« О ТЕЛАХ, СВЯЗАННЫХ С ОБЕРТЫВАЮЩИМИ АЛГЕБРАМИ АЛГЕБР ЛИ »

par И. М. ГЕЛЬФАНД И А. А. КИРИЛЛОВ

SUR LES CORPS LIÉS AUX ALGÈBRES ENVELOPPANTES DES ALGÈBRES DE LIE

par I. M. GELFAND ET A. A. KIRILLOV

Il est bien connu que des anneaux non-commutatifs interviennent de façon assez naturelle dans plusieurs questions d'analyse. Les opérateurs de la théorie des champs quantiques, les opérateurs différentiels, les algèbres (group algebras) de groupes de Lie, les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, sont autant d'exemples de tels anneaux, en plus de l'exemple classique de l'anneau de tous les opérateurs dans l'espace de Hilbert qui vient immédiatement à l'esprit. Du point de vue algébrique l'exemple de l'anneau des opérateurs différentiels sur une variété indéfiniment différentiable invariants par rapport à un groupe de difféomorphismes donné est très intéressant et général. La méthode algébrique dans ce cas consiste à étudier la structure de cet anneau.

L'emploi des transformations

$$x \to i\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d}{dx} \to ix \qquad \text{(transformation de Fourier)}$$

ou bien

$$x + \frac{d}{dx} = y, \qquad x - \frac{d}{dx} = -2\frac{d}{dy}$$

devient tout à fait indispensable lorsqu'on aborde la question de cette façon. Les transformations ci-dessus doivent être considérées au même niveau que les changements de coordonnées ordinaires.

Dans cet article nous ne considérons qu'un seul type d'anneaux : les algèbres enveloppantes $\mathscr{U}(G)$ des algèbres de Lie G, autrement dit, l'anneau des opérateurs différentiels sur un groupe de Lie invariants par rapport aux translations à gauche. Il existe une multitude d'anneaux de tel type qui ne sont pas isomorphes entre eux. Comme le montre l'exemple de la géométrie algébrique, la situation est simplifiée si l'on passe à la classification birationnelle, c'est-à-dire si l'on identifie les anneaux dont les corps des quotients coïncident. Les anneaux non-commutatifs $\mathscr{U}(G)$ que l'on étudie ici, admettent également un corps des quotients $\mathscr{D}(G)$.

Soit L un corps (commutatif) de caractéristique nulle et K un corps quelconque non commutatif sur L, dont le centre sera désigné par Z(K). Nous définissons la notion de dimension du corps K sur le corps L (voir § 4), cette dimension est notée $\mathrm{Dim}_L K$. Nous faisons correspondre à chaque corps deux nombres n et k, donnés par les formules suivantes

$$k = \mathrm{Dim}_L Z(K)$$
$$2n + k = \mathrm{Dim}_L K$$

Dans le cas $K = \mathscr{D}(G)$ où G est une algèbre de Lie algébrique les nombres n et k sont des entiers finis non-négatifs. Le nombre $2n+k$ est égal à la dimension de l'algèbre G, le nombre k est égal à la codimension de l'orbite générique dans la représentation duale de la représentation adjointe du groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est G.

Nous avançons l'hypothèse suivante :

Pour une algèbre de Lie algébrique G les nombres n et k déterminent le corps $\mathscr{D}(G)$ à un isomorphisme près.

Pour chaque couple d'entiers n et k non-négatifs nous construisons un corps canonique $\mathscr{D}_{n,k}(L)$, dont les invariants sont exactement n et k.

Il en résulte en particulier que deux corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ et $\mathscr{D}_{n',k'}(L)$ ne sont isomorphes que lorsque $n = n'$, $k = k'$. Une affirmation un peu plus faible (portant sur les anneaux) donne la réponse à une question posée par Dixmier. Le corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ est engendré sur L par les éléments $x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, y_1, \ldots, y_k$ avec les relations de commutation ordinaires pour x et $\frac{\partial}{\partial x}$. L'hypothèse que nous avons mentionnée ci-dessus peut être précisée de la façon suivante :

Si G est une algèbre de Lie algébrique sur le corps L, on a $\mathscr{D}(G) \simeq \mathscr{D}_{n,k}(L)$.

Cette affirmation est démontrée ici, dans le cas où G est une algèbre de matrices ainsi que dans le cas d'une algèbre nilpotente quelconque. D'ailleurs pour tous les exemples examinés par les auteurs de cet article, cette hypothèse s'est révélée vraie.

Les nombres n et k jouent un rôle très important dans la théorie des représentations de dimension infinie. Ils sont bien connus des spécialistes. Ces nombres caractérisent les représentations « génériques ». Notamment la représentation générique est réalisée de façon naturelle dans l'espace des fonctions de n variables et elle dépend de k paramètres.

A la fin de l'article nous donnons deux exemples d'algèbres de Lie non-algébriques : pour la première notre hypothèse est satisfaite, pour la seconde elle ne l'est pas.

1. Préliminaires.

Nous allons rappeler quelques faits bien connus de la théorie des anneaux. Pour rendre l'exposé plus complet et en faciliter la lecture, nous allons donner leur démonstration.

Soit A un anneau à filtration croissante :

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots, \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A,$$

cette filtration étant liée avec la loi de multiplication par la relation

$$A_i A_j \subset A_{i+j} \tag{1}$$

Posons

$$\mathrm{gr}^i A = A_i / A_{i-1}, \qquad \mathrm{gr}\, A = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{gr}^i A$$

Désignons par π_i la projection naturelle $A_i \to \mathrm{gr}^i A$. Si $x \in A_i$, $y \in A_j$ l'élément $\pi_{i+j}(xy) \in \mathrm{gr}^{i+j} A$ ne dépend que de $\pi_i(x) \in \mathrm{gr}^i A$ et $\pi_j(y) \in \mathrm{gr}^j A$ en vertu de (1). Pour i et j arbitraires nous obtenons ainsi une application $\mathrm{gr}^i A \times \mathrm{gr}^j A \to \mathrm{gr}^{i+j} A$. Il est évident que ces applications définissent sur gr A une structure d'anneau gradué.

Lemme 1. — Si l'anneau gr A *est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro, alors l'anneau considéré* A *a les mêmes propriétés.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{I}$ un idéal (à gauche, à droite ou bilatère) de l'anneau A. Posons $\mathrm{gr}\, \mathfrak{I} = \sum_i (\mathfrak{I}_i / \mathfrak{I}_{i-1})$, $\mathfrak{I}_i$ étant l'intersection de $\mathfrak{I}$ et A_i. Il est clair que gr $\mathfrak{I}$ est un idéal (resp. à gauche, à droite ou bilatère) de l'anneau gr A. Soit

$$\mathfrak{I}^{(1)} \subset \mathfrak{I}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathfrak{I}^{(n)} \subset \ldots$$

une suite croissante d'idéaux de A. Alors

$$\mathrm{gr}\, \mathfrak{I}^{(1)} \subset \mathrm{gr}\, \mathfrak{I}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathrm{gr}\, \mathfrak{I}^{(n)} \subset \ldots$$

est une suite croissante d'idéaux de gr A. L'anneau gr A étant noethérien, on a, à partir d'une valeur assez grande de n les égalités suivantes

$$\mathrm{gr}\, \mathfrak{I}^{(n)} = \mathrm{gr}\, \mathfrak{I}^{(n+1)} = \ldots$$

Nous allons montrer que dans ces conditions

$$\mathfrak{I}^{(n)} = \mathfrak{I}^{(n+1)} = \ldots$$

En effet, soit x un élément de $\mathfrak{I}^{(n+1)}$. Désignons par k le plus petit entier pour lequel $x \in \mathfrak{I}_k^{(n+1)} = \mathfrak{I}^{(n+1)} \cap A_k$. Comme $\mathrm{gr}^k \mathfrak{I}^{(n+1)} = \mathrm{gr}^k \mathfrak{I}^{(n)}$, il existe un élément $y \in \mathfrak{I}^{(n)}$ tel que $\pi_k(y) = \pi_k(x)$. Par suite $x - y \in \mathfrak{I}_{k-1}^{(n+1)}$. De même on peut trouver un élément $y' \in \mathfrak{I}^{(n)}$ tel que la différence $x - y - y' \in \mathfrak{I}_{k-2}^{(n+1)}$. En continuant ce procédé nous arrivons à la conclusion que $x \in \mathfrak{I}^{(n)}$.

Maintenant nous allons montrer que l'anneau A n'a pas de diviseurs de zéro. Soient x_1, x_2 deux éléments différents de zéro de l'anneau A, et soient k_1, k_2 les plus petits entiers pour lesquels $x_i \in A_{k_i}$, $i = 1, 2$. Alors $\pi_{k_i}(x_i) \neq 0$. Par suite

$$\pi_{k_1+k_2}(x_1 x_2) = \pi_{k_1}(x_1) \pi_{k_2}(x_2) \neq 0,$$

d'où l'on déduit $x_1 x_2 \neq 0$.

Lemme 2. — Un anneau noethérien (à gauche) quelconque qui n'a pas de diviseurs de zéro est un anneau d'Ore. (C'est-à-dire que deux éléments non nuls quelconques de l'anneau ont un multiple commun à gauche).

Démonstration. — Soient $a \neq 0$, $b \neq 0$ deux éléments de l'anneau A. Désignons par $\mathfrak{J}_n$ l'idéal à gauche de A, engendré par les éléments $a, ab, \ldots, ab^n$. Comme l'anneau A est noethérien il existe une valeur de n pour laquelle $\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}_{n+1}$. Il en résulte que

$$ab^{n+1} = x_0 a + x_1 ab + \ldots + x_n ab^n \tag{2}$$

Soit k le plus petit entier pour lequel $x_k \neq 0$. Alors, divisant à droite par b^k les deux membres de la formule (2), nous obtenons

$$ab^{n+1-k} = x_k a + x_{k+1} ab + \ldots + x_n ab^{n-k}$$

ou encore

$$x_k a = (-x_{k+1} a - \ldots - x_n ab^{n-k-1} + ab^{n-k}) b$$

d'où l'on déduit que les éléments a et b ont le multiple à gauche commun $x_k a$.

Pour chaque anneau A de Ore à gauche et à droite, on peut définir un corps des quotients de la façon suivante. Considérons l'ensemble des expressions de type ba^{-1} ou de type $a^{-1}b$, a et b étant des éléments de l'anneau A, $a \neq 0$. Nous identifions les expressions $a^{-1}b$ et cd^{-1} si $ac = bd$.

L'anneau A étant un anneau de Ore, il en résulte qu'une « fraction gauche » quelconque $a^{-1}b$ peut être écrite sous forme de « fraction droite » cd^{-1}, que chaque couple de fractions $a^{-1}b$, $c^{-1}d$ peut être réduit à un « dénominateur commun » c'est-à-dire que l'on peut trouver des éléments x, y_1, y_2 tels que $a^{-1}b = x^{-1}y_1$, $c^{-1}d = x^{-1}y_2$.

Pour les fractions gauches ayant un dominateur commun on peut définir de façon naturelle les opérations d'addition, de soustraction et de division :

$$x^{-1}y_1 \pm x^{-1}y_2 = x^{-1}(y_1 \pm y_2)$$
$$(x^{-1}y_1)^{-1}(x^{-1}y_2) = y_1^{-1}y_2$$

Ensuite on peut définir la multiplication par un élément $a^{-1}b$ en considérant cette opération comme la division par l'élément inverse $b^{-1}a$.

On vérifie sans aucune difficulté que l'ensemble des éléments ainsi obtenus muni des opérations définies ci-dessus est en effet un corps.

2. Définition de l'anneau $R_n(A)$ et du corps $\mathscr{D}_n(A)$.

Soit maintenant A un anneau noethérien quelconque sans diviseurs de zéro. Nous désignons par $R_n(A)$ l'algèbre $R_n \otimes_{\mathbf{Z}} A$, où R_n est l'algèbre sur $\mathbf{Z}$ à $2n$ générateurs $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ soumis aux relations

$$p_i p_j - p_j p_i = 0, \qquad q_i q_j - q_j q_i = 0, \qquad p_i q_j - q_j p_i = \delta_{ij} 1 \tag{3}$$

Dans l'anneau $R_n(A)$ on peut définir la filtration croissante

$$A = (R_n(A))_0 \subset (R_n(A))_1 \subset \ldots$$

où $(R_n(A))_i$ est l'ensemble de tous les éléments de $R_n(A)$ qui peuvent s'écrire sous forme de polynômes (non commutatifs) en les $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, à coefficients dans A et de degré $\leqslant i$.

Lemma 3. — *L'algèbre* $R_n(A)$ *est un* A-*module libre dont une base est composée de tous les monômes de type*

$$p^k q^l = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} q_1^{l_1} \ldots q_n^{l_n} \tag{4}$$

La démonstration de ce lemme se simplifie essentiellement si nous supposons que l'anneau A est une algèbre sur un corps (commutatif) de caractéristique o. C'est précisément ce cas qui sera important pour nous dans ce qui va suivre; nous nous bornerons donc à ce cas dans la démonstration.

Montrons d'abord que les monômes de type (4) engendrent le A-module $R_n(A)$. Puisque $R_n(A)$ est la réunion des sous-modules $(R_n(A))_k$, nous pouvons raisonner par récurrence sur k. Supposons que pour $k<k_0$ notre affirmation soit démontrée. Des relations (3) on déduit immédiatement qu'un monôme quelconque de degré k est égal à un monôme de type (4) modulo $(R_n(A))_{k-2}$. Alors notre affirmation est vraie pour $k=k_0$. Mais pour $k=0$ elle est évidemment vraie parce que $(R_n(A))_0 = A$.

Il reste à montrer que les monômes de type (4) sont linéairement indépendants sur A. Soit

$$x = \sum_{k,l} a_{k,l} p^k q^l = 0.$$

Ordonnons suivant l'ordre lexicographique les indices (k, l) et soit (k^0, l^0) le plus grand de ces indices, tel que $a_{k,l} \neq 0$. Désignons par ad y l'opérateur dans $R_n(A)$, déterminé par la formule

$$\mathrm{ad}\, y . z = yz - zy$$

Un calcul simple montre que

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{ad}\, q_i)^{k_i^0} \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{ad}\, p_i)^{l_i^0} x = \prod_{i=1}^{n} (-1)^{k_i^0} k_i^0 !\, l_i^0 !\, a_{k^0, l^0} \neq 0$$

d'où contradiction avec l'égalité $x = 0$.

Il résulte immédiatement du lemme 3 que l'anneau gradué gr $R_n(A)$ est isomorphe à l'anneau polynomial (1)

$$A[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n].$$

Il s'ensuit que gr $R_n(A)$ est un anneau noethérien sans diviseurs de zéro. Vu les résultats du § 1, l'anneau $R_n(A)$ possède les mêmes propriétés, donc il peut se plonger dans un corps des quotients. Ce corps sera noté $\mathscr{D}_n(A)$.

Il est clair que si deux anneaux A_1 et A_2 ont le même corps des quotients K, alors

$$\mathscr{D}_n(A_1) = \mathscr{D}_n(A_2) = \mathscr{D}_n(K).$$

Remarquons aussi les identités facilement vérifiables :

$$R_n(R_m(A)) = R_{m+n}(A) = R_n(A) \otimes_A R_m(A)$$
$$\mathscr{D}_n(\mathscr{D}_m(A)) = \mathscr{D}_{m+n}(A).$$

(1) Par « anneau polynomial » $A[x]$ où A est un anneau non-commutatif nous entendons ici l'algèbre $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[x]$. Le théorème fondamental de Hilbert reste encore valable dans ce cas : si l'anneau A est noethérien (à gauche. à droite ou bilatère), alors l'anneau $A[x]$ possède la même propriété.

3. L'anneau $R_{n,k}(L)$ et le corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$.

Utilisons la construction décrite au § 2 dans le cas où l'anneau A est l'algèbre des polynômes en k variables sur un corps commutatif L de caractéristique nulle.

Nous noterons :

$$R_{n,k}(L) = R_n(L[x_1, \dots, x_k])$$
$$\mathscr{D}_{n,k}(L) = \mathscr{D}_n(L[x_1, \dots, x_k]) = \mathscr{D}_n(L(x_1, \dots, x_k)).$$

Rappelons que dans l'anneau $R_n(A)$, et, par conséquent, dans l'anneau $R_{n,k}(L)$, nous avons défini une filtration croissante telle que l'anneau gradué associé $\operatorname{gr} R_{n,k}(L)$ est isomorphe à l'anneau des polynômes dépendant des variables $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, dont les coefficients sont choisis dans l'anneau $L[x_1, \dots, x_k]$. Pour chaque élément non nul $a \in R_{n,k}(L)$ il existe un entier i (et un seul) tel que $\pi_i(a) \in \operatorname{gr}^i R_{n,k}(L)$ est bien défini et non nul. Nous appellerons cet élément partie principale de a; il sera noté $[a]$. Il découle de cette définition, que $[a]$ est un polynôme homogène dépendant des variables $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, à coefficients dans $L[x_1, \dots, x_k]$.

Il est évident que quels que soient $a_1, a_2 \in R_{n,k}(L)$ on a :

$$[a_1 a_2] = [a_1][a_2] \tag{5}$$

c'est-à-dire que la partie principale du produit est égale au produit des parties principales des facteurs de ce produit.

Soit b un élément quelconque du corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$. Cet élément est de la forme $a_1^{-1}a_2$, où $a_i \in R_{n,k}(L)$.

Lemme 4. — La fonction rationnelle $\dfrac{[a_2]}{[a_1]}$ *ne dépend que de l'élément* $b \in \mathscr{D}_{n,k}(L)$ *(et ne dépend pas de la façon dont il a été représenté sous forme de quotient d'éléments de* $R_{n,k}(L)$*). Notons cette fonction par* $[b]$. *Pour* $b_1, b_2 \in \mathscr{D}_{n,k}(L)$ *quelconques on a l'égalité :*

$$[b_1 b_2] = [b_1][b_2]$$

Démonstration. — Supposons que b soit représenté par la fraction droite $a_1 a_2^{-1}$ et la fraction gauche $a_3^{-1}a_4$. Montrons que dans ce cas $\dfrac{[a_1]}{[a_2]} = \dfrac{[a_4]}{[a_3]}$. En effet, d'après l'égalité $a_1 a_2^{-1} = a_3^{-1} a_4$ on a par définition $a_3 a_1 = a_4 a_2$. D'où $[a_3][a_1] = [a_4][a_2]$ ce qui démontre la première partie du lemme. Il est clair qu'il suffit de démontrer la seconde partie dans le cas où $b_1 \in R_{n,k}(L)$. Mais dans ce cas nous avons :

$$b_1 b_2 = b_1(a_1 a_2^{-1}) = (b_1 a_1) a_2^{-1}$$

Donc

$$[b_1 b_2] = \frac{[b_1 a_1]}{[a_2]} = [b_1]\frac{[a_1]}{[a_2]} = [b_1][b_2]$$

Corollaire. — La fonction $[b]$ *est invariante relativement aux automorphismes intérieurs du corps.*

En effet $[aba^{-1}] = [a][b][a]^{-1} = [b]$.

Remarquons maintenant que l'anneau $R_{n,k}(L)$ admet une autre filtration naturelle. A savoir, on prend pour $(R_{n,k}(L))_i$ l'ensemble de tous les éléments qui peuvent être représentés sous forme de polynôme (non commutatif) à coefficients dans L, de degré $\leqslant i$, en les générateurs $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_k$. L'anneau gradué associé à cette filtration est évidemment isomorphe à l'anneau des polynômes à $2n+k$ variables. Comme nous l'avons fait plus haut, nous pouvons déterminer une application $b \to [b]$ qui est un homomorphisme du groupe multiplicatif du corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ dans le groupe des fonctions rationnelles de forme PQ^{-1}, où P, Q sont des polynômes homogènes (en général de degrés différents) de $2n+k$ variables. Cette application sera utilisée au paragraphe suivant pour démontrer le théorème de non-isomorphisme.

4. Théorème de non-isomorphisme.

Nous montrerons que les anneaux $R_{n,k}(L)$ et les corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ que nous avons construits ne sont pas isomorphes (en tant qu'algèbres sur L) pour différentes valeurs de n et k. La démonstration est basée sur le concept de dimension de corps et d'anneau.

Commençons par le cas plus simple de l'anneau. Soit A une algèbre sur le corps commutatif L, $\alpha = (a_1, \ldots, a_s)$ un ensemble fini quelconque d'éléments de A. Considérons l'ensemble de tous les éléments de notre algèbre qui peuvent être représentés sous forme de polynôme non commutatif à coefficients dans L, de degré $\leqslant N$, à variables choisies dans α. Cet ensemble est évidemment un espace vectoriel sur L, dont la dimension sera notée $d(\alpha, N)$.

L'expression

$$\sup_{\alpha} \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{\log d(\alpha, N)}{\log N} \tag{6}$$

sera appelée *dimension* de l'algèbre A et notée $\mathrm{Dim}_L A$.

Lemme 5. — $\mathrm{Dim}_L R_{n,k}(L) = 2n+k$.

Démonstration. — Prenons pour α l'ensemble

$$\alpha_0 = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_k)$$

On calcule sans difficulté $d(\alpha_0, N)$ qui est égal au coefficient binomial C_{N+2n+k}^{2n+k}. (Rappelons que la dimension de l'espace des polynômes de degré $\leqslant N$ à m variables est C_{N+m}^{m}).

Donc :

$$\mathrm{Dim}_L R_{n,k}(L) \geqslant \lim_{N \to \infty} \frac{\log C_{N+2n+k}^{2n+k}}{\log N} = 2n+k.$$

Soit maintenant $\alpha = (a_1, \ldots, a_s)$ un ensemble fini quelconque d'éléments de $R_{n,k}(L)$. Chaque a_i peut être représenté sous forme de polynôme à variables dans α_0. Soit m le degré maximal de ces polynômes. Chaque polynôme de degré $\leqslant N$ relativement aux variables a_i est un polynôme de degré $\leqslant mN$ relativement aux générateurs.

Donc :

$$d(\alpha, \mathrm{N}) \leqslant d(\alpha_0, m\mathrm{N}).$$

Mais

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{\log d(\alpha_0, m\mathrm{N})}{\log \mathrm{N}} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{\log \mathrm{C}_{m\mathrm{N}+2n+k}^{2n+k}}{\log \mathrm{N}} = 2n+k,$$

d'où le lemme.

Considérons maintenant un corps $\mathscr{D}$ quelconque sur le corps commutatif L. Soit $\alpha = (a_1, \ldots, a_s)$ un ensemble fini quelconque d'éléments de ce corps. L'ensemble $(a_1 b, \ldots, a_s b)$, où $b \in \mathscr{D}$, sera noté αb. Définissons la dimension du corps $\mathscr{D}$ sur L de la manière suivante :

$$\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathscr{D} = \sup_{\alpha} \inf_{b \neq 0} \overline{\lim_{\mathrm{N}\to\infty}} \frac{\log d(\alpha b, \mathrm{N})}{\log \mathrm{N}} \tag{7}$$

Remarque 1. — La formule (7) définissant la dimension d'un corps est également applicable à tout anneau sans diviseur de zéro. On vérifie aisément que pour l'anneau $\mathrm{R}_{n,k}(\mathrm{L})$ les formules (6) et (7) donnent la même valeur numérique pour la dimension.

Remarque 2. — Si le corps $\mathscr{D}$ est commutatif, on vérifie aisément que la grandeur $\dim_{\mathrm{L}} \mathscr{D}$ est égale au degré de transcendance de $\mathscr{D}$ sur L.

Calculons maintenant la dimension du corps $\mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L})$.

Lemme 6. — $\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L}) = 2n+k$.

Démonstration. — Soit $\alpha = (a_1, \ldots, a_s)$ un ensemble fini quelconque d'éléments de $\mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L})$. Il existe un élément $b \neq 0$ tel que tous les éléments $a_i b$ appartiennent à $\mathrm{R}_{n,k}(\mathrm{L})$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 5 on obtient l'inégalité

$$\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L}) \leqslant 2n+k.$$

Pour obtenir l'inégalité de sens contraire, il est naturel de considérer l'ensemble

$$\alpha_0 = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_k)$$

et de démontrer que pour un élément $b \neq 0$ quelconque les monômes

$$\mathrm{P}_{k,l,m} = (p_1 b)^{k_1} \ldots (p_n b)^{k_n} (q_1 b)^{l_1} \ldots (q_n b)^{l_n} (x_1 b)^{m_1} \ldots (x_k b)^{m_k}$$

sont linéairement indépendants. Malheureusement ils ne le sont pas, par exemple pour $b = x_1^{-1}$. On peut néanmoins tourner cette difficulté de la manière suivante. Nous montrerons que les monômes $\mathrm{P}_{k,l,m}$ peuvent être dépendants seulement lorsque la fonction homogène $[b]$ (cf. la fin du § 3) a un degré d'homogénéité égal à -1. Il en résulte que les monômes

$$\widetilde{\mathrm{P}}_{k,l,m} = (p_1 ab)^{k_1} \ldots (p_n ab)^{k_n} (q_1 ab)^{l_1} \ldots (q_n ab)^{l_n} (x_1 ab)^{m_1} \ldots (x_k ab)^{m_k}$$

où $a \neq 0$ est un élément quelconque de $\mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L})$ ne peuvent être linéairement dépendants que si $[ab]$ est une fonction homogène de degré -1. Soit a un élément du corps $\mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L})$ tel que le degré de $[a]$ soit non nul. Il suit de ce que nous venons de dire que, soit les $\mathrm{P}_{k,l,m}$

soit les $\widetilde{\mathrm{P}}_{k,l,m}$ forment un système linéairement indépendant. Par conséquent, en choisissant α égal à la réunion des ensembles α_0 et $\alpha_0 a$ on obtient

$$d(\alpha, \mathrm{N}) \geqslant \mathrm{C}_{\mathrm{N}+2n+k}^{2n+k}$$

d'où l'on déduit l'inégalité cherchée

$$\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L}) \geqslant 2n+k.$$

Voyons maintenant dans quels cas les monômes $\mathrm{P}_{k,l,m}$ peuvent être linéairement dépendants. Pour un ensemble fini quelconque de ces monômes, il existe un élément $\mathrm{Q} \in \mathrm{R}_{n,k}(\mathrm{L})$ tel que toutes les expressions $\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}$ appartiennent à $\mathrm{R}_{n,k}(\mathrm{L})$. Considérons la partie principale du produit $\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}$. D'après le § 3 nous avons

$$[\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}] = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} q_1^{l_1} \dots q_n^{l_n} x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k} [b]^d [\mathrm{Q}] \tag{8}$$

où d désigne le degré du monôme $\mathrm{P}_{k,l,m}$:

$$d = k_1 + \dots + k_n + l_1 + \dots + l_n + m_1 + \dots + m_k.$$

Donc :

$$\deg[\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}] = (1 + \deg[b])d + \deg[\mathrm{Q}]$$

Si $\deg[b] \neq -1$ les polynômes $[\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}]$ ont des degrés différents pour des valeurs différentes de d.

Supposons que ces polynômes soient linéairement dépendants :

$$\Sigma c_{k,l,m} \mathrm{P}_{k,l,m} = 0$$

Supposons que $\deg[b] > -1$ (respectivement $\deg[b] < -1$) et soit d le degré maximum (respectivement minimum) des monômes dotés d'un coefficient $c_{k,l,m}$ non nul.

On a alors l'égalité

$$\sum_{\deg \mathrm{P}_{k,l,m} = d} c_{k,l,m} [\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}] = 0 \tag{9}$$

obtenue en considérant les parties principales dans l'expression

$$\Sigma c_{k,l,m} \mathrm{P}_{k,l,m} \mathrm{Q} = 0$$

En se rappelant l'expression (8) pour $[\mathrm{P}_{k,l,m}\mathrm{Q}]$, nous voyons que (9) est impossible pour des coefficients $c_{k,l,m}$ non nuls. La démonstration du lemme est terminée.

Remarque 3. — En démontrant la formule $\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L}) = 2n+k$ nous ne nous sommes servis que des propriétés suivantes de ce corps :

1) $\mathscr{D}_{n,k}(\mathrm{L})$ est le corps des quotients d'une certaine algèbre A (à savoir $\mathrm{R}_{n,k}(\mathrm{L})$);

2) L'algèbre A admet une filtration telle que l'algèbre graduée associée gr A soit isomorphe à l'algèbre polynomiale à $2n+k$ variables.

Par conséquent nous avons en fait démontré la proposition plus générale suivante :

Théorème 1. — Soit A *une algèbre sur le corps commutatif* L, *munie d'une filtration telle que l'algèbre graduée associée* gr A *soit isomorphe à l'algèbre polynomiale à m variables. Notons* $\mathscr{D}$(A) *le corps des quotients de l'algèbre* A. *On a alors* $\mathrm{Dim}_{\mathrm{L}} \mathrm{A} = m$.

Le résultat obtenu permet de résoudre entièrement la question de l'isomorphisme des anneaux $R_{n,k}(L)$ et des corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ pour différentes valeurs de n et k.

Théorème 2. — Les isomorphismes des L*-algèbres*

$$R_{n,k}(L) \simeq R_{n',k'}(L) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{D}_{n,k}(L) \simeq \mathscr{D}_{n',k'}(L)$$

ont lieu seulement si $n=n'$, $k=k'$.

Démonstration. — Le centre de l'anneau $R_{n,k}(L)$ est $R_{0,k}(L)$, le centre de l'anneau $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ est $\mathscr{D}_{0,k}(L)$. Des corps et anneaux isomorphes ont les mêmes dimensions. Par conséquent l'isomorphisme est possible seulement si $2n+k=2n'+k'$, $k=k'$.

5. Définition du corps $\mathscr{D}(G)$.

Soit G une algèbre de Lie sur un corps commutatif L de caractéristique nulle. Notons $\mathscr{U}(G)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre G, c'est-à-dire l'algèbre obtenue en factorisant l'algèbre associative libre engendrée par les éléments de l'algèbre G par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$xy - yx - [x,y]$$

où $x, y \in G$.

Chaque élément de $\mathscr{U}(G)$ peut être représenté sous forme de polynôme à variables dans G et à coefficients dans L. On obtient ainsi une filtration croissante dans $\mathscr{U}(G)$

$$L = (\mathscr{U}(G))_0 \subset (\mathscr{U}(G))_1 \subset \dots \subset (\mathscr{U}(G))_n \subset \dots$$

en posant que $(\mathscr{U}(G))_i$ est l'ensemble de tous les éléments de $\mathscr{U}(G)$ qui peuvent être représentés sous forme de polynômes de degré $\leqslant i$ à variables dans G.

Il découle du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. par exemple [1]) que gr $\mathscr{U}(G)$ est l'algèbre polynomiale à m variables, où $m = \dim G$. Comme nous l'avons vu dans le § 1, on peut en déduire que $\mathscr{U}(G)$ est un anneau d'Ore sans diviseurs de zéro. Le corps des fractions de l'algèbre $\mathscr{U}(G)$ sera noté $\mathscr{D}(G)$ et appelé corps de Lie de l'algèbre G.

Des résultats du paragraphe précédent (cf. théorème 1) on déduit l'égalité

$$\mathrm{Dim}_L \mathscr{D}(G) = \dim G.$$

Hypothèse fondamentale. — Le corps $\mathscr{D}(G)$ *est isomorphe à un des corps* $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ *lorsque* G *est une algèbre de Lie algébrique.*

6. Démonstration de l'hypothèse fondamentale pour les algèbres de matrices.

Nous montrerons que l'hypothèse fondamentale est satisfaite lorsque G est l'algèbre de toutes les matrices à trace nulle ou bien l'algèbre de toutes les matrices. La démonstration est basée sur la proposition suivante.

Lemme 7. — Soit G_n^0 *l'algèbre de toutes les matrices d'ordre n dont la dernière ligne est entièrement composée de zéros. On a alors* $\mathscr{D}(G_n^0) \simeq \mathscr{D}_{\frac{n(n-1)}{2},0}$.

Montrons d'abord que ce lemme implique l'hypothèse fondamentale pour les algèbres de matrices. Il est bien connu que le centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre G_n de toutes les matrices d'ordre n (respectivement de l'algèbre $\widetilde{G}_n$ des matrices à trace nulle) est engendrée par les éléments $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (respectivement $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$), où $\Delta_i(g)$ est la trace de la i-ème puissance extérieure de la matrice g. (Nous employons la réalisation de l'algèbre $\mathscr{U}(G_n)$ sous forme de polynômes sur G_n, cf. [2]). Les éléments de la ligne inférieure interviennent au premier degré dans les polynômes Δ_i. Il est clair que $\mathscr{D}(G_n)$ (respectivement $\mathscr{D}(\widetilde{G}_n)$ est engendrée par $\mathscr{D}(G_n^0)$ et par les éléments $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (respectivement $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$). Par conséquent

$$\mathscr{D}(G_n) = \mathscr{D}_{\frac{n(n-1)}{2}, n}, \qquad \mathscr{D}(\widetilde{G}_n) = \mathscr{D}_{\frac{n(n-1)}{2}, n-1}.$$

Démontrons maintenant le lemme 7 par récurrence sur n. Considérons dans G_{n+1}^0 une base naturelle composée d'éléments e_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$, ($e_{ik}$) étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément à l'intersection de la i-ème ligne et de la k-ème colonne qui est égal à 1).

Posons

$$q_i = e_{i,n+1}, \qquad p_i = e_{ii} q_i^{-1}, \qquad \widetilde{e}_{ik} = e_{ik} q_i^{-1} q_k.$$

Un calcul direct montre que

$$[q_i, q_j] = 0, \qquad [p_i, p_j] = 0, \qquad [p_i, q_j] = \delta_{ij} \cdot 1,$$
$$[\widetilde{e}_{ik}, q_j] = \delta_{kj} q_j, \qquad [\widetilde{e}_{ik}, p_j] = -\delta_{kj} p_j.$$

Par conséquent si les coefficients c_{ik} ($1 \leqslant i, k \leqslant n$) satisfont aux conditions

$$\sum_i c_{ik} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

l'élément $\sum_{i,k} c_{ik} \widetilde{e}_{ik}$ est permutable à q_i et p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Considérons l'ensemble G de toutes les matrices C d'ordre n formées d'éléments c_{ik} pour lesquels (10) est vérifié. Faisons correspondre à toute matrice de ce type l'élément $\alpha(C) = \sum_{i,k} c_{ik} \widetilde{e}_{ik} \in \mathscr{D}(G_{n+1}^0)$. Il se trouve que l'application α est telle que l'on a

$$\alpha([C_1, C_2]) = [\alpha(C_1), \alpha(C_2)]$$

Nous laissons au lecteur la vérification longue mais facile de cette égalité. Il est clair que le corps $\mathscr{D}(G_{n+1}^0)$ est engendré par les éléments de la forme $\alpha(C)$, $C \in G$ et les éléments $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Pour démontrer le lemme il suffit de vérifier que le corps engendré par les éléments $\alpha(G)$ est isomorphe à $\mathscr{D}_{\frac{n(n-1)}{2}, 0}(L)$. Mais l'ensemble G est une algèbre de Lie isomorphe à G_n^0, et le fait qui reste à vérifier est vrai par l'hypothèse de récurrence. Le lemme est démontré [1].

[1] Comme l'a remarqué le référent, pour que cette affirmation soit vraie, il faut savoir que α, prolongé comme homomorphisme de $\mathscr{U}(G)$ dans $\mathscr{D}(G_{n+1}^0)$, est injectif. Ce fait peut être établi de façon suivante. Choisissons une base de l'algèbre G de telle façon que les images par l'application α des éléments de cette base soient $\approx e_{ik} = \widetilde{e}_{ik} - e_{nk}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Ordonnons l'ensemble de ces éléments suivant l'ordre lexicographique et considérons les monômes formés à partir de ces éléments, les éléments correspondants pour chaque monôme étant rangés dans l'ordre croissant. Il faut montrer que ces monômes soit linéairement indépendants. Cela se fait de la même manière que celle utilisée pour la démonstration de l'indépendance des monômes $P_{k,l,m}$ aux pages 12-13.

7. Démonstration de l'hypothèse fondamentale pour les algèbres de Lie nilpotentes.

Nous aurons besoin de certains résultats sur la structure de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathrm{G})$ et du corps $\mathscr{D}(\mathrm{G})$, où G est une algèbre de Lie nilpotente sur un corps commutatif de caractéristique nulle.

Lemme 8 (Dixmier). — Le centre du corps $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est le corps des quotients du centre* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ *de l'algèbre* $\mathscr{U}(\mathrm{G})$; *il est isomorphe au corps des fonctions rationnelles à k variables. L'entier k est pair et impair en même temps que* dim G. *Si* G_0 *est un idéal de codimension* 1 *dans* G, *nous avons soit* $\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)\subset\mathrm{Z}(\mathrm{G})$, *soit* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})\subset\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)$.

La démonstration des faits énumérés dans le lemme peut être obtenue à partir des résultats de [3], [4]; cf. également [5].

Lemme 9. — Il existe dans l'algèbre $\mathscr{U}(\mathrm{G})$ *des éléments* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k$ *(les entiers n et k dépendant de l'algèbre* G) *avec les propriétés suivantes :*

(*) *Le corps de Lie* $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est engendré par les éléments* x_i, y_i, z_j, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant k$;

(**) *On a les relations de commutation*

$$[x_i, x_j]=[y_i,y_j]=[x_i, z_j]=[y_i, z_j]=[z_i, z_j]=0, \qquad [x_i,y_j]=\delta_{ij}.c,$$

où c est un élément non nul de $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$.

Il est clair que le lemme implique l'hypothèse fondamentale pour l'algèbre G : il suffit de poser $p_i=x_ic^{-1}$, $q_i=y_i$.

Démontrons le lemme 9 par récurrence sur la dimension de G. Soit G_0 un idéal de codimension 1 dans G, x un élément de G n'appartenant pas à G_0.

1^er cas : $\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)\subset\mathrm{Z}(\mathrm{G})$. Dans ce cas il existe un élément de $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)$. Cet élément peut être représenté (d'une manière unique) sous la forme :

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \qquad a_i\in\mathscr{U}(\mathrm{G}_0).$$

Puisque $[y, b]=0$, pour un b quelconque nous avons

$$[a_0, b]x^n+(na_0[x, b]+[a_1, b])x^{n-1}+\ldots=0$$

d'où

$$[a_0, b]=0, \qquad [na_0x+a_1, b]=0$$

c'est-à-dire

$$a_0\in\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0), \qquad na_0x+a_1\in\mathrm{Z}(\mathrm{G}).$$

Par l'hypothèse de récurrence il existe dans $\mathscr{U}(\mathrm{G}_0)$ des éléments $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k$ qui satisfont aux conditions du lemme. Posons $z_{k+1}=na_0x+a_1$.

Il est évident que le système d'éléments $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_{k+1}$ jouit des propriétés (*) et (**).

2^e cas : $\mathrm{Z}(\mathrm{G})\subset\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)$. Dans ce cas il existe un élément $y\in\mathrm{Z}(\mathrm{G}_0)$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$. On a alors $[x,y]\neq 0$. Soit k le nombre maximum pour lequel $(\mathrm{ad}\, x)^ky\neq 0$. Remplaçant, s'il le faut, y par $(\mathrm{ad}\, x)^{k-1}y$, on peut supposer que $k=1$. Ainsi, il existe dans $Z(G_0)$ un élément y tel que $[x,y]=z\neq 0$ mais $[x,z]=0$ c'est-à-dire $z\in Z(G)$. Notons $\widetilde{\mathscr{D}(G_0)}$ le sous-corps de $\mathscr{D}(G_0)$ formé par les éléments qui commutent avec x. Nous montrerons que l'application

$$\varphi=\exp\left(-\frac{y}{z}\operatorname{ad} x\right)=\sum_k\frac{(-1)^k}{k\,!}\left(\frac{y}{z}\right)^k(\operatorname{ad} x)^k$$

est un homomorphisme de l'algèbre $\mathscr{U}(G_0)$ dans $\widetilde{\mathscr{D}(G_0)}$. En effet :

$$\varphi(ab)=\sum_k\frac{(-1)^k}{k\,!}\left(\frac{y}{z}\right)^k(\operatorname{ad} x)^k ab=\sum_k\sum_{i+j=k}\frac{(-1)^k}{k\,!}\left(\frac{y}{z}\right)^k\frac{k\,!}{i\,!\,j\,!}(\operatorname{ad} x)^i a(\operatorname{ad} x)^j b=$$

$$\sum_{i,j}\frac{(-1)^{i+j}}{i\,!\,j\,!}\left(\frac{y}{z}\right)^{i+j}(\operatorname{ad} x)^i a(\operatorname{ad} x)^j b=\varphi(a)\varphi(b)\,;$$

$$(\operatorname{ad} x)\varphi(a)=\sum_k\frac{(-1)^k}{k\,!}\operatorname{ad} x\left[\left(\frac{y}{z}\right)^k(\operatorname{ad} x)^k a\right]=$$

$$\sum_k\frac{(-1)^k}{(k-1)\,!}\left(\frac{y}{z}\right)^{k-1}(\operatorname{ad} x)^k a+\sum_k\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{y}{z}\right)^k(\operatorname{ad} x)^{k+1}a=0.$$

Soit maintenant $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_k$ un système de générateurs de $\mathscr{D}(G_0)$ jouissant de la propriété (**). Posons

$$\tilde{x}_i=z^N\varphi(x_i),\qquad \tilde{y}_i=z^N\varphi(y_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$\tilde{x}_{n+1}=xz^{2N-1}\varphi(c),\qquad \tilde{y}_{n+1}=y$$

et choisissons pour $\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{k-1}$ un ensemble d'éléments de $Z(G)$ qui engendrent le centre du corps $\mathscr{D}(G)$. Nous montrerons qu'on peut choisir l'entier N et l'élément y de sorte que le système $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_j$ jouit des propriétés (*) et (**).

Démontrons d'abord qu'un choix approprié de y implique que $\varphi(c)\neq 0$. En effet, y avait été choisi de sorte que $y\in Z(G_0)$, $[x,y]=z\neq 0$, $z\in Z(G)$. Par conséquent le rôle de y peut être joué par $y_\tau=y+\tau z$ pour tout $\tau\in L$. Considérons

$$\varphi_\tau(c)=\sum_k\frac{(-1)^k}{k\,!}\left(\frac{y_\tau}{z}\right)^k(\operatorname{ad} x)^k c \tag{11}$$

et supposons que, pour tout τ, cette expression est égale à 0.

Il est clair que l'expression (11) est un polynôme en τ. Le coefficient de τ^j dans ce polynôme se calcule aisément, il est égal à

$$\frac{(-1)^j}{j\,!}\varphi((\operatorname{ad} x)^j c).$$

Soit j l'entier maximum pour lequel $(\operatorname{ad} x)^j c$ est non nul. On a alors $(\operatorname{ad} x)^j c\in Z(G)$. Or l'application φ est l'identité sur $Z(G)$. Par conséquent $\varphi((\operatorname{ad} x)^j c)=(\operatorname{ad} x)^j c\neq 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que notre polynôme est identiquement nul.

Désormais nous supposons que y a été choisi de sorte que $\varphi(c) \neq 0$. La condition (**) découle directement du fait que φ est un homomorphisme de $\mathscr{U}(G_0)$ dans $\widetilde{\mathscr{D}(G_0)}$. Il reste à démontrer que le système $\widetilde{x}_i$, $\widetilde{y}_i$, $\widetilde{z}_j$ engendre le corps $\mathscr{D}(G)$. Soit $g_1, \ldots, g_m$ une base de G telle que l'opérateur ad x soit de forme

$$(\text{ad } x)g_i = \sum_{j>i} a_{ij} g_i$$

On a alors :

$$\varphi(g_i) = g_i + \sum_{j>i} b_{ij}(y, z) g_j.$$

On voit donc que $\mathscr{D}(G_0)$ est engendré par $\varphi(\mathscr{U}(G_0))$ et les éléments y et z. Puisque les éléments $\varphi(z_i)$ et z appartiennent à Z(G), ils s'expriment en fonction de $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_{k-1}$.

On voit donc que le corps $\mathscr{D}(G)$ est engendré par les éléments $x, y, \varphi(x_i), \varphi(y_i)$, $\widetilde{z}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Il suffit maintenant de remarquer que pour N suffisamment grand les éléments $\widetilde{x}_i$, $\widetilde{y}_i$ appartiennent à $\mathscr{U}(G)$. Le lemme est démontré.

8. Exemples.

Dans ce paragraphe, L est soit le corps **R** des réels, soit le corps **C** des nombres complexes. Soit G l'algèbre de Lie sur L de dimension 3 engendrée par x, y, z avec les relations :

$$[x, y] = y, \qquad [x, z] = \alpha z, \qquad [y, z] = 0$$

où α est un nombre irrationnel. Le groupe linéaire de Lie associé a pour éléments les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp a & 0 & b \\ 0 & \exp \alpha a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in L$. Ce groupe n'est évidemment pas algébrique. Dans ce cas le corps de Lie $\mathscr{D}(G)$ n'est isomorphe à aucun des corps $\mathscr{D}_{n,k}(L)$. En effet, le centre du corps $\mathscr{D}(G)$ coïncide avec le corps L (ceci peut être démontré sans difficulté, par exemple, en se servant des résultats obtenus dans [6] sur la structure du centre de $\mathscr{D}(G)$ pour les algèbres de Lie résolubles). Par conséquent, si le corps $\mathscr{D}(G)$ était isomorphe à $\mathscr{D}_{n,k}(L)$ on aurait les égalités :

$$2n + k = \text{Dim}_L \mathscr{D}(G) = \dim G = 3$$
$$k = \text{Dim}_L L = 0$$

ce qui est impossible pour n entier.

Considérons maintenant l'extension $\widetilde{G}$ de l'algèbre G par une algèbre T de dimension 1, à élément de base t, et avec les relations

$$[y, z] = t, \qquad [x, t] = (1 + \alpha)t, \qquad [y, t] = (z, t] = 0$$

Puisque $\widetilde{G}/T = G$ l'algèbre $\widetilde{G}$ n'est également pas algébrique. Néanmoins on peut vérifier que les éléments

$$p_1 = yt^{-1}, \qquad q_1 z, \qquad p_2 = (1+\alpha)^{-1} t, \qquad q_2 = yzt^{-2} xt^{-1}$$

engendrent $\mathscr{D}(G)$ et jouissent de la propriété suivante

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \qquad [p_i, q_j] = \delta_{ij} . 1$$

On a ainsi que $\mathscr{D}(\widetilde{G})$ est isomorphe à $\mathscr{D}_{2,0}(L)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Séminaire Sophus Lie*, Paris, 1955.

[2] I. M. GELFAND, Центр инфинитезимального группового кольца, *Mat. Sbornik*, 1950, t. 26, 103-112.

[3] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 325-388.

[4] J. DIXMIER, Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *Arch. Math.*, 1959, vol. 10, 321-326.

[5] A. A. KIRILLOV, Унитарные представления нильпотентных групп Ли, *Uspekhi Matem. Nauk*, 1962, t. 17, 57-101.

[6] P. BERNAT, Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble, *C. r. Acad. Sci.*, t. 258, 2713-2715.

Manuscrit reçu le 19 janvier 1966.