M(c)$ est non nul, on dit que le point M est un pôle de c , sinon on dit que c est régulière au point M et on peut alors spécialiser c en M obtenant $c(M) \in H_{\text{fppf}}^1(k(M), \mu)$ (cf. [Sel], p. 120, pour le cas où l'exposant de μ est premier à la caractéristique de k).

0.6. Groupes algébriques (cf. [Bo], [Sel], [T1], [PR]). — Soit G un k -groupe algébrique linéaire. Par souci d'harmonisation avec [Dm], on dira que G est semi-simple (resp. réductif) si G est semi-simple connexe (resp. réductif connexe). Si H/k est un sous-groupe algébrique de G , on note $Z_G(H)$ (resp. $N_G(H)$) le centralisateur (resp. le normalisateur) de H dans G . On rappelle que l'on peut associer à un groupe réductif G/k la k -variété X des sous-groupes de Borel de G , qui est une variété projective lisse et un

espace homogène sous le groupe G . De plus, la variété X/k satisfait la propriété suivante pour toute extension de corps L/k

$$X(L) \neq \emptyset \Leftrightarrow G_L \text{ est quasi-déployé.}$$

0.7. Groupes de normes. — Soit Z une k -variété. On définit le groupe de normes de Z noté $N_Z(k)$ (cf. [KS], [Ro]) comme le sous-groupe de k^\times engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour toutes les extensions finies de corps L/k telles que $Z(L)$ soit non vide. Si K/k est une extension de corps, on note $N_Z(K)$ le groupe $N_{Z_K}(K)$. Pour une extension finie de corps L/k , on a l'inclusion $N_{L/k}(N_Z(L)) \subset N_Z(k)$. Étendons cette définition. On suppose donné pour toute extension finie de corps L/k un groupe abélien $F(L)$ et un morphisme $N_{L/k} : F(L) \rightarrow F(k)$. On définit alors le groupe de normes de F noté $N_Z(k, F)$ comme le sous-groupe de $F(k)$ engendré par les $N_{L/k}(F(L))$ pour toutes les extensions finies de corps L/k telles que $Z(L)$ soit non vide. Soit T un k -tore. On sait qu'il existe une application norme $N_{L/k} : T(L) \rightarrow T(k)$ pour toute extension finie de corps L/k . Cela permet de définir le groupe de normes $N_Z(k, T)$. Le groupe de normes $N_Z(k, \mathbf{G}_m)$ n'est pas autre chose que le groupe de normes $N_Z(k)$.

0.8. Arithmétique. — Nous entendons par corps local un corps localement compact, *i.e.* soit une extension finie d'un corps des nombres p -adiques \mathbf{Q}_p , soit un corps de séries formelles à une variable sur un corps fini. Nous entendons par corps global soit un corps de nombres, soit le corps de fonctions d'une courbe algébrique irréductible définie sur un corps fini. Soit k un corps global, Ω l'ensemble de ses places, $\infty \subset \Omega$ l'ensemble des places archimédiennes et $(k_v)_{v \in \Omega}$ les complétés. On rappelle que si X/k est une variété algébrique, l'ensemble $X(k_v)$ est muni d'une topologie naturelle (par exemple [KS], p. 256). Si G/k est un groupe algébrique linéaire et Σ une partie de Ω , on définit les défauts d'approximation faible suivants :

- $A_\Sigma(G)$ le quotient, à gauche, *a priori*, de $\prod_{v \in \Sigma} G(k_v)$ par l'adhérence de l'image de $G(k)$ par le plongement diagonal,
- $A(G) = A_\Omega(G)$,
- si G est commutatif et Σ fini, on note $\mathcal{U}_\Sigma^1(k, G)$ le conoyau de la restriction $H^1(k, G) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} H^1(k_v, G)$,
- si G est commutatif, on note $\mathcal{U}^1(k, G)$ la limite projective des $\mathcal{U}_\Sigma^1(k, G)$ sur les parties finies Σ de Ω .

Enfin, pour tout groupe fini G , on note $\#G$ son ordre.

I. PRÉLIMINAIRES

I.1. Une suite exacte de Nisnevich

On se place dans le cadre suivant. Soit X un schéma de Dedekind, *i.e.* un schéma noëthérien, régulier, intègre et de dimension 1, dont on note K le corps de fonctions. On note $\eta : \text{Spec}(K) \rightarrow X$ le point générique de X . Pour tout point fermé x de X , on

note v_x la valuation de K associée, O_x (resp. \hat{O}_x) l'anneau local de X en x (resp. son complété pour v_x) et $k(x)$ le corps résiduel en x . On note \hat{K}_x le corps des fractions de \hat{O}_x . Soit G un X -schéma en groupes affine et de type fini.

Pour tout ouvert $V \subset X$, on note $V^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de V et l'on pose $\mathbf{A}(V) = \prod_{x \in V^{(1)}} \hat{O}_x \times \prod_{x \notin V^{(1)}} \hat{K}_x$. Si Σ est une partie finie de $X^{(1)}$, on pose $\mathbf{A}_\Sigma = \varinjlim_{V \cap \Sigma = \emptyset} \mathbf{A}(V) \subset \prod_{x \in X^{(1)}} \hat{K}_x$. On appelle $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\emptyset$ l'anneau des adèles de X et \mathbf{A}_Σ le sous-anneau des Σ -entiers de \mathbf{A} . Posons

$$c(X, G) = G(\mathbf{A}(X)) \backslash G(\mathbf{A}) / G(K)$$

et
$$c_\Sigma(X, G) = \left(\prod_{x \in \Sigma} G(\hat{O}_x) \backslash G(\hat{K}_x) \right) / G(U_0).$$

Il est aisé de voir que l'on a une injection naturelle $c_\Sigma(X, G) \hookrightarrow c(X, G)$. On rappelle le résultat suivant qui est une conséquence de la technique de descente fidèlement plate et qui est une extension en cohomologie non abélienne de la bijection entre $\text{Pic}(X)$ et le groupe des diviseurs de X modulo équivalence linéaire.

Théorème I.1.1 ([N], Th. 2.1). — *Il existe des suites exactes d'ensembles pointés*

$$a) \quad 1 \rightarrow c_\Sigma(X, G) \xrightarrow{T_\Sigma} H_{\text{fppf}}^1(X, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(U_0, G) \times \prod_{x \in \Sigma} H_{\text{fppf}}^1(\hat{O}_x, G),$$

$$b) \quad 1 \rightarrow c(X, G) \xrightarrow{T} H_{\text{fppf}}^1(X, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(K, G) \times \prod_{x \in X^{(1)}} H_{\text{fppf}}^1(\hat{O}_x, G) \quad \square$$

I.2. Torseurs sur la droite projective

Soit k un corps. On note \bar{k} une clôture séparable de k et \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k} sur k . La classification des toseurs sur \mathbf{P}_k^1 sous un groupe de Chevalley, localement triviaux pour la topologie de Zariski a été faite par Grothendieck [G]. Selon Harder [H3], on peut classifier « en principe » les toseurs sur la droite projective \mathbf{P}_k^1 sous un groupe réductif G/k . Une classification précise a été faite dans [Gi3] suivant [H3]. Cette classification a précédemment été établie par Raghunathan [Rg], en recouvrant la droite projective par deux ouverts isomorphes à la droite affine. On rappelle qu'un toseur rationnellement trivial E/\mathbf{P}_k^1 sous un groupe G/k est un toseur trivial au point générique de \mathbf{P}_k^1 .

Théorème I.2.1 [Gi3]. — *Soit G/k un groupe réductif. Soit $i: T \hookrightarrow G$ un k -tore déployé maximal et ${}_k W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl relatif. Soit $M_0 \in \mathbf{P}^1(k)$.*

a) Tout \mathbf{P}_k^1 -torseur sous G dont la fibre en M_0 est triviale est localement trivial pour la topologie de Zariski, i.e. on a une suite exacte

$$H_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_k^1, G) \rightarrow H^1(\mathbf{P}_k^1, G) \xrightarrow{(\text{ev}_{M_0})^*} H^1(k, G).$$

b) Tout \mathbf{P}_k^1 -torseur sous G rationnellement trivial est localement trivial pour la topologie de Zariski, i.e. on a une suite exacte

$$H_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_k^1, G) \rightarrow H^1(\mathbf{P}_k^1, G) \xrightarrow{\eta^*} H^1(k(t), G).$$

c) L'application naturelle $i_* : H_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_k^1, T) \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_k^1, G)$ induit une bijection

$$\hat{T}^0/k W \xrightarrow{\sim} H_{\text{Zar}}^1(\mathbf{P}_k^1, G). \quad \square$$

Remarquons que si $U \subset \mathbf{P}_k^1$ est un ouvert ou bien si $U = \text{Spec}(A)$ avec A anneau semi-local de $k[t]$, alors tout toseur E/U sous G localement trivial pour la topologie de Zariski s'étend à un toseur sous \mathbf{P}_k^1 . On obtient ainsi le

Corollaire I.2.2. — Soit G/k un groupe réductif et $i : T \rightarrow G$ un k -tore déployé maximal.

a) Soit U un ouvert de Zariski de la droite projective. Alors on a une suite exacte

$$H_{\text{Zar}}^1(U, G) \rightarrow H^1(U, G) \xrightarrow{\eta^*} H^1(k(t), G),$$

et une surjection

$$\hat{T}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \text{Pic}(U) \rightarrow H_{\text{Zar}}^1(U, G).$$

b) (Cf. [CTO], Th. 3.1, p. 109). — Soit A un anneau semi-local de \mathbf{A}_k^1 . Alors l'application naturelle $H^1(A, G) \rightarrow H^1(k(t), G)$ a un noyau trivial.

c) On a

$$c(\mathbf{A}_k^1, G) = 1. \quad \square$$

Remarque. — Supposons le corps k parfait et infini. Soit C/k une courbe lisse et G/k un groupe réductif. La preuve du théorème 1.1 (« Deuxième réduction ») de [CTO], p. 101, et l'assertion b) du corollaire impliquent que tout G -torseur sous G/k rationnellement trivial est localement trivial pour la topologie de Zariski (*loc. cit.*, th. 3.1).

II. R-ÉQUIVALENCE ET PRINCIPE DE NORME

On fixe pour les § 0, 2, 3 une k -isogénie $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ centrale de groupes réductifs définis sur k , de noyau le k -groupe fini μ de type multiplicatif. La suite exacte de cohomologie fppf s'écrit, $G(k)$ étant le groupe des k -points rationnels de G :

$$1 \rightarrow \mu(k) \rightarrow \tilde{G}(k) \xrightarrow{\lambda_k} G(k) \xrightarrow{\varphi_k} H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \xrightarrow{i_k} H^1(k, \tilde{G}).$$

On appelle φ_k l'application caractéristique du revêtement et l'on note $C_\lambda(k)$ le groupe abélien $G(k)/\lambda(\tilde{G}(k))$ identifié à $\text{Im}(\varphi_k) = \text{Ker}(i_k)$. Soit L/k une extension finie de corps. On note $N_{L/k} : H_{\text{fppf}}^1(L, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ la norme (ou corestriction) définie au § 0.4. Une question naturelle se pose. A-t-on $N_{L/k}(C_\lambda(L)) \subset C_\lambda(k)$? Pour les corps de nombres, la réponse est positive si le groupe \tilde{G} est semi-simple simplement connexe, comme l'a remarqué Deligne ([Dg], p. 277).

Définition. — Si $N_{L/k}(C_\lambda(L)) \subset C_\lambda(k)$, on dit que λ satisfait au principe de norme pour l'extension L/k .

Dans cette section, on établit un principe de norme pour un sous-groupe de $C_\lambda(k)$ (th. A de l'introduction générale), qui donne en particulier une nouvelle démonstration du principe de norme de Knebusch (cf. [L], th. 2.3, p. 198).

II.1. R-équivalence et isogénie

Soit X une k -variété. La R-équivalence (Manin, cf. [Mn]) est la relation d'équivalence sur l'ensemble $X(k)$ des points rationnels engendrée par la relation élémentaire :

Deux points $x_0, x_1 \in X(k)$ sont élémentairement reliés s'il existe une k -application rationnelle $f: \mathbf{P}_k^1 \rightarrow X$ définie en 0 et 1 telle que $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$.

Soit H un k -groupe algébrique linéaire. On note $R(k, H)$ la classe de R-équivalence de l'élément neutre de $H(k)$.

Lemme II.1.1. — *a) L'ensemble $R(k, H)$ est un sous-groupe normal de $H(k)$ et $H(k)/R \simeq H(k)/R(k, H)$.*

b) Deux points de $H(k)$ R-équivalents le sont élémentairement.

c) Si le corps k est infini, l'extension des scalaires de k à $k(t)$ induit un isomorphisme $H(k)/R \cong H(k(t))/R$.

Démonstration. — L'assertion *a)* est évidente, la relation élémentaire étant compatible avec le produit dans $H(k)$. Montrons l'assertion *b)*. Soient h et h' deux points de $H(k)$ R-équivalents. Il existe une chaîne $h_0 = h, h_1, \dots, h_n = h'$ où h_i est élémentairement R-équivalent à h_{i+1} pour $i = 0, \dots, n-1$. Notons e l'élément neutre de $H(k)$. Par récurrence, on peut supposer $n = 2$ et $h_0 = e$. Il existe $h_0(t)$ et $h_1(t)$ dans $H(k(t))$ régulières en 0 et 1 satisfaisant $h_0(0) = e, h_0(1) = h_1, h_1(0) = h_1$ et $h_1(1) = h_2$. Posons $\varphi(t) = h_1(t)(h_0(1-t))^{-1}$. Alors $\varphi(t)$ est régulière en 0 et 1 et satisfait $\varphi(0) = e = h_0$ et $\varphi(1) = h_2$. Donc h_0 et h_2 sont élémentairement R-équivalents.

Montrons *c)*. Il y a une flèche naturelle de restriction $r: H(k)/R \rightarrow H(k(t))/R$. Montrons que r est un isomorphisme. Soit $h(t) \in H(k(t))$. Le corps k est infini donc il existe un point rationnel t_0 de la droite affine où $h(t)$ est régulière. L'élément $h(t)$ est élémentairement R-équivalent à $h(t_0)$. Ceci montre la surjectivité de r . Soit $[h]$ un élément du noyau de r . L'assertion *b)* assure l'existence de $h(t, u)$ dans $H(k(t, u))$ tel que $h(t, 0) = e$ et $h(t, 1) = h$. Il existe un point t_0 de k tel que $h(t_0, u)$ soit régulière en 0 et 1. On a $h(t_0, 0) = e$ et $h(t_0, 1) = h$. Ceci montre l'injectivité de r . \square

Il est aisé de voir que si H est k -rationnel, $H(k)/R$ est trivial. Plus généralement, on sait que si k est un corps de caractéristique nulle, alors l'ensemble $H(k)/R$ est un invariant birationnel de la catégorie des k -groupes algébriques connexes ([CTS1], prop. 10, p. 195, via Hironaka). L'isogénie du § 0 induit un morphisme de groupes $\lambda: \tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R$ dont on se propose de calculer le conoyau.

Lemme II.1.2. — *Le groupe $C_\lambda(k(t))$ est stable par spécialisation i.e. si*

$$c(t) \in C_\lambda(k(t)) \subset H^1(k(t), \mu)$$

et si M_0 est un point rationnel de \mathbf{P}_k^1 où c est régulier (cf. § 0.5), alors $c(M_0) \in C_\lambda(k)$.

Démonstration. — Soit $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ régulier en M_0 . On sait que $c(t)$ est la restriction d'un élément c de $H^1(\mathcal{O}_{M_0}, \mu)$. Le corollaire I.2.2.b assure que le diagramme commutatif suivant est exact.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\text{fppf}}(\mathcal{O}_{M_0}, \mu) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_{M_0}, \tilde{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\text{fppf}}(k(t), \mu) & \longrightarrow & H^1(k(t), \tilde{G}). \end{array}$$

Le diagramme donne $c \in \text{Ker}(H^1_{\text{fppf}}(\mathcal{O}_{M_0}, \mu) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(\mathcal{O}_{M_0}, \tilde{G}))$. Par spécialisation en M_0 , on a bien $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. \square

On peut alors définir la R-équivalence sur $C_\lambda(k)$ comme la relation engendrée par la relation élémentaire suivante : deux éléments c_0 et c_1 de $C_\lambda(k)$ sont élémentairement R-équivalents s'il existe $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ régulier en 0 et 1 satisfaisant $c(0) = c_0$ et $c(1) = c_1$. On note $R(k, C_\lambda)$ la classe d'équivalence de l'élément neutre et un lemme analogue au lemme 2.1 vaut. On a donc $C_\lambda(k)/R = C_\lambda(k)/R(k, C_\lambda)$.

Proposition II.1.3. — *On a une suite exacte naturelle de groupes :*

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow C_\lambda(k)/R \rightarrow 1.$$

Démonstration. — Une seule chose est à prouver : l'exactitude de la suite en $G(k)/R$. Notons A l'anneau semi-local de la droite affine aux points 0 et 1. On note $[]_R$ les classes de R-équivalence. Soit $[g]_R \in \text{Ker}(G(k)/R \rightarrow C_\lambda(k)/R)$. Alors il existe $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ provenant de $H^1_{\text{fppf}}(A, \mu)$ satisfaisant $c(0) = 1$ et $c(1) = \varphi(g)$. Le corollaire I.2.2.b assure que le diagramme d'ensembles pointés suivant est exact :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ G(A) & \longrightarrow & H^1_{\text{fppf}}(A, \mu) & \longrightarrow & H^1(A, \tilde{G}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G(k(t)) & \longrightarrow & H^1_{\text{fppf}}(k(t), \mu) & \longrightarrow & H^1(k(t), \tilde{G}). \end{array}$$

Ainsi, l'élément $c(t) \in H_{\text{ppf}}^1(A, \mu)$ se relève en $g(t)$ dans $G(A)$ et $g(0)$ est \mathbb{R} -équivalent à $g(1)$. Or $g(0), gg(1)^{-1} \in \lambda(\tilde{G}(k))$. Par suite

$$[g]_{\mathbb{R}} = [gg(1)^{-1}] \times [g(1)g(0)^{-1}]_{\mathbb{R}} \times [g(0)]_{\mathbb{R}} \in \text{Im}(\tilde{G}(k)/\mathbb{R} \rightarrow G(k)/\mathbb{R}).$$

Ceci montre l'exactitude. \square

II.2. Principe de norme

a. Functorialité. — Soit un diagramme d'isogénies de k -groupes réductifs connexes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B_1 & \xlongequal{\quad} & B_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \tilde{G} = G_1 & \xrightarrow{\lambda} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \lambda_1 & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & G \longrightarrow 1. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

On pose $C_{\lambda_i}(k) = \text{Ker}(H_{\text{ppf}}^1(k, B_i) \rightarrow H^1(k, G_i))$ pour $i = 1, 2$. Une chasse au diagramme (laissée au lecteur) montre le

Lemme II.2.4 [Gi3]. — Soit L/k une extension finie de corps. Dans la situation ci-dessus, on a les assertions suivantes :

- a) Si $C_{\lambda_1}(k)/\mathbb{R} = 1$ et $C_{\lambda_2}(k)/\mathbb{R} = 1$, alors on a $C_{\lambda}(k)/\mathbb{R} = 1$.
- b) La trivialité de $C_{\lambda}(k)/\mathbb{R}$ implique la trivialité de $C_{\lambda_2}(k)/\mathbb{R}$.
- c) Si λ satisfait le principe de norme pour L/k , alors λ_1 et λ_2 satisfont le principe de norme pour L/k . \square

b. Calcul de $C_{\lambda}(k(t))$. — Pour tout point fermé M de \mathbb{P}_k^1 , l'homomorphisme composé $\partial_M \circ \varphi_{\tilde{K}_M} : G(\tilde{K}_M) \rightarrow H_{\text{ppf}}^1(\tilde{K}_M, \mu) \rightarrow \mu(-1)(k(M))$ induit une application caractéristique « résiduelle »

$$\varphi_M : G(\tilde{K}_M)/G(\hat{O}_M) \rightarrow \mu(-1)(k(M)).$$

Lemme II.2.5. — Soient $c = c(t) \in H_{\text{ppf}}^1(k(t), \mu)$ et M_0 un point rationnel où la classe c est régulière. Alors c appartient à $C_{\lambda}(k(t))$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) $\partial_M(c) \in \text{Im}(\varphi_M)$ pour tout point fermé M de \mathbb{A}_k^1 ;
- b) $c(M_0) \in C_{\lambda}(k)$.

Démonstration du lemme. — Soient $c \in H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu)$ et M_0 un point rationnel de \mathbf{P}_k^1 où c est régulière. Quitte à faire agir un élément de $\text{PGL}_2(k)$ sur \mathbf{P}_k^1 , on peut supposer que $M_0 \neq \infty$. Si $c(t) \in C_\lambda(k(t))$, il est clair que $\partial_M(c) \in \text{Im}(\varphi_M)$ pour tout point fermé M de \mathbf{A}_k^1 et le lemme II.1.2 assure que $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. Les conditions *a*) et *b*) sont donc vérifiées. Réciproquement, supposons que les assertions *a*) et *b*) de la proposition sont vraies. Il faut montrer que $c(t) \in \text{Im}(\varphi_{k(t)})$. Notons $\Sigma = \{M_1, \dots, M_n\}$ les points fermés de \mathbf{A}_k^1 tels que $\partial_{M_i}(c(t)) \neq 0$ et posons $U = \mathbf{A}_k^1 - \Sigma$. En particulier $M_0 \in U(k)$. Pour $i = 1, \dots, n$, il existe $g_i \in G(\hat{K}_{M_i})$ tel que $\partial_{M_i}(\varphi(g_i)) = \partial_{M_i}(c(t))$. D'après le corollaire I.2.2.c, on sait que $c(\mathbf{A}_k^1, G) = 1$ donc on a

$$1 = c_\Sigma(\mathbf{A}_k^1, G) = \left(\prod_{M \in \Sigma} G(\hat{O}_M) \backslash G(\hat{K}_M) \right) / G(U).$$

Il existe donc $h \in G(U)$ tel que $g_i h^{-1} \in G(\hat{O}_{M_i})$. Utilisons l'hypothèse *b*). Il existe $g_0 \in G(k)$ tel que $\varphi(g_0) = c(M_0)$. Posons $g = g_0 h(M_0)^{-1} h$. Alors g appartient à $G(U)$ et satisfait

$$(*) \quad g_i g^{-1} \in G(\hat{O}_{M_i}) \quad \text{et} \quad g(M_0) = g_0.$$

Posons $d(t) = \varphi_{k(t)}(g)$ et montrons que $c(t) = d(t)$. Comme $g \in G(U)$, on a $\partial_M(d(t)) = 0 = \partial_M(c(t))$ pour tout point fermé M de $\mathbf{A}^1 - \Sigma$. Comme le morphisme de groupes $\partial_{M_i} \circ \varphi_{\hat{K}_{M_i}} : G(\hat{K}_{M_i}) \rightarrow \mu(-1)(k(M_i))$ est trivial sur $G(\hat{O}_{M_i})$, la condition ***) montre que $\partial_{M_i}(d(t)) = \partial_{M_i}(c(t))$ pour $i = 1, \dots, n$. Par suite, les classes $c(t)$ et $d(t)$ ont mêmes résidus en tous les points fermés de \mathbf{A}_k^1 et diffèrent donc d'une classe constante (*i.e.* de $H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$). Or $c(M_0) = \varphi(g_0) = \varphi(g(M_0)) = d(M_0)$. Donc $c(t) = d(t) \in \text{Im}(\varphi_{k(t)})$. \square

Le « referee » nous a suggéré une autre démonstration du lemme II.2.5, s'appuyant sur un lemme d'approximation de Harder et sur la classification des toseurs sur la droite affine [RgRm]. Cette approche figure dans la note [Gi1] dans le cas où le corps de base est supposé de caractéristique nulle.

Une autre démonstration du lemme II.2.5. — L'argument repose sur un lemme de Harder ([H2], lemme 4.1.3) montrant que si $U \subset \mathbf{P}_k^1$ est un ouvert, une classe $\xi \in H^1(k(t), G)$ s'étend en une classe de $H^1(U, G)$ si pour tout $M \in U^{(1)}$, la restriction ξ_M au complété \hat{K}_M s'étend au complété \hat{O}_M , *i.e.* $\xi_M \in \text{Im}(H^1(\hat{O}_M, G) \rightarrow H^1(\hat{K}_M, G))$. Revenons à la démonstration du lemme II.2.5 en supposant $M_0 \neq \infty$. Soit $c \in H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu)$ satisfaisant les conditions *a*) et *b*) du lemme II.2.5. On pose $\xi = i_{k(t)}(c) \in H^1(k(t), \tilde{G})$ et on veut montrer que $\xi = 1$. On considère le diagramme commutatif suivant (dont la première ligne est exacte)

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{G}(k(t)) & \xrightarrow{\lambda} & G(k(t)) & \xrightarrow{\varphi_{k(t)}} & H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu) & \xrightarrow{i_{k(t)}} & H^1(k(t), \tilde{G}) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & H_{\text{fppf}}^1(\mathbf{A}_k^1, \mu) & \xrightarrow{i} & H^1(\mathbf{A}_k^1, \tilde{G}). \end{array}$$

Pour tout $M \in \mathbf{A}_k^1$, un argument de torsion montre l'existence de la suite exacte d'ensembles pointés suivante :

$$G(\hat{K}_M)/G(\hat{O}_M) \xrightarrow{\varphi_M} \mu(-1)(k(M)) \rightarrow H^1(\hat{K}_M, \tilde{G})/H^1(\hat{O}_M, \tilde{G}).$$

Le lemme de Harder s'applique alors à la classe $\xi = i_{k(t),c} \in H^1(k(t), \tilde{G})$ qui s'étend donc en une classe $\tilde{\xi} \in H^1(\mathbf{A}_k^1, \tilde{G})$. Choisissons un tore maximal \tilde{T}/k de \tilde{G} . Alors $\mu \subset \tilde{T}$ et comme le tore \tilde{T}_{k_t} est déployé, le théorème 90 de Hilbert assure que l'application $i_{k_t,t} : H^1_{\text{fpdf}}(k_t(t), \mu) \rightarrow H^1(k_t(t), \tilde{G})$ est triviale, puisqu'elle se factorise par $H^1(k_t(t), \tilde{T}) = 1$. Par suite, $\tilde{\xi}_{k_t} \in H^1(\mathbf{A}_{k_t}^1, \tilde{G})$ est une classe rationnellement triviale; la classe $\tilde{\xi}_{k_t}$ s'étend à la droite projective en une classe rationnellement triviale et le théorème de Grothendieck-Harder ([G], [H3]) permet de conclure que $\tilde{\xi}_{k_t} = 1$. Ainsi $\tilde{\xi} \in \text{Ker}(H^1(\mathbf{A}_k^1, \tilde{G}) \rightarrow H^1(\mathbf{A}_{k_t}^1, \tilde{G}))$, et d'après un théorème de Raghunathan-Ramanathan [RgRm], on a

$$H^1(k, G) \simeq \text{Ker}(H^1(\mathbf{A}_k^1, \tilde{G}) \rightarrow H^1(\mathbf{A}_{k_t}^1, \tilde{G})),$$

d'où $\tilde{\xi} \in H^1(k, \tilde{G})$. Spécialisant en M_0 (ce qui est possible d'après le lemme de Harder rappelé ci-dessus ou avec le lemme II.1.2), il vient $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(M_0) = i_{k,c}(M_0) = 1$, d'où $c \in C_\lambda(k(t))$. \square

La définition de l'ensemble $\text{Im}(\varphi_M)$ n'est pas très maniable, et nous allons en donner une interprétation suggérée par le cas du groupe orthogonal (exemple II.4.b), où l'on voit explicitement la dépendance de $\text{Im}(\varphi_M)$ en $k(M)$.

c. Résidus λ -spéciaux. — Notons $K = k((u))$ le corps de séries formelles sur k , d'anneau de valuation $O = k[[u]]$, et ∂_K la flèche résidu $H^1_{\text{fpdf}}(K, \mu) \rightarrow \mu(-1)(k)$.

Définition II.2.6. — Soit $r \in \mu(-1)(k)$. On dit que r est λ -spécial sur k si r appartient à l'image de l'application composée

$$G(K) \xrightarrow{\varphi_K} H^1_{\text{fpdf}}(K, \mu) \xrightarrow{\partial_K} \mu(-1)(k).$$

L'ensemble des résidus λ -spéciaux est un sous-groupe de $\mu(-1)(k)$, dont la taille, dans une certaine mesure, indique l'isotropie de G (cf. § IV). Soit M un point fermé de la droite projective.

Lemme II.2.7. — Soit $r \in \mu(-1)(k(M))$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- a) $r \in \text{Im}(\varphi_M)$;
- b) le résidu r est λ -spécial sur $k(M)$.

Si k est parfait, ce lemme est évident puisque alors suivant [GD], § 19.6, p. 100, il existe un k -isomorphisme $\hat{O}_M \simeq k(M)[[u]]$. Le cas général, selon Gabber, se voit avec le lemme suivant, qui est un lemme de Hensel sur les isogénies.

Lemme II.2.8. — Soient $\lambda_i : \tilde{G}_i \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$) une O-isogénie centrale de O-groupes réductifs de noyau le O-groupe multiplicatif B_i , $\tilde{f} : \tilde{G}_1 \times_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_2 \times_{\mathcal{O}} k$ et $f : G_1 \times_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} G_2 \times_{\mathcal{O}} k$ deux k -isomorphismes de groupes tels que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_1 \times_{\mathcal{O}} k & \xrightarrow{\lambda_{1,k}} & G_1 \times_{\mathcal{O}} k \\ \tilde{f} \downarrow \wr & & f \downarrow \wr \\ \tilde{G}_2 \times_{\mathcal{O}} k & \xrightarrow{\lambda_{2,k}} & G_2 \times_{\mathcal{O}} k. \end{array}$$

a) On peut relever les morphismes \tilde{f} et f en $\tilde{F} : \tilde{G}_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_2$ et $f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ tels que l'on ait $F \circ \lambda_1 = \lambda_2 \circ \tilde{F}$.

b) Soit (\tilde{F}, F) un relèvement de (\tilde{f}, f) comme en a). Si on note $\bar{\varphi}_i : \partial_{\mathbb{K}} \circ \varphi_{i, \mathbb{K}}$ les morphismes induits par les applications caractéristiques $\varphi_{i, \mathbb{K}} : G_i(\mathbb{K}) \rightarrow H_{\text{top}}^1(\mathbb{K}, B_i)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_1(\mathbb{K})/G_1(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} & B_1(-1)(k) \\ F \downarrow \wr & & \tilde{f}_* \downarrow \wr \\ G_2(\mathbb{K})/G_2(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} & B_2(-1)(k). \end{array}$$

Démonstration du lemme II.2.8. — Ce lemme repose sur la lissité du schéma des automorphismes des groupes semi-simples ([SGA3], vol. 3, Cor. 7.1.10) et sur la rigidité des groupes de type multiplicatif; si S et S' sont des O-groupes de type multiplicatif, on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}-\text{gr}}(S, S') = \text{Hom}_{k-\text{gr}}(S \times_{\mathcal{O}} k, S' \times_{\mathcal{O}} k)$ ([SGA3], vol. 2, lemme 3.1, p. 86).

a) Tout d'abord, posons $B_i/\mathcal{O} = \text{Ker}(\lambda_i) \subset \tilde{G}_i$ pour $i = 1, 2$, qui est un O-schéma en groupe fini de type multiplicatif suivant [SGA3], vol. 3, § 4.2. Le lemme de Hensel montre l'existence d'un isomorphisme $\tilde{F} : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ relevant \tilde{f} et il nous faut voir que \tilde{F} applique B_1 sur B_2 . Le morphisme restreint $\tilde{F} : B_1 \rightarrow \tilde{G}_2$ est à valeurs dans le centre $Z(G_2)/\text{Spec}(\mathcal{O})$ de G_2 et relève $\tilde{f} : B_1 \times_{\mathcal{O}} k \rightarrow B_2 \times_{\mathcal{O}} k \subset Z(G_2) \times_{\mathcal{O}} k$. La rigidité des groupes de type multiplicatif implique que le morphisme restreint $\tilde{F} : B_1 \rightarrow Z(G_2)$ induit l'unique isomorphisme $B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ relevant $\tilde{f} : B_1 \times_{\mathcal{O}} k \rightarrow B_2 \times_{\mathcal{O}} k$. Ainsi $\tilde{F} : G_1 \rightarrow G_2$ passe au quotient par B_1 et définit $F : G_1 \rightarrow G_2$. L'assertion b) est une conséquence directe de l'assertion a). \square

Démonstration du lemme II.2.7. — D'après la remarque 19.6.5.2, p. 100, de [GD], chap. 0, il existe un isomorphisme $f^* : \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{M}} \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{M})[[u]]$ d'anneaux complets, qui n'est pas en général un k -morphisme. Notons $f : \text{Spec}(k(\mathbb{M})[[u]]) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{M}})$. Aux deux morphismes naturels $k \hookrightarrow k(\mathbb{M}) \hookrightarrow k(\mathbb{M})[[u]]$ et $k \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{M}} \xrightarrow{f^*} k(\mathbb{M})[[u]]$ correspondent les $k(\mathbb{M})[[u]]$ -schémas en groupe $G_1 = G \times_k k(\mathbb{M})[[u]]$, $\tilde{G}_1 = G \times_k k(\mathbb{M})[[u]]$, $G_2 = G \times_k^f k(\mathbb{M})[[u]]$, $\tilde{G}_2 = \tilde{G} \times_k^f k(\mathbb{M})[[u]]$. Appliquant le lemme précédent à G_1 et G_2 , il vient $\text{Im}(\varphi_{\mathbb{M}}^1) = \text{Im}(\varphi_{\mathbb{M}}^2)$, soit précisément $\{\text{résidus } \lambda\text{-spéciaux}\} = \text{Im}(\varphi_{\mathbb{M}})$. \square

On peut alors réécrire le lemme II.2.5.

Proposition II.2.9. — Soient $c = c(t) \in H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu)$ et M_0 un point rationnel de la droite projective où c est régulière. Alors c appartient à $C_\lambda(k(t))$ si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

- a) Le résidu $\partial_M(c)$ est λ -spécial sur $k(M)$ pour tout point fermé de \mathbf{A}_k^1 .
- b) $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. \square

Notons que cette proposition est inspirée par le cas du groupe spécial orthogonal ([L], th. 3.4, p. 268).

II.3. Principes de norme

Proposition II.3.1. (Principe de norme sur les résidus). — Soit L/k une extension finie de corps et $r \in \mu(-1)(L)$ un résidu λ -spécial sur L . Alors $N_{L/k}(r)$ est λ -spécial sur k .

Démonstration. — On peut supposer L distinct de k et par la functorialité des normes supposer que l'extension L/k est monogène et donc identifier L à $k(M)$ où M est un point fermé de la droite affine. La surjectivité de la suite de localisation pour μ permet de choisir $y(t)$ dans $H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu)$ régulière sur $\mathbf{A}_k^1 - \{M\}$ satisfaisant $\partial_M(y) = r$ et $y(0) = 1$. La proposition précédente donne $y(t) \in C_\lambda(k(t))$, ce qui s'écrit $i_{k(t)}(y(t)) = 1$, donc $i_{\widehat{k}_\infty}(y(t)) = 1$. L 'infini est un k -point rationnel de la droite projective, donc \widehat{K}_∞ est le corps des séries formelles à une variable sur k . Par définition de « λ -spécial », $\partial_\infty(y(t))$ est λ -spécial sur k . La formule des résidus donne : $\partial_\infty(y(t)) = -N_{L/k}(r) \in \mu(-1)(k)$. Donc $N_{L/k}(r)$ est λ -spécial sur k . \square

Cette proposition a un intérêt en soi (cf. § IV). Ici, elle permet d'isoler un sous-groupe de $C_\lambda(k)$ stable par les normes, ce qui est le résultat principal de cette section.

Théorème II.3.2 (th. A). — Soient $\lambda : \widetilde{G} \rightarrow G$ une k -isogénie centrale de groupes réductifs définis sur un corps k , de noyau le k -groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Notons $N_{L/k} : H_{\text{fppf}}^1(L, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ la corestriction de L à k et $R(k, C_\lambda)$ le sous-groupe de $H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ défini au § II.1. Alors, on a l'inclusion

$$N_{L/k}(R(L, C_\lambda)) \subset R(k, C_\lambda) \subset H_{\text{fppf}}^1(k, \mu).$$

Démonstration. — Notons p la projection $\mathbf{P}_L^1 \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. Soit $y_0 \in R(L, C_\lambda) \subset C_\lambda(L)$. Il existe $y(t) \in C_\lambda(L(t))$ tel que $y(0) = y_0$ et $y(\infty) = 1$. En particulier $d^0(y(t)) = 0$. Posons $x(t) = N_{L/k}(y(t))$. Avec la notation des 0-cycles, on a $p^{-1}(0) = [L:k]\{0\}$ et $p^{-1}(\infty) = [L:k]\{\infty\}$. Par suite, $x(t)$ est régulière en 0 et à l'infini. Montrons que $x(t) \in C_\lambda(k(t))$. Comme $x(\infty) = 1$, il suffit de montrer que $\partial_N(x(t))$ est λ -spécial sur $k(N)$ pour tout point fermé N de \mathbf{A}_k^1 . Soit N un tel point de 0-cycle inverse $p^{-1}(N) = \sum_{i=1}^s e_i \cdot M_i$. Suivant la remarque A.4 de l'appendice A, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} N_{L/k} & : & H_{\text{fppf}}^1(L(t), \mu) \longrightarrow H_{\text{fppf}}^1(k(t), \mu) \\ & & \begin{array}{ccc} \sum_i e_i \partial_{M_i} \downarrow & & \partial_N \downarrow \end{array} \\ \sum_i N_{L(M_i)/k(N)} & : & \bigoplus_i \mu(-1)(L(M_i)) \longrightarrow \mu(-1)(k(N)) \end{array}$$

est commutatif. Alors $\partial_N(x(t)) = \sum_i e_i N_{L(M_i)/k(N)}(\partial_{M_i}(y(t)))$. Par hypothèse, $\partial_{M_i}(y(t))$ est λ -spécial sur $L(M_i)$. La proposition précédente appliquée au corps de base $k(N)$ assure que $\partial_N(x(t))$ est λ -spécial sur $k(N)$, les résidus λ -spéciaux sur $k(N)$ formant un groupe. Alors $x(t) \in C_\lambda(k(t))$ et, par spécialisation en 0, on a :

$$x(0) = N_{L/k}(y)(0) = N_{L/k}(y(0)) \in C_\lambda(k).$$

Comme $x(\infty) = 1$, $N_{L/k}(y(0)) \in R(k, C_\lambda)$. \square

Si $R(L, C_\lambda) = C_\lambda(L)$, le théorème A ci-dessus montre que l'isogénie λ satisfait au principe de norme pour l'extension L/k . Compte tenu de la functorialité II.2.4, on a donc montré le

Corollaire II.3.3. — Soient $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une isogénie centrale de k -groupes semi-simples de noyau μ , et L/k une extension finie de corps. Supposons l'une des conditions suivantes vérifiée :

- a) Le groupe $G_L(L)/R$ est trivial.
- b) Le groupe $G_{\text{ad},L}(L)/R$ est trivial.
- c) La L -variété $G_{\text{ad},L}$ est L -rationnelle.
- d) Le groupe G_L est quasi-déployé.

Alors λ satisfait le principe de norme pour l'extension L/k . \square

Les assertions sont liées par les implications $d) \Rightarrow c) \Rightarrow b)$ car on a le

Lemme II.3.4. — Soit G/k un groupe semi-simple quasi-déployé. Si le groupe G/k est simplement connexe ou bien adjoint, alors G/k est une variété k -rationnelle.

Démonstration ([CTS1], Prop. 14, p. 204). — Le groupe G possède un sous-groupe de Borel $B = T.U$ où T est un tore maximal. Notons U^- le sous-groupe unipotent opposé de U . Les groupes U et U^- sont déployés et l'application produit $U \times T \times U^- \rightarrow G$ est une immersion ouverte ayant pour image la « grosse cellule » Ω . Puisque G est adjoint ou simplement connexe, on sait [H2] que le tore T est quasi-trivial, donc k -rationnel. Ceci montre que G est k -rationnel. \square

Platonov avait conjecturé que les groupes semi-simples adjoints sont rationnels sur leur corps de définition ([PR], p. 426). Il en est ainsi pour les groupes adjoints d'indice 1A_n , ${}^2A_{2n}$ [VK] et B_n . Cette conjecture est fautive, Merkurjev ayant produit un contre-exemple avec un groupe adjoint d'indice 2D_8 non trivial pour la R-équivalence [Me2].

On peut donc conclure que le principe de norme vaut pour toute isogénie de groupes semi-simples de facteurs 1A_n , ${}^2A_{2n}$ et B_n et pour toute extension finie de k .

II.4. Exemples

a. Norme réduite. — Soit D une k -algèbre à division d'indice n . On note D^\times le groupe des unités de D , $\text{Nrd} : D \rightarrow k$ la norme réduite, $\text{SL}(D) = \text{SL}_1(D)$ le groupe spécial linéaire de D et $\text{PGL}(D)$ le groupe projectif linéaire de D . Pour la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \text{SL}(D) \xrightarrow{\lambda} \text{PGL}(D) \rightarrow 1,$$

le groupe $C_\lambda(k)$ est l'image de $\text{Nrd}(D_k^\times)$ dans $k^\times/k^{\times n} = H_{\text{ppf}}^1(k, \mu_n)$. On sait que $\text{PGL}(D)$ est k -rationnel. On retrouve ainsi le fait bien connu : si L/k est une extension finie de corps, on a $N_{L/k}(\text{Nrd}(D_L^\times)) \subset \text{Nrd}(D_k^\times)$.

b. Norme spinorielle. — On suppose que la caractéristique de k n'est pas 2. Soit q une k -forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel V . Notons $\text{SO}(q)$ (resp. $\text{Spin}(q)$) le groupe spécial orthogonal de q (resp. le groupe des spineurs de q) et $D_q(k)$ (resp. $D_q^2(k)$) le sous-groupe de k^\times engendré par les valeurs non nulles de q (resp. les produits pairs de valeurs non nulles de q). Pour la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin}(q) \xrightarrow{\lambda} \text{SO}(q) \rightarrow 1,$$

on sait que l'application caractéristique $\varphi : \text{SO}(q)(k) \rightarrow H^1(k, \mu_2) \xrightarrow{\sim} k^\times/k^{\times 2}$ est la norme spinorielle (cf. [L], p. 109). Le théorème de Cartan-Dieudonné (*loc. cit.*, p. 27) permet d'en donner une description explicite. Soit $g \in \text{SO}(q)(k)$. L'élément g est un produit de réflexions $g = \prod_{i=1, \dots, 2n} \tau_{v_i}$ ($v_i \in V$, non isotrope) et

$$\varphi(g) = \varphi\left(\prod_{i=1, \dots, 2n} \tau_{v_i}\right) = \prod_{i=1, \dots, 2n} \varphi(\tau_{v_i}) = \prod_{i=1, \dots, 2n} q(v_i) \bmod k^{\times 2}.$$

Par suite $C_\lambda(k)$ est égal à $D_q^2(k)/k^{\times 2}$.

Lemme II.4.1. — *Il y a équivalence entre les assertions*

- a) $1 \in \mathbf{Z}/2 = \mu_2(-1)$ est λ -spécial sur k ;
- b) la forme q est isotrope.

Démonstration. — Montrons que a) \Rightarrow b). On suppose donc qu'il existe $g \in \text{SO}(q)(k((t)))$ tel que $\varphi(g) = ut \bmod k((t))^{\times 2}$, $u \in k[[t]]^\times$. Il y a une décomposition $g = \prod_{i=1, \dots, 2n} \tau_{v_i}$ avec $v_i \in V \otimes_k k((t))$ pour $i = 1, \dots, n$. L'homogénéité de q permet de supposer que $v_i \in V \otimes_k k[[t]]$ et $\bar{v}_i \neq 0$ où \bar{v}_i désigne la réduction de v_i modulo t . Réduisant modulo t , il vient $\prod_{i=1, \dots, 2n} q(\bar{v}_i) = 0$, donc q est isotrope. La réciproque est évidente. \square

Le principe de norme sur les résidus (cf. § IV pour d'autres applications) fournit une nouvelle démonstration du :

Théorème II.4.2 (Springer [Sp], cf. [L], Th. 2.3, p. 198). — *Soit L/k une extension finie de corps de degré impair. Alors*

$$q_k \text{ isotrope} \Leftrightarrow q_L \text{ isotrope.} \quad \square$$

La k -rationalité de $\text{SO}(q)$ permet de retrouver le principe de norme de Knebusch.

Théorème II.4.3 ([L], p. 207). — Soit L/k une extension finie de corps. On a l'inclusion $N_{L/k}(D_q(L)) \subset D_q(k)$.

Démonstration. — On a $N_{L/k}(D_q^2(L)) \subset D_q^2(k)$ par application de II.3.3. Si q représente 1, alors $D_q^2(k) = D_q(k)$ et le résultat est clair. Sinon on choisit $\alpha \in k^\times$, une valeur de la forme q . Soit $\beta \in L^\times$ une valeur de q sur L . Alors $N_{L/k}(\alpha\beta) \in D_q^2(k) \subset D_q(k)$. Donc $N_{L/k}(\beta) = \alpha^{-[L:k]} N_{L/k}(\alpha\beta) \in D_q(k)$. \square

La méthode précédente n'est pas suffisante pour démontrer le principe de norme de Scharlau (cf. [L], th. 4.3, p. 206). Soit q une forme quadratique non dégénérée de rang pair. On note $G_q(k)$ le groupe des k -facteurs de similitude de q , *i.e.* le sous-groupe de k^\times formé des a tel que les formes q et aq soient isomorphes. Pour la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathrm{SO}(q) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{PSO}(q) \rightarrow 1,$$

on sait que $C_\lambda(k) = G_q(k)/k^{\times 2}$. On montre aisément que $1 \in \mathbf{Z}/2 = \mu_2(-1)$ est λ -spécial sur k si et seulement si la forme q est hyperbolique. Le groupe $G_q(k)$ satisfait au principe de norme mais le groupe $\mathrm{PSO}(q)(k)/\mathbf{R}$ est non trivial en général, d'après un résultat récent de Merkurjev [Me2].

III. FINITUDE DE LA R-ÉQUIVALENCE POUR LES GROUPES ALGÈBRIQUES RÉDUCTIFS DÉFINIS SUR UN CORPS GLOBAL

III.1. Introduction

On montre ici le

Théorème B. — Soit G un k -groupe algébrique réductif défini sur un corps global k . Alors le groupe $G(k)/\mathbf{R}$ est fini.

Nous avons démontré ce résultat dans la note [Gi2] pour le cas des corps de nombres. Nous nous proposons de donner ici une démonstration plus effective. Le théorème B généralise pour les corps globaux le cas des tores et des groupes réductifs quasi-déployés, pour lesquels Colliot-Thélène et Sansuc ont montré la finitude du nombre des classes de R-équivalence pour un corps k de type fini sur le corps premier [CTS1].

Dans la preuve du théorème B, il est évidemment loisible de supposer le groupe G connexe. La démonstration procède par réduction au cas d'un groupe semi-simple simplement connexe en utilisant le principe de norme établi dans la partie précédente. Colliot-Thélène et Sansuc ont remarqué qu'un théorème « *ergodique* » de Margulis résout de façon évidente le cas d'un groupe semi-simple simplement connexe.

Théorème III.1.1 ([Mr], Th. 2.4.6). — Soit G un k -groupe connexe, semi-simple, simplement connexe et presque k -simple. Tout sous-groupe normal (abstrait) de $G(k)$ est soit d'indice fini, soit inclus dans le centre de $G(k)$. \square

Démonstration du théorème B pour G semi-simple simplement connexe. — Soit G un k -groupe semi-simple simplement connexe et montrons que le groupe $G(k)/R$ est fini. On peut supposer le groupe G connexe. Quitte à écrire G comme un produit direct fini $G = \prod_i G_i$ de groupes simplement connexes presque k -simples, comme le groupe $G(k)/R$ est égal à $\prod_i G_i(k)/R$, on peut supposer le groupe G presque k -simple. On peut alors appliquer le théorème précédent au sous-groupe normal $R(k, G)$ de $G(k)$. On sait que G est k -unirationnel (cf. [Bo], p. 218, th. 18.2) et par suite le groupe $R(k, G)$ est Zariski-dense dans G , donc $R(k, G)$ ne peut être central dans $G(k)$. Par suite, le groupe $G(k)/R$ est fini. \square

Remarque. — Il existe des énoncés arithmétiques plus précis sur l'existence ou non de sous-groupes abstraits normaux non centraux pour les groupes semi-simples simplement connexes (cf. [PR], ch. 9), sur lesquels nous reviendrons au corollaire III.3.2.

III.2. Préliminaires

Soient k un corps, \bar{k} une clôture séparable de k et \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k}/k . Nous allons faire tout d'abord une réduction du problème.

a. Revêtements spéciaux.

Définition III.2.1 [Sa]. — Soit G un k -groupe algébrique réductif. On appelle k -revêtement spécial de G une k -isogénie centrale $\lambda: \tilde{G} \rightarrow G$ de k -groupes algébriques telle que \tilde{G} soit le produit direct d'un k -tore quasi-trivial et d'un k -groupe semi-simple simplement connexe.

Lemme III.2.2 ([Sa], p. 20, lemme 1.10). — Soit G un groupe algébrique réductif défini sur k . Alors il existe un tore quasi-trivial E et un entier $m \geq 1$ tel que $G^m \times E$ admette un k -revêtement spécial. \square

b. Tores flasques. — On rappelle ici l'étude de la R -équivalence sur les tores.

Définition III.2.3 [CTS1]. — Un k -tore algébrique T est dit flasque si, pour toute extension finie de corps L/k , le groupe $H^1(L, \hat{T}^0)$ est trivial.

Théorème III.2.4. — a) (Endo-Miyata, cf. [CTS2], prop. 1.3) Soit μ un k -groupe fini de type multiplicatif. Il existe une résolution flasque de μ , i.e. une suite exacte

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1,$$

où E est un k -tore quasi-trivial et S un k -tore flasque.

b) ([CTS1], th. 2) Soit T un k -tore. Il existe une résolution flasque de T , i.e. une suite exacte

$$1 \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow 1,$$

où E est un k -tore quasi-trivial et S un k -tore flasque. Cette suite exacte induit un isomorphisme

$$T(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S),$$

et chaque classe de R -équivalence sur $T(k)$ est paramétrée par $E(k)$.

c) (Cf. [CTS1], th. 1, p. 192) Soit S un k -tore flasque. Si k est un corps de type fini sur Q (resp. sur un corps fini), alors le groupe $H^1(k, S)$ est fini. \square

Nous allons ici utiliser le principe de norme établi dans la section précédente pour construire un « gros » sous-groupe de $G(k)$ d'éléments R -équivalents à $e \in G(k)$.

Proposition III.2.5. — Soit

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\lambda} G \rightarrow 1$$

un revêtement spécial et notons $C_\lambda(k)$ et $R(k, C_\lambda)$ les sous-groupes de $H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ définis au § II.1. Soit X/k la variété des sous-groupes de Borel de G (cf. § 0.6). Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ . Notons $\delta : E(k) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)$ l'application de bord associée. Alors, on a les inclusions

$$\delta(N_X(k, E)) \subset R(k, C_\lambda) \subset \delta(E(k)) = \text{Ker}(H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, S)).$$

En particulier, l'application $C_\lambda(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est bien définie.

Démonstration. — Puisque le k -tore S est flasque, il résulte aisément de la prop. 9 de [CTS1] que $H^1(k, S) = H^1(k(t), S)$. La seconde inclusion

$$R(k, C_\lambda) \subset \text{Ker}(H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, S))$$

est alors claire.

Lemme III.2.6. — Soit L/k une extension de corps quasi-déployant G . Alors $C_\lambda(L) = H_{\text{fppf}}^1(L, \mu)$.

Montrons le lemme. Un groupe simplement connexe quasi-déployé possède un tore maximal quasi-trivial (cf. [H2]). Le groupe \tilde{G}_L étant le produit d'un groupe simplement connexe et d'un tore quasi-trivial a donc un L -tore (maximal) quasi-trivial T . L'application $H_{\text{fppf}}^1(L, \mu) \rightarrow H^1(L, \tilde{G})$ se factorise par $H^1(L, T) = 1$, donc est triviale. Par suite, $C_\lambda(L) = H_{\text{fppf}}^1(L, \mu)$.

La stabilité de $R(k, C_\lambda)$ par les normes (II.3.3) permet de définir le groupe de normes du foncteur $R(\cdot, C_\lambda)$ pour la k -variété X (cf. § 0.7 pour la définition). Soit L/k une extension finie de corps quasi-déployant G . Comme $H^1(k, E)$ et $H^1(L, E)$ sont

triviaux, on a le diagramme de suites exactes suivant, où les flèches verticales sont les corestrictions :

$$\begin{array}{ccccccc} E(\mathbf{L}) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{fppf}}^1(\mathbf{L}, \mu) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{L}, \mathbf{S}) & \longrightarrow & 1 \\ \text{N}_{\mathbf{L}/k} \downarrow & & \text{N}_{\mathbf{L}/k} \downarrow & & \text{N}_{\mathbf{L}/k} \downarrow & & \\ E(k) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) & \longrightarrow & H^1(k, \mathbf{S}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

On a $C_\lambda(\mathbf{L}) = H_{\text{fppf}}^1(\mathbf{L}, \mu)$. Comme le \mathbf{L} -tore $E_{\mathbf{L}}$ est trivial pour la \mathbf{R} -équivalence, il est aisé de voir que $\delta(E(\mathbf{L})) \subset R(\mathbf{L}, C_\lambda)$. Appliquant cela à toutes les extensions finies de k quasi-déployant G , il vient

$$\delta(N_{\mathbf{X}}(k, E)) \subset N_{\mathbf{X}}(k, R(\cdot, C_\lambda)) \subset R(k, C_\lambda). \quad \square$$

c. Le cas d'un corps local. — La proposition précédente nous permet de calculer le groupe $G(k)/R$ pour un groupe défini sur un corps local k . Si $k = \mathbf{R}$ ou $k = \mathbf{C}$, la \mathbf{R} -équivalence est la relation triviale sur les tores [CTS1]. Si G/k est un groupe réductif connexe, alors les éléments semi-simples réguliers de $G(k)$ sont \mathbf{R} -équivalents à $e \in G(k)$. De plus, comme le groupe $R(k, G)$ est Zariski-dense (cf. § III.0) et comme les éléments semi-simples réguliers forment un ouvert de Zariski de G , la \mathbf{R} -équivalence est la relation triviale sur G/k . Pour un corps local non archimédien, la \mathbf{R} -équivalence est la relation triviale pour les groupes semi-simples simplement connexes [V2], mais il n'en est pas de même en général.

Proposition III.2.7. — *Soit k un corps local non archimédien et soit*

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\lambda} G \rightarrow 1$$

un revêtement spécial. Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ . Alors l'application naturelle $H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, \mathbf{S})$ induit un isomorphisme

$$G(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathbf{S}).$$

Lemme III.2.8. — *Soit k un corps local non archimédien. Soit \mathbf{X} la k -variété des sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique réductif connexe G/k . Notons \mathbf{X}/k la variété des sous-groupes de Borel de G .*

a) Soit μ le groupe fondamental du groupe adjoint G_{ad} de G et notons $N = \hat{\mu}(\bar{k})$. Alors toute extension de corps k'/k de degré N quasi-déploie le groupe G .

b) Soit E/k un k -tore quasi-trivial. Alors on a $N_{\mathbf{X}}(k, E) = E(k)$.

Démonstration du lemme III.2.8. — Notons $G_{\text{ad}}^{\text{qd}}$ la forme quasi-déployée de G_{ad} . Le groupe $G_{\text{ad}}^{\text{qd}}$ a un groupe fondamental isomorphe à μ . A la k -forme G_{ad} de $G_{\text{ad}}^{\text{qd}}$ correspond une classe $\gamma \in H^1(k, G_{\text{ad}}^{\text{qd}})$, qui est triviale si et seulement si le groupe G est quasi-déployé. D'après Kneser [Kn] (en caractéristique nulle) et Harder [H1] (en caracté-

ristique positive), on a une injection $H^1(k, G_{\text{ad}}^{\text{ad}}) \hookrightarrow H_{\text{fppf}}^2(k, \mu)$. Il suffit donc de montrer que la restriction $H_{\text{fppf}}^2(k, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(k', \mu)$ est triviale pour toute extension de corps k'/k de degré N . Il est tout d'abord clair que l'on peut supposer le \mathcal{G} -module $\hat{\mu}$ l -primaire pour un nombre premier l et $N = \hat{\mu}(\bar{k}) = l^r$. Soit \mathcal{G}_l un l -Sylow de \mathcal{G} et L/k l'extension associée. Comme la restriction $H_{\text{fppf}}^2(k, \mu) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(L, \mu)$ est injective, on peut supposer $L = k$ dans l'énoncé. D'après le corollaire suivant la proposition 20, p. 25 de [Sel], le \mathcal{G} -module $\hat{\mu}$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Par récurrence sur $\#(\hat{\mu}(\bar{k}))$, on est ramené au cas où $\hat{\mu} = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ et $[k' : k] = l$, i.e. $\mu = \mu_l$. Dans ce cas, d'après le théorème 6, p. 112, de [Sel] (en caractéristique nulle) et le théorème 6.10, p. 344, de [Mi2] (en caractéristique positive, on a $H_{\text{fppf}}^2(k, \mu_l) = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ et $H_{\text{fppf}}^2(k', \mu_l) = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. De plus la restriction $H_{\text{fppf}}^2(k, \mu_l) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(k', \mu_l)$ est la multiplication par $[k' : k]$, donc est nulle.

b) Soit E/k un tore quasi-trivial. On peut supposer que $E = R_{L/k} \mathbf{G}_m$ où L/k est une extension finie séparable de corps munie d'une valuation normalisée $w : L^\times \rightarrow \mathbf{Z}$, dont on note O_L l'anneau de valuation. Il existe une extension finie de corps k_1/k (resp. k_2/k) non ramifiée (resp. totalement ramifiée) de degré N . D'après l'assertion a), on a $X(k_1) \neq \emptyset$ (resp. $X(k_2) \neq \emptyset$). Par suite, $w(N_{L.k_2/L}((L.k_2)^\times)) = \mathbf{Z}$ et $O_L^\times \subset N_{L.k_1/L}((L.k_1)^\times)$. On a donc bien $N_X(k, E) = E(k)$. \square

Démonstration de la proposition III.2.7. — Comme dans le § II, on note $C_\lambda(k)$ l'image de l'application caractéristique de l'isogénie λ et on rappelle que l'on a une suite exacte (II.1.3)

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow C_\lambda(k)/R \rightarrow 1.$$

On sait que $\tilde{G}(k)/R = 1$ [V2] et on a donc un isomorphisme $G(k)/R \simeq C_\lambda(k)/R$. Montrons que l'on a un isomorphisme $C_\lambda(k)/R \simeq H^1(k, S)$. Rappelons que l'on a une suite exacte longue de cohomologie galoisienne

$$S(k) \rightarrow E(k) \xrightarrow{\partial_k} H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \xrightarrow{j_*, k} H^1(k, S) \rightarrow 1,$$

et que l'application $C_\lambda(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est bien définie. Soit X/k la variété des sous-groupes de Borel du groupe G . D'après la proposition III.2.5 et le lemme précédent, on a $\delta(E(k)) = \delta(N_X(k, E)) \subset R(k, C_\lambda)$, donc on a un isomorphisme $C_\lambda(k)/R \simeq H^1(k, S)$. \square

d. Groupes de normes et principe de Hasse. — Jusqu'à la fin de la section III, on fixe un corps global k et on note Ω l'ensemble de ses places, $\infty \subset \Omega$ les places archimédiennes et $(k_v)_{v \in \Omega}$ les complétés de k . Nous rappelons le théorème suivant de Kato-Saito.

Théorème III.2.9 ([KS], th. 4). — *Soit X une k -variété projective lisse géométriquement intègre. Soit E/k un k -tore quasi-trivial. Alors on a $N_X(k_v, E) = E(k_v)$ pour presque toute place v et un isomorphisme de groupes finis*

$$E(k)/N_X(k, E) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v \in \Omega} E(k_v)/N_X(k_v, E).$$

Il est à noter que Kato et Saito [KS] ont prouvé l'isomorphisme ci-dessus pour le groupe de normes usuel (*i.e.* $E = \mathbf{G}_m$) et que nous vérifierons en appendice qu'il s'étend à cette situation légèrement plus générale. Cette vérification est nécessaire, et la finitude du groupe $E(k)/N_X(k, E)$ avait été hâtivement admise dans [Gi2].

Dans le cas où X est la variété des sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique, le lemme III.2.8 montre que $E(k_v) = N_X(k_v, E)$ pour toute place non archimédienne. On a donc le

Corollaire III.2.10. — *Soit X la k -variété des sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique réductif G/k . Soit E/k un k -tore quasi-trivial.*

a) *Si k est de caractéristique $p > 0$, on a $N_X(k, E) = E(k)$.*

b) *Si k est un corps de nombres, on a un isomorphisme de groupes finis*

$$E(k)/N_X(k, E) \simeq \bigoplus_{v \in \infty} E(k_v)/N_X(k_v, E). \quad \square$$

Il est à noter que ce corollaire joint à la proposition III.2.5 implique le résultat principal (*i.e.* la finitude de $G(k)/R$) pour tout groupe réductif G/k sur un corps global k , résultat auquel nous allons donner une forme plus effective.

III.3. Démonstration du théorème principal

Théorème III.3.1. — *Soit G/k un groupe algébrique réductif défini sur un corps global k . Soit*

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\lambda} G \rightarrow 1$$

un revêtement spécial. Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ . Alors l'application naturelle $H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, S)$ induit une suite exacte de groupes

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow 1.$$

Démonstration. — Comme dans le § II, on note $C_\lambda(k)$ l'image de l'application caractéristique de l'isogénie λ et on rappelle que l'on a une suite exacte (II.1.3)

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow C_\lambda(k)/R \rightarrow 1.$$

Il faut donc montrer que l'on a un isomorphisme $C_\lambda(k)/R \simeq H^1(k, S)$. Rappelons que l'on a une suite exacte longue de cohomologie galoisienne

$$S(k) \rightarrow E(k) \xrightarrow{\delta_k} H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \xrightarrow{j_{*,k}} H^1(k, S) \rightarrow 1,$$

et que l'application $C_\lambda(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est bien définie (prop. III.2.5). Soit X/k la variété des sous-groupes de Borel du groupe G ; posons

$$H_{\text{fppf}}^1(k, \mu)_\infty = \text{Ker}(H_{\text{fppf}}^1(k, \mu) \rightarrow \prod_{v \in \infty} H_{\text{fppf}}^1(k_v, \mu)).$$

1^{re} étape. On a $\text{Ker}(\text{H}_{\text{fppf}}^1(k, \mu)_\infty \rightarrow \text{H}^1(k, \text{S})) \subset \text{R}(k, \text{C}_\lambda)$.

Comme $\delta(\text{N}_{\text{X}}(k, \text{E})) \subset \text{R}(k, \text{C}_\lambda)$ (III.2.5), il suffit de voir que

$$\text{Ker}(\text{H}_{\text{fppf}}^1(k, \mu)_\infty \rightarrow \text{H}^1(k, \text{S})) \subset \delta(\text{N}_{\text{X}}(k, \text{E})).$$

Soit donc $c \in \text{Ker}(\text{H}_{\text{fppf}}^1(k, \mu)_\infty \rightarrow \text{H}^1(k, \text{S}))$. Pour toute place $v \in \infty$, comme le groupe de Galois de k_v est cyclique, on a $\text{H}^1(k_v, \text{S}) = 1$ [CTS1]. Par suite, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \text{S}(k) & \longrightarrow & \text{E}(k) & \xrightarrow{\delta} & \text{H}_{\text{fppf}}^1(k, \mu) & \longrightarrow & \text{H}^1(k, \text{S}) \longrightarrow 1. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in \infty} \text{S}(k_v) & \longrightarrow & \prod_{v \in \infty} \text{E}(k_v) & \xrightarrow{\delta} & \prod_{v \in \infty} \text{H}_{\text{fppf}}^1(k_v, \mu) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Par ailleurs, le défaut d'approximation faible à l'infini $\text{A}_\infty(\text{S})$ est trivial (§ 0.8 pour la définition, [Sa], lemme 1.8, p. 19). Une chasse au diagramme montre qu'il existe $e \in \text{E}(k)$ tel que

- i) $\delta(e) = c$,
- ii) $e \in \text{E}(k_v)^2 \subset \text{N}_{\text{X}}(k_v, \text{E})$ pour tout $v \in \infty$.

Or d'après le corollaire III.2.10, on a un isomorphisme de groupes finis $\text{E}(k)/\text{N}_{\text{X}}(k, \text{E}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v \in \infty} \text{E}(k_v)/\text{N}_{\text{X}}(k_v, \text{E})$. Donc $e \in \text{N}_{\text{X}}(k, \text{E})$ et $c = \delta(e) \in \delta(\text{N}_{\text{X}}(k, \text{E}))$.

2^e étape. L'application $\text{R}(k, \text{C}_\lambda) \rightarrow \prod_{v \in \infty} \text{C}_\lambda(k_v)$ est surjective.

Notons $\text{U} \subset \text{G}$ l'ouvert de Zariski des éléments semi-simples réguliers. Il est clair que $\overline{\text{U}(k_v)} = \text{G}(k_v)$ pour toute place $v \in \infty$ et que l'application caractéristique $\varphi_v : \text{G}(k_v) \rightarrow \text{H}_{\text{fppf}}^1(k_v, \mu)$ est continue. Soit donc $(c_v)_{v \in \infty} \in \prod_{v \in \infty} \text{C}_\lambda(k_v)$. Pour toute place $v \in \infty$, il existe $g_v \in \text{U}(k_v)$ tel que $\varphi(g_v) = c_v$. D'après le corollaire 3.5.c, p. 26, de [Sa], le défaut d'approximation faible à l'infini $\text{A}_\infty(\text{G})$ est trivial. Par suite, il existe $g \in \text{U}(k)$ tel que $\text{Res}_k^{k_v}(\varphi(g)) = c_v$ pour tout $v \in \infty$. Posons $\text{T} = \text{Z}(g)$. Le k -tore T admet une résolution flasque $1 \rightarrow \text{S}' \rightarrow \text{E}' \rightarrow \text{T} \rightarrow 1$, donnant lieu au diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} \text{E}'(k) & \xrightarrow{\nu'} & \text{T}(k) & \longrightarrow & \text{H}^1(k, \text{S}') & \longrightarrow & 1. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{v \in \infty} \text{E}'(k_v) & \xrightarrow{\nu'} & \prod_{v \in \infty} \text{T}(k_v) & \longrightarrow & 1 & & \end{array}$$

Comme le défaut d'approximation faible $\text{A}_\infty(\text{E}')$ est trivial, une chasse au diagramme montre qu'il existe un élément $t \in \nu'(\text{E}'(k))$ proche de g dans $\text{T}(k_v)$ pour tout $v \in \infty$. Les classes de R-équivalence de T sont paramétrées par la variété k -rationnelle E' (III.2.4.b) donc $t \in \text{R}(k, \text{T}) \subset \text{R}(k, \text{G})$, $\varphi(t) \in \text{R}(k, \text{C}_\lambda)$ et l'on a $\text{Res}_k^{k_v}(\varphi(t)) = c_v$ pour toute place $v \in \infty$. Ceci achève cette seconde étape.

Ces deux étapes suffisent pour établir l'injectivité du morphisme $C_\lambda(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$. En effet, si $c \in \text{Ker}(C_\lambda(k) \rightarrow H^1(k, S))$, la seconde étape permet de supposer que $c \in \text{Ker}(H^1(k, \mu)_\infty \rightarrow H^1(k, S))$ et donc on a $c \in R(k, C_\lambda)$ par la première étape.

3^e étape. L'application $C_\lambda(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est surjective.

Il faut voir que l'application composée $C_\lambda(k) \hookrightarrow H^1_{\text{fppf}}(k, \mu) \xrightarrow{j_k} H^1(k, S)$ est surjective. Le diagramme de la première étape ci-dessus et l'assertion $A_\infty(E) = 1$ montrent que le morphisme $H^1_{\text{fppf}}(k, \mu)_\infty \rightarrow H^1(k, S)$ est surjectif. Par ailleurs, le principe de Hasse pour les toseurs sous un groupe semi-simple simplement connexe [Kn] [H1] [Ch] montre que $H^1(k, \tilde{G}) = \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, \tilde{G})$. On a donc le diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H^1_{\text{fppf}}(k, \mu)_\infty & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & C_\lambda(k) & \longrightarrow & H^1_{\text{fppf}}(k, \mu) & \xrightarrow{i_k} & H^1(k, \tilde{G}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \prod_{v \in \infty} C_\lambda(k_v) & \longrightarrow & \prod_{v \in \infty} H^1_{\text{fppf}}(k_v, \mu) & \xrightarrow{\prod_{v \in \infty} i_{k_v}} & \prod_{v \in \infty} H^1(k_v, \tilde{G})
 \end{array}$$

assurant l'inclusion $H^1_{\text{fppf}}(k, \mu)_\infty \subset C_\lambda(k)$. Il en résulte que l'application $C_\lambda(k) \rightarrow H^1(k, S)$ est surjective. Ceci achève la démonstration. \square

Soit maintenant G/k un groupe réductif. Nous allons voir que le groupe $G(k)/R$ est fini. Suivant le lemme III.2.2, il existe un revêtement spécial $\lambda : \tilde{G} \times E_1 \rightarrow (G)^m \times E_2$ où E_1, E_2 sont des tores quasi-triviaux, m un entier positif et \tilde{G} un groupe semi-simple simplement connexe. Notons $1 \rightarrow \text{Ker}(\lambda) \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de $\text{Ker}(\lambda)$. Comme les tores E_1 et E_2 sont des variétés k -rationnelles, le théorème précédent montre l'exactitude de la suite de groupes

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow (G(k)/R)^m \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow 1.$$

D'après Margulis, le groupe $\tilde{G}(k)/R$ est fini (§ III.0). Le théorème ci-dessus joint à la finitude du groupe $H^1(k, S)$ montre que le groupe $G(k)/R$ est fini ainsi que l'inégalité

$$\#(G(k)/R)^m \leq \#(\tilde{G}(k)/R) \times \#H^1(k, S).$$

On a donc bien montré le théorème annoncé dans l'introduction de cette partie. Dans le cas où k est de caractéristique nulle (corps de nombres), tout groupe algébrique linéaire connexe G est le produit semi-direct de son radical unipotent et d'un groupe réductif G_{red} . Or les groupes unipotents sont k -rationnels en caractéristique nulle et par suite on a $G(k)/R \simeq G_{\text{red}}(k)/R$, qui est fini.

III.4. Applications

a. Les résultats de Platonov, Rapinchuk, Chernousov et Tomanov sur le groupe de Whitehead et sur les sous-groupes normaux des groupes de points rationnels ([PR], chap. 9, [T3]) montrent la trivialité de $\tilde{G}(k)/R$ dans de nombreux cas. On en déduit le

Corollaire III.4.1. — *Les hypothèses sont celles du théorème III.3.1 ci-dessus. On a $\tilde{G} = E \times \prod_i R_{k_i/k} \tilde{G}_i$ où les $R_{k_i/k} \tilde{G}_i$ sont les facteurs simples de \tilde{G} et E un k-tore quasi-trivial. Dans les cas suivants :*

- 1) le corps k est un corps global de caractéristique $p > 0$, ou un corps de nombres imaginaire pur,
- 2) on suppose les deux assertions ci-dessous vérifiées
 - a) les facteurs simples isotropes \tilde{G}_i/k_i ne sont pas des k_i -formes de E_6 de rang relatif 1,
 - b) les facteurs simples anisotropes \tilde{G}_i/k_i sont soit de l'un des types ${}^1A_n, C_n$ ($n \geq 2$), 1D_n ($n \geq 4$), ${}^2D_n, E_7, E_8, F_4, G_2$, soit des groupes $SU(L_i/k_i, f)$ pour une forme hermitienne non dégénérée f pour l'extension quadratique L_i/k_i (type 2A_n),

on a un isomorphisme $G(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$. \square

Remarque. — Comme le groupe $H^1(k, S)$ ne dépend que de la forme quasi-déployée de G , dans les cas du corollaire, il résulte que le groupe $G(k)/R$ ne dépend que de la forme quasi-déployée de G . On ignore s'il en est ainsi généralement.

De plus, comme pour le principe de Hasse et l'approximation faible, la R-équivalence se comporte bien pour les isogénies de groupes semi-simples absolument presque simples. En effet, le centre d'un groupe semi-simple absolument presque simple est déployé par une extension galoisienne métacyclique (*i.e.* les sous-groupes de Sylow du groupe de Galois sont cycliques). Dans ce cas, dans le théorème principal, on peut choisir une résolution flasque $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ telle que le tore S est déployé par une extension métacyclique et ainsi $H^1(k, S) = 1$ d'après le corollaire 3, p. 200, de [CTS1].

Corollaire III.4.2. — *Soit G/k un groupe semi-simple absolument presque k -simple défini sur un corps global k et soit \tilde{G} un revêtement universel. Alors l'application*

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R$$

est surjective. \square

b. *Sur la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc.* — Supposons désormais que k est un corps de nombres et que G est semi-simple. Dans ce cas, nous allons voir que le théorème principal III.3.1 est en plein accord avec la philosophie de la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS3]. On rappelle que si X/k est une variété lisse géométriquement intègre satisfaisant $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$ et $X(k) \neq \emptyset$, et si H/k est un k -groupe de type multiplicatif, on a une suite exacte (*loc. cit.*, § 2, p. 408)

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^1(k, H) \rightarrow H^1(X, H) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{H}, \text{Pic}(\bar{X})) \rightarrow 0.$$

Si, de plus, $\hat{H} = \text{Pic}(\bar{X})$, on dit qu'un X -torseur sous H est universel si le type χ de sa classe est l'identité de \hat{H} . Soit $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ un revêtement universel de G , de noyau le k -groupe fini μ . On définit un morphisme de \mathcal{G} -modules $\lambda_* : \tilde{\mu} \rightarrow \text{Pic}(\bar{G})$ en associant à un caractère $\alpha \in \text{Hom}(\mu, \mathbf{G}_m)$ la classe de $\alpha_* \tilde{G} \rightarrow G$ dans $\text{Pic}(\bar{G})$. Il est connu ([Sa], lemme 6.9 et cor. 6.11) que λ_* est un isomorphisme et suivant Rosenlicht, on a $\bar{k}[G]^\times = \bar{k}^\times$ (cf. [Sa], lemme 6.5, p. 39). Il est immédiat que $\tilde{G} \rightarrow G$ est un toseur universel sous μ (cf. [CTS3], Prop. 1.5.2 (iii)). D'après Hironaka, il existe une k -compactification lisse $j : G \hookrightarrow V(G)$. De l'égalité $\bar{k}[G]^\times = \bar{k}^\times$, on tire une suite exacte de \mathcal{G} -modules

$$0 \rightarrow \text{Div}_{\bar{V}(G) \setminus \bar{G}}(\bar{V}(G)) \rightarrow \text{Pic}(\bar{V}(G)) \xrightarrow{j_*} \text{Pic}(\bar{G}) \rightarrow 0,$$

où $\text{Div}_{\bar{V}(G) \setminus \bar{G}}(\bar{V}(G))$ désigne le groupe des diviseurs sur $\bar{V}(G)$ à support en dehors de \bar{G} , qui est un groupe libre de type fini et même un \mathcal{G} -module de permutation. On sait que $\text{Pic}(\bar{V}(G))$ est un \mathbf{Z} -module libre de type fini. On note

$$1 \rightarrow \mu \xrightarrow{j_\#} S_e \rightarrow E_e \rightarrow 1$$

la suite exacte duale de la suite de \mathcal{G} -modules ci-dessus. La suite exacte (*) ci-dessus montre qu'il existe un toseur universel $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} V(G)$, unique à isomorphisme non unique près, dont la fibre au point $e \in G(k) \subset V(G)(k)$ est triviale. Alors, il existe un isomorphisme (non unique) $\rho : \tilde{G} \times^\mu S_e \xrightarrow{\sim} G \times_{V(G)} \mathcal{E}$ et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{G} \times^\mu S_e & \xrightarrow{\rho} & G \times_{V(G)} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\
 \uparrow j_\# \cdot & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \tilde{G} & \xrightarrow{\lambda} & G & \xrightarrow{j} & V(G)
 \end{array}$$

Rappelons que l'application caractéristique $\Phi_{\mathcal{E}} : V(G)(k) \rightarrow H^1(k, S_e)$ de π est constante sur les classes de R -équivalence. En effet, puisque $V(G)$ est propre, toute application rationnelle $\mathbf{A}^1 \rightarrow V(G)$ définie en 0 et 1 se prolonge en un morphisme $\mathbf{A}^1 \rightarrow V(G)$ et l'on a $H^1(k, S_e) = H^1(\mathbf{A}_k^1, S_e)$. Par suite, on peut définir une application

$$\Psi_{\mathcal{E}} : G(k)/R \rightarrow H^1(k, S_e).$$

De plus, comme l'application caractéristique d'un toseur ne dépend que de sa classe d'isomorphisme, le diagramme ci-dessus (**) induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{G}(k) & \xrightarrow{\lambda_*} & G(k) & \xrightarrow{\varphi_k} & H^1(k, \mu) \\
 \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \downarrow j_\# \cdot \\
 V(G)(k) & \xrightarrow{\Phi} & & & H^1(k, S_e)
 \end{array}$$

indiquant que $\Psi = \Psi_{\mathcal{E}}$ est un morphisme de groupes, nul sur $\lambda_*(\tilde{G}(k)/R)$.

Théorème III.4.3. — Soit G/k un groupe semi-simple défini sur un corps de nombres k et μ son groupe fondamental. Soit $j : G \hookrightarrow V(G)$ une k -compactification lisse de G et S_e le k -tore dual du module galoisien $\text{Pic}(\bar{V}(G))$. On note $\Psi : G(k)/R \rightarrow H^1(k, S_e)$ le morphisme construit précédemment.

a) Pour toute place v , on a un isomorphisme de groupes

$$\Psi_v : G(k_v)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k_v, S_e).$$

b) On a une suite exacte de groupes finis

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \xrightarrow{\Psi} H^1(k, S_e) \rightarrow 1.$$

Démonstration. — On va montrer tout d'abord l'assertion b). Soit $1 \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow 1$ une résolution flasque de μ . La propriété « verselle » d'une résolution flasque (cf. [CTS2], § 0.5) montre qu'il existe un morphisme $f : S_e \rightarrow S$ (non unique) tel que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & S_e & \longrightarrow & E_e & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & S & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Le diagramme (***) ci-dessus implique la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{G}(k)/R & \longrightarrow & G(k)/R & \xrightarrow{\Psi} & H^1(k, S_e) & \longrightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \downarrow f_* & & \\ \tilde{G}(k)/R & \longrightarrow & G(k)/R & \longrightarrow & H^1(k, S) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

On veut montrer que $H^1(k, S_e) \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$. L'exactitude en $G(k)/R$ de la suite $\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow H^1(k, S_e) \rightarrow 1$ résulte immédiatement de l'exactitude de la suite $\tilde{G}(k)/R \rightarrow G(k)/R \rightarrow H^1(k, S) \rightarrow 1$. Il reste à voir que le morphisme

$$G(k) \rightarrow H^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, S_e)$$

est surjectif. D'après Voskresenskiï ([V1], th. 3, cf. [Sa], prop. 9.3 et rem. 9.3.1), le \mathcal{G} -module $\hat{S}_e = \text{Pic}(\bar{V}(G))$ est un \mathcal{G} -module quasi-flasque : si Γ_e est le groupe de Galois de l'extension minimale déployant S_e , pour tout sous-groupe cyclique $\Gamma \subset \Gamma_e$, on a $H^1(\Gamma, \hat{S}_e^0) = 0$. La preuve de la surjectivité de $G(k) \rightarrow H^1(k, S)$ (troisième étape de la preuve du théorème principal) vaut en remplaçant S par S_e et flasque par quasi-flasque puisqu'on a la surjectivité de $H^1_{\text{ppf}}(k, \mu)_\infty \rightarrow H^1(k, S_e)$. Ainsi le morphisme $G(k) \rightarrow H^1(k, S_e)$ est surjectif. Pour a), il suffit de montrer d'après ce qui précède que

le morphisme $G(k_v) \rightarrow H^1(k_v, S_c)$ est surjectif pour toute place v . Si v est non archimédienne, cela résulte de la trivialité de $H^1(k_v, \tilde{G})$. Si v est archimédienne, on a $H^1(k_v, S_c) = 0$, puisque S_c est quasi-flasque. \square

Corollaire III.4.4. — *Gardons les mêmes hypothèses qu'en III.4.3.*

a) *On pose $\mathfrak{w}^1(k, S_c) = \text{Ker}(H^1(k, S_c) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, S_c))$. Alors on a une suite exacte de groupes*

$$\tilde{G}(k)/R \rightarrow \text{Ker}(G(k)/R \rightarrow \prod_{v \in \Omega} G(k_v)/R) \rightarrow \mathfrak{w}^1(k, S_c) \rightarrow 1.$$

b) *La compactification $V(G)$ définit un isomorphisme de groupes finis $A(G) \simeq \mathcal{U}^1(k, S_c)$ ([Sa], cor. 3.4 et th. 9.5) et une suite exacte de groupes*

$$G(k)/R \rightarrow \prod_{v \in \Omega} G(k_v)/R \rightarrow \mathcal{U}^1(k, S_c) \rightarrow 1. \quad \square$$

Il est à noter que la suite exacte b) ci-dessus a été établie auparavant, de façon différente, par Nguyễn Quôc Thàng [Ng]. De plus, ces deux suites exactes sont analogues aux suites exactes obtenues pour les tores ([CTS1], Prop. 18, 19, p. 220).

IV. EXTENSIONS NON DÉPLOYANTES DE GROUPES ALGÈBRIQUES SEMI-SIMPLES

IV.1. Introduction

Soit k un corps. On note \bar{k} une clôture séparable de k et \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k} sur k . Soit X un type d'algèbre de Lie simple. Soit G un groupe algébrique défini sur k , connexe, semi-simple et simple de type X . On fixe une famille $(k_i/k)_{i=1, \dots, r}$ d'extensions finies de corps, non isomorphes deux à deux.

L'ensemble $S(G)$ des entiers de torsion de G a été défini par Serre ([Se2], § 2.2). Dans [T2], Tits pose la question suivante (avec p.g.c.d. $([k_i : k]) = 1$) :

(Q) : Si les groupes G_{k_i} sont déployés, et si p.g.c.d. $([k_i : k])$ ne contient pas de facteurs premiers appartenant à l'ensemble $S(G)$, le groupe G_k est-il déployé?

On donne ici une méthode générale permettant de répondre à cette question pour les groupes absolument presque k -simples tels que le centre du revêtement universel de G soit non trivial.

Théorème C. — *Soit G un k -groupe algébrique connexe, semi-simple, absolument presque k -simple d'un des types suivants A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7 . Si G_{k_i} est déployé pour $i = 1, \dots, r$ et si p.g.c.d. $([k_i : k])$ ne contient pas de facteurs premiers appartenant à l'ensemble $S(G)$, alors le groupe G est déployé.*

Rappelons la description de $S(G)$ pour les différents types de systèmes de racines.

- $S(A_n) = \{ 2, \text{diviseurs premiers de } n + 1 \}$;
- $S(B_n) = S(C_n) = S(G_2) = \{ 2 \}$;
- $S(D_n) = \{ 2 \}$ ($n \neq 4$);
- $S(D_4) = S(E_6) = S(E_7) = \{ 2, 3 \}$;
- $S(E_8) = \{ 2, 3, 5 \}$.

Pour le théorème C, le cas de A_n est bien connu et les résultats d'injectivité de Bayer-Lenstra [BL] couvrent les cas de B_n , C_n et D_n . Les seuls cas nouveaux de ce théorème sont donc les types E_6 et E_7 . Les cas de E_8 , F_4 et G_2 échappent à la méthode précédente. Le théorème est vrai pour G_2 car il se déduit du théorème 9 (et th. 11 en caractéristique 2) de [Se2]. Le théorème est également vrai pour le groupe F_4 en caractéristique distincte de 2 et 3. En effet ([Se2], § 9), l'ensemble $H^1(k, F_4)$ classe les k -algèbres de Jordan exceptionnelles et on sait (*ibid.*) que si les invariants cohomologiques f_3 , f_5 et g_3 d'une algèbre de Jordan exceptionnelle sont triviaux (c'est évidemment le cas pour une algèbre déployée par des extensions de corps dont le p.g.c.d. des degrés est premier à 6), l'algèbre est déployée.

Par ailleurs, Sansuc a répondu affirmativement à Q , sous une forme plus forte, dans le cas des corps de nombres ([Sa], cor. 4.8, p. 33).

L'énoncé du théorème C pour E_8 demeure le seul cas non connu.

IV.2. Réductions

Soit G/k un groupe comme dans l'énoncé du théorème C. Quitte à considérer le groupe dérivé du radical anisotrope de G [T1] (dont le type est composé d'éléments de la liste qui ne font pas apparaître de nouveaux entiers de torsion), il est clair que l'on peut supposer le groupe G anisotrope. On peut de plus supposer G adjoint. Montrons à présent que l'on peut également supposer que G est une forme interne d'un groupe déployé. Notons G^d/k la forme déployée de G et $\text{Aut}(G^d)$ son groupe d'automorphismes, qui est lisse. On a une suite exacte scindée de faisceaux galoisiens

$$1 \rightarrow G^d \xrightarrow{\text{Int}} \text{Aut}(G^d) \xrightarrow{p} \nu \rightarrow 1,$$

où ν est le k -groupe fini des automorphismes extérieurs de G^d . On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(k, G) & \xrightarrow{\text{Int}_*} & H^1(k, \text{Aut}(G)) & \xrightarrow{p_*} & H^1(k, \nu) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \prod_{i=1, \dots, r} H^1(k_i, G) & \xrightarrow{\text{Int}_*} & \prod_{i=1, \dots, r} H^1(k_i, \text{Aut}(G)) & \xrightarrow{p_*} & \prod_{i=1, \dots, r} H^1(k_i, \nu) \end{array}$$

Lemme IV.2.1. — *On suppose que p.g.c.d. $([k_i : k])$ n'a pas de facteur dans $S(G)$. Alors, l'application $H^1(k, \nu) \rightarrow \prod_{i=1, \dots, r} H^1(k_i, \nu)$ a un noyau trivial.*

Démonstration du lemme IV.2.1. — Le groupe ν est un k -groupe constant. La table de [Se2], § 2.2, nous assure que p.g.c.d. $([k_i : k])$ est premier à l'ordre de ν . Si Δ est distinct de D_4 , le groupe ν est un k -groupe fini commutatif constant et un argument classique de restriction-corestriction montre le lemme. On suppose donc que $\Delta = D_4$ et que $\nu = S_3$, le groupe de permutations de trois éléments. On a une suite exacte de groupes $1 \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rightarrow S_3 \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow 1$ et une chasse au diagramme évidente implique que $\text{Ker}(H^1(k, S_3) \rightarrow \prod_{i=1, \dots, r} H^1(k_i, S_3)) = 1$. \square

Le lemme montre donc que si tous les G_{k_i} sont déployés et si p.g.c.d. $([k_i : k])$ n'a pas de facteur dans $S(G)$, alors le groupe G est une forme interne d'un groupe déployé. En conclusion, on pourra donc supposer dans la démonstration du théorème C que le groupe G/k est un groupe semi-simple adjoint anisotrope, qui est une k -forme interne de sa forme déployée.

IV.3. Une conséquence du principe de norme sur les résidus II.3.1

Soit $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ une k -isogénie centrale de k -groupes semi-simples, de noyau μ qui est un k -groupe fini de type multiplicatif.

Proposition IV.3.1. — *Dans la situation ci-dessus, supposons que $\mu(-1)(k)$ soit non trivial et que l'ordre de $\mu(-1)(k)$ soit premier à p.g.c.d. $([k_i : k])$. Si le groupe G_{k_i} est déployé pour $i = 1, \dots, r$, alors le groupe G est isotrope.*

Cette proposition implique le théorème C. En effet, on considère un revêtement universel $\lambda : \tilde{G} \rightarrow G$ du groupe G où G est supposé adjoint, anisotrope et forme interne d'un groupe déployé de type A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7 . Supposons que le groupe G_{k_i} est déployé pour $i = 1, \dots, r$ et que p.g.c.d. $([k_i : k])$ n'a pas de facteur premier appartenant à l'ensemble $S(G)$. Alors le centre μ de \tilde{G} n'est pas trivial, satisfait $\mu(-1)(k) \neq 1$ et comme $\#\mu(-1)(k)$ est un produit d'entiers de $S(G)$, la proposition ci-dessus montre que le groupe G est isotrope. Contradiction.

Démonstration de la proposition IV.3.1. — Cette démonstration est l'application du principe de norme sur les résidus II.3.1 avec un argument habituel de restriction-corestriction en identifiant le groupe des résidus λ -spéciaux grâce au lemme suivant.

Lemme IV.3.2. — *a) Si le groupe G est déployé, le groupe des résidus λ -spéciaux est le groupe $\mu(-1)(k)$.*

b) Si le groupe G est anisotrope, le groupe des résidus λ -spéciaux est trivial.

Démonstration du lemme. — Soit $K = k((u))$ d'anneau de valuation $O = k[[u]]$. On a un diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 G(O) & \xrightarrow{\varphi_O} & H^1_{\text{fppf}}(O, \mu) & \xrightarrow{i_O} & H^1(O, \tilde{G}) \\
 \downarrow & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
 G(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & H^1_{\text{fppf}}(K, \mu) & \xrightarrow{i_K} & H^1(K, \tilde{G}) \\
 & & \downarrow \partial_K & & \\
 & & \mu(-1)(k) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 1 & &
 \end{array}$$

Le groupe des résidus λ -spéciaux sur k est par définition l'image de l'application $\partial_K \circ \varphi_K$.

a) Supposons que G est déployé et notons T un tore déployé maximal de G . On a $\mu \subset T$. L'application $i_k : H^1(k, \mu) \rightarrow H^1(k, G)$ factorise par l'application naturelle $1 = H^1(k, T) \rightarrow H^1(k, G)$, donc i_k est l'application triviale. Par suite, l'application caractéristique $\varphi_k : G(k) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(k, \mu)$ est surjective et il en est de même de φ_K . L'application ∂_K étant aussi surjective, le groupe des résidus λ -spéciaux est le groupe $\mu(-1)(k)$.

b) Supposons que G soit anisotrope. Un théorème de Bruhat-Tits-Rousseau ([BT], cf. [Rg], Prop. 1.2) assure que si G est anisotrope, on a $G(O) = G(K)$. Par suite, comme l'application ∂_K est nulle sur $H^1_{\text{fppf}}(O, \mu)$, le groupe des résidus λ -spéciaux est trivial. \square

Appendice A : Flèches résidus

Soit k un corps et \bar{k} , une clôture séparable de k dont on note \mathcal{G} le groupe de Galois. Soit O un anneau complet pour une valuation discrète normalisée, de corps des fractions K et de corps résiduel k . Notons $O \hookrightarrow O_1$ l'extension maximale non ramifiée de O , de corps des fractions K_1 . On va montrer la proposition suivante.

Proposition A.1.

a) Soit μ un O -groupe de type multiplicatif fini. Il existe une application naturelle de résidu $\partial : H^1_{\text{fppf}}(K, \mu) \rightarrow \mu(-1)(k)$ telle que l'on ait la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(O, \mu) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(K, \mu) \xrightarrow{\partial} \mu(-1)(k) \rightarrow 0.$$

b) Soit μ un k -groupe de type multiplicatif fini. Il existe une suite exacte de localisation

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{fppf}}(k, \mu) & \longrightarrow & H^1_{\text{fppf}}(k(t), \mu) & \xrightarrow{\oplus \partial_M} & \\
 & & & & & & \\
 & & \oplus \partial_M & \oplus \mu(-1)(k(M)) & \xrightarrow{\Sigma N_{k(M)/k}} & \mu(-1)(k) & \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective \mathbf{P}^1_k .

Il est à noter que l'on n'a pas de généralisation simple en degrés cohomologiques supérieurs (même en degré 2) des suites exactes ci-dessus, comme le montre le travail de Kato [K].

Lemme A.2.

a) Soit T un O -tore. On a une suite exacte naturelle de \mathcal{G} -modules

$$0 \rightarrow T(O_1) \rightarrow T(K_1) \xrightarrow{\circ} \hat{T}^0 \rightarrow 0,$$

scindée par le choix d'une uniformisante de K . Les applications naturelles $H^1(\mathcal{G}, T(O_1)) \rightarrow H^1(O, T)$ et $H^1(\mathcal{G}, T(K_1)) \rightarrow H^1(K, T)$ sont des isomorphismes.

b) Soit T un k -tore. On a une suite exacte naturelle de \mathcal{G} -modules

$$0 \rightarrow T(k_s) \rightarrow T(k_s(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \bigoplus_{M \in \mathbf{P}_k^1} \hat{T}^0 \xrightarrow{\Sigma} \hat{T}^0 \rightarrow 0,$$

induisant la suite exacte

$$0 \rightarrow T(k) \rightarrow T(k(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \bigoplus_{M \in \mathbf{P}_k^1} \hat{T}^0(k(M)) \xrightarrow{N_{k(M)/k}} \hat{T}^0(k) \rightarrow 0,$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective \mathbf{P}_k^1 . L'application naturelle

$$H^1(\mathcal{G}, T(k_s(t))) \rightarrow H^1(k(t), T)$$

est bijective. \square

Démonstration de la proposition A.1. — a) Il existe une suite exacte $1 \rightarrow \mu \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow 1$ de O -schémas en groupes sur $\text{Spec}(O)_{\text{ét}}$ où E est un O -tore quasi-trivial et S un O -tore.

Lemme A.3. — On a une suite exacte naturelle de \mathcal{G} -modules

$$0 \rightarrow \hat{E}^0 \rightarrow \hat{S}^0 \rightarrow \mu(-1) \rightarrow 0.$$

Démonstration du lemme A.3. — On a une suite exacte de \mathcal{G} -modules

$$0 \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{E} \rightarrow \hat{\mu} \rightarrow 0.$$

Prenant la suite exacte de cohomologie associée au foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\cdot, \mathbf{Z}) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathcal{G}]}(\cdot, \mathbf{Z})$, on a

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}, \mathbf{Z}) \rightarrow \hat{E}^0 \rightarrow \hat{S}^0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{\mu}, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{E}, \mathbf{Z}) = 0,$$

car \hat{E} est un \mathcal{G} -module de permutation. La suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow 0$ donne lieu à la suite exacte

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}, \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{\mu}, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{\mu}, \mathbf{Q}) = 0,$$

car \mathbf{Q} est uniquement divisible. Donc $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{\mu}, \mathbf{Z})$ et par dualité on a un isomorphisme de \mathcal{G} -modules $\text{Hom}(\hat{\mu}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \text{Hom}_{k_i - \text{ét}}(\mu_n, \mu) = \mu(-1)$. On a donc une suite exacte de \mathcal{G} -modules $0 \rightarrow \hat{E}^0 \rightarrow \hat{S}^0 \rightarrow \mu(-1) \rightarrow 0$. \square

Appendice B : Démonstration d'un principe de Hasse pour les groupes de normes

Soit k un corps global, Ω l'ensemble de ses places et $(k_v)_{v \in \Omega}$ les complétés de k et $(O_v)_{v \in \Omega \cup \infty}$ les anneaux d'entiers aux places finies. Soit $k_0 \subset k$ un sous-corps tel que l'extension k/k_0 soit séparable (cette hypothèse n'est pas absolument nécessaire), Ω_0 l'ensemble de ses places et $p_{k/k_0} : \Omega \rightarrow \Omega_0$ la norme. Soit X/k_0 une variété projective lisse irréductible. On note $\tilde{N}_X(k) \subset k^\times$ le sous-groupe engendré par les $N_{k'_0 \otimes_{k_0} k}((k'_0 \otimes_{k_0} k)^\times)$ pour les extensions finies de corps k'_0/k_0 satisfaisant $X(k'_0) \neq \emptyset$. De même, pour un corps k_v , on définit $\tilde{N}_X(k_v)$ avec $k_{0,w} \subset k_v$ où $w = p_{k/k_0}(v)$. Pour montrer le théorème III.2.9, il est aisé de voir qu'il suffit de montrer que l'on a dans la situation ci-dessus $\tilde{N}_X(k_v) = k_v^\times$ pour presque toute place v et un isomorphisme

$$k^\times / \tilde{N}_X(k) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v \in \Omega} k_v^\times / \tilde{N}_X(k_v).$$

Le cas $k_0 = k$ correspond bien sûr au théorème initial, dont nous allons suivre la démonstration.

Lemme B.1. — *a) Soit w une place non archimédienne de k_0 telle que la variété X a bonne réduction en w . Alors pour tout nombre premier p , il existe une extension finie non ramifiée $k'_{0,w}/k_{0,w}$ de degré premier à p telle que $X(k'_{0,w}) \neq \emptyset$. Pour toute place v de k au-dessus de w , on a $\tilde{N}_X(k_v) = k_v^\times$.
b) Pour tout ensemble fini de places S , l'image de $\tilde{N} \rightarrow \prod_{v \in S} \tilde{N}_X(k_v)$ est dense.*

Démonstration. — L'assertion a) résulte directement du lemme 8 de [KS].

b) Fixons tout d'abord une place $v \in S$ dont on note $w = p_{k/k_0}(v)$ la projection sur Ω_0 . Soit $a_v \in N_{k'_0 \otimes_{k_0} k, k/k_v}((k'_0 \otimes_{k_0} k)^\times)$ pour une extension finie de corps k'_0/k_0 satisfaisant $X(k'_0) \neq \emptyset$. D'après le lemme 4 de [KS], si on note k_0^a la clôture algébrique de k_0 dans k'_0 , la partie $X(k_0^a)$ est dense dans $X(k'_0)$ et il existe donc une extension finie k'_0/k_0 contenue dans k_0^a telle que $X(k'_0) \neq \emptyset$. Par construction, la place w de k_0 est totalement décomposée en k'_0 , et ainsi il existe $a \in N_{k'_0 \otimes_{k_0} k}((k'_0 \otimes_{k_0} k)^\times)$ tel que a est proche de a_v et a est suffisamment proche de 1 pour les autres places de S . Il est clair que ceci implique le lemme. \square

On note J_k le groupe des idèles de k et $C_k = J_k/k^\times$ le groupe de classes. On note \tilde{M} le sous-groupe de J_k constitué des idèles $(a_v)_v$ tels que $a_v \in \tilde{N}_X(k_v)$ pour toute place v , $\tilde{N} = \tilde{N}_X(k)$ et $\tilde{C}_k = \tilde{M}/\tilde{N}$.

Lemme B.2. — *On a $\tilde{C}_k/m\tilde{C}_k \simeq C_k/mC_k$ pour tout entier $m \geq 2$.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, \tilde{M} est un ouvert de J_k et l'application $\tilde{C}_k \rightarrow C_k$ est surjective. Suivant sans modification la preuve originale, on est ramené à prouver l'exactitude de

$$\tilde{C}_k \xrightarrow{N_k/k} \tilde{C}_k \rightarrow \text{Gal}(E/k) \rightarrow 0$$

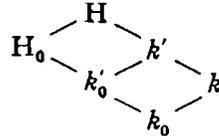
pour une extension cyclique E/k de degré premier $p = [E:k]$ où l'application $\tilde{C}_k \rightarrow \text{Gal}(E/k)$ est définie comme la composée de l'application $\tilde{C}_k \rightarrow C_k$ et de l'application de réciprocité d'Artin. La surjectivité de $\tilde{C}_k \rightarrow \text{Gal}(E/k)$ provient de la surjectivité de $C_k \rightarrow \text{Gal}(E/k)$. Soit $a = (a_v)_v$ un idéal de \tilde{M} qui s'envoie sur 0 dans $\text{Gal}(E/k)$.

Notons \mathcal{X}/U un schéma projectif lisse sur un ouvert U de $\text{Spec}(O_{k_0})$ tel que $\mathcal{X} \times_U k_0 = X$. Le lemme précédent $b)$ et le fait que l'application $N_{E/k} : \tilde{M}_E \rightarrow \tilde{M}$ est ouverte nous permet de supposer que le support de a est constitué de places non archimédiennes u_1, \dots, u_n telles que les places $w_i = \rho_{k/k_0}(u_i)$ appartiennent à U et soient non ramifiées pour l'extension k/k_0 .

D'après le lemme B1, il existe un entier N premier à p et des algèbres étales $A_{0, w_i}/k_{0, w_i}$ non ramifiées de degré N telles que $X(A_{0, w_i}) \neq \emptyset$. Le lemme de Krasner nous permet de trouver une extension de corps k'_0/k_0 de degré N satisfaisant $k' \otimes_{k_0} k_{0, w_i} = A_{0, w_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Comme $\prod_{i=1, \dots, n} O_{v_i}^\times \cdot k_{v_i}^{\times p} \subset \text{Im}(N_{E/k} : \tilde{M}_E \rightarrow \tilde{M})$ et que N est premier à p , on peut supposer que

$$a_{v_i} \in N_{k'_0 \otimes_{k_0} k_{v_i}/k_{v_i}}((k'_0 \otimes_{k_0} k_{v_i})^\times) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Quitte à rajouter une place au support de a , le théorème de Chebotarev nous permet de supposer de plus que la place w'_1 de k'_0 est inerte pour l'extension $k'_0 \otimes_{k_0} k/k$, i.e. $k'_0 \otimes_{k_0} k'_{0, w'_1}$ est un corps. On pose $k' = k'_0 \otimes_{k_0} k$, qui est un corps. D'après un lemme d'approximation de Bloch [Bc], § 3, il existe une extension finie H_0/k'_0 et des places t_1, \dots, t_n de H_0 telles que $H_{0, t_i} \simeq k'_{0, w'_i}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $X(H_0) \neq \emptyset$. On pose $H = H_0 \otimes_{k'_0} k' = H_0 \otimes_{k_0} k$. On a une injection $H \hookrightarrow H_{0, t_1} \otimes_{k'_0} k' \simeq k'_{0, w'_1} \otimes_{k'_0} k'$, donc H est un corps. On a donc le diagramme



Alors a appartient à l'image de la norme $N_{H/k} : J_H \rightarrow J_{k'} \rightarrow J_k$. Soit $a = N_{H/k}(c)$. La classe c appartient au noyau de $J_H \rightarrow \text{Gal}(EH/H) \hookrightarrow \text{Gal}(E/k)$. D'après la théorie du corps de classes, on a $c = hd$ avec $h \in H^\times$ et d contenu dans l'image de $N_{EH/H} : J_{EH} \rightarrow J_H$. Comme $H = H_0 \otimes_{k_0} k$, on a $N_{H/k}(c) = N_{H_0 \cdot k/k}(h) \in N$ et de même on a

$$N_{H/k}(d) \in \text{Im}(\tilde{M}_E \xrightarrow{N_{E/k}} \tilde{M}_k).$$

Il en résulte que $(a) \in \text{Im}(\tilde{C}_E \xrightarrow{N_{E/k}} \tilde{C}_k)$. \square

Finissons la démonstration en prouvant l'injectivité de $\tilde{C}_k \rightarrow C_k$, i.e. $\tilde{N} = \tilde{M} \cap k^\times$. Soit $a \in \tilde{M} \cap k^\times$. Soit m un entier tel que X/k_0 a un point rationnel de degré m . Le lemme précédent montre que $a = bc^{2m}$ avec $b \in \tilde{N}$ et $c \in J_k$. D'après Artin-Tate [AT], comme $ab^{-1} \in (k_v)^\times$ pour toute place v , on a $ab^{-1} \in k^{\times 2m} \subset \tilde{N}$ et finalement $a \in \tilde{N}$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AT] E. ARTIN et J. TATE, *Class Field Theory*, Benjamin (1967).
- [BL] E. BAYER-FLUCKIGER et H. W. LENSTRA, Forms in odd degrees extensions and self normal bases, *Amer. Journ. of Math.* **112** (1990), 359-373.
- [Bc] S. BLOCH, Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **114** (1981), 229-266.
- [Bo] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, 2^e édition, *Graduate Texts in Mathematics* **126** (1991), Springer-Verlag.
- [BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT et M. RAYNAUD, *Néron Models*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **21** (1990), Springer-Verlag.
- [BT] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local II, *Publ. Math. IHES* **60** (1984), 5-184.
- [Ch] V. I. CHERNOUSOV, The Hasse principle for groups of type E_8 , *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **306** (1989), 1059-1063 (en russe), et *Math. USSR-Izv.* **34** (1990), 409-423 (en anglais).
- [CTO] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et M. OJANGUREN, Espaces principaux homogènes localement triviaux, *Publ. Math. IHES* **72** (1992), 97-122.
- [CTS1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, La R-équivalence sur les tores, *Ann. Scient. ENS*, **10** (1977), 175-230.
- [CTS2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori : Applications, *J. of Alg.* **106** (1987), 148-205.
- [CTS3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, La descente sur les variétés rationnelles II, *Duke Math. J.* **54** (1987), 375-492.
- [Dg] P. DELIGNE, Variétés de Shimura. Interprétation modulaire et technique de construction de modèles canoniques, *Proc. Symp. Pure Math.* **33** (1979), 247-290.
- [Dm] M. DEMAZURE, Schémas en groupes réductifs, *Bull. S.M.F.* **93** (1973), 369-413.
- [Gil] P. GILLE, R-équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 315-320.
- [Gi2] P. GILLE, Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs, *C. R. Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 701-704.
- [Gi3] P. GILLE, *Torseurs sur la droite affine et R-équivalence*, Thèse (1994), Université Paris-Sud.
- [G] A. GROTHENDIECK, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *Am. J. Math.* **79** (1957), 121-138.
- [GD] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique EGA IV, *Publ. Math. IHES* **24** (1965) et **28** (1966).
- [H1] G. HARDER, Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen Gruppen, I *Math. Zeit.* **90** (1965), 404-428; II *Math. Zeit.* **92** (1966), 396-415; III *J. für die reine angew. Math.* **274/5** (1975), 125-138.
- [H2] G. HARDER, Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, *Inw. Math.* **4** (1967), 165-191.
- [H3] G. HARDER, Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven, *Inw. Math.* **6** (1968), 107-149.
- [K] K. KATO, Galois cohomology of complete discrete valuation fields, *Lect. Notes in Math.* **967** (1982), 215-238.
- [KS] K. KATO et S. SAITO, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), 241-275.
- [Kn] M. KNESER, Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p -adischen Körpern, I, *Math. Zeit.* **88** (1965), 40-47; II, *Math. Zeit.* **89** (1965), 250-272.
- [L] T.-Y. LAM, *The Theory of Algebraic Quadratic Forms*, Benjamin/Cummings (1980).
- [Mn] Yu. I. MANIN, *Cubic forms*, 2^e édition, North-Holland (1986).
- [Ma] G. A. MARGULIS, Finiteness of quotient groups of discrete groups, *Func. Anal. App.* **13** (1979), 178-187.
- [Me1] A. S. MERKURJEV, A norm principle for algebraic groups, *Alg bre et Analyse* **7** (1995), 77-105; trad. anglaise, *St. Petersburg Mat'i. Jour.* **7** (1996), 243-264.
- [Me2] A. S. MERKURJEV, R-equivalence and rationality problem for semi-simple adjoint classical algebraic groups, *Publ. Math. IHES* **85** (1997), 189-213.
- [Mil] J. S. MILNE, *Étale Cohomology* (1980), Princeton.
- [Mi2] J. S. MILNE, *Arithmetic duality theorems* (1986), Academic Press.

- [N] Ye. A. NISNEVICH, Espaces homogènes localement triviaux sur les schémas en groupes d'anneau de Dedekind, *C. R. Acad. Sci. Paris* **299** (1984), 5-8.
- [Ng] NOUYỄN Q. THĂNG, Weak Approximation and Manin group of R-equivalence, *Algebraic K-theory*, Fields Inst. Communications (AMS), **16** (1997), 345-354.
- [PR] V.-P. PLATONOV et A.-S. RAPINCHUK, *Algebraic Groups and Number Theory* (trad. anglaise), Academic Press (1994).
- [Rg] M. S. RAGHUNATHAN, Principal bundles admitting a rational section, *Invent. math.* **116** (1994), 409-423.
- [RgRm] M. S. RAGHUNATHAN and A. RAMANATHAN, Principal bundles on the affine line, *Proc. Indian Acad. Sci.* **93** (1984), 137-144.
- [Ro] M. ROST, Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten, *C. R. Acad. Sci. Paris* **310** (1990), 189-192.
- [Sa] J.-J. SANSUC, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques sur un corps de nombres, *J. für die Reine Angew. Math.* **327** (1981), 13-81.
- [Se1] J.-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, *Lecture Notes in Math.* **5**, 5^e édition (1994), Springer-Verlag.
- [Se2] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne : Progrès et problèmes, *Séminaire Bourbaki*, exposé 783 (1993-1994).
- [SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S.*, 1963-1964, *schémas en groupes*, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, *Lecture Notes in Math.* **151-153**, Springer (1970).
- [SGA4] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S.*, 1969-1970, *cohomologie étale*, dirigé par M. Artin et A. Grothendieck, *Lecture Notes in Math.* **269, 270, 305** (1977), Springer-Verlag.
- [Sp] T. A. SPRINGER, Sur les formes quadratiques d'indice zéro, *C. R. Acad. Sci. Paris* **34** (1952), 1517-1519.
- [V1] V. E. VOSKRESENSKIĬ, Birational Properties of Linear Algebraic Groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **34** (1970), 3-19; *Math. USSR Izv.* **5** (1971), 1-17.
- [V2] V. E. VOSKRESENSKIĬ, Questions sur la R-équivalence des groupes classiques, *Zap. Nauc. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)* **86** (1979), 19-65, 189-190.
- [VK] V. E. VOSKRESENSKIĬ and A. A. KLYACHKO, Toroidal Fano varieties and roots systems, *Math. USSR Izvestija* **24** (1985), 221-244.
- [T1] J. TITS, Classification of algebraic semisimple groups, *Proc. Symp. Pure Math.* (1966), 33-62.
- [T2] J. TITS, Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1131-1138.
- [T3] J. TITS, Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps, *Séminaire Bourbaki*, exposé 505 (1977), *Lect. Notes in Math.* **677**, 218-236, Springer-Verlag.

Philippe Gille,
 Département de Mathématiques, Bât. 425,
 Université de Paris-Sud,
 F-91405 Orsay Cedex.

Manuscrit reçu le 7 septembre 1994,

Révisé le 18 avril 1996.