SUR UNE CLASSE D'ESPACES D'INTERPOLATION

par J.-L. LIONS (Paris)
et J. PEETRE (Lund) [1]

INTRODUCTION

Soient A_0 et A_1 deux espaces vectoriels topologiques, tous deux contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathscr{A}$, l'injection de A_i dans $\mathscr{A}$ étant continue, $i=0, 1$.

Pour commencer nous considérons le cas où les A_i sont des *espaces de Banach*.

On appelle *espace intermédiaire* tout espace de Banach A tel que $A_0 \cap A_1 \subset A \subset A_0 + A_1$.

Les problèmes considérés ici gravitent autour de la question suivante : A_0 et A_1 étant donnés, *construire* des espaces intermédiaires, de façon à *ce que la propriété d'interpolation par rapport aux applications linéaires ait lieu*; autrement dit : si A est construit à partir du couple $\{A_0, A_1\}$ et si B est obtenu par *la même* construction à partir d'un deuxième couple d'espaces de Banach $\{B_0, B_1\}$, alors toute application linéaire continue de A_i dans B_i, $i=0$ et $i=1$, applique continûment A dans B.

De telles constructions existent en assez grand nombre; nous étudions ici *l'une* de ces méthodes, conduisant aux *espaces de moyennes* que nous avons introduits dans J.-L. Lions-J. Peetre [24].

Le chapitre Ier contient les définitions principales, deux définitions équivalentes des espaces de moyennes $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$; on montre que les espaces S ont la propriété d'interpolation (no 3). Le cas des applications multilinéaires est brièvement indiqué au no 4 et le no 5 contient quelques propriétés immédiates des espaces S.

Le chapitre II contient deux nouvelles définitions (équivalentes) des espaces S; en gros, on y remplace les intégrales par des séries, les espaces $L^{p_0}(A_0)$, $L^{p_1}(A_1)$ (*fonctions* L^p à valeurs dans des Banach) sont remplacés par $l^{p_i}(A_i)$ (*suites* l^p à valeurs dans les A_i); on montre l'équivalence des définitions.

Sous des hypothèses raisonnables sur les A_i, le dual d'un espace intermédiaire ayant la propriété d'interpolation est un espace intermédiaire pour les A_i' (dual de A_i) avec la propriété d'interpolation; il est donc important de chercher le dual de S; on montre au chapitre III que le dual de $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ est identifiable

(1) Les A. ont été soutenus par l'Interpol.

à $S(p_0', \xi_0, A_0'; p_1', \xi_1, A_1')$, $1/p_i + 1/p_i' = 1$; donc *le dual d'un espace de moyennes est encore un espace de moyennes.* (Notre raisonnement initial ne donnait qu'incomplètement le résultat lorsque $p_0 = p_1 = 1$; une modification de ce raisonnement a permis à M. A. Persson d'obtenir aussi le cas $p_0 = p_1 = 1$; c'est la méthode de M. A. Persson que, avec son accord, nous suivons ici, au chap. III, n° 3.)

Une question également importante est de voir si les espaces de moyennes entre des espaces de moyenne sont encore des espaces de moyenne. (C'est le problème de la *réitération.*) Nous montrons au chapitre IV que la réponse est positive. Nous introduisons dans ce chapitre IV des espaces plus généraux que les espaces de moyennes (espaces de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$); nous montrons *un théorème de réitération pour ces espaces.* Nous vérifions que les espaces S sont de la classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$ pour un θ convenable; nous montrons aussi que les espaces obtenus par la *méthode complexe* (A.-P. Calderòn [3], [4]; J.-L. Lions [21]) sont de la classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$. Nous terminons (n° 3) par un analogue « abstrait » du théorème de Marcinkiewicz [26].

Le court chapitre V étudie les propriétés d'inclusion et de compacité; par exemple si $A_0 \subset A_1$ avec injection compacte, alors $S \subset A_1$ avec injection compacte.

Une fois les propriétés principales des espaces S obtenues, un problème important est l'étude des rapports entre ces espaces et des espaces intermédiaires obtenus par *d'autres méthodes* : méthode de E. Gagliardo [6], méthode dite des traces (Lions [18] [19]), méthode complexe (et d'autres!).

La comparaison avec l'une des méthodes de Gagliardo est faite dans J. Peetre [29].

Nous montrons ici (chap. VI) *l'identité des espaces de moyennes avec les espaces de traces.*

Il faut bien noter que cela *ne réduit pas* l'une des méthodes à l'autre; les espaces de moyennes considérés ici utilisent des fonctions poids exponentielles, les espaces de trace introduits dans Lions [19] utilisent des fonctions poids polynomiales et *alors* les méthodes conduisent aux mêmes espaces. Mais l'on peut introduire *d'autres poids*, tant dans les moyennes que dans les traces, et alors les espaces obtenus n'ont plus de raison de coïncider. Nous avons très brièvement indiqué d'autres poids dans Lions-Peetre [24]. Une idée quelque peu analogue a été systématiquement utilisée dans C. Foias-J.-L. Lions [5] pour la détermination de « tous » les espaces de Hilbert intermédiaires entre deux espaces de Hilbert.

Une fois l'équivalence obtenue, on en déduit évidemment certaines propriétés des espaces de traces, généralisant et simplifiant des résultats de Lions [19] [20].

Ce résultat d'équivalence est important dans la « pratique » des problèmes aux limites où les espaces interviennent sous la forme *d'espaces de traces.*

Le chapitre VII étudie des exemples. Nous n'avons *nullement* cherché à développer tous les exemples possibles (il y a d'ailleurs dans cette direction une foule de problèmes non résolus!); nous avons brièvement étudié au § 1 les espaces de moyenne entre les L^p, ce qui conduit aux classiques théorèmes de M. Riesz [33] et Marcinkiewicz [26]. Le § 2 étudie le cas où A_0 est le domaine d'un opérateur non borné Σ dans l'espace A_1, Σ étant une puissance d'un générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Ceci nous conduit à établir quelques formules ayant peut-être un certain intérêt en soi. On retrouve ainsi et on complète des résultats de Lions [18] (les résultats de l'article (V) n'entrant toutefois *apparemment* pas dans le cadre présent); cela fournit également des démonstrations nouvelles de certains résultats de Nikolski et de nombreux auteurs soviétiques (Becov, Il'in, Lizorkin, Solonnikov, Uspenskii, etc.); cf. le travail Nikolski [27]. Pour les applications aux problèmes aux limites, renvoyons à Lions-Magenes [23] (dont certains points peuvent être simplifiés avec les résultats du présent travail) et certains travaux de Schechter. Cf. Schechter [34]. Pour les applications à la théorie constructive des fonctions, renvoyons à J. Peetre [30].

Enfin le chapitre VIII indique *très brièvement* comment on peut étendre les espaces de moyenne au cas où les A_i *ne sont pas* des espaces de Banach et donne quelques exemples simples.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE MOYENNE

1. GÉNÉRALITÉS. DEUX DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES

1.1. Soient A_0 et A_1 deux espaces de Banach, tous deux contenus dans un même espace vectoriel topologique *séparé* $\mathscr{A}$, les injections de $A_i\,(i=0, 1)$ dans $\mathscr{A}$ étant continues. En abrégé :

$$A_i \subset \mathscr{A}, \qquad i=0, 1,$$

où ici et dans la suite le signe $\subset$ signifiera : inclusion avec injection continue. La norme dans A_i sera désignée par $\|\ \|_{A_i}$.

On considère les espaces $A_0 \cap A_1$ et A_0+A_1 (espace des $a \in \mathscr{A}$ de la forme $a=a_0+a_1$, $a_i \in A_i$) ; munis des normes respectives

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max\,(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}) \tag{1.1}$$

et

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf\,(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}),\ a=a_0+a_1,\ a_i \in A_i, \tag{1.2}$$

ce sont des espaces de Banach. On a :

$$A_0 \cap A_1 \subset A_i \subset A_0+A_1 \quad (\subset \mathscr{A}).$$

On appelle *espace intermédiaire* (entre A_0 et A_1) tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé A tel que

$$A_0 \cap A_1 \subset A \subset A_0+A_1 \tag{1.3}$$

où, naturellement, conformément à ce qui a été dit plus haut, les injections sont continues.

Avec cette définition, les espaces A_i eux-mêmes sont des espaces intermédiaires.

On va dans la suite considérer uniquement *certaines* familles d'espaces intermédiaires formées *d'espaces de Banach.*

1.2. Les espaces de moyenne.

Précisons d'abord une notation. Si F est un espace de Banach, on désigne par $L^p(F)$ l'espace des (classes de) fonctions $x \to f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \in F$, telles que $x \to f(x)$ soit fortement mesurable à valeurs dans F et vérifie

$$\|f\|_{L^p(F)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(x)\|_F^p \, dx\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

où $\| \ \|_F$ = norme dans F, et avec la modification habituelle si $p = \infty$; $L^p(F)$ est un espace de Banach.

Désignons par $W(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que

$$e^{\xi_0 x} u \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} u \in L^{p_1}(A_1) \tag{1.4}$$

où ξ_0 et ξ_1 sont deux paramètres réels.

Les paramètres p_0 et p_1 sont supposés quelconques dans $[1, \infty]$.

L'espace $W(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$ est un *espace de Banach* pour la norme

$$\max\left(\|e^{\xi_0 x} u\|_{L^{p_0}(A_0)}, \|e^{\xi_1 x} u\|_{L^{p_1}(A_1)}\right) = \|u\|_{W(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)}$$

On va maintenant considérer la « masse totale » de u : si l'on fait l'hypothèse que

$$\xi_0 \xi_1 < 0, \tag{1.5}$$

alors *l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ *converge dans* $A_0 + A_1$ (vérification immédiate).

On pose alors la

Définition (1.1). — *On désigne par* $S(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$ ***l'espace parcouru par*** $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ *lorsque u parcourt* $W(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$, *en supposant :* $1 \leq p_i \leq \infty$, $\xi_0 \xi_1 < 0$.

Muni de la norme

$$\|a\|_{S(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)} = \inf\{\max(\|e^{\xi_0 x} u\|_{L^{p_0}(A_0)}, \|e^{\xi_1 x} u\|_{L^{p_1}(A_1)}\}, \quad a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx \tag{1.6}$$

c'est un espace de Banach.

On a :

$$A_0 \cap A_1 \subset S(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1) \subset A_0 + A_1. \tag{1.7}$$

Les espaces $S(p_0, \xi_0, A_0, p_1, \xi_1, A_1)$ sont donc des *espaces intermédiaires*. On les appellera « *espaces de moyenne* ».

Remarque (1.1). — Il sera parfois plus commode d'utiliser la variable $t = e^x$. Si l'on désigne par $L^p_*(F)$ l'espace des (classes de) fonctions de puissance p^e sommable sur $(0, \infty)$ à valeurs dans F pour la mesure de Haar dt/t, l'application $f \to f^* : f^*(t) = f(\log t)$ est un isomorphisme de $L^p(F)$ sur $L^p_*(F)$. Alors

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \int_0^\infty u^*(t)\frac{dt}{t} \tag{1.8}$$

où

$$t^{\xi_0} u^* \in L^{p_0}_*(A_0), \qquad t^{\xi_1} u^* \in L^{p_1}_*(A_1). \tag{1.9}$$

Remarque (**1.2**). — On peut naturellement remplacer les « fonctions poids » $e^{\xi_i x}$ par des fonctions poids $w_i(x)$ plus générales et les espaces $L^{p_i}(A_i)$ par des espaces de Banach plus généraux (Orlicz, Lorentz, Luxemburg, etc.). Nous ne considérons pas systématiquement ces généralisations ici.

Remarque (**1.3**). — On peut également considérer les espaces décrits par $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)u(x)dx$, Φ étant une fonction à croissance polynomiale par exemple (et même plus générale). Une idée de ce genre a été utilisée par C. Foias-J.-L. Lions [5].

Nous allons maintenant définir des espaces intermédiaires à première vue différents des précédents mais dont nous montrerons au numéro suivant qu'ils *coïncident avec les espaces de moyenne.*

On considère l'espace des couples $\{v_0, v_1\}$ où

$$e^{x\xi_i} v_i \in L^{p_i}(A_i) \tag{1.10}$$

tels que

$$\frac{d}{dx}(v_0 + v_1) = 0 \tag{1.11}$$

au sens des distributions à valeurs dans $A_0 + A_1$.

Alors

$$v_0(x) + v_1(x) = a \qquad \text{presque partout (p.p.), } a \in A_0 + A_1 \tag{1.12}$$

et on désigne (provisoirement) par $\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace décrit dans $A_0 + A$ par a lorsque v_0, v_1 varient en satisfaisant à (1.10), (1.11).

Muni de la norme

$$||a||_{\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} = \inf_{a = v_0(x) + v_1(x)} \max\left(||e^{x\xi_0} v_0||_{L^{p_0}(A_0)}, ||e^{x\xi_1} v_1||_{L^{p_1}(A_1)}\right) \tag{1.13}$$

c'est un espace de Banach (noter par exemple que l'espace des couples $\{v_0, v_1\}$ vérifiant (1.10), (1.11) est *fermé* dans l'espace des couples satisfaisant seulement à (1.10)), et, comme on le vérifie aisément, on définit ainsi des espaces intermédiaires.

Remarque (**1.4**). — Si l'on effectue le changement de variables considéré dans la remarque 1.1, on voit que $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ est encore l'espace décrit par les a de la forme

$$a = v_0^*(t) + v_1^*(t), \text{ p.p.} \tag{1.14}$$

où

$$t^{\xi_0} v_0^* \in L_*^{p_0}(A_0), \qquad t^{\xi_1} v_1^* \in L_*^{p_1}(A_1). \tag{1.15}$$

2. ÉQUIVALENCE DES DEUX DÉFINITIONS DU N° 1

2.1. Nous utiliserons, ici et souvent dans la suite, le

Lemme (**2.1**). — *On ne change pas l'espace* $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ (*resp.* $\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$) *si l'on suppose que* u (resp. v_0 *et* v_1) *satisfait à*

$$e^{\xi_0 x} D^j u \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} D^j u \in L^{p_1}(A_1) \tag{2.1}$$

quel que soit j, $D^j = d^j/dx^j$ (resp.

$$e^{\xi_0 x} D^j v_0 \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} D^j v_1 \in L^{p_1}(A_1), \tag{2.2}$$

quel que soit j).

Démonstration. — On remplace u (resp. v_i) par $u * \rho$ (resp. $v_i * \rho$) où ρ est un élément de l'espace D des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}$ à support compact et à valeurs scalaires, tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$. Le signe $*$ désigne la convolution en x.

2.2. *Théorème* (**2.1**). — *Les espaces* $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *et* $\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *coïncident et ont des normes équivalentes.*

Démonstration. — Pour fixer les idées, nous supposerons $\xi_0 > 0$, $\xi_1 < 0$.

1) Soit $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Alors

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx \tag{2.3}$$

où u satisfait à (1.4). Notant que (2.3) s'écrit aussi bien $a = 1 * u$, et écrivant $1 = Y + Z$, où Y (resp. Z) est la fonction caractéristique de $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$), il vient $a = Y * u + Z * u$.

Posons alors :

$$v_0 = Z * u, \qquad v_1 = Y * u. \tag{2.4}$$

On a : $$e^{\xi_0 x} a_0 = (e^{\xi_0 x} Z) * (e^{\xi_0 x} u) \in L^{p_0}(A_0)$$

car $e^{\xi_0 x} Z \in L^1$.

Puis $$e^{\xi_1 x} v_1 = (e^{\xi_1 x} Y) * (e^{\xi_1 x} u) \in L^{p_1}(A_1)$$

car $e^{\xi_1 x} Y \in L^1$.

Donc

$$a = v_0(x) + v_1(x), \text{ p.p.} \tag{2.5}$$

où v_0 et v_1 satisfont à (1.10), donc $a \in \underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$.

En outre

$$||a||_{\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} \leq \max(||e^{x\xi_0} v_0||_{L^{p_0}(A_0)}, ||e^{x\xi_1} v_1||_{L^{p_1}(A_1)}) \leq$$

$$\max\left(\frac{1}{\xi_0} ||e^{x\xi_0} u||_{L^{p_0}(A_0)}, \frac{1}{|\xi_1|} ||e^{x\xi_1} u||_{L^{p_1}(A_1)}\right) \leq \max\left(\frac{1}{\xi_0}, \frac{1}{|\xi_1|}\right) \max(||e^{x\xi_0} u||_{L^{p_0}(A_0)}, ||e^{x\xi_1} u||_{L^{p_1}(A_1)})$$

d'où

$$||a||_{\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} \leq \max\left(\frac{1}{\xi_0}, \frac{1}{|\xi_1|}\right) ||a||_{S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)}. \tag{2.6}$$

2) Soit $a \in \underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Soient v_0 et v_1, comme dans (1.12), (1.10). En outre, d'après le lemme 2.1, on peut supposer que

$$e^{\xi_0 x} v_0' \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} v_1' \in L^{p_1}(A_1). \tag{2.7}$$

Posons : $$u = v_0'$$

donc aussi $$u = -v_1'.$$

On a :

$$e^{\xi_0 x}u = e^{\xi_0 x}v_0' \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x}u \in L^{p_1}(A_1)$$

et $1 * u$ (qui a un sens) vaut

$$1 * u = Y * u + Z * u = Y * v_0' - Z * v_1' = Y' * v_0 + (-Z)' * v_1 = v_0 + v_1 = a \quad \text{p.p},$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = a$ donc $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. LE THÉORÈME D'INTERPOLATION

3.1. Soient A_0, A_1, $\mathscr{A}$ comme aux numéros précédents et soient B_0, B_1, $\mathscr{B}$ un triplet d'espaces ayant des propriétés analogues.

Théorème **(3.1)** *(Théorème d'interpolation). — Soit π une application linéaire de* $A_0 + A_1$ *dans* $B_0 + B_1$, *dont la restriction à A_i est linéaire et continue de A_i dans B_i $(i = 0, 1)$; en abrégé :*

(3.1) $$\pi \in \mathscr{L}(A_i; B_i), \qquad i = 0, 1.$$

Alors, quels que soient p_0, p_1, ξ_0, ξ_1, la restriction de π à $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *appartient à* $\mathscr{L}(S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1); S(p_0, \xi_0, B_0; p_1, \xi_1, B_1))$.

De plus, si l'on désigne par $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}$ *les normes respectives de ces applications, on a :*

(3.2) $$\overline{\omega} \leq \overline{\omega}_0^{1-\theta}\,\overline{\omega}_1^{\theta}$$

où θ est donné par :

(3.3) $$\theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}.$$

(Noter que $0 < \theta < 1$.)

On a une estimation analogue avec la norme $\underline{\omega}$ de π calculée dans

$$\mathscr{L}(\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1); \underline{S}(p_0, \xi_0, B_0; p_1, \xi_1, B_1)).$$

Au cours de la démonstration, nous utiliserons le lemme ci-après.

3.2.

Lemme **(3.1)**. — *Soit* $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. *On a :*

(3.4) $$\|a\|_{S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} = \inf_{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = a} \|e^{\xi_0 x}u\|_{L^{p_0}(A_0)}^{1-\theta}\, \|e^{\xi_1 x}u\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta}$$

et

(3.5) $$\|a\|_{\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} = \inf_{a = v_0(x) + v_1(x)} \|e^{\xi_0 x}v_0\|_{L^{p_0}(A_0)}^{1-\theta}\, \|e^{\xi_1 x}v_1\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta}$$

où θ est donné par (3.3).

Démonstration. — Si τ est réel quelconque et si u_τ est définie par

$$u_\tau(x) = u(x+\tau),$$

on a :

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\tau(x)\,dx,$$

donc, écrivant S au lieu de $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$:

$$\|a\|_S \leq \max\left(\|e^{\xi_0 x}u_\tau\|_{L^{p_0}(A_0)}, \|e^{\xi_1 x}u_\tau\|_{L^{p_1}(A_1)}\right) = \max\left(e^{-\tau\xi_0}\|e^{\xi_0 x}u\|_{L^{p_0}(A_0)}, e^{-\tau\xi_1}\|e^{\xi_1 x}u\|_{L^{p_1}(A_1)}\right).$$

Choisissant τ convenablement, il en résulte

$$\|a\|_S \leq \|e^{\xi_0 x}u\|_{L^{p_0}(A_0)}^{1-\theta}\|e^{\xi_1 x}u\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta}$$

et ceci quel que soit u avec $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = a$, d'où l'inégalité $\|a\|_S \leq \inf$ dans (3.4) d'où (3.4), l'inégalité inverse étant évidente.

Démonstration analogue pour (3.5).

Corollaire **(3.1).** — *Il existe une constante* $c(p_0, \xi_0, p_1, \xi_1)$ *telle que*

(3.6) $$\|a\|_{S(p_0,\xi_0,A_0;p_1,\xi_1,A_1)} \leq c(p_0, \xi_0, p_1, \xi_1)\,\|a\|_{A_0}^{1-\theta}\,\|a\|_{A_1}^{\theta}$$

pour tout $a \in A_0 \cap A_1$.

Résultat analogue naturellement pour la norme (équivalente) $\|a\|_S$ avec une autre constante $c(p_0, \xi_0, p_1, \xi_1)$.

Démonstration. — Par exemple, soit $\varphi \in \mathscr{D}$, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$; alors u définie par $u(t) = \varphi(t)a$ vérifie $a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx$ et (3.4) implique (3.6).

La meilleure constante $c(p_0, \xi_0, p_1, \xi_1)$ (qui n'est pas importante pour notre objet) est obtenue dans Levin [17].

3.3. Démonstration du théorème (3.1).

Soit a donnée dans $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S_A$. Soit u avec (1.4) et $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = a$. Comme cette intégrale converge dans $A_0 + A_1$ et comme (vérification facile)

$$\pi \in \mathscr{L}(A_0 + A_1;\ B_0 + B_1),$$

on a :

$$\pi a = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi u(x)\,dx$$

et, avec des notations évidentes et en utilisant le lemme 3.1 :

$$\|\pi a\|_{S_B} \leq \|e^{\xi_0 x}\pi u\|_{L^{p_0}(B_0)}^{1-\theta}\,\|e^{\xi_1 x}\pi u\|_{L^{p_1}(B_1)}^{\theta} \leq \overline{\omega}_0^{1-\theta}\,\overline{\omega}_1^{\theta}\,\|e^{\xi_0 x}u\|_{L^{p_0}(A_0)}^{1-\theta}\,\|e^{\xi_1 x}u\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta}$$

d'où, encore d'après le lemme 3.1,

$$\|\pi a\|_{S_B} \leq \overline{\omega}_0^{1-\theta}\,\overline{\omega}_1^{\theta}\,\|a\|_{S_A},$$

d'où le théorème.

4. CAS DES APPLICATIONS BILINÉAIRES

On se donne maintenant trois doublets d'espaces A_i, B_i, C_i, $i = 0, 1$, avec :

$$A_0 \subset A_1, \qquad B_0 \subset B_1.$$

Théorème **(4.1)**. — *Soit π une application bilinéaire continue de $A_1 \times B_1 \to C_1$ (de norme $\overline{\omega}_1$) dont la restriction à $A_0 \times B_0$ est continue de $A_0 \times B_0 \to C_0$ (de norme $\overline{\omega}_0$). Alors, quels que soient $p_0, p_1, q_0, q_1, \xi_0, \xi_1$, tels que*

$$\textbf{(4.1)} \qquad \frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} - 1 \geq 0, \qquad i = 0, 1,$$

π est une application bilinéaire continue de $S_A \times S_B \to S_C$, où

$$S_A = S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1), \quad S_B = S(q_0, \xi_0, B_0; q_1, \xi_1, B_1), \quad S_C = S(r_0, \xi_0, C_0; r_1, \xi_1, C_1).$$

Si $\overline{\omega}$ est la norme de π dans $S_A \times S_B \to S_C$, on a

$$\textbf{(4.2)} \qquad \overline{\omega} \leq \overline{\omega}_0^{1-\theta} \overline{\omega}_1^{\theta}.$$

Démonstration. — Soit $a \in S_A$, $b \in S_B$. Soit u, v avec $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = a$, $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)dx = b$, u satisfaisant à (1.4) et v satisfaisant à

$$e^{\xi_0 x} v \in L^{q_0}(B_0), \qquad e^{\xi_1 x} v \in L^{q_1}(B_1).$$

Alors, π étant continue de $A_1 \times B_1 \to C_1$, on a :

$$\pi(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(u(x), v(y))dxdy.$$

Si donc
$$w(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(u(x), v(z-x))dx$$

(produit de composition à valeurs vectorielles, relativement à l'accouplement π), on a

$$\pi(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(z)dz$$

et

$$||e^{\xi_0 x} w||_{L^{r_0}(C_0)} \leq \overline{\omega}_0 ||e^{\xi_0 x} u||_{L^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_0 x} v||_{L^{q_0}(B_0)}$$

$$||e^{\xi_1 x} w||_{L^{r_1}(C_1)} \leq \overline{\omega}_1 ||e^{\xi_1 x} u||_{L^{p_1}(A_1)} ||e^{\xi_1 x} v||_{L^{q_1}(B_1)}.$$

Alors $\pi(a, b) \in S_C$ et d'après le lemme 3.1,

$$||\pi(a, b)||_{S_C} \leq ||e^{\xi_0 x} w||^{1-\theta}_{L^{r_0}(C_0)} ||e^{\xi_1 x} w||^{\theta}_{L^{r_1}(C_1)}.$$

D'où

$$||\pi(a, b)||_{S_C} \leq \overline{\omega}_0^{1-\theta} \overline{\omega}_1^{\theta} ||e^{\xi_0 x} u||^{1-\theta}_{L^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_1 x} u||^{\theta}_{L^{p_1}(A_1)} ||e^{\xi_0 x} v||^{1-\theta}_{L^{q_0}(B_0)} ||e^{\xi_1 x} v||^{\theta}_{L^{q_1}(B_1)}$$

d'où le résultat en appliquant encore une fois le lemme 3.1.

Remarque **(4.1)**. — On peut enlever les restrictions $A_0 \subset A_1$, $B_0 \subset B_1$ en supposant que π est par exemple bilinéaire continue de $(A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1) \to C_0 + C_1$.

5. QUELQUES AUTRES PROPRIÉTÉS DES ESPACES DE MOYENNE

De la symétrie de la définition 1.1 résulte aussitôt le

Théorème **(5.1)**. — *On a*

$$(5.1)\qquad S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S(p_1, \xi_1, A_1; p_0, \xi_0, A_0),$$

avec égalité des normes.

Montrons maintenant le

Théorème **(5.2)** *(homogénéité)*. — *Soit* $\lambda \neq 0$. *On a*

$$(5.2)\qquad S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S(p_0, \lambda\xi_0, A_0; p_1, \lambda\xi_1, A_1)$$

avec équivalence des normes.

Démonstration. — Soit $u \in W(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ (cf. n° 1, point 1.2). Définissons u_λ par

$$u_\lambda(x) = \lambda u(\lambda x).$$

Alors $u_\lambda \in W(p_0, \lambda\xi_0, A_0; p_1, \lambda\xi_1, A_1)$ et plus précisément :

$$||e^{\lambda\xi_0 x}u_\lambda||_{L^{p_0}(A_0)} = \lambda^{1-1/p_0}||e^{\xi_0 x}u||_{L^{p_0}(A_0)}$$

$$||e^{\lambda\xi_1 x}u_\lambda||_{L^{p_1}(A_1)} = \lambda^{1-1/p_1}||e^{\xi_1 x}u||_{L^{p_1}(A_1)}.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx$, on en déduit l'identité (5.2); en outre

$$(5.3)\qquad ||a||_{S(p_0,\lambda\xi_0,A_0;p_1,\lambda\xi_1,A_1)} = \lambda^{1-(\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1})}||a||_{S(p_0,\xi_0,A_0;p_1,\xi_1,A_1)}.$$

Remarque **(5.1)**. — Si l'on pose, comme on l'a déjà fait en (3.3) :

$$(5.4)\qquad \theta = \frac{\xi_0}{\xi_1 - \xi_0},$$

il résulte du théorème 5.2 que

$$(5.5)\qquad S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1).$$

Donc $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *ne dépend éventuellement que de* p_0, p_1 *et* θ.

Voici un résultat sur la dépendance en les p_i :

Théorème **(5.3)**. — *Soient* $p_0 \leq q_0, p_1 \leq q_1$. *Alors :*

$$(5.6)\qquad S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \subset S(q_0, \xi_0, A_0; q_1, \xi_1, A_1).$$

Démonstration. — Soit $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ et u avec (1.4) et

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx.$$

Si $\rho \in \mathscr{D}$, de masse totale 1, et si $v = u * \rho$ (cf. lemme 2.1), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)dx = a,$$

et

$$e^{\xi_0 x}v = (e^{\xi_0 x}u) * (e^{\xi_0 x}\rho) \in L^{q_0}(A_0);$$

plus précisément $\quad ||e^{\xi_0 x}v||_{L^{q_0}(A_0)} \leq ||e^{\xi_0 x}u||_{L^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_0 x}\rho||_{L^{r_0}}$

où

$$\frac{1}{r_0} = 1 - \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}\right). \tag{5.7}$$

Même chose pour $e^{\xi_1 x}v$, de sorte que $a \in S(q_0, \xi_0, A_0;\ q_1, \xi_1, A_1)$. En outre

$$||a||_{S(q_0, \xi_0, A_0;\ q_1, \xi_1, A_1)} \leq ||e^{\xi_0 x}v||^{1-\theta}_{L^{q_0}(A_0)} ||e^{\xi_1 x}v||^{\theta}_{L^{q_1}(A_1)} \leq$$
$$||e^{\xi_0 x}\rho||^{1-\theta}_{L^{r_0}} ||e^{\xi_1 x}\rho||^{\theta}_{L^{r_1}} ||e^{\xi_0 x}u||^{1-\theta}_{L^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_1 x}u||^{\theta}_{L^{p_1}(A_1)}.$$

d'où

$$||a||_{S(q_0, \xi_0, A_0;\ q_1, \xi_1, A_1)} \leq \inf_{\substack{\rho \in \mathcal{D} \\ \int \rho\, dx = 1}} \left(||e^{\xi_0 x}\rho||^{1-\theta}_{L^{r_0}} ||e^{\xi_1 x}\rho||^{\theta}_{L^{r_1}}\right) \cdot ||a||_{S(p_0, \xi_0, A_0;\ p_1, \xi_1, A_1)}. \tag{5.7}$$

CHAPITRE II

DÉFINITIONS DISCRÈTES DES ESPACES DE MOYENNE

1. DÉFINITIONS

1.1. Si F est un espace de Banach, on désigne par $l^p(\mathrm{F})$ l'espace des *suites* $n \to f_n$ de puissance p^e sommable à valeurs dans F, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Norme habituelle.

Par analogie avec ce qui a été fait au chapitre I^er, n° 1, 1.2, désignons par $w(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0 ; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)$ l'espace des suites $u = \{u_n\}$, telles que

$$\{e^{\xi_0 n} u_n\} \in l^{p_0}(\mathrm{A}_0), \qquad \{e^{\xi_1 n} u_n\} \in l^{p_1}(\mathrm{A}_1). \tag{1.1}$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\max\left(\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{l^{p_0}(\mathrm{A}_0)}, \|e^{\xi_1 n} u_n\|_{l^{p_1}(\mathrm{A}_1)}\right).$$

Si $\xi_0 \xi_1 < 0$, la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$$

converge dans $\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1$.

On désigne par $s(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0 ; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)$ l'espace décrit par

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \tag{1.2}$$

lorsque u parcourt $w(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{s(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)} = \inf \max\left(\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{l^{p_0}(\mathrm{A}_0)}, \|e^{\xi_1 n} u_n\|_{l^{p_1}(\mathrm{A}_1)}\right), \ a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \tag{1.3}$$

On verra au numéro suivant que cet espace coïncide (avec des normes équivalentes) avec $\mathrm{S}(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0 ; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)$.

1.2. Introduisons maintenant un espace qui soit « l'analogue discret » de l'espace $\underline{\mathrm{S}}(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0 ; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1)$ $(= \mathrm{S}(p_0, \xi_0, \mathrm{A}_0 ; p_1, \xi_1, \mathrm{A}_1))$. (Cf. chap. I^er, n° 1, 1.3.)

On considère l'espace des couples de suites $\{v_{0n}\}\{v_{1n}\}$ telles que

$$\{e^{n\xi_0} v_{0n}\} \in l^{p_0}(\mathrm{A}_0), \qquad \{e^{n\xi_1} v_{1n}\} \in l^{p_1}(\mathrm{A}_1) \tag{1.4}$$

et

$$v_{0n} + v_{1n} = a \text{ indépendant de } n. \tag{1.5}$$

On désigne par $\underline{s}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace décrit par les $a \in A_0 + A_1$ de la forme (1.5); muni de la norme

$$(1.6) \qquad ||a||_{\underline{s}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} = \inf_{a = v_{0n} + v_{1n}} \max(||e^{n\xi_0} v_{0n}||_{l^{p_0}(A_0)}, ||e^{n\xi_1} v_{1n}||_{l^{p_1}(A_1)})$$

c'est un espace de Banach.

Remarque (1.1). — Par des démonstrations analogues à celles faites au chapitre Ier on vérifiera les inégalités suivantes

$$(1.7) \qquad ||a||_{s(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} \leq e^{-\frac{\xi_0 \xi_1}{\xi_0 - \xi_1}} \inf_{a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n} ||e^{\xi_0 n} u_n||^{1-\theta}_{l^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_1 n} u_n||^{\theta}_{l^{p_1}(A_1)}.$$

$$(1.8) \qquad ||a||_{\underline{s}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} \leq e^{-\frac{\xi_0 \xi_1}{\xi_0 - \xi_1}} \inf_{a = v_{0n} + v_{1n}} ||e^{\xi_0 n} v_{0n}||^{1-\theta}_{l^{p_0}(A_0)} ||e^{\xi_1 n} v_{1n}||^{\theta}_{l^{p_1}(A_1)}.$$

2. ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS

On va maintenant démontrer le

Théorème (2.1). — *Les espaces* $s(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$, $\underline{s}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *coïncident avec* $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$, *toutes les normes étant équivalentes.*

Démonstration. — 1. Soit $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Alors

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx,$$

u satisfaisant à (1.4), chapitre Ier.

Si l'on pose

$$u_n = \int_n^{n+1} u(x)\,dx$$

on a :

$$||e^{n\xi_0} u_n||^{p_0}_{A_0} \leq \max(1, e^{-p_0 \xi_0}) \int_n^{n+1} ||e^{\xi_0 x} u(x)||^{p_0}_{A_0} dx,$$

$$||e^{n\xi_1} u_n||^{p_1}_{A_1} \leq \max(1, e^{-p_1 \xi_1}) \int_n^{n+1} ||e^{\xi_1 x} u(x)||^{p_1}_{A_1} dx$$

d'où

$$\{e^{n\xi_0} u_n\} \in l^{p_0}(A_0), \qquad \{e^{n\xi_1} u_n\} \in l^{p_1}(A_1)$$

et

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n.$$

Donc $a \in s(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ et

$$||a||_{s(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)} \leq (\max(1, e^{-p_0 \xi_0}))^{\frac{1-\theta}{p_0}} (\max(1, e^{-p_1 \xi_1}))^{\frac{\theta}{p_1}} ||a||_{S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)}.$$

2. Réciproquement, soit $a \in s(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Soit u_n avec (1.2). Définissons $u(x)$ par

$$u(x) = u_n \quad \text{dans} \quad n \leqslant x < n+1.$$

On a :

$$\int_n^{n+1} \|e^{\xi_i x} u(x)\|_{A_i}^{p_i} dx \leq \max(1, e^{p_i \xi_i}) \|e^{n\xi_i} u_n\|_{A_i}^{p_i}, \quad i=0, 1,$$

d'où

$$e^{\xi_0 x} u \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} u \in L^{p_1}(A_1).$$

Comme $a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx$, on en déduit que $a \in S(p_0\ \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$ et

$$\|a\|_{S(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)} \leq (\max(1, e^{p_0 \xi_0}))^{\frac{1-\theta}{p_0}} (\max(1, e^{p_1 \xi_1}))^{\frac{\theta}{p_1}} \|a\|_{s(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)}.$$

3. Soit maintenant $a \in \underline{S}(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$. Donc

$$a = v_0(x) + v_1(x), \text{ p. p.},$$

et on peut supposer (chap. Ier, lemme 2.1) que outre (1.10), on a :

$$e^{\xi_0 x} v_0' \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} v_1' \in L^{p_1}(A_1).$$

On peut alors définir $v_0(n)$, $v_1(n)$. Comme on le vérifie sans peine, $v_{0n} = v_0(n)$, $v_{1n} = v_1(n)$ satisfont à

$$\|v_{in}\|_{A_i}^{p_i} \leq c^{p_i} \int_n^{n+1} (\|v_i(x)\|_{A_i}^{p_i} + \|v_i'(x)\|_{A_i}^{p_i}) dx, \quad i=0, 1$$

où c est une constante indépendante de p_i et n. Alors

$$\|e^{\xi_0 n} v_{0n}\|_{A_0}^{p_0} \leq c^{p_0} \max(1, e^{-p_0 \xi_0}) \int_n^{n+1} (\|e^{\xi_0 x} v_0(x)\|_{A_0}^{p_0} + \|e^{\xi_0 x} v_0'(x)\|_{A_0}^{p_0}) dx$$

et majoration analogue pour $\|e^{\xi_1 n} v_{1n}\|_{A_1}^{p_1}$. Donc $e^{\xi_i n} v_{in} \in l^{p_i}(A_i)$ et

$$\|e^{\xi_i n} v_{in}\|_{l^{p_i}(A_i)} \leq c_1 (\max(1, e^{-p_i \xi_i}))^{1/p_i} [\|e^{\xi_i x} v_i\|_{L^{p_i}(A_i)} + \|e^{\xi_i x} v_i'\|_{L^{p_i}(A_i)}]$$

c_1 désignant une nouvelle constante. Mais (cf. lemme 2.1, chap. Ier)

$$\|e^{\xi_i x} v_i'\|_{L^{p_i}(A_i)} \leq c_2 \|e^{\xi_i x} v_i\|_{L^{p_i}(A_i)}$$

d'où l'on déduit l'existence d'une constante c_3 telle que

$$\|e^{\xi_i n} v_{in}\|_{l^{p_i}(A_i)} \leq c_3 \|e^{\xi_i} v_i\|_{L^{p_i}(A_i)}.$$

Alors $a = v_0(n) + v_1(n) = v_{0n} + v_{1n} \in \underline{s}(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$ et

$$\|a\|_{s(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)} \leq c_3 \|a\|_{\underline{S}(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)}.$$

4) Soit, réciproquement, $a \in \underline{s}(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$. Donc soient v_{0n}, v_{1n} avec (1.4), (1.5). Définissons $v_0(x)$, $v_1(x)$ par

$$v_0(x) = v_{0n} \qquad \text{pour} \quad n \leq x < n+1,$$

$$v_1(x) = v_{1n} \qquad \text{pour} \quad n \leq x < n+1.$$

On vérifie encore que

$$e^{\xi_0 x} v_0 \in L^{p_0}(A_0), \qquad e^{\xi_1 x} v_1 \in L^{p_1}(A_1)$$

et, p. p., $v_0(x) + v_1(x) = v_{0n} + v_{1n} = a$; donc $a \in \underline{S}(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque (**2.1**). — Voici encore une définition équivalente des espaces de moyenne. Soit k une constante *quelconque* >1. On considère les suites $\{u_n\}$ telles que

$$\{k^{n\theta}u_n\}\in l^{p_0}(A_0), \qquad \{k^{n(\theta-1)}u_n\}\in l^{p_1}(A_1), \tag{2.1}$$

(avec θ fixé, $0<\theta<1$) et les couples de suites $\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}$ telles que

$$\{k^{n\theta}v_{0n}\}\in l^{p_0}(A_0), \qquad \{k^{n(\theta-1)}v_{1n}\}\in l^{p_1}(A_1), \tag{2.2}$$

$v_{0n}+v_{1n}$ étant *indépendant* de n.

Alors $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ coïncide avec l'espace décrit par $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} u_n$ (resp. par $v_{0n}+v_{1n}$) *lorsque* $\{u_n\}$ (resp. $\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}$) *varie en satisfaisant à* (2.1) (resp. (2.2)), *si*

$$\theta=\frac{\xi_0}{\xi_0-\xi_1}, \tag{2.3}$$

et ceci quel que soit $k>1$. En outre, la norme sur S est équivalente à l'une quelconque des normes suivantes :

$$\inf_{\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n=a} [\max(||k^{n\theta}u_n||_{l^{p_0}(A_0)}, ||k^{n(\theta-1)}u_n||_{l^{p_1}(A_1)})],$$

$$\inf_{v_{0n}+v_{1n}=a} [\max(||k^{n\theta}v_{0n}||_{l^{p_0}(A_0)}, ||k^{n(\theta-1)}v_{1n}||_{l^{p_1}(A_1)})].$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.2, chapitre I^er^ (homogénéité), on a :

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)=S(p_0, \lambda\xi_0, A_0; p_1, \lambda\xi_1, A_1)$$

et d'après le théorème 2.1, cet espace coïncide avec

$$s(p_0, \lambda\xi_0, A_1; p_1, \lambda\xi_1, A_1)$$

et on retrouve la définition à l'aide des $\{u_n\}$ satisfaisant à (2.1) si

$$\lambda\xi_0=\theta\log k, \qquad \lambda\xi_1=(\theta-1)\log k,$$

ce qui définit λ grâce à (2.3).

Démonstration analogue pour (2.2), à l'aide de $s(p_0, \lambda\xi_0, A_0; p_1, \lambda\xi_1, A_1)$.

CHAPITRE III

LA DUALITÉ DANS LES ESPACES DE MOYENNE

1. UN LEMME

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (**1.1**). — *Soient* F *un espace de Banach et* $1 \leq p < \infty$. *Alors le dual* $(l^p(\mathrm{F}))'$ *de* $l^p(\mathrm{F})$ *peut s'identifier* à $l^{p'}(\mathrm{F}')$.

Démonstration. — A tout $f' \in l^{p'}(\mathrm{F}')$ correspond un élément $m_{f'}$ de $(l^p(\mathrm{F}))' = \mathrm{X}$ par :

$$<m_{f'}, f> = \sum_{-\infty}^{+\infty} <f'_n, f_n> \tag{1.1}$$

les crochets $<f'_n, f_n>$ désignant le produit scalaire entre F′ et F. On définit ainsi une application linéaire et continue $f' \to m_{f'}$ de $l^{p'}(\mathrm{F}') \to \mathrm{X}$; on a :

$$||m_{f'}||_{\mathrm{X}} \leq ||f'||_{l^{p'}(\mathrm{F}')}.$$

L'application est injective, de sorte qu'il reste seulement à montrer que cette application est ***surjective.***

Pour un entier N, et pour $f \in l^p(\mathrm{F})$, désignons par $f^{(\mathrm{N})}$ la suite :

$$f_n^{(\mathrm{N})} = f_n \quad \text{si} \quad |n| \leq \mathrm{N}, \qquad f_n^{(\mathrm{N})} = 0 \quad \text{si} \quad |n| > \mathrm{N}.$$

Considérons ensuite l'application transposée de $f \to f^{(\mathrm{N})}$, soit $m \to m^{(\mathrm{N})}$, où $m \in \mathrm{X}$ et où $m^{(\mathrm{N})}$ est donc définie par :

$$<m^{(\mathrm{N})}, f> = <m, f^{(\mathrm{N})}>. \tag{1.2}$$

Comme $f^{(\mathrm{N})} \to <m, f^{(\mathrm{N})}>$ ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, il existe des $f'_{n,\mathrm{N}} \in \mathrm{F}'$ tels que

$$<m^{(\mathrm{N})}, f> = \sum_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} <f'_{n,\mathrm{N}}, f_n>.$$

Mais $f'_{n,\mathrm{N}}$ ne dépend pas de N, donc

$$<m^{(\mathrm{N})}, f> = \sum_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} <f'_n, f_n>. \tag{1.3}$$

Pour établir une majoration sur les $||f'_n||_{\mathrm{F}'}$, choisissons dans (1.3) les $f_n \in \mathrm{F}$ satisfaisant à

$$<f_n, f'_n> = ||f'_n||_{\mathrm{F}'}^{p'} = ||f_n||_{\mathrm{F}}^{p}, \; |n| \leq \mathrm{N},$$

ce qui est possible d'après le théorème de Hahn-Banach, et $f_n = 0$ pour $|n| > N$. Il vient

$$<m^{(N)}, f> = \sum_{-N}^{N} ||f_n'||_{F'}^{p'} \leq ||m^{(N)}||_X (\sum_{-N}^{N} ||f_n||_F^p)^{1/p}$$

d'où

$$(\sum_{-N}^{N} ||f_n'||_{F'}^{p'})^{1/p'} \leq ||m^{(N)}||_X \leq ||m||_X. \tag{1.4}$$

Par conséquent la suite $\{f_n'\} = f' \in l^{p'}(F')$ et, passant à la limite dans (1.3), $<m, f> = \sum_{-\infty}^{+\infty} <f_n', f_n>$. Comme $m_{f'} = m$, le lemme est démontré.

2. UN THÉORÈME DE DENSITÉ

Théorème (**2.1**). — *On suppose que, soit* p_0, *soit* p_1 *est fini. Alors* $A_0 \cap A_1$ *est dense dans* $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$.

Démonstration. — Soit $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S$. Alors, d'après le théorème 2.1, chapitre II, il existe une suite $\{u_n\}$ satisfaisant à (1.1) avec

$$\sum_{-\infty}^{\infty} u_n = a.$$

Posons : $a_N = \sum_{-N}^{N} u_n$. Évidemment $a_N \in A_0 \cap A_1$; $a - a_N = \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n^{(N)}$, où $v_n^{(N)} = 0$ si $|n| \leq N$, $v_n^{(N)} = u_n$ si $|u| > N$; donc, d'après (1.7), chapitre II,

$$||a - a_N||_S \leq c ||e^{\xi_0 n} v_n^{(N)}||_{l^{p_0}(A_0)}^{1-\theta} ||e^{\xi_1 n} v_n^{(N)}||_{l^{p_1}(A_1)}^{\theta} \tag{2.1}$$

et comme par hypothèse l'un au moins des p_i est fini, l'un au moins des facteurs du deuxième membre de (2.1) tend vers 0 lorsque $N \to \infty$, et l'autre reste borné, d'où le théorème.

3. LE THÉORÈME DE DUALITÉ

3.1. Nous ferons l'hypothèse suivante :

$$A_0 \cap A_1 \text{ est dense dans } A_0 \text{ et dans } A_1. \tag{3.1}$$

On peut alors identifier le dual A_i' de A_i à un sous-espace de $(A_0 \cap A_1)'$ (dual de $A_0 \cap A_1$) :

$$A_i' \subset (A_0 \cap A_1)', \quad i = 0, 1. \tag{3.2}$$

Le triplet $\{A_0', A_1', (A_0 \cap A_1)'\}$ a alors des propriétés analogues au triplet $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$ et l'on peut donc considérer les espaces intermédiaires entre A_0' et A_1' et en particulier les espaces $S(q_0, \eta_0, A_0'; q_1, \eta_1, A_1')$, $\eta_0 \eta_1 < 0$.

3.2. Nous allons maintenant démontrer le

Théorème (**3.1**). — *On suppose que* $1 \leq p_i < \infty$, $i = 0, 1$. *Alors on peut identifier le dual de* $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ *à* $S(p_0', -\xi_0, A_0'; p_1', -\xi_1, A_1')$, *où*

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1. \tag{3.3}$$

En bref

$$(S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1))' = S(p_0', -\xi_0, A_0'; p_1', -\xi_1, A_1'). \tag{3.4}$$

Démonstration. — 1) Nous poserons au cours de la démonstration :

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S, \qquad S(p_0', -\xi_0, A_0'; p_1', -\xi_1, A_1') = \mathscr{S}.$$

On munit S de la norme de $\underline{s}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = \underline{s}$ (cf. chap. II, n° 1, et n° 2). Si $\underline{w}$ désigne l'espace des couples de suites

$$\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}$$

avec

$$\{e^{n\xi_0} v_{0n}\} \in l^{p_0}(A_0), \qquad \{e^{n\xi_1} v_{1n}\} \in l^{p_1}(A_1), \tag{3.5}$$

avec

$$v_{0n} + v_{1n} = a, \text{ indépendant de } n, \tag{3.6}$$

alors

$$||a||_S = ||a||_{\underline{s}} = \inf_{v_{0n} + v_{1n} = a} \max (||e^{n\xi_0} v_{0n}||_{l^{p_0}(A_0)}, ||e^{n\xi_1} v_{1n}||_{l^{p_1}(A_1)}).$$

Ceci posé, soit L une forme linéaire continue sur S :

$$a \to L(a),$$

$$|L(a)| \leq ||L||_{S'} ||a||_S, \quad a \in S.$$

La forme linéaire

$$\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\} \to L(a) = \wedge(\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\})$$

composée de l'application canonique de $\underline{w} \to S$ et de la forme L, est donc linéaire continue et de norme $\leq ||L||_{S'}$ sur $\underline{w}$.

Mais d'après le lemme 1.1 et le théorème de Hahn-Banach, il existe alors un couple de suites $\{u_{0n}'\}, \{u_{1n}'\}$ telles que

$$\{e^{-n\xi_0} u_{0n}'\} \in l^{p_0'}(A_0'), \qquad \{e^{-n\xi_1} u_{1n}'\} \in l^{p_1'}(A_1'), \tag{3.7}$$

et

$$\max (||e^{-n\xi_0} u_{0n}'||_{l^{p_0'}(A_0')}), ||e^{-n\xi_1} u_{1n}'||_{l^{p_1'}(A_1')}) \leq ||L||_{S'}, \tag{3.8}$$

et

$$\wedge(\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} < u_{0n}', v_{0n} > + < u_{1n}', v_{1n} >. \tag{3.9}$$

On va vérifier que

$$u'_{0m} = u'_{1m} \qquad \text{quel que soit } m. \tag{3.10}$$

En effet, si α est quelconque dans $A_0 \cap A_1$, soient $\{v_{0n}\}$ et $\{v_{1n}\}$ définies par :

$$v_{0n} = \alpha \quad \text{si} \quad n = m, \qquad v_{0n} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m,$$

$$v_{1n} = -\alpha \quad \text{si} \quad n = m, \qquad v_{1n} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m;$$

alors $\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\} \in \underline{w}$, $v_{0n} + v_{1n} = 0$ quel que soit n. Donc $\wedge(\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}) = L(0) = 0$, et (3.9) donne

$$<u'_{0m}, \alpha> - <u'_{1m}, \alpha> = 0$$

et ceci pour tout $\alpha \in A_0 \cap A_1$; comme $u'_{0m} - u'_{1m} \in (A_0 \cap A_1)'$, il en résulte (3.10); nous poserons

$$u'_{0m} = u'_{1m} = u'_m (\in A'_0 \cap A'_1)$$

et d'après (3.7)

$$\{e^{-n\xi_0} u'_n\} \in l^{p'_0}(A'_0), \qquad \{e^{-n\xi_1} u'_n\} \in l^{p'_1}(A'_1). \tag{3.11}$$

Donc (avec les notations du chap. II, n° 1), $\{u'_n\} \in w(p'_0, -\xi_0, A'_0; p'_1, -\xi_1, A'_1) = w'$. La formule (3.9) s'écrit maintenant

$$\wedge(\{v_{0n}\}, \{v_{1n}\}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} <u'_n, v_{0n} + v_{1n}> \tag{3.12}$$

soit

$$L(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} <u'_n, a>. \tag{3.12 bis}$$

Notons enfin que, d'après (3.8) :

$$\|\{u'_n\}\|_{w'} \leq \|L\|_{S'}. \tag{3.13}$$

Donc, *toute forme linéaire continue* L *sur* S *peut se représenter sous la forme* (3.12 *bis*), *avec* (3.11), (3.13).

Réciproquement, soit $\{u'_n\}$ une suite donnée de w'. Alors (3.12 *bis*) définit une forme linéaire continue sur S, de norme

$$\|L\|_{S'} \leq 2 \max(\|e^{-n\xi_0} u'_n\|_{l^{p'_0}(A'_0)}, \|e^{-n\xi_1} u'_n\|_{l^{p'_1}(A'_1)}). \tag{3.14}$$

On a donc obtenu la structure générale des formes linéaires continues sur S.

2) Mais si l'on introduit

$$a' = \sum_{-\infty}^{+\infty} u'_n, \tag{3.15}$$

on a là un élément de $s(p'_0, -\xi_0, A'_0; p'_1, -\xi_1, A'_1) = \mathscr{S}$; la série (3.15) converge fortement dans $A'_0 + A'_1 = (A_0 \cap A_1)'$, donc aussi dans $A'_0 + A'_1$ faible et donc

$$L(a) = <a', a>, \qquad a \in A_0 \cap A_1. \tag{3.16}$$

On a donc défini une application $L \to a'$ de S' sur $\mathscr{S}$, et comme $A_0 \cap A_1$ est dense dans S (théorème 2.1), l'application est injective. On a donc l'identification désirée. En outre, de (3.13) et (3.14) il résulte que

(3.17) $$\|a'\|_{\mathscr{S}} \leq \|a'\|_{S'} \leq 2\|a'\|_{\mathscr{S}},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque **(3.1)**. — Soient $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$, $a' \in S(p'_0, -\xi_0, A'_0; p'_1, -\xi_1, A'_1)$. Alors on peut écrire a et a' sous l'une des formes suivantes :

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx,\ e^{\xi_0 x} u \in L^{p_0}(A_0),\ e^{\xi_1 x} u \in L^{p_1}(A_1);$$

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n,\ \{e^{\xi_0 n} u_n\} \in l^{p_0}(A_0),\ \{e^{\xi_1 n} u_n\} \in l^{p_1}(A_1);$$

$$a = v_0(x) + v_1(x),\ e^{\xi_0 x} v_0 \in L^{p_0}(A_0),\ e^{\xi_1 x} v_1 \in L^{p_1}(A_1);$$

$$a = v_{0n} + v_{1n},\ \{e^{\xi_0 n} v_{0n}\} \in l^{p_0}(A_0),\ \{e^{\xi_1 n} v_{1n}\} \in l^{p_1}(A_1);$$

$$a' = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)\,dx,\ e^{-\xi_0 x} u^* \in L^{p'_0}(A'_0),\ e^{-\xi_1 x} u^* \in L^{p'_1}(A'_1);$$

$$a' = \sum_{-\infty}^{\infty} u^*_n,\ \{e^{-\xi_0 n} u^*_n\} \in l^{p'_0}(A'_0),\ \{e^{-\xi_1 n} u^*_n\} \in l^{p'_1}(A'_1);$$

$$a' = v^*_0(x) + v^*_1(x),\ e^{-\xi_0 x} v^*_0 \in l^{p'_0}(A'_0),\ e^{-\xi_1 x} v^*_1 \in l^{p'_1}(A'_1);$$

$$a' = v^*_{0n} + v^*_{1n},\ e^{-\xi_0 n} v^*_{0n} \in l^{p_0}(A'_0),\ e^{-\xi_1 n} v^*_{1n} \in l^{p'_1}(A'_1).$$

Alors le produit scalaire entre a et a' peut être choisi de l'une des quatre façons suivantes :

$$\langle a, a' \rangle_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u(x), v^*_0(x) + v^*_1(x) \rangle\,dx,$$

$$\langle a, a' \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle v_0(x) + v_1(x), u^*(x) \rangle\,dx,$$

$$\langle a, a' \rangle_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle u_n, v^*_{0n} + v^*_{1n} \rangle,$$

$$\langle a, a' \rangle_4 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle v_{0n} + v_{1n}, u^*_n \rangle.$$

4. UNE APPLICATION

4.1. — Soient A un espace de Banach, et H un espace *de Hilbert* avec

(4.1) $$A \subset H,$$

A étant *dense* dans H. Alors en identifiant H à son anti-dual, on peut considérer H comme un sous-espace de A', A' étant ici l'anti-dual de A :

(4.2) $$H \subset A'.$$

On va démontrer le

Théorème (**4.1**). — *Quel que soit p avec $1 < p < \infty$ et quel que soit $\xi > 0$, on a*

$$S(p, \xi, A;\ p', -\xi, A') = H \tag{4.3}$$

(où comme d'ordinaire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), *avec des normes équivalentes.*

Démonstration. — 1) Soit $a \in A$: Donc en particulier $a \in S(p, \xi, A; p', -\xi, A') = S$. Soient alors $\{u_n\}$ avec

$$\{e^{\xi n} u_n\} \in l^p(A),\ \{e^{-\xi n} u_n\} \in l^{p'}(A'),\ \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = a,$$

et $\{v_{0,n}\}$, $\{v_{1,n}\}$ avec

$$\{e^{\xi n} v_{0n}\} \in l^p(A),\ \{e^{-\xi n} v_{1n}\} \in l^{p'}(A'),\ v_{0n} + v_{1n} = a.$$

Soit $< a, a >$ le produit scalaire entre A et son anti-dual; on a : $< a, a > = ||a||_H^2$ ($||a||_H =$ norme de a dans H); mais

$$< a, a > = \sum_{-\infty}^{+\infty} < v_{0n} + v_{1n}, u_n >$$

d'où

$$|< a, a >| \leq ||e^{\xi n} v_{0n}||_{l^p(A)} ||e^{-\xi n} u_n||_{l^{p'}(A')} + ||e^{-\xi n} v_{1n}||_{l^{p'}(A')} ||e^{\xi n} u_n||_{l^p(A)} \leq 2 ||a||_s ||a||_s$$

(avec les notations du chap. II). Donc

$$|< a, a >| = ||a||_H^2 \leq c ||a||_S^2$$

ce qui montre, A étant dense dans S, que $S \subset H$.

2) L'inclusion inverse : $H \subset S$ suit en passant aux anti-duals et appliquant le théorème 3.1 (valable évidemment en remplacant « dual » par « anti-dual »). D'où le théorème.

4.2.

Remarque (**4.1**). — Le théorème 4.1 résout par l'affirmative une question posée par P. Lax. Un cas particulier du théorème d'interpolation résultant du théorème 4.1 a été démontré par P. Lax, par des méthodes complètement différentes (cf. Lax [16] et communication personnelle).

Remarque (**4.2**). — Le théorème 4.1 *n'est pas vrai, en général,* si A n'est plus un espace de Banach (cf. chap. VIII pour les définitions des espaces de moyenne dans ce cas); en effet, par exemple si $A = \mathscr{D}$ (ou $\mathscr{S}$) (notations de L. Schwartz) et si $H = L^2$ (espaces sur R^n), alors $A' = \mathscr{D}'$ (ou $\mathscr{S}'$) et les opérateurs de dérivation sont linéaires continus de A dans lui-même, A' dans lui-même, *mais pas de* L^2 *dans lui-même.* On ne saurait donc avoir (4.3).

CHAPITRE IV

LA RÉITÉRATION DANS LES ESPACES DE MOYENNE

1. ESPACES DE CLASSES θ

1.1. On considère encore le triplet $\{A_0, A_1 \mathscr{A}\}$, comme au chapitre Ier, no 1. On donne θ avec $0<\theta<1$.

Définition **(1.1)**. — Un espace de Banach $A \subset A_0 + A_1$ (intermédiaire) est dit de la classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ s'il existe une constante c telle que

$$(1.1) \qquad ||a||_A \leq c||a||_{A_0}^{1-\theta}||a||_{A_1}^{\theta}$$

pour tout $a \in A_0 \cap A_1$.

Exemple **(1.1)**. — D'après le corollaire 3.1, chapitre Ier, tout espace $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\theta = \dfrac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}$.

Notons le résultat suivant :

Proposition **(1.1)**. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit de classe* $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ *est que* $S(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1) \subset A$.

Démonstration. — 1) D'après l'exemple 1.1, l'espace $S(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1)$ est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$. Par ailleurs si B est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ et si $B \subset A$, A est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$. Donc la condition est suffisante.

2) Réciproquement, supposons A de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ et soit

$$a \in S(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1).$$

Alors $a = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt$, où $e^{\theta t}u \in L^1(A_0)$, $e^{-(1-\theta)t}u \in L^1(A_1)$. D'après (1.1), on a

$$||u(t)||_A \leq c||u(t)||_{A_0}^{1-\theta}||u(t)||_{A_1}^{\theta} \quad \text{p. p.}$$

d'où suit (inégalité de Hölder) que $||u(t)||_A \in L^1$ et alors $a \in A$. La condition est donc nécessaire.

1.2.

Définition **(1.2)**. — Un espace de Banach $A \subset A_0 + A_1$ est dit de la classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ si, pour tout $t>0$, il existe $a_i \in A_i$, $i=0, 1$, tels que

$$(1.2) \qquad a = a_0 + a_1$$

avec

$$(1.3) \qquad ||a_0||_{A_0} \leq ct^{-\theta}||a||_A, \qquad ||a_1||_{A_1} \leq ct^{1-\theta}||a||_A.$$

Exemple (**1.2**). — D'après la remarque 1.4, chapitre I^er^, l'espace $S(\infty, \theta, A_0; \infty, -(1-\theta), A_1)$ est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$.

Notons aussi que si B est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ et si $A \subset B$, A est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$. Du théorème 5.3, chapitre I^er^, résulte alors que $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\theta = \dfrac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}$.

Notons le résultat suivant :

Proposition (**1.2**). — *La condition nécessaire et suffisante pour que* A *soit de classe* $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ *est que* $A \subset S(\infty, \theta, A_0; \infty, -(1-\theta), A_1)$.

Démonstration. — D'après les remarques faites ci-dessus, il reste seulement à montrer que si A est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, alors A est contenu dans $S(\infty, \theta, A_0; \infty, -(1-\theta), A_1)$.

Soit $a \in A$. Alors, appliquant l'hypothèse avec $t = e^n$, il existe a_{0n}, a_{1n} tels que

$$a = a_{0n} + a_{1n}$$

et

$$\|a_{0n}\|_{A_0} \leq ce^{-n\theta}\|a\|_A, \qquad \|a_{1n}\|_{A_1} \leq ce^{n(1-\theta)}\|a\|_A$$

d'où le résultat, d'après la définition de $\underline{s}(\infty, \theta, A_0; \infty, -(1-\theta), A_1)$ (chap. II, n^o^ 1) et le théorème 2.1, chapitre II.

1.3.

Définition (**1.3**). — Un espace de Banach $A \subset A_0 + A_1$ est dit de classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$ s'il est à la fois de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ et de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$.

Donc, d'après les propositions 4.1 et 4.2, A est de classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$ si et seulement si

$$S(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1) \subset A \subset S(\infty, \theta, A_0; \infty, -(1-\theta), A_1).$$

Des exemples 1.1 et 1.2, ou bien du théorème 5.3, chapitre I^er^, *résulte que*

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \text{ est de classe } \mathscr{K}_\theta(A_0, A_1), \theta = \xi_0/(\xi_0 - \xi_1).$$

Remarque (**1.1**). — Si l'on fait $\theta = 0$ dans la définition 1.1, (1.1), il vient $\|a\|_A \leq c\|a\|_{A_0}$; donc :

$$A \textit{ est de classe } \underline{\mathscr{K}}_0(A_0, A_1) \textit{ si } A_0 \subset A.$$

Si l'on fait $\theta = 1$, on obtient :

$$A \textit{ est de classe } \underline{\mathscr{K}}_1(A_0, A_1) \textit{ si } A_1 \subset A.$$

Si maintenant l'on fait $\theta = 0$ dans (1.2), (1.3), il vient en prenant $t = 0$, $\|a_0\|_{A_0} \leq c\|a\|_A$, $\|a_1\|_{A_1} = 0$ donc $a_1 = 0$ et $a_0 = a$ de sorte que $A \subset A_0$; donc :

$$A \textit{ est de classe } \overline{\mathscr{K}}_0(A_0, A_1) \textit{ si } A \subset A_0.$$

De même :

$$A \textit{ est de classe } \overline{\mathscr{K}}_1(A_0, A_1) \textit{ si } A \subset A_1.$$

Voici une autre famille d'espaces de classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$: les espaces

$$[A_0, A_1, \delta(\theta)] = [A_0, A_1]_\theta$$

introduits par A. P. Calderòn [3], [4] et J.-L. Lions [21]. On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions $\zeta \to f(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, holomorphes dans $0 < \xi < 1 \to A_0 + A_1$, continues et bornées dans $0 \leq \xi \leq 1 \to A_0 + A_1$, telles que

$$\begin{cases} \eta \to f(j + i\eta) & \text{soit continue et bornée de } \mathbf{R}_\eta \to A_j, \\ j = 0, 1. \end{cases}$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$(1.4) \qquad \|f\|_{\mathscr{H}} = \max(\sup_\eta \|f(i\eta)\|_{A_0}, \sup_\eta \|f(1 + i\eta)\|_{A_1}).$$

On définit alors $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$ comme l'image de $\mathscr{H}$ dans l'application $f \to f(\theta)$, θ fixé, $0 < \theta < 1$; c'est un espace de Banach pour la norme

$$(1.5) \qquad \|a\|_{[A_0, A_1, \delta(\theta)]} = \inf \|f\|_{\mathscr{H}}, \quad f(\theta) = a.$$

Ceci posé on a le

Théorème (**1.1**). — *L'espace* $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$ *est de la classe* $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$.

Nous allons donner une démonstration un peu longue mais utilisant de nouveaux espaces qui ont peut-être un certain intérêt.

1.4. *Les espaces* $\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$.

Soit F un espace de Banach. On utilise les distributions sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans F et en particulier l'espace $\mathscr{S}'(F)$ des distributions *tempérées* à valeurs dans F (cf. L. Schwartz [35]). On désigne par $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier, qui établit un isomorphisme de $\mathscr{S}'(F)$ sur lui-même.

On désigne par $\mathscr{F}L^p(F)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ l'espace image de $L^p(F)$ $(\subset \mathscr{S}'(F))$ par $\mathscr{F}$, muni de la norme transportée par $\mathscr{F}$. Donc

$$(1.6) \qquad \mathscr{F}L^p(F) \subset \mathscr{S}'(F).$$

On désigne maintenant par $\hat{W}(p_0, \xi_0 A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace des distributions u telles que

$$(1.7) \qquad e^{\xi_0 x} u \in \mathscr{F}L^{p'_0}(A_0), \quad e^{\xi_1 x} u \in \mathscr{F}L^{p'_1}(A_1); \quad \frac{1}{p'_i} = 1 - \frac{1}{p_i};$$

muni de la norme

$$\max(\|e^{\xi_0 x} u\|_{\mathscr{F}L^{p'_0}(A_0)}, \|e^{\xi_1 x} u\|_{\mathscr{F}L^{p'_1}(A_1)}),$$

c'est un espace de Banach.

Si $\xi_0 \xi_1 < 0$, on vérifie facilement que la distribution u est sommable à valeurs dans $A_0 + A_1$ (cf. Schwartz [35]), de sorte que l'on peut définir

$$(1.8) \qquad u(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dx \in A_0 + A_1.$$

On désigne alors par $\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace décrit par $u(1)$ lorsque u parcourt $\hat{W}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Muni de la norme

$$||a||_{\hat{S}} = \inf (\max (||e^{\xi_0 x} u||_{\mathscr{F}L^{p_0'}(A_0)}, ||e^{\xi_1 x} u||_{\mathscr{F}L^{p_1'}(A_1)})), \ u(1) = a,$$

c'est un espace de Banach.

Montrons maintenant le :

Théorème **(1.2)**. — *Si* $p_0 \leq q_0, p_1 \leq q_1$, *on a :*

$$\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \subset \hat{S}(q_0, \xi_0, A_0; q_1, \xi_1, A_1). \tag{1.9}$$

En outre

$$\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \subset S(\infty, \xi_0, A_0; \infty, \xi_1, A_1). \tag{1.10}$$

Démonstration. — Soit $a \in \hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Considérons alors

$$u \in \hat{W}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$$

avec (1.7) et $a = u(1)$. Soit ρ comme dans la démonstration du théorème 5.3, chapitre Ier. On introduit

$$w = u * \rho$$

On a :

$$e^{\xi_0 x} w = (e^{\xi_0 x} u) * (e^{\xi_0 x} \rho) \quad \text{donc} \quad (\text{si } \bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^{-1}) :$$

$$\bar{\mathscr{F}}(e^{\xi_0 x} w) = \psi v_0$$

où $v_0 \in L^{p_0'}(A_0)$ et où ψ est à décroissance rapide (transformée de Fourier d'un élément de $\mathscr{D}$). Donc $\psi v_0 \in L^{p_0'}(A_0)$ et $\in L^1(A_0)$, donc $\in L^{q_0'}(A_0)$ pour $q_0' \leq p_0'$. Donc

$$e^{\xi_0 x} w \in \mathscr{F} L^{q_0'}(A_0)$$

et

$$e^{\xi_0 x} w \in \mathscr{F} L^1(A_0) \subset L^\infty(A_0).$$

Résultat analogue pour $e^{\xi_1 x} w$ à valeurs dans A_1, d'où (1.9) et (1.10).

Théorème **(1.3)**. — *On a :*

$$[A_0, A_1, \delta(\theta)] \subset \hat{S}(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1). \tag{1.11}$$

Démonstration. — Soit $a \in [A_0, A_1, \delta(\theta)]$ et $f \in \mathscr{H}$ avec $f(\theta) = a$.

Soit alors $u \in \mathscr{S}'(A_0 + A_1)$ définie par

$$u = e^{(-\theta + \xi)x} \bar{\mathscr{F}}_\eta (f(\xi + i\eta)) \tag{1.12}$$

(où $\bar{\mathscr{F}}_\eta$ désigne la transformée de Fourier inverse en η) ; la distribution u est indépendante de ξ (transformation de Laplace inverse). Appliquant (1.12) pour $\xi = 0$ et $\xi = 1$, il vient

$$e^{\theta x} u \in \mathscr{F} L^\infty(A_0), \qquad e^{-(1-\theta)x} u \in \mathscr{F} L^\infty(A_1)$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dx = u(1) \in \hat{S}(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1).$$

Mais

$$f(\xi+i\eta)=\mathscr{F}(e^{(\theta-\xi)x}u(x))$$

donc

$$f(\theta)=u(1)$$

d'où le théorème.

Théorème **(1.4)**. — *On a*

$$S(1, \theta, A_0; 1, -(1-\theta), A_1)\subset[A_0, A_1), \delta(\theta)]. \tag{1.13}$$

Démonstration. — En effet en introduisant $f_\lambda(\zeta)=e^{\lambda(\zeta-\theta)}f(\xi)$, et choisissant λ convenablement, on vérifie sans peine que

$$||a||_{[A_0, A_1, \delta(\theta)]}\leq c||a||_{A_0}^{1-\theta}||a||_{A_1}^{\theta}, \quad a\in A_0\cap A_1$$

d'où (1.13) d'après la proposition 1.1.

Démonstration du théorème **(1.1)**. — Résulte aussitôt des théorèmes 1.2, 1.3, 1.4.

Remarque **(1.2)**. — Les espaces $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$, $\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ jouissent de propriétés d'interpolation analogues à celles du n° 3, chapitre Ier.

Remarque **(1.3)**. — Il résulte également des théorèmes 1.2, 1.3, 1.4 que $\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ est de classe $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$, $\theta=\xi_0/(\xi_0-\xi_1)$.

Remarque **(1.4)**. — Sous les conditions du chapitre III, n° 3, pour 3.3, on voit que le dual d'un espace de classe $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ est de classe $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0', A_1')$; en effet passer aux espaces duals dans la proposition 1.1 et utiliser la proposition 1.2.

2. LE THÉORÈME DE RÉITÉRATION

2.1. On va démontrer le :

Théorème **(2.1)**. — *On donne deux espaces de Banach* X_0, X_1 *respectivement de classe* $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_0}(A_0, A_1)$ *et* $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_1}(A_0, A_1)$, *avec* $\theta_0<\theta_1$; *soit* θ *avec*

$$\theta_0<\theta<\theta_1. \tag{2.1}$$

Alors

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)\subset S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1) \tag{2.2}$$

si les relations suivantes ont lieu :

$$\eta_i=(1-\theta_i)\xi_0+\theta_i\xi_1, \qquad i=0, 1 \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{q_i}=\frac{1-\theta_i}{p_0}+\frac{\theta_i}{p_1}, \qquad i=0, 1. \tag{2.4}$$

(et, comme d'ordinaire, $\theta=\dfrac{\xi_0}{\xi_0-\xi_1}$).

Noter que $\dfrac{\eta_i}{\xi_0-\xi_1}=\theta-\theta_i$ de sorte que d'après (2.1) on a : $\eta_0\eta_1<0$ et $S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1)$ a un sens.

Démonstration. — Soit $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$. Soit $\{u_n\}$ avec (1.1) et (1.2), chapitre II. Comme X_i est de classe $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_i}(A_0, A_1)$, et d'après la définition 1.1, on a :

$$\|u_n\|_{X_i} \leq c_i \|u_n\|_{A_0}^{1-\theta_i} \|u_n\|_{A_1}^{\theta_i}$$

d'où :

$$\|e^{n\eta_i} u_n\|_{X_i}^{q_i} \leq c_i^{q_i} (\|e^{\xi_0 n} u_n\|_{A_0}^{p_0})^{\frac{q_i(1-\theta_i)}{p_0}} (\|e^{\xi_1 n} u_n\|_{A_1}^{p_1})^{\frac{q_i \theta_i}{p_1}}$$

et appliquant l'inégalité de Hölder :

$$e^{\eta_i n} u_n \in l^{q_i}(B_i), \qquad i = 0, 1$$

d'où suit que $a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ est dans $S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1)$, d'où le théorème.

2.2. Voici maintenant un résultat « inverse » de celui du théorème 2.1 :

Théorème **(2.2)**. — *Les θ_i sont comme au théorème* 2.1. *On suppose cette fois X_i de classe $\overline{\mathscr{K}}_{\theta_i}(A_0, A_1)$. Alors :*

$$S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1) \subset S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \tag{2.5}$$

sous les conditions (2.3), (2.4).

Démonstration. — Soit $a \in S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1)$. Alors (cf. chap. II) on peut représenter a sous la forme

$$a = v_{0n} + v_{1n} \tag{2.6}$$

où

$$e^{\eta_0 n} v_{0n} \in l^{q_0}(X_0), \qquad e^{\eta_1 n} v_{1n} \in l^{q_1}(X_1). \tag{2.7}$$

D'après l'hypothèse faite sur X_i et la définition 1.2, pour tout $t_{in} > 0$ on peut trouver v_{i0n}, v_{i1n} avec :

$$v_{in} = v_{i0n} + v_{i1n}, \qquad i = 0, 1$$

$$\|v_{i0n}\|_{A_0} \leq c_i t_{in}^{-\theta_i} \|v_{in}\|_{X_i},$$

$$\|v_{i1n}\|_{A_1} \leq c_i t_{in}^{1-\theta_i} \|v_{in}\|_{X_i}.$$

Donc :

$$\|e^{\xi_0 n} v_{i0n}\|_{A_0}^{p_0} \leq c_i^{p_0} s_{in}^{-\theta_i p_0} \|e^{n\eta_i} v_{in}\|_{X_i}^{p_0},$$

$$\|e^{\xi_1 n} v_{i1n}\|_{A_1}^{p_1} \leq c_i^{p_1} s_{in}^{(1-\theta_i)p_1} \|e^{\eta_i n} v_{in}\|_{X_i}^{p_1}$$

où

$$s_{in} = t_{in} e^{-n(\xi_0 - \xi_1)}.$$

On choisit maintenant s_{in} de façon que

$$s_{in}^{-\theta_i p_0} = \|e^{\eta_i n} v_{in}\|_{X_i}^{q_i - p_0}.$$

Alors grâce à (2.4) :

$$s_{in}^{(1-\theta_i)p_1} = \|e^{\eta_i n} v_{in}\|_{X_i}^{q_i - p_1}$$

d'où :

$$\|e^{\xi_0 n} v_{i0n}\|_{A_0}^{p_0} \leq c_i^{p_0} \|e^{\eta_i n} v_{in}\|_{X_i}^{q_i},$$

$$\|e^{\xi_1 n} v_{i1n}\|_{A_1}^{p_1} \leq c_i^{p_1} \|e^{\eta_i n} v_{in}\|_{X_i}^{q_i}.$$

Si donc

$$w_{0n} = v_{00n} + v_{10n}$$

$$w_{1n} = v_{01n} + v_{11n}$$

on a :

$$e^{\xi_0 n} w_{0n} \in l^{p_0}(A_0),$$

$$e^{\xi_1 n} w_{1n} \in l^{p_1}(A_1).$$

Par ailleurs $\quad w_{0n} + w_{1n} = v_{0n} + v_{1n} = a$

ce qui démontre que $a \in S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ et démontre le théorème.

2.3. Comme conséquence immédiate des théorèmes 2.1 et 2.2 on a le

Théorème **(2.3)** (Théorème de réitération). — *Soient* X_0 *et* X_1 *des espaces de Banach, respectivement de classe* $\mathscr{K}_{\theta_0}(A_0, A_1)$, $\mathscr{K}_{\theta_1}(A_0, A_1)$. *Soit* θ *avec*

(2.1) $$\theta_0 < \theta < \theta_1.$$

Alors

(2.8) $$S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1) = S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$$

(avec équivalence des normes), si

(2.3) $$\eta_i = (1-\theta_i)\xi_0 + \theta_i \xi_1, \qquad i = 0, 1,$$

(2.4) $$\frac{1}{q_i} = \frac{1-\theta_i}{p_0} + \frac{\theta_i}{p_1}.$$

3. UN NOUVEAU THÉORÈME D'INTERPOLATION

Soient $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$, $\{B_0, B_1, \mathscr{B}\}$ deux triplets comme au chapitre Ier, no 3.

On va démontrer le

Théorème **(3.1)**. — *Soient* X_0, X_1 (*resp.* Y_0, Y_1) *des espaces de Banach de classes* $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_0}(A_0, A_1)$, $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_1}(A_0, A_1)$ (resp. $\overline{\mathscr{K}}_{\chi_0}(B_0, B_1)$, $\overline{\mathscr{K}}_{\chi_1}(B_0, B_1)$) *avec* $\theta_0 < \theta_1$ (resp. $\chi_0 < \chi_1$). *Soit* π *un opérateur linéaire de* $\mathscr{A}$ *dans* $\mathscr{B}$ *tel que*

(3.1) $$\pi \in \mathscr{L}(X_i; Y_i), \qquad \textit{de norme } M_i, \qquad i = 0, 1.$$

Alors, quels que soient p_i, ξ_i, r_i, ζ_i, *avec*

(3.2) $$\theta_0 < \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} < \theta_1, \qquad \chi_0 < \frac{\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta_1} < \chi_1,$$

(3.3) $$(1-\theta_i)\xi_0 + \theta_i \xi_1 = (1-\chi_i)\zeta_0 + \chi_i \zeta_1, \qquad i = 0, 1,$$

(3.4) $$\frac{1-\theta_i}{p_0} + \frac{\theta_i}{p_1} = \frac{1-\chi_i}{r_0} + \frac{\chi_i}{r_1}, \qquad i = 0, 1,$$

on a :

$$\pi \in \mathscr{L}(S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1); S(r_0, \zeta_0, B_0; r_1, \zeta_1, B_1)). \tag{3.5}$$

La norme M *de* π *dans* (3.5) *est majorée par*

$$M \leq c M_0^{1-\sigma} M_1^{\sigma} \tag{3.6}$$

où c *est une constante (dépendant des* p_i, ξ_i, r_i, ζ_i*) et où*

$$\sigma = \frac{(1-\theta_0)\theta + \theta_0(\theta - 1)}{\theta_1 - \theta_0}, \qquad \theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}. \tag{3.7}$$

Démonstration. — On utilise d'abord le théorème d'interpolation 3.1, chapitre Ier, puis les résultats du numéro précédent.

D'après le théorème 3.1, chapitre Ier, π est un élément de

$$\mathscr{L}(S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1); S(q_0, \eta_0, Y_0; q_1, \eta_1, Y_1)),$$

de norme dans cet espace majorée par

$$M_0^{1-\lambda} M_1^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{\eta_0}{\eta_0 - \eta_1}.$$

D'après le théorème 2.1, on a :

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \subset S(q_0, \eta_0, X_0; q_1, \eta_1, X_1) \tag{3.8}$$

si

$$\eta_i = (1-\theta_i)\xi_0 + \theta_i \xi_1, \qquad i = 0, 1, \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1-\theta_i}{p_0} + \frac{\theta_i}{p_1}, \qquad i = 0, 1, \tag{3.10}$$

et si la première relation (3.2) a lieu.

D'après le théorème 2.2, on a :

$$S(q_0, \eta_0, Y_0; q_1, \eta_1, Y_1) \subset S(r_0, \zeta_0, B_0; r_1, \zeta_1, B_1) \tag{3.11}$$

si

$$\eta_i = (1-\chi_i)\zeta_0 + \chi_i \zeta_1, \qquad i = 0, 1, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1-\chi_i}{r_0} + \frac{\chi_i}{r_1}, \qquad i = 0, 1 \tag{3.13}$$

et si la deuxième relation (3.2) a lieu.

Le résultat (3.5) suit. L'inégalité (3.6) résulte des faits suivants : *a)* $\lambda = \sigma$; *b)* les injections dans (3.8) et (3.11) sont continues avec des « constantes d'injection » fonctions des paramètres.

Remarque **(3.1)**. — Le théorème 3.1 est au théorème 3.1 du chapitre Ier ce qu'est le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz [26] au théorème d'interpolation de M. Riesz [33]. Cette remarque sera précisée au chapitre VII.

CHAPITRE V

THÉORÈMES D'INCLUSION ET DE COMPACITÉ POUR ESPACES DE CLASSE $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$, $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$

1. THÉORÈMES D'INCLUSION

1.1. Soient $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$ un triplet avec les hypothèses habituelles.

Théorème (**1.1**). — *Soient* X_0, X, X_1 *trois espaces respectivement de classe* $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_0}(A_0, A_1)$, $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_1}(A_0, A_1)$, *avec*

$$\theta_0 < \theta < \theta_1. \tag{1.1}$$

Alors

$$X \subset X_0 + X_1. \tag{1.2}$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.2, chapitre IV, (1.2) sera vrai si l'on montre

$$S(\infty, \theta, A_0;\ \infty, -(1-\theta), A_1) \subset X_0 + X_1. \tag{1.3}$$

Mais d'après le théorème 2.1, chapitre IV, on a :

$$S(\infty, \theta, A_0;\ \infty, -(1-\theta), A_1) \subset S(\infty, \eta_0, X_0;\ \infty, \eta_1, X_1)$$

où $\eta_i = \theta - \theta_i$, d'où (1.3) puisque

$$S(\infty, \eta_0, X_0;\ \infty, \eta_1, X_1) \subset X_0 + X_1.$$

Théorème (**1.2**). — *Soient* X_0, X, X_1 *trois espaces respectivement de classe* $\overline{\mathscr{K}}_{\theta_0}(A_0, A_1)$, $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $\overline{\mathscr{K}}_{\theta_1}(A_0, A_1)$, *avec* (1.1).

Alors

$$X_0 \cap X_1 \subset X. \tag{1.4}$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.1, chapitre IV, il suffit de montrer que

$$X_0 \cap X_1 \subset S(1, \theta, A_0;\ 1, -(1-\theta), A_1). \tag{1.5}$$

Mais d'après le théorème 2.2, chapitre IV, on a :

$$S(1, \theta-\theta_0, X_0;\ 1, \theta-\theta_1, X_1) \subset S(1, \theta, A_0;\ 1, -(1-\theta), A_1)$$

et comme

$$X_0 \cap X_1 \subset S(1, \theta - \theta_0, X_0; 1, \theta - \theta_1, X_1),$$

on a (1.5). D'où le théorème.

Des théorèmes précédents résulte le

Corollaire (**1.1**). — *Soient* X_0, X, X_1 *trois espaces respectivement de classe* $\mathscr{K}_{\theta_0}(A_0, A_1)$, $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$, $\mathscr{K}_{\theta_1}(A_0, A_1)$, *avec* (1.1). *Alors :*

(1.6) $$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

1.2. On peut simplifier quelque peu les résultats précédents lorsque l'on suppose que $A_0 \subset A_1$.

On va démontrer le

Théorème (**1.3**). — *On suppose que* $A_0 \subset A_1$.

1) *Si* X *est de classe* $\overline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ *et* X_1 *de classe* $\underline{\mathscr{K}}_{\theta_1}(A_0, A_1)$ *avec* $\theta < \theta_1$, *on a :*

(1.7) $$X \subset X_1.$$

2) *Si* X *est de classe* $\underline{\mathscr{K}}_\theta(A_0, A_1)$ *et* X_0 *de classe* $\overline{\mathscr{K}}_{\theta_0}(A_0, A_1)$ *avec* $\theta_0 < \theta$ *on a :*

(1.8) $$X_0 \subset X.$$

3) *Si* X *et* Y *sont de classe* $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$, $\mathscr{K}_{\theta'}(A_0, A_1)$ *avec* $\theta < \theta'$, *on a :*

(1.9) $$X \subset Y.$$

Démonstration. — 1) On utilise le théorème 1.1 avec $\theta_0 = 0$, ce qui est loisible, d'après la remarque 1.1, chapitre IV et le fait que les résultats du n° 2, chapitre IV, sont valables dans les « cas limites ». L'espace A_0 est de classe $\underline{\mathscr{K}}_0(A_0, A_1)$, donc (1.2) avec $X_0 = A_0$ donne $X \subset A_0 + X_1$; mais comme $A_0 \subset A_1$ on a : $A_0 \subset X_1$ d'où (1.7).

2) On utilise le théorème 1.2 avec $\theta_1 = 1$; alors (1.4) avec $X_1 = A_1$ donne $X_0 \cap A_1 \subset X$; mais comme $A_0 \subset A$, on a : $X_0 \subset A_1$ d'où (1.8).

Le 3) est un cas particulier du 2).

Remarque (**1.1**). — D'après le chapitre IV, tous les résultats précédents s'appliquent aux espaces de moyennes (et aux espaces $[A_0, A_1, \delta(\theta)]$, $\hat{S}(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$, cf. chapitre IV, n° 1).

2. THÉORÈMES DE COMPACITÉ

2.1. Nous adoptons la notation suivante : $\mathscr{L}_c(X; Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues et *compactes* de X dans Y (espaces de Banach).

Théorème (**2.1**). — *Soit* B *un espace de Banach quelconque et* $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$ *un triplet avec les propriétés habituelles. On se donne une application linéaire* π *de* B *dans* $\mathscr{A}$ *telle que*

(2.1) $$\pi \in \mathscr{L}_c(B; A_0)$$

(2.2) $$\pi \in \mathscr{L}(B; A_1).$$

Alors si A *est de classe* $\underline{\mathcal{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $0<\theta<1$, *on a :*

(2.3) $$\pi \in \mathcal{L}_c(B; A).$$

Démonstration. — Soit $\{b_n\}$ une suite de B, $\|b_n\|_B \leq M$ (indépendant de n). D'après (2.1), on peut extraire $\{b_\nu\}$ de $\{b_n\}$ telle que

(2.4) $$\pi(b_\nu) \to a \quad \text{dans} \quad A_0.$$

Comme A est de classe $\underline{\mathcal{K}}_\theta(A_0, A_1)$ on a, par définition

$$\|\pi(b_\nu)-\pi(b_{\nu'})\|_A \leq c\|\pi(b_\nu)-\pi(b_{\nu'})\|_{A_0}^{1-\theta}\|\pi(b_\nu)-\pi(b_{\nu'})\|_{A_1}^{\theta} \leq (\text{constante})\|\pi(b_\nu)-\pi(b_{\nu'})\|_{A_0}^{1-\theta}$$

car $\|\pi(b)\|_{A_1} \leq \bar{\omega}_1\|b\|_B$. Donc $\pi(b_\nu)$ est une suite de Cauchy dans A, d'où le résultat.

Théorème **(2.2).** — *On donne* $B, \{A_0, A_1, \mathcal{A}\}$ *comme au théorème* 2.1. *Soit* π *une application linéaire de* $\mathcal{A}$ *dans* B. *On suppose que*

(2.5) $$\pi \in \mathcal{L}_c(A_0; B),$$

(2.6) $$\pi \in \mathcal{L}(A_1; B).$$

Soit A *de classe* $\overline{\mathcal{K}}_\theta(A_0, A_1)$, $0<\theta<1$. *Alors*

(2.7) $$\pi \in \mathcal{L}_c(A; B).$$

Démonstration. — Soit $\{a_n\}$ une suite bornée de A.

Si $\{t_m\}$ est une suite de nombres >0, tendant vers $+\infty$, puisque A est de classe $\overline{\mathcal{K}}_\theta(A_0, A_1)$, on peut, quel que soit m, trouver $a_{nmi} \in A_i$, $i=0, 1$, avec

$$a = a_{nm0} + a_{nm1},$$
$$\|a_{nm0}\|_{A_0} \leq c t_m^\theta \|a_n\|_A,$$
$$\|a_{nm1}\|_{A_1} \leq c t_m^{\theta-1}\|a_n\|_A.$$

D'après (2.5), on peut extraire de la suite $\{n\}$ une suite $\{\nu\}$ telle que $\{\pi(a_{\nu m0})\}$ converge dans B lorsque $\nu\to\infty$, quel que soit m. On va montrer qu'alors $\{\pi(a_\nu)\}$ est une suite de Cauchy dans B. Soit donc $\varepsilon>0$ donné. Il faut montrer que pour $\nu, \nu' \geq \nu(\varepsilon)$, on a

(2.8) $$\|\pi(a_\nu)-\pi(a_{\nu'})\|_B \leq \varepsilon.$$

On *choisit* d'abord m tel que

(2.9) $$\|\pi(a_{\nu m1})-\pi(a_{\nu' m1})\|_B \leq \varepsilon/2, \qquad \nu, \nu' \text{ quelconques.}$$

Pour cela, on note que

$$\|\pi(a_{\nu m1})-\pi(a_{\nu' m1})\| \leq \bar{\omega}_1 t_m^{\theta-1}\|a_\nu - a_{\nu'}\|_A \leq (\text{constante}) t_m^{\theta-1}$$

ce qui peut être rendu $\leq \varepsilon/2$, puisque $\theta<1$ et $t_m \to +\infty$.

Soit donc m *fixé*, avec (2.9). Comme $\{\pi(a_{\nu m0})\}$ est une suite de Cauchy dans B, on a :

$$\|\pi(a_{\nu m0})-\pi(a_{\nu' m0})\|_B \leq \varepsilon/2 \qquad \text{pour} \quad \nu, \nu' \geq \nu(\varepsilon)$$

ce qui joint à (2.9) donne (2.8) et démontre le théorème.

Remarque (**2.1**). — Des idées voisines se trouvent dans E. Gagliardo [7].

2.2. Nous supposerons maintenant que $A_0 \subset A_1$.

Théorème (**2.3**). — *Soit* $A_0 \subset A_1$ *et* θ, θ' *donnés avec* $\theta < \theta'$. *Soient* X *et* Y *deux espaces de classes* $\mathscr{K}_\theta(A_0, A_1)$ *et* $\mathscr{K}_{\theta'}(A_0, A_1)$ *respectivement.* (*Alors* $X \subset Y$; théorème 1.3, 3).) *Si l'injection de* A_0 *dans* A_1 *est compacte, l'injection de* X *dans* Y *est également compacte.*

Démonstration. — Appliquons d'abord le théorème 2.2, en prenant $A_1 = B$ et pour π l'opérateur identité. On en déduit que l'injection $X \to A_1$ est compacte.

Appliquons maintenant le théorème 2.1, avec $B = X$, $\pi =$ identité, compacte de $X \to A_1$, et continue de $X \to X$. On en déduit que π est compacte de $X \to C$, où C est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\eta(A_1, X)$. On aura donc le théorème si l'on montre que l'on peut prendre $C = Y$, donc que Y est de classe $\underline{\mathscr{K}}_\eta(A_1, X)$ pour un η convenable. Il y a plus :

$$\text{(2.10)} \qquad Y \textit{ est de classe } \mathscr{K}_\eta(A_1, X), \quad \eta = \frac{1-\theta'}{1-\theta};$$

ceci se vérifie par application du théorème de réitération, chapitre IV.

Remarque (**2.2**). — Remarque analogue à la remarque 1.1.

CHAPITRE VI

ESPACES DE TRACES ET DE MOYENNES

1. ESPACES DE TRACES

1.1. Définition.

Si F est un espace de Banach, on désigne par $L^p_+(F)$ l'espace $L^p(0, \infty; F)$, $1 \leq p \leq \infty$ (rappelons que $L^p_*(F)$ est l'espace des fonctions de puissance p^e sommable sur $(0, \infty)$ à valeurs dans F pour la mesure dt/t).

On donne un triplet $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$ avec les propriétés habituelles.

Soient α_0 et α_1 deux paramètres réels. On désigne par $V_m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ l'espace des (classes de) fonctions u telles que

$$t^{\alpha_0} u \in L^{p_0}_+(A_0), \tag{1.1}$$

$$t^{\alpha_1} u^{(m)} \in L^{p_1}_+(A_1) \tag{1.2}$$

où $u^{(m)} = \dfrac{d^m u}{dt^m}$ désigne la dérivée (d'ordre m) de u au sens des distributions sur l'ouvert $]0, \infty[$, à valeurs dans A_0. Muni de la norme

$$||u||_{V_m} = \max\left(||t^{\alpha_0} u||_{L^{p_0}_+(A_0)}, ||t^{\alpha_1} u^{(m)}||_{L^{p_1}_+(A_1)}\right), \tag{1.3}$$

c'est un espace de Banach.

De l'hypothèse (1.2) résulte que $u^{(m)}$ est localement sommable à valeurs dans A_1, dans l'ouvert $]0, \infty[$. Donc, en particulier, u et $u^{(m)}$ sont localement sommables dans $]0, \infty[$ à valeurs dans $A_0 + A_1$. On peut donc considérer $u^{(j)}(t)$, $0 \leq j \leq m-1$, $t > 0$, élément de $A_0 + A_1$.

On dira que $u^{(j)}$ admet une trace à l'origine si $u^{(j)}(t)$ converge dans $A_0 + A_1$ lorsque $t \to 0$; alors

$$\text{trace de } u^{(j)} = \lim_{t \to 0} u^{(j)}(t) = u^{(j)}(0).$$

On a le résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Poulsen [32] dont nous allons indiquer la démonstration pour la commodité du lecteur.

Proposition (**1.1**). — *Si*

$$\frac{1}{p_1} + \alpha_1 < m - j, \qquad j \text{ entier avec } 1 < j < m-1, \tag{1.4}$$

alors les traces $u^{(k)}(0)$ *existent pour* $0 < k < j$.

(En outre, selon Poulsen [32], la condition (1.4) est nécessaire pour l'existence de $u^{(j)}(0)$.)

Démonstration. — De (1.2) et (1.4) résulte que

$$(1.5) \qquad t^{m-j-1}u^{(m)} \in L^1(0, 1; A_1).$$

Si $m-j-1=\mu=0$, il en résulte que u est absolument continue dans $[0, 1]$ à valeurs dans A_0+A_1.

Si $\mu \geq 1$, on note que

$$||u^{(m-1)}(t)|| \leq ||u^{(m-1)}(1)|| + \int_t^1 ||u^{(m)}(\sigma)||\, d\sigma,$$

où $|| \; ||$ désigne la norme dans A_0+A_1. On en déduit que

$$\int_\varepsilon^1 t^{\mu-1}||u^{(m-1)}(t)||\,dt \leq ||u^{(m-1)}(1)||\left(\int_\varepsilon^1 t^{\mu-1}dt\right) + \frac{1}{\mu}\int_\varepsilon^1 (\sigma^\mu - \varepsilon^\mu)\, ||u^{(m)}(\sigma)||\, d\sigma$$

d'où

$$\int_\varepsilon^1 t^{\mu-1}||u^{(m-1)}(t)||\,dt \leq c + \frac{2}{\mu}\int_\varepsilon^1 \sigma^\mu ||u^{(m)}(\sigma)||\, d\sigma$$

d'où, grâce à (1.5) :

$$(1.6) \qquad t^{m-j-2}u^{(m-1)} \in L^1(0, 1; A_0+A_1).$$

Continuant de la sorte on arrive dans le cas le plus défavorable à

$$u^{(j+1)} \in L^1(0, 1; A_0+A_1),$$

et $u^{(j)}(0)$ existe.

On pose alors la

Définition (**1.1**). — *Si* (1.4) *a lieu, on désigne par* $T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ *l'espace décrit* (*dans* A_0+A_1) *par* $u^{(j)}(0)$ *lorsque* u *parcourt* $V_m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$.

Muni de la norme

$$(1.7) \qquad ||a||_{T_j^m} = \inf_{u^{(j)}(0)=a} ||u||_{V_m}$$

on obtient un espace de Banach. *Les* T_j^m *sont des espaces de traces.*

On pose en général

$$(1.8) \qquad T_0^1(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

Remarque (**1.1**). — Les espaces $T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ donnent lieu à une propriété d'interpolation analogue au théorème 3.1, chapitre I^{er}. Cf. Lions [19]. Mais en fait cette remarque se réduit exactement au théorème 3.1, chap. Ier, après les résultats du numéro suivant.

1.2. Lemmes.

Notons d'abord que les conditions (1.1) et (1.2) sont équivalentes à

$$(1.1 \textit{ bis}) \qquad t^{\eta_0}u \in L_*^{p_0}(A_0), \qquad \eta_0 = \frac{1}{p_0} + \alpha_0,$$

$$(1.2 \textit{ bis}) \qquad t^{\eta_1}u^{(m)} \in L_*^{p_1}(A_1), \qquad \eta_1 = \frac{1}{p_1} + \alpha_1.$$

Lemme (**1.1**). — *Si* $a \in T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$, *on peut toujours le représenter par :*

$$a = u^{(j)}(0)$$

où u satisfait à (1.1 *bis*), (1.2 *bis*) *et en outre à*

$$\textbf{(1.9)} \qquad t^{\eta_0 + k} u^{(k)} \in L_*^{p_0}(A_0), \qquad \textit{pour tout entier } k.$$

Démonstration. — Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = v(e^x),$$

v satisfaisant aux analogues de (1.1 *bis*) et (1.2 *bis*) et $a = v^{(j)}(0)$. Alors

$$\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{x = \log t} = \sum_{r=1}^{k} c_{rk} t^r \frac{d^r v(t)}{dt^r}, \qquad c_{rk} = \text{constantes}$$

et d'après la proposition 1.1 on en déduit que

$$\textbf{(1.10)} \qquad e^{-jx} f^{(j)}(x) \to c_{jj} v^{(j)}(0), \qquad \text{dans} \quad A_0 + A_1,\ x \to -\infty;$$

si alors l'on remplace f par $f * \rho$, $\rho \in \mathscr{D}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jx} \rho(x) dx = 1$, on voit que

$$e^{-jx}(f * \rho)^{(j)}(x) \to c_{jj} v^{(j)}(0), \qquad \text{dans} \quad A_0 + A_1,\ x \to -\infty.$$

D'après (1.1 *bis*), on a : $e^{\eta_0 x} f \in L^{p_0}(A_0)$, donc

$$e^{\eta_0 x}(f * \rho)^{(k)} \in L^{p_0}(A_0)$$

quel que soit k et donc si u est définie par

$$u(t) = (f * \rho)(\log t)$$

on a :

$$u^{(j)}(0) = a \quad \text{et} \quad t^{\eta_0 + k} u^{(k)} \in L_*^{p_0}(A_0)$$

quel que soit k, d'où le lemme.

Lemme (**1.2**). — *On suppose que* (1.4) *a lieu et que* $\dfrac{1}{p_0} + \alpha_0 + j > 0$. *Soit u satisfaisant à* (1.1 *bis*), (1.2 *bis*), *et* (1.9). *Alors*

$$\textbf{(1.11)} \qquad u^{(j)}(0) = \gamma \int_0^\infty t^{m-j} u^{(m)}(t) \frac{dt}{t}, \qquad \gamma = (-1)^{m-j}/(m-j-1)!$$

Démonstration. — L'intégrale du deuxième membre de (1.11) converge, à l'origine grâce à (1.2 *bis*), et à l'infini grâce à (1.9), pour $k = m$ et $\dfrac{1}{p_0} + \alpha_0 + j > 0$. On a :

$$\int_0^\infty t^{m-j-1} u^{(m)}(t) dt = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^\infty t^{m-j-1} u^{(m)}(t) dt =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ t^{m-j-1} u^{(m-1)}(t) \Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty (m-j-1) t^{m-j-2} u^{(m-1)}(t) dt \right\}.$$

Or $u^{(m-1)}(\varepsilon) = u^{(m-1)}(1) - \int_\varepsilon^1 u^{(m)}(t) dt$, d'où, $\| \ \|$ désignant la norme dans $A_0 + A_1$:

$$\| u^{(m-1)}(\varepsilon) \| \leq \| u^{(m-1)}(1) \| + \left(\int_\varepsilon^1 t^{\alpha_1 p_1} \| u^{(m)}(t) \| dt \right)^{1/p_1} \left(\int_\varepsilon^1 t^{-\alpha_1 p_1'} dt \right)^{1/p_1'}.$$

Grâce à (1.4), on en déduit que

$$\varepsilon^{m-j-1}u^{(m-1)}(\varepsilon)\to 0 \qquad \text{dans } A_0+A_1 \text{ lorsque } \varepsilon\to 0.$$

Ensuite,

$$u^{(m-1)}(t)-u^{(m-1)}(s)=\int_s^t u^{(m)}(\sigma)d\sigma=\int_s^t \sigma^{\alpha_0+m}u^{(m)}(\sigma)\sigma^{-(\alpha_0+m)}d\sigma;$$

utilisant l'inégalité de Hölder et (1.9) pour $k=m$, on en déduit (comme par hypothèse $\eta_0+j>0$, de sorte que $\eta_0+m>1$) que $u^{(m-1)}(t)$ converge dans A_0+A_1 lorsque $t\to\infty$. Mais comme, d'après (1.9) pour $k=m-1$, $t^{\eta_0+m-1}u^{(m-1)}\in L_*^{p_0}(A_0)$, il en résulte que $u^{(m-1)}(t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$. Alors

$$u^{(m-1)}(t)=-\int_t^\infty u^{(m)}(\sigma)d\sigma, \tag{1.12}$$

d'où en utilisant Hölder et (1.9) pour $k=m$:

$$\|u^{(m-1)}(t)\|_{A_0}\leq Ct^{-m-(\frac{1}{p_0}+\alpha_0)+1}, \qquad c=\text{constante},$$

de sorte que grâce à $\frac{1}{p_0}+\alpha_0+j>0$, $t^{m-j-1}u^{(m-1)}(t)\to 0$ dans A_0 lorsque $t\to+\infty$. Par conséquent

$$\int_0^\infty t^{m-j-1}u^{(m)}(t)dt=-(m-j-1)\int_0^\infty t^{m-j-2}u^{(m-1)}(t)dt. \tag{1.13}$$

Distinguons deux cas :

1er cas : $\frac{1}{p_1}+\alpha_1\leq 1$.

Alors $u^{(m-2)}(\varepsilon)$ converge dans A_0+A_1 lorsque $\varepsilon\to 0$. Par ailleurs, pour le comportement à l'infini, ce qui a été dit précédemment est valable en remplaçant m par $m-1$; donc

$$t^{m-j-2}u^{(m-2)}(t)\big|_\varepsilon^\infty=-\varepsilon^{m-j-2}u^{(m-2)}(\varepsilon)$$

et ceci converge vers 0 ou $-u^{(m-2)}(0)$ selon que $m-j-2>0$ ou $=0$.

Dans le 1er cas, on obtient

$$\int_0^\infty t^{m-j-1}u^{(m)}(t)dt=t(m-j-1)(m-j-2)\int_0^\infty t^{m-j-3}u^{(m-2)}(t)dt,$$

dans le deuxième, $=(m-j-1)u^{(m-2)}(0)$.

2e cas : $\frac{1}{p_1}+\alpha_1>1$. Alors de (1.12) et d'une inégalité de Hardy-Littlewood-Polya (d'ailleurs immédiate en posant $x=\log t$) résulte que $t^{\eta_1-1}u^{(m-1)}(t)\in L_*^{p_1}(A_1)$ et par conséquent dans (1.13) (au facteur $-(m-j-1)$ près) on est ramené au problème précédent, avec m remplacé par $(m-1)$.

Conclusion : on arrive ainsi jusqu'à

$$\int_0^\infty t^{m-j-1}u^{(m)}(t)dt=(-1)^{m-j-1}(m-j-1)!\int_0^\infty u^{(j+1)}(t)dt;$$

mais $u^{(j)}(t)\to 0$ dans A_0+A_1 lorsque $t\to\infty$, donc on obtient (1.11).

2. IDENTITÉ DES ESPACES DE TRACES ET DE MOYENNES

2.1. On va maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème (**2.1**). — *On suppose que*

$$\frac{1}{p_0}+\alpha_0+j>0, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{p_1}+\alpha_1+j<m. \tag{2.2}$$

Alors, sauf peut-être si $\frac{1}{p_0}+\alpha_0=0, -1, -2, \ldots,$ *on a :*

$$T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)=S(p_0, \frac{1}{p_0}+\alpha_0+j, A_0; p_1, \frac{1}{p_1}+\alpha_1+j-m, A_1), \tag{2.3}$$

avec des normes équivalentes.

Démonstration. — 1) Soit $a\in T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$. Alors d'après le lemme 1.2, on peut représenter a sous la forme

$$a=\gamma\int_0^\infty t^{m-j}u^{(m)}(t)\frac{dt}{t}=\int_0^\infty u_*(t)\frac{dt}{t},$$

où

$$u_*(t)=\gamma t^{m-j}u^{(m)}(t), \tag{2.4}$$

avec u satisfaisant à (1.1 *bis*), (1.2 *bis*) et (1.9). Donc, en particulier,

$$t^{\eta_0+j}u_*\in L_*^{p_0}(A_0), \qquad \eta_0=\frac{1}{p_0}+\alpha_0, \tag{2.5}$$

$$t^{\eta_1+j-m}u_*\in L_*^{p_1}(A_1), \qquad \eta_1=\frac{1}{p_1}+\alpha_1, \tag{2.6}$$

donc $a\in S(p_0, \frac{1}{p_0}+\alpha_0+j, A_0; p_1, \frac{1}{p_1}+\alpha_1+j-m, A_1)=S$, d'après la remarque 1.1, chapitre Ier.

On a donc *toujours* l'inclusion $T\subset S$ dans (2.3) (l'inclusion topologique résultant facilement des considérations précédentes).

2) Soit réciproquement $a\in S$. Alors on peut représenter a sous la forme

$$a=\int_0^\infty u_*(t)\frac{dt}{t},$$

avec u_* satisfaisant à (2.5), (2.6).

On introduit

$$u_k(t)=c\int_t^\infty (\sigma-t)^{m-k-1}\sigma^{j-m}u_*(\sigma)d\sigma$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, j-1,$$

$$c=(-1)^{j-k}\frac{1}{(m-k-1)\ldots(m-j)}.$$

Alors

$$u_k(t) = c\int_t^\infty (1-\frac{t}{\sigma})^{m-k-1}\sigma^{j-k}u_*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}$$

est donc le produit de composition (sur $\mathbf{R}^*$) de $t^{j-k}u_*$ avec la fonction

$$f_{m-k} = (1-t)^{m-k-1} \qquad \text{si} \quad t<1, \qquad =0 \quad \text{si} \quad t>1.$$

Alors on a :

$$t^{\eta_0+k}u_k \in L_*^{p_0}(A_0) \tag{2.7}$$

si $t^{\eta_0+k}f_{m-k}\in L_*^1$ i.e. si

$$\eta_0 > -k. \tag{2.8}$$

On introduit ensuite u par

$$\left\{\begin{array}{ll} u = u_0 & \text{si} \quad k=0. \\ u(t) = \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{k-1}}{(k-1)!}u_k(\sigma)d\sigma & \text{si} \quad k\geq 1, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

On a, lorsque $k\geq 1$:

$$u(t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (\frac{t}{\sigma}-1)^{k-1}\sigma^k u_k(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma},$$

ce qui est le produit de composition (sur $\mathbf{R}^*$) de $\sigma^k u_k$ avec g_k, définie par

$$g_k(t) = 0 \quad \text{si} \quad t<1, \qquad \frac{(t-1)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{si} \quad t>1.$$

Alors, tenant compte de (2.7)

$$t^{\eta_0}u \in L_*^{p_0}(A_0) \tag{2.10}$$

toujours si $k=0$, et lorsque $k\geq 1$, si $t^{\eta_0}g_k\in L_*^1$, donc si

$$\eta_0 < -k+1. \tag{2.11}$$

Ensuite, en posant $D = d/dt$:

$$D^m u = D^{m-k}(D^k u) = D^{m-k}u_k = (-1)^{m-k}c(m-k-1)!\,t^{j-m}u_*(t)$$

et donc

$$t^{\eta_1}D^m u \in L_*^{p_1}(A_1). \tag{2.12}$$

Enfin

$$D^j u = D^{j-k}(D^k u) = c(-1)^{j-k}(m-k-1)\dots(m-j)\int_t^\infty (\sigma-t)^{m-j-1}\sigma^{j-m}u_*(\sigma)d\sigma$$

donc

$$u^{(j)}(0) = \int_t^\infty u_*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = a. \tag{2.13}$$

Cela montre que, sauf peut-être pour $\eta_0 = 0, 1, \ldots, -(j-1)$, la fonction u satisfait à (2.10), (2.12) et (2.13), donc que $a \in T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$.

Ceci achève la démonstration du théorème [1].

2.2. Quelques conséquences.

Partons de (2.3) et appliquons le théorème 5.2, chapitre I^{er}; on a :

$$S(p_0, \frac{1}{p_0} + \alpha_0 + j, A_0; p_1, \frac{1}{p_1} + \alpha_1 + j - m, A_1) = S(p_0, \frac{\eta_0 + j}{\eta_0 + \eta_1 + m}, A_0; p_1, \frac{\eta_1 + j - m}{\eta_0 - \eta_1 + m}, A_1)$$

(où, rappelons-le, $\eta_i = \frac{1}{p_i} + \alpha_i$); mais d'après le théorème 2.1,

$$S(p_0, \frac{\eta_0 + j}{\eta_0 - \eta_1 + m}, A_0; p_1, \frac{\eta_1 + j - m}{\eta_0 - \eta_1 + m}, A_1) = T_0^1(p_0, \beta_0, A_0; p_1, \beta_1, A_1)$$

où

$$\frac{1}{p_0} + \beta_0 = \frac{1}{p_1} + \beta_1 = \frac{\eta_0 + j}{\eta_0 - \eta_1 + m} \in]0, 1[. \tag{2.14}$$

Conformément à la convention (1.8) on obtient donc le

Théorème **(2.2)**. — *On suppose que* (2.1) *et* (2.2) *ont lieu. Alors, on a :*

$$T_j^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = T(p_0, \beta_0, A_0; p_1, \beta_1, A_1) \tag{2.15}$$

où les β_i *satisfont à* (2.14), *avec des normes équivalentes.*

Ce théorème réduit donc l'étude des T_j^m à celle des T. On donne au numéro suivant quelques propriétés de T, conséquences immédiates des propriétés correspondantes des espaces de moyennes.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES $T(p_1, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$

On peut supposer que $0 < \frac{1}{p_i} + \alpha_i < 1$.

Théorème **(3.1)** (Symétrie). — *On a*

$$T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = T(p_1, \tilde{\alpha}_1, A_1; p_0, \tilde{\alpha}_0, A_0) \tag{3.1}$$

où

$$\frac{1}{p_1} + \tilde{\alpha}_1 = 1 - (\frac{1}{p_1} + \alpha_1), \qquad \frac{1}{p_0} + \tilde{\alpha}_0 = 1 - (\frac{1}{p_0} + \alpha_0).$$

Démonstration. — En effet d'après le théorème 2.1

$$T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1), \; \xi_0 = \frac{1}{p_0} + \alpha_0, \; \xi_1 = \frac{1}{p_1} + \alpha_1 - 1.$$

[1] (Note ajoutée à la correction des épreuves.) Par une méthode différente, M. P. Grisvard a démontré (2.3) également lorsque $\frac{1}{p_0} + \alpha_0 = 0, -1, \ldots, -(j-1)$ (travail à paraître dans *Math. Scand.*).

Mais (théorème 5.1, chap. Ier), $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S(p_1, \xi_1, A_1; p_0, \xi_0, A_1)$ et par le théorème 5.2, chapitre Ier, $= S(p_1, -\xi_1, A_1; p_0, -\xi_0, A_0)$ d'où le théorème, en utilisant encore une fois le théorème 2.1.

De la même façon :

Théorème **(3.2)** (Homogénéité). — *Soit* $\lambda > 0$. *On a*

$$T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = T(p_0, \tilde{\alpha}_0, A_0; p_1, \tilde{\alpha}_1, A_1) \tag{3.2}$$

où

$$\frac{1}{p_0} + \tilde{\alpha}_0 = \lambda\left(\frac{1}{p_0} + \alpha_0\right),$$

$$\frac{1}{p_1} + \tilde{\alpha}_1 - 1 = \lambda\left(\frac{1}{p_1} + \alpha_1 - 1\right).$$

Enfin, en utilisant le théorème de dualité du *chapitre* III, on a le :

Théorème **(3.3)** (Dualité). — *Sous les hypothèses du théorème* 3.1, *chapitre* III, *on peut identifier le dual de* $T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ *à* $T(p_1', -\alpha_1, A_1'; p_0', -\alpha_0, A_0')$.

En effet $T(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ de dual

$$S(p_1', -\xi_1, A_1'; p_0', -\xi_0, A_0')$$

d'où le résultat.

Les résultats précédents ont été démontrés directement (i.e. sans utilisation de la notion d'espace de moyenne) dans Lions [19] [22].

CHAPITRE VII

EXEMPLES

§ 1. LE CAS DES ESPACES L^p

1. LE THÉORÈME DE M. RIESZ

1.1. Soit X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X et soit L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ les espaces de Lebesgue pour cette mesure, et $L^p(F)$ les mêmes espaces à valeurs dans un espace de Banach F.

Soit $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}$ un triplet avec les propriétés habituelles. On va montrer le

Théorème (**1.1**). — *On a*

$$S(p_0, \xi_0, L^{p_0}(A_0); p_1, \xi_1, L^{p_1}(A_1)) = L^p(S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)) \tag{1.1}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}, \tag{1.2}$$

avec des normes équivalentes.

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture on pose :

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S,$$
$$S(p_0, \xi_0, L^{p_0}(A_0); p_1, \xi_1, L^{p_1}(A_1)) = \mathscr{U}.$$

1) Soit $a \in \mathscr{U}$. Alors

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$$

où

$$\{e^{n\xi_0} u_n\} \in l^{p_0}(L^{p_0}(A_0)), \qquad \{e^{n\xi_1} u_n\} \in l^{p_1}(L^{p_1}(A_1)).$$

Alors, pour presque tout $x \in X$, d'après la remarque 1.1 (chap. II) :

$$\| a(x) \|_S \leq c\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \| e^{n\xi_0} u_n(x) \|_{A_0}^{p_0}\Big)^{\frac{1-\theta}{p_0}} \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \| e^{n\xi_1} u_n(x) \|_{A_1}^{p_1}\Big)^{\frac{\theta}{p_1}}$$

les c désignant ici et dans la suite des constantes diverses. Par conséquent, d'après l'inégalité de Hölder et (1.2), on en déduit :

$$\int_X ||a(x)||_S^p d\mu(x) \leq c^p \int_X \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} ||e^{n\xi_0} u_n(x)||_{A_0}^{p_0}\Big)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} ||e^{n\xi_1} u_n(x)||_{A_1}^{p_1}\Big)^{\frac{\theta p}{p_1}} d\mu(x)$$

$$\leq c^p \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_X ||e^{n\xi_0} u_n(x)||_{A_0}^{p_0} d\mu(x)\Big)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_X ||e^{n\xi_1} u_n(x)||_{A_1}^{p_1} d\mu(x)\Big)^{\frac{\theta p}{p_1}}$$

d'où $a \in L^p(S)$ et

$$||a||_{L^p(S)} \leq c||a||_{\mathscr{U}}.$$

2) Réciproquement, soit a une fonction simple à valeurs dans S. Donc $a = \Sigma a_\nu \psi_\nu$, somme finie, $a_\nu \in S$, ψ_ν fonction caractéristique d'un ensemble mesurable. Alors, pour presque tout $x \in X$, on peut écrire :

$$a(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} w_n(x) \tag{1.3}$$

où

$$\{e^{n\xi_0} w_n(x)\} \in l^{p_0}(A_0), \qquad \{e^{n\xi_1} w_n(x)\} \in l^{p_1}(A_1),$$

et où

$$||a(x)||_S \geq c \max\big(||e^{n\xi_0} w_n(x)||_{l^{p_0}(A_0)}, ||e^{n\xi_1} w_n(x)||_{l^{p_1}(A_1)}\big). \tag{1.4}$$

(Il suffit de représenter chaque a_ν par une somme convenable d'éléments de $A_0 \cap A_1$). On définit alors λ par

$$p_0(1 - \lambda\xi_0) = p.$$

Vu (1.2), on a alors

$$p_1(1 - \lambda\xi_1) = p.$$

On définit ensuite $u_n(x)$ par

$$u_n(x) = w_{n + [\lambda \log ||a(x)||_S]} \tag{1.5}$$

(où $[z]$ = partie entière de z); la fonction u_n est mesurable. On a :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} ||e^{n\xi_0} u_n(x)||_{A_0}^{p_0} = \sum_{-\infty}^{+\infty} ||e^{n\xi_0} w_n(x)||_{A_0}^{p_0} e^{-[\lambda \log ||a(x)||_S]\xi_0 p_0} \leq c||a(x)||_S^{p_0} e^{-\lambda(\log ||a(x)||_S)\xi_0 p_0}$$

$$\leq c||a(x)||_S^{p_0 - \lambda p_0 \xi_0} = c||a(x)||_S^p$$

(d'après le choix de λ). Donc

$$\{e^{n\xi_0} u_n\} \in l^{p_0}(L^{p_0}(A_0))$$

et de la même manière,

$$\{e^{n\xi_1} u_n\} \in l^{p_1}(L^{p_1}(A_1)).$$

Alors $||a||_{\mathscr{U}} \leq c||a||_{L^p(S)}$ ce qui achève la démonstration du théorème, les fonctions simples étant denses dans $L^p(S)$.

Corollaire (**1.1**). — *On a :*

$$S(p_0, \xi_0, L^{p_0}; p_1, \xi_1, L^{p_1}) = L^p$$

où p est donné par (1.2).

1.2. Application.

Théorème (**1.2**). — *On donne deux triplets* $\{A_0, A_1, \mathscr{A}\}, \{B_0, B_1, \mathscr{B}\}$. *Soient p, q donnés,* $i = 0, 1, 1 \leq p_i, q_i \leq \infty$, *avec*

$$p_0 \leq q_0, \quad p_1 \leq q_1. \tag{1.6}$$

Soit π *un opérateur linéaire continue de* $L^{p_i}(A_i)$ *dans* $L^{q_i}(B_i)$, $i = 0, 1$. *Soient p et q avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{1.7}$$

Alors π *est un opérateur linéaire continu de* $L^p(S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1))$ *dans* $L^q(S(q_0, \theta, A_0; q_1, \theta - 1, A_1))$.

Démonstration. — D'après le théorème 3.1, chapitre I^{er}, π est un opérateur linéaire continu de $S(p_0, \theta, L^{p_0}(A_0); p_1, \theta - 1, L^{p_1}(A_1))$ dans $S(p_0, \theta, L^{q_0}(A_0); p_1, \theta - 1, L^{q_1}(A_1))$. Mais d'après le théorème 1.1, le premier espace coïncide avec $L^p(S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1))$. Par ailleurs, d'après le théorème 5.3, chapitre I^{er}, et grâce à (1.6), le deuxième espace est contenu dans $S(q_0, \theta, L^{q_0}(A_0); q_1, \theta - 1, L^{q_1}(A_1))$ qui, d'après le théorème 1.1, coïncide avec $L^q(S(q_0, \theta, A_0; q_1, \theta - 1, A_1))$, d'où le théorème.

Remarque (**1.1**). — *Théorème de M. Riesz* [1].

Si l'on prend $A_0 = A_1 = B_0 = B_1 = C$, le théorème 1.2 redonne le théorème de M. Riesz : si π est linéaire continu de L^{p_i} dans L^{q_i}, $i = 0, 1$, (norme $\overline{\omega}_i$), alors π est linéaire continu de L^p dans L^q.

L'inégalité de convexité (3.2), théorème 3.1, chapitre I^{er}, montre que la norme $\overline{\omega}$ de π dans $\mathscr{L}(L^p; L^q)$ est $\leq c\overline{\omega}_0^{1-\theta}\overline{\omega}_1^{\theta}$, $c =$ constante (parce que l'on a montré que $S(p_0, \xi_0, L^{p_0}; p_1, \xi_1, L^{p_1}) = L^p$ avec des normes *équivalentes*). On sait (M. Riesz [33]) que l'on peut prendre $c = 1$; cela peut également se démontrer par la méthode des traces (cf. Lions [18]); vu l'identité des espaces de traces et de moyenne, la méthode de Lions [18] pourrait évidemment s'adapter ici de façon à fournir la constante $c = 1$. (La démonstration donnée ci-dessus n'est, au fond, qu'une variante de celle de Lions [18].)

2. LE THÉORÈME DE MARCINKIEWICZ

2.1. Pour fixer les idées on va se borner au cas scalaire, l'extension au cas vectoriel étant immédiate.

Comme au numéro précédent, soit X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X. Désignons par M^θ $(0 < \theta < 1)$ l'espace, introduit par G. G. Lorentz [25], des fonctions a, mesurables pour la mesure μ et telles que

$$\int_E |a| \, d\mu \leq c(\mu(E))^\theta \tag{2.1}$$

pour tout E mesurable, C étant une constante convenable (dépendant de a); c'est un espace de Banach pour la norme

$$(2.2) \qquad \|a\|_{M^\theta} = \inf C = \sup_E \int_E |a|\, d\mu/(\mu(E))^\theta.$$

Théorème (2.1). — *On a*

$$(2.3) \qquad S(\infty, \xi_0, L^{p_0}; \infty, \xi_1, L^{p_1}) = M^\sigma$$

où

$$(2.4) \qquad \sigma = 1 - 1/p,$$

p étant donné par (1.2).

Démonstration. — En utilisant le cor. 1.1, on voit que L^{p_i} est de classe $\mathscr{K}_{\sigma_i}(L^1, L^\infty)$ où $\sigma_i = 1 - 1/p_i$, $i = 0, 1$. Donc, en utilisant le théorème de réitération, chapitre IV, on se ramène au cas $p_0 = 1$, $p_1 = \infty$. (On notera que (2.4) devient $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$.) Il s'agit donc de démontrer que

$$(2.5) \qquad S(\infty, \xi_0, L^1; \infty, \xi_1, L^\infty) = M^\theta$$

où

$$(2.6) \qquad \theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}.$$

1) Soit $a \in S(\infty, \xi_0, L^1; \infty, \xi_1, L^\infty)$. Alors

$$a = v_0(x) + v_1(x)$$

où $e^{x\xi_0} v_0 \in L^\infty(L^1)$; $e^{x\xi_1} v_1 \in L^\infty(L^\infty)$. On obtient

$$\int_E |a|\, d\mu \leqq \int_E |v_0(x)|\, d\mu + \int_E |v_1(x)|\, d\mu \leqq \leq \|v_0(x)\|_{L^1} + \mu(E)\, \|v_1(x)\|_{L^\infty} \leq$$
$$\leqq e^{-x\xi_0} \|e^{x\xi_0} v_0\|_{L^\infty(L^1)} + e^{-x\xi_1}\, \mu(E)\, \|e^{x\xi_1} v_1\|_{L^\infty(L^\infty)}$$

d'où, en faisant un choix convenable de x,

$$\int_E |a|\, d\mu \leqq c\, \|e^{x\xi_0} v_0\|^{1-\theta}_{L^\infty(L^\infty)} \|e^{x\xi_1} v_1\|^{\theta}_{L^\infty(L^\infty)} (\mu(E))^\theta$$

ou encore, en faisant varier v_0 et v_1,

$$\int_E |a|\, d\mu \leq c\, \|a\|_{S(\infty, \xi_0, L^1; \infty, \xi_1, L^\infty)} (\mu(E))^\theta.$$

Donc

$$\|a\|_{M^\theta} \leqq c\, \|a\|_{S(\infty, \xi_0, L^1; \infty, \xi_1, L^\infty)}$$

et

$$a \in M^\theta.$$

2) Soit $a \in M^\theta$. Alors

$$\int_E |a|\, d\mu \leqq C(\mu(E))^\theta,$$

C étant une constante convenable. Soit E l'ensemble où $|a| \geq Ct$, avec $t = e^{-x\xi_1}$. Posons

$$v_0(x) = \begin{cases} a, & x \in \mathrm{E} \\ 0, & x \in \mathrm{CE} \end{cases},$$

$$v_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{E} \\ a, & x \in \mathrm{CE} \end{cases}.$$

Alors on a

$$a = v_0(x) + v_1(x)$$

où

$$(2.7) \qquad \|v_0(x)\|_{\mathrm{L}^1} \leq \mathrm{C}(\mu(\mathrm{E}))^{\theta}; \qquad \|v_0(x)\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \mathrm{C}t.$$

Or :

$$\|v_0(x)\|_{\mathrm{L}^1} \geq \mu(\mathrm{E}) \,.\, \mathrm{C}t$$

d'où

$$\mu(\mathrm{E}) \leq t^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Donc (2.7) donne $(t = e^{-x\xi_1})$

$$(2.8) \qquad \|v_0(x)\|_{\mathrm{L}^1} \leq \mathrm{C}e^{-x\xi_0}; \qquad \|v_1(x)\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \mathrm{C}e^{-x\xi_1}.$$

Donc

$$\|a\|_{\mathrm{S}(\infty, \xi_0, \mathrm{L}^1;\, \infty, \xi_1, \mathrm{L}^\infty)} \leq \|a\|_{\mathrm{M}^\theta}$$

et

$$a \in \mathrm{S}(\infty, \xi_0, \mathrm{L}^1;\, \infty, \xi_1, \mathrm{L}^\infty).$$

Remarque **(2.1)**. — On peut utiliser cette méthode, convenablement généralisée, pour déterminer $\mathrm{S}(p_0, \xi_0, \mathrm{L}^1; p_1, \xi_1, \mathrm{L}^\infty)$ dans le cas général $p_0 \neq \infty$, $p_1 \neq \infty$; on obtient d'autres espaces introduits par G. G. Lorentz [25], cf. Calderòn [4]. Cf. aussi Peetre [31] où on donne un procédé général pour déterminer les espaces de moyennes dans des cas « concrets »; on y retrouve comme cas particulier les résultats de Calderòn.

2.2. Application.

Théorème **(2.2)**. — *Soient p_i, q_i donnés, $i = 0, 1$, $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$, avec* (1.6). *Soit π un opérateur linéaire continu de L^{p_i} dans M^{τ_i} où $\tau_i = 1 - 1/q_i$, $i = 0, 1$. Soient p et q avec* (1.7). *Alors π est un opérateur linéaire continu de L^p dans L^q.*

Démonstration. — On notera que L^{p_i} est de classe $\mathscr{K}_{\sigma_i}(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$ où $\sigma_i = 1 - 1/p_i$ et que M^{τ_i} est de classe $\mathscr{K}_{\tau_i}(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$. Donc d'après les théorèmes 3.1 et 2.3, chapitre IV, π est un opérateur linéaire continu de $\mathrm{S}(p_0, \xi_0, \mathrm{L}^{p_0}; p_1, \xi_1, \mathrm{L}^{p_1})$ dans $\mathrm{S}(p_0, \xi_0, \mathrm{L}^{q_0}; p_1, \xi_1, \mathrm{L}^{q_1})$. Alors, d'après le cor. 1.1, le premier espace coïncide avec L^p et, d'après le théorème 5.3, chapitre I$^{\text{er}}$, le deuxième espace est contenu dans $\mathrm{S}(q_0, \xi_0, \mathrm{L}^{q_0}; q_1, \xi_1, \mathrm{L}^{q_1})$ qui, d'après le cor. 1.1, coïncide avec L^q, d'où le théorème.

Remarque (**2.2**). — *Théorème de Marcinkiewicz* [26]. On peut démontrer que (2.1) équivaut à

$$t\left(\int_{|a|\geq t} d\mu\right)^{1-\theta} \leq C \tag{2.9}$$

pour tout $t>0$, C étant une constante convenable (dépendant de a). Donc on retrouve le théorème de Marcinkiewicz (cf. aussi Krein-Semenov [15], Calderòn [4]) : Si π est un opérateur linéaire tel que

$$t\left(\int_{|\pi a|\geq t} d\mu\right)^{1/q_i} \leq \bar{\omega}_i^* \|a\|_{L^{p_i}} \qquad (i=0, 1),$$

alors π est linéaire continu de L^p dans L^q (de norme $\bar{\omega}$). On a aussi l'inégalité $\bar{\omega} \leq c\bar{\omega}_0^{*1-\theta}\bar{\omega}_1^{*\theta}$, ce qui résulte aussitôt de l'inégalité de convexité (3.6), théorème 3.1, chapitre IV.

§ 2. LE CAS DES SEMI-GROUPES

1. RAPPELS SUR LES SEMI-GROUPES

1.1. Dans un espace de Banach E, on considère un semi-groupe $t \to G(t)$ borné et continu; donc :

$$G(t) \in \mathscr{L}(E; E), \ \|G(t)\|_{\mathscr{L}(E;E)} = \|G(t)\| \leq M < \infty, \qquad t \geq 0;$$

$t \to G(t)a$ est continue de $t \geq 0 \to E$, pour tout $a \in E$; $G(0)a = a$ donc $G(0) = I$.

On désigne par Λ le *générateur infinitésimal* de $G(t)$ et par $D(\Lambda)$ son domaine. Plus généralement, $D(\Lambda^m)$ désigne pour m entier ≥ 1, l'espace des $a \in D(\Lambda)$ tels que $\Lambda a \in D(\Lambda), \ldots, \Lambda^{m-1}a \in D(\Lambda)$; muni de la norme du graphe :

$$\sum_{j=0}^{m} \|\Lambda^j a\| \tag{1.1}$$

(où $\| \ \|$ désigne la norme dans E), $D(\Lambda^m)$ *est un espace de Banach.*

Notre premier objet est de déterminer explicitement à partir de $G(t)$ *les espaces de moyenne entre* $D(\Lambda^m)$ *et* E.

1.2. Soit S une distribution (scalaire) *à support compact contenu dans* $t \geq 0$. On se propose de définir ici, selon L. Schwartz [36], *l'opérateur non borné* G(S).

Tout d'abord, si φ est une fonction continue dans $t \geq 0$ (plus généralement une *mesure*), à support compact (ou à décroissance convenable à l'infini) on pose :

$$G(\varphi) = \int_0^\infty G(t)\varphi(t)\,dt \in \mathscr{L}(E; E).$$

Si ψ est une deuxième fonction de même nature, alors

$$G(\varphi * \psi) = G(\varphi)G(\psi).$$

Ceci posé, on appelle *suite régularisante* toute suite ρ_ν de fonctions ayant les propriétés suivantes :

ρ_ν est indéfiniment différentiable à support contenu dans $[0, \varepsilon_\nu]$, $\varepsilon_\nu \to 0$ lorsque $\nu \to \infty$:

$$\rho_\nu \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\nu(t)\,dt = \int_0^{\varepsilon_\nu} \rho_\nu(t)\,dt = 1.$$

Alors $S * \rho_\nu$ est une fonction indéfiniment différentiable à support compact (dans $t \geq 0$), de sorte que $G(S * \rho_\nu)$ a un sens.

Définition (**1.1**). — Un élément a de E sera dit *dans le domaine de* $G(S)$ (en bref : $a \in D(G(S))$) si, ρ_ν étant une suite régularisante, $G(S * \rho_\nu)a$ converge dans E.

Cette condition est *indépendante* de choix de la suite régularisante. La limite (également indépendante de la suite régularisante) est désignée par $G(S)a$.

Le domaine $D(G(S))$ est *dense* dans E et l'opérateur $G(S)$ est *fermé*.

Si δ' désigne la dérivée de δ (masse 1 au point 0), on vérifie que

$$\Lambda = G(-\delta') \tag{1.2}$$

et plus généralement

$$\Lambda^m = G((-1)^m \delta^{(m)}), \qquad \delta^{(m)} = \frac{d^m}{dt^m}\delta. \tag{1.3}$$

1.3. Lemmes.

Lemme (**1.1**). — *Soit* g_ε *une suite de mesures à support compact dans* $t \geq 0$, *telle que*

$$g_\varepsilon \to \delta^{(m)} \qquad \textit{lorsque } \varepsilon \to 0, \tag{1.4}$$

la convergence ayant lieu dans l'espace $\mathscr{E}'$ *des distributions à support compact. Soit* $a \in E$ *tel que*

$$G(g_\varepsilon)a \textit{ converge dans } E \textit{ lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{1.5}$$

Alors $a \in D(\Lambda^m)$ *et*

$$G(g_\varepsilon)a \to (-1)^m \Lambda^m a.$$

Démonstration. — Soit ρ_ν une suite régularisante. On a :

$$G(g_\varepsilon * \rho_\nu)a = G(\rho_\nu)G(g_\varepsilon)a \tag{1.6}$$

et par hypothèse, $G(g_\varepsilon)a \to b$ dans E ($\varepsilon \to 0$). Par ailleurs de (1.4) résulte que $g_\varepsilon * \rho_\nu \to \delta^{(m)} * \rho_\nu$ uniformément et avec les supports dans un compact fixe. Donc

$$G(g_\varepsilon * \rho_\nu)a \to G(\delta^{(m)} * \rho_\nu)a \qquad \text{lorsque } \varepsilon \to 0,$$

et (1.6) donne à la limite (pour $\varepsilon \to 0$) :

$$G(\delta^{(m)} * \rho_\nu)a = G(\rho_\nu)b. \tag{1.7}$$

Mais $G(\rho_\nu)b \to b$ lorsque $\nu \to \infty$, de sorte que $G(\delta^{(m)} * \rho_\nu)a$ converge dans E, donc (par définition) $a \in D(\delta^{(m)})$ et $b = \lim_\nu G(\delta^{(m)} * \rho_\nu)a = G(\delta^{(m)})a$.

D'où le résultat d'après (1.3).

Lemme (**1.2**). — *Soit* α *un entier* ≥ 1 *donné. Soit* μ *un entier quelconque tel que*

$$\mu \geq \alpha + 1. \tag{1.8}$$

On pose :

$$K_{\mu,\alpha}=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-t})^\mu dt. \tag{1.9}$$

Soit $a \in E$ *un élément tel que*

$$\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(I-G(t))^\mu . a dt \text{ converge dans } E \text{ lorsque } \varepsilon \to 0. \tag{1.10}$$

Alors $a \in D(\Lambda^\alpha)$ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{K_{\mu,\alpha}}\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(I-G(t))^\mu a . dt=(-\Lambda)^\alpha a. \tag{1.11}$$

Démonstration. — 1) Comme on le vérifie sans peine

$$(I-G(t))^\mu=\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}(G(jt)-I)$$

de sorte que

$$X_\varepsilon=\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(I-G(t))^\mu a . dt$$

peut s'écrire :

$$\begin{aligned}X_\varepsilon&=\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j} . \int_\varepsilon^\infty (G(jt)-1)a . t^{-\alpha-1}dt\\&=\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^\infty t^{-\alpha-1}(G(t)a-a)dt\\&=\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon} t^{-\alpha-1}(G(t)a-a)dt\end{aligned}$$

car

$$\Big(\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\Big)\int_{\mu\varepsilon}^\infty t^{-\alpha-1}(G(t)a-a)dt=0.$$

Donc :

$$X_\varepsilon=G(f_\varepsilon)a \tag{1.12}$$

où

$$f_\varepsilon=\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\Big\{t^{-\alpha-1}\big|_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}-\Big(\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}t^{-\alpha-1}dt\Big)\delta\Big\} \tag{1.13}$$

où

$$t^{-\alpha-1}\big|_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}=\begin{cases}t^{-\alpha-1} & \text{si } j\varepsilon\le t\le\mu\varepsilon\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

2) On va maintenant vérifier que

$$f_\varepsilon\to k_{\mu\alpha}\delta^{(\alpha)} \quad \text{dans } \mathscr{E}', \quad \varepsilon\to 0, \tag{1.14}$$

où

$$k_{\mu\alpha}=\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j j^\alpha\binom{\mu}{j}\log(\mu/j). \tag{1.15}$$

Soit en effet φ un élément de l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment différentiables. On a :

$$<f_\varepsilon - k_{\mu\alpha}\delta^{(\alpha)}, \varphi> = \sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}t^{-\alpha-1}[\varphi(t)-\varphi(0)]dt - \sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j j^\alpha\binom{\mu}{j}\left(\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}\frac{1}{t}dt\right)\frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} =$$
$$\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}t^{-\alpha-1}\left[\varphi(t)-\varphi(0)-\frac{t^\alpha}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0)\right]dt$$

Mais

$$\sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}t^{-\alpha-1}t^k dt = 0$$

pour $k=1, 2, \ldots, \alpha-1$; donc

$$<f_\varepsilon - k_{\mu\alpha}\delta^{(\alpha)}, \varphi> = \sum_{j=1}^{\mu}(-1)^j\binom{\mu}{j}j^\alpha\int_{j\varepsilon}^{\mu\varepsilon}t^{-\alpha-1}\left[\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)-\ldots-\frac{t^\alpha}{\alpha!}\varphi^{(\alpha)}(0)\right]dt$$

et ceci tend vers 0 lorsque $\varepsilon\to 0$. D'où (1.14).

3) D'après le lemme 1.1 il en résulte que la convergence de (1.10) implique que $a\in D(\Lambda^\alpha)$. En outre (d'après le lemme 1.1)

$$\frac{1}{k_{\mu\alpha}}\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(1-G(t))^\mu a\,dt \to (-\Lambda)^\alpha a.$$

Ceci vaut quel que soit le semi-groupe $G(t)$. Si donc l'on prend le semi-groupe de multiplication par e^{-t} sur $E=\mathbf{C}$ (corps des complexes), il vient (avec $a=1$) :

$$\frac{1}{k_{\mu\alpha}}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-t})^\mu dt = 1,$$

d'où $k_{\mu\alpha}=K_{\mu\alpha}$ ce qui achève la démonstration du lemme.

2. ESPACES DE MOYENNE ENTRE $D(\Lambda^m)$ ET E (I)

Théorème **(2.1)**. — *On suppose que* $G(t)$ *est un semi-groupe borné. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(2.1) $a\in S(p, \theta, D(\Lambda^m); p, \theta-1, E)$, $0<\theta<1$; $1\leq p\leq\infty$;

(2.2) $a\in E$ *et* $t^{-(1-\theta)m}(G(t)-I)^m a\in L_*^p(E)$.

En outre, la norme

$$||a|| + \left(\int_0^\infty t^{-(1-\theta)mp}||(G(t)-I)^m a||^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

(modification habituelle si $p=+\infty$), est équivalente à la norme sur S.

Démonstration. — 1) Si l'on remplace $G(t)$ par $G(t)e^{-kt}$, $k>0$, on remplace Λ par $\Lambda+kI$, opérateur de même domaine. De même

$$D(\Lambda^m)=D((\Lambda+kI)^m).$$

On peut donc se ramener au cas :

$$\|G(t)\| \leq M e^{-kt}, \qquad k>0, \tag{2.3}$$

sans changer $D(\Lambda^m)$, donc sans changer $S(p, \theta, D(\Lambda^m); p, \theta-1, E)$. Par ailleurs, la deuxième condition (2.2) *équivaut* à

$$t^{-(1-\theta)m-1/p}(G(t)-I)^m a \in L^p(0, 1; E) \tag{2.4}$$

car l'on a *toujours* ($G(t)$ étant borné) :

$$t^{-(1-\theta)m-1/p}(G(t)-I)^m a \in L^p(1, \infty; E).$$

La condition (2.4) ne change pas si l'on remplace $G(t)$ par $G(t)e^{-kt}$. Donc on peut également se ramener à (2.3) sans changer l'espace des a satisfaisant à (2.2).

On suppose donc désormais que (2.3) a lieu.

Mais si sur E l'on introduit alors la nouvelle norme

$$|||e||| = \sup_{t \geq 0} \|G(t)e\|$$

(qui est *équivalente* à $\|e\|$ car $\|e\| \leq |||e||| \leq M\|e\|$), on a

$$|||G(t)|||\left(= \sup \frac{|||G(t)e|||}{|||e|||}\right) \leq 1.$$

Comme un changement de norme (par une norme équivalente !) n'affecte pas l'espace S ni l'espace des a satisfaisant à (2.2), on peut donc supposer que $G(t)$ a une norme ≤ 1, et quitte à le remplacer encore une fois par $G(t)e^{-k_1 t}$, $k_1>0$, *on se ramène en fin de compte au cas* :

$$\|G(t)\| \leq e^{-kt}, \qquad k>0. \tag{2.5}$$

Il en résulte en particulier que

$$I - G(t) \text{ est inversible pour } t>0. \tag{2.6}$$

2) Se plaçant désormais dans l'hypothèse (2.5), on va montrer l'équivalence de (2.1) avec (2.2) et avec

$$\begin{cases} \text{il existe une fonction } u_*, \text{ à valeurs dans } D(\Lambda^m), \text{ telle que} \\ \qquad a = \int_0^\infty u_*(t)\dfrac{dt}{t}, \quad \text{intégrale convergente dans E,} \\ \text{et} \\ t^{\theta m}(I - G(t))^{-m}\Lambda^m u_*(t) \in L_*^p(E). \end{cases} \tag{2.7}$$

3) *Démonstration* de (2.1) ⇒ (2.2).

On sait (chap. Ier, théorème 5.2) que

$$S(p, \theta, D(\Lambda^m); p, \theta-1, E) = S(p, \theta m, D(\Lambda^m); p, (\theta-1)m, E).$$

Si alors $a \in S(p, \theta, D(\Lambda^m)\,; p, \theta - 1, E)$, il existe (Remarque 1.4, chap. Ier) v_0^* et v_1^* avec

$$\textbf{(2.8)} \qquad \begin{cases} t^{\theta m} v_0^* \in L_*^p(D(\Lambda^m)), & t^{(\theta-1)m} v_1^* \in L_*^p(E), \\ a = v_0^*(t) + v_1^*(t) & \text{p. p.} \end{cases}$$

Notons que $\|(I - G(t))^m e\| \leq t^m \|\Lambda^m e\|$, si $e \in D(\Lambda^m)$, de sorte que

$$\|(I - G(t))^m v_0^*(t)\| \leq t^m \|\Lambda^m v_0^*(t)\|.$$

Comme $\|(I - G(t))^m\| \leq 2^m$, on a donc :

$$\|(I - G(t))^m a\| \leq t^m \|\Lambda^m v_0^*(t)\| + 2^m \|v_1^*(t)\|$$

d'où résulte, grâce à (2.8), que (2.2) a lieu.

4) *Démonstration de* (2.7) ⇒ (2.1).

Soit u_* satisfaisant à (2.7). On va vérifier que

$$\textbf{(2.9)} \qquad t^{\theta m} u_* \in L_*^p(D(\Lambda^m)), \qquad t^{(\theta-1)m} u_* \in L_*^p(E)$$

ce qui démontre que (2.1) a lieu.

Or

$$\Lambda^m u_*(t) = (I - G(t))^m (I - G(t))^{-m} \Lambda^m u_*(t)$$

d'où la première condition (2.9), d'après (2.7), puisque $\|(I - G(t))^m\| \leq 2^m$. Puis

$$u_*(t) = (I - G(t))^m (I - G(t))^{-m} u_*(t),$$

donc

$$\|u_*(t)\| \leq t^m \|(I - G(t))^{-m} \Lambda^m u_*(t)\|$$

d'où la deuxième condition (2.9).

5) *Démonstration de* (2.2) ⇒ (2.7).

Soit a donnée avec (2.2). Posons

$$\textbf{(2.10)} \qquad u_*(t) = c t^{-m} (I - G(t))^{2m} \Lambda^{-m} a$$

où

$$c = (-1)^m / K_{2m,m} \qquad \text{(notations du lemme 1.2).}$$

Alors $t^{\theta m}(I - G(t))^{-m} \Lambda^m u_*(t) = c t^{-(1-\theta)m} (I - G(t))^m a \in L_*^p(E)$ donc u_* satisfait à la dernière condition de (2.7) et donc à (2.9). Donc l'intégrale $\int_0^\infty u_*(t) \frac{dt}{t}$ *converge* dans E.

Donc

$$\int_0^\infty u_*(t) \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty u_*(t) \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0} c \int_0^\infty t^{-m-1} (I - G(t))^{2m} (\Lambda^{-m} a) dt.$$

On applique le lemme 1.2 avec $\alpha = m$, $\mu = 2m$, a remplacé par $\Lambda^{-m} a$. D'après (1.11) et le choix de c :

$$\int_0^\infty u_*(t) \frac{dt}{t} = \Lambda^m (\Lambda^{-m} a) = a,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

3. ESPACES DE MOYENNE ENTRE $D(\Lambda^m)$ ET E (II)

3.1. Commençons par le

Théorème **(3.1).** — *Soit* α *un entier avec* $0<\alpha<m$. *Alors* $D(\Lambda^\alpha)$ *est de la classe* $\mathcal{K}_\theta(D(\Lambda^m), E)$, *où* θ *est donné par*

$$(1-\theta)m=\alpha. \tag{3.1}$$

Démonstration. — 1) Soit $a \in D(\Lambda^\alpha)$. Alors

$$t^{-\alpha}(I-G(t))^m a = t^{-\alpha}(I-G(t))^\alpha (I-G(t))^{m-\alpha} a$$

donc

$$\|t^{-\alpha}(I-G(t))^m a\| \leq \text{constante}$$

donc, d'après le théorème 2.1, $a \in S(\infty, \theta, D(\Lambda^m); \infty, \theta-1, E)$; donc

$$D(\Lambda^\alpha) \subset S(\infty, \theta, D(\Lambda^m); \infty, \theta-1, E). \tag{3.2}$$

2) Soit $a \in S(1, \theta, D(\Lambda^m); 1, \theta-1, E)$. Alors $t^{-(1-\theta)m}(G(t)-I)^m a \in L^1_*(E)$ et par conséquent l'intégrale

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}(I-G(t))^{2m} a \frac{dt}{t} \quad \text{converge absolument dans } E,$$

donc, d'après le lemme 1.2, $a \in D(\Lambda^\alpha)$; donc

$$S(1, \theta, D(\Lambda^m); 1, \theta-1, E) \subset D(\Lambda^\alpha) \tag{3.3}$$

ce qui, joint à (3.2), donne le théorème.

3.2. Application du théorème de réitération (1^{er} cas).

On va utiliser le théorème 3.1 et les résultats du chapitre IV pour ramener les espaces de moyennes entre $D(\Lambda^m)$ et E aux espaces de moyenne entre deux espaces $D(\Lambda^{j+1})$ et $D(\Lambda^j)$ *ou* $D(\Lambda^{j+2})$ et $D(\Lambda^j)$.

Considérons l'espace $S(p, \theta, D(\Lambda^m); p, \theta-1, E)$ et posons :

$$\begin{cases} (1-\theta)m = j+\eta \\ j \text{ entier}, \quad 0<\eta\leq 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

On va étudier d'abord le premier cas :

$$\eta<1. \tag{3.5}$$

On note que $D(\Lambda^{j+1})$ (resp. $D(\Lambda^j)$) est de classe $\mathcal{K}_{\theta_0}(D(\Lambda^m), E)$ (resp. $\mathcal{K}_{\theta_1}(D(\Lambda^m), E)$) où $(1-\theta_0)m=j+1$ (resp. $(1-\theta_1)m=j$) et d'après le théorème 2.3, chapitre IV :

$$S(p, \theta, D(\Lambda^m); p, \theta-1, E) = S(p, \eta_0, D(\Lambda^{j+1}); p, \eta_1, D(\Lambda^j))$$

où

$$\eta_0 = (1-\theta_0)\theta + \theta_0(\theta-1) = \theta-\theta_0, \qquad \eta_1 = \theta-\theta_1.$$

Or $(\theta-\theta_0)m=1-\eta$, $(\theta-\theta_1)m=-\eta$, donc d'après le théorème d'homogénéité

(3.6) $$S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)=S(p,1-\eta,D(\Lambda^{j+1});p,-\eta,D(\Lambda^j)).$$

Mais on a vu (n° 2) que l'on peut toujours se ramener au cas où Λ est un isomorphisme de $D(\Lambda)$ sur E; alors Λ^j est un isomorphisme de $S(p,1-\eta,D(\Lambda^{j+1});p,-\eta,D(\Lambda^j))$ sur $S(p,1-\eta,D(\Lambda);p,-\eta,E)$ d'où le

Théorème **(3.2)**. — *On suppose que* $(1-\theta)m=j+\eta$, j *entier*, $0<\eta<1$. *Alors* $S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)$ *coïncide avec l'espace des* $a\in D(\Lambda^j)$ *tels que*

$$\Lambda^j a\in S(p,1-\eta,D(\Lambda);p,-\eta,E).$$

En outre les normes $||a||_{S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)}$ *et* $||a||_{D(\Lambda^j)}+||\Lambda^j a||_{S(p,1-\eta,D(\Lambda);p,-\eta,E)}$ *sont équivalentes.*

Naturellement, d'après le théorème 2.1, la condition

« $\Lambda^j a\in S(p,1-\eta,D(\Lambda);p,-\eta,E)$ » équivaut à « $t^{-\eta}(G(t)\Lambda^j a-\Lambda^j a)\in L^p_*(E)$ ».

3.3. Application du théorème de réitération (2e cas).

On suppose maintenant que $(1-\theta)m$ est *entier*; on l'écrit

$$(1-\theta)m=j+1.$$

Alors on considère $S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,(\theta-1),E)$ comme espace de moyenne entre $D(\Lambda^{j+2})$ et $D(\Lambda^j)$. On note que $D(\Lambda^{j+2})$ (resp. $D(\Lambda^j)$) est de classe $\mathscr{K}_{\theta_0}(D(\Lambda^m),E)$ (resp. $\mathscr{K}_{\theta_1}(D(\Lambda^m),E)$) où $(1-\theta_0)m=j+2$ (resp. $(1-\theta_1)m=j$). Donc, d'après le théorème de réitération :

$$S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)=S(p,\eta_0,D(\Lambda^{j+2});p,\eta_1,D(\Lambda^j))$$

où $\eta_0=\theta-\theta_0$, $\eta_1=\theta-\theta_1$. Mais $\eta_0 m=1$, $\eta_1 m=-1$, donc

$$S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)=S(p,\tfrac{1}{2},D(\Lambda^{j+2});p,-\tfrac{1}{2},D(\Lambda^j))$$

et Λ^j étant un isomorphisme de $S(p,\frac{1}{2},D(\Lambda^{j+2});p,-\frac{1}{2},D(\Lambda^j))$ sur $S(p,\frac{1}{2},D(\Lambda^2);p,-\frac{1}{2},E)$, on a le

Théorème **(3.3)**. — *On suppose que* $(1-\theta)m$ *est entier. Si l'on pose* $(1-\theta)m=j+1$, *l'espace* $S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)$ *coïncide avec l'espace des* $a\in D(\Lambda^j)$ *tels que*

$$\Lambda^j a\in S(p,\tfrac{1}{2},D(\Lambda^2);p,-\tfrac{1}{2},E).$$

En outre les normes $||a||_{S(p,\theta,D(\Lambda^m);p,\theta-1,E)}$ *et* $||a||_{D(\Lambda^j)}+||\Lambda^j a||_{S(p,\frac{1}{2},D(\Lambda^2);p,-\frac{1}{2},E)}$ *sont équivalentes.*

D'après le théorème 2.1, la condition « $\Lambda^j a\in S(p,\frac{1}{2},D(\Lambda^2);p,-\frac{1}{2},E)$ » équivaut à « $t^{-1}(G(t)-I)^2\Lambda^j a\in L^p_*(E)$ ».

4. UNE APPLICATION

4.1. Nous prenons $E = L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, et nous considérons les opérateurs

(4.1) $$\Lambda_j = \partial/\partial x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

qui sont générateurs infinitésimaux de groupes bornés et commutatifs dans E, si

$$D(\Lambda^j) = \{f \mid f \in L^p(\mathbf{R}^n), \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p(\mathbf{R}^n)\}.$$

On désigne par $D(\Lambda^m)$ l'espace des $u \in E$ tels que

$$\Lambda_1^{\alpha_1}, \ldots, \Lambda_n^{\alpha_n} u \in L^p(\mathbf{R}^n),$$

pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq m$, α_i entier ≥ 0. Donc

(4.2) $$D(\Lambda^m) = W^{m,p}(\mathbf{R}^n) = \{u \mid D^\alpha u \in L^p(\mathbf{R}^n), |\alpha| \leq m\};$$

on le munit de la norme habituelle

$$\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

On pose

(4.3) $$S(p, \theta, W^{m,p}(\mathbf{R}^n); p, \theta - 1, L^p(\mathbf{R}^n)) = B^{(1-\theta)m,p}(\mathbf{R}^n).$$

D'après les résultats des n^{os} 2 et 3 [1] on a les caractérisations suivantes :

1er cas : $(1 - \theta)m = j + \eta$, j entier ≥ 0, $0 < \eta < 1$.

Alors « $a \in B^{(1-\theta)m,p}(\mathbf{R}^n)$ » équivaut aux deux conditions suivantes :

1) $u \in W^{j,p}(\mathbf{R}^n)$;

2) Quel que soit α avec $|\alpha| = j$, et quel que soit k, on a :

$$t^{-\eta}(G_k(t) D^\alpha u - D^\alpha u) \in L_*^p(L^p(\mathbf{R}^n)),$$

où $G_k(t) f(x) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

2e cas : $(1 - \theta)m = j + 1$, j entier ≥ 0.

Alors « $u \in B^{(1-\theta)m,p}(\mathbf{R}^n)$ » équivaut aux deux conditions suivantes :

1) $u \in W^{j,p}(\mathbf{R}^n)$;

2) Quel que soit α avec $|\alpha| = j$, et quel que soit k, on a :

$$t^{-1}(G_k(t) - I)^2 D^\alpha u \in L_*^p(L^p(\mathbf{R}^n)).$$

Ces espaces ont été introduits par Besov [2].

4.2. Considérons maintenant l'opérateur γ de trace sur l'hyperplan $x_n = 0$ dans $\mathbf{R}^n$:

(4.4) $$\gamma u(x') = u(x', 0), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

---

[1] A vrai dire, nous n'y considérons que le cas d'un seul semi-groupe, mais il est facile de voir que la même méthode convenablement modifiée marche aussi dans le cas de plusieurs semi-groupes, au moins dans le cas envisagé dans ce numéro, $E = L^p(\mathbf{R}^n)$, $\Lambda_j = \partial/\partial x_j$. Cf. aussi Peetre [31] pour une démonstration différente.

On sait (Gagliardo [8]) que γ est un opérateur linéaire continu de

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^n) \to B^{1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$$

et on sait aussi (Slobodetskii [37]) que γ est un opérateur linéaire continu de $W^{m,p}(\mathbf{R}^n) \to B^{m-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$; par conséquent : γ est un opérateur linéaire continu de $X \to Y$, où

$$S(p_1, \theta, W^{m,p}(\mathbf{R}^n); p, \theta-1, W^{1,p}(\mathbf{R}^n)) = X$$

$$S(p, \theta, B^{m-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}); p, \theta-1, B^{1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})) = Y.$$

On vérifie facilement que

$$X = B^{(1-\theta)m+\theta,p}(\mathbf{R}^n).$$

Par ailleurs :

$$B^{m-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}) = S(p, \theta_1, W^{m,p}(\mathbf{R}^{n-1}); p, \theta_1-1, L^p(\mathbf{R}^{n-1})),$$

$$B^{1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}) = S(p, \theta_2, W^{m,p}(\mathbf{R}^{n-1}); p, \theta_2-1, L^p(\mathbf{R}^{n-1}))$$

où

$$(1-\theta_1)m = m - 1/p, \qquad (1-\theta_2)m = 1 - 1/p.$$

Du théorème 2.3, chapitre IV, il résulte alors que

$$Y = S(p, \theta', W^{m,p}(\mathbf{R}^{n-1}); p, \theta'-1, L^p(\mathbf{R}^{n-1}))$$

où

$$\theta' = (1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2.$$

Donc

$$Y = B^{(1-\theta)m+\theta-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$$

et en posant $s = (1-\theta)m + \theta$, on a donc

(4.5) γ est un opérateur linéaire continu de $B^{s,p}(\mathbf{R}^n) \to B^{s-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$, si $s \geq 1$.

Considérons maintenant le « relèvement » de γ; d'après Lions [18], il existe un opérateur ρ, linéaire continu de

$$B^{m-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}) \to W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$$

et de

$$B^{1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^n),$$

tel que

$$\gamma . \rho u = u \quad \text{pour tout} \quad u \in B^{1-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

Par interpolation, ρ est donc linéaire continu de $Y \to X$ ce qui prouve que γ, dans (4.5), est surjective. On a donc obtenu le :

Théorème **(4.1)**. — *L'opérateur* γ (*trace sur* $x_n = 0$) *est linéaire continu et surjectif de* $B^{s,p}(\mathbf{R}^n) \to B^{s-1/p,p}(\mathbf{R}^{n-1})$, *si* $s \geq 1$.

On retrouve ainsi un résultat dû à plusieurs auteurs soviétiques (Besov, Uspenskii, cf. S. M. Nikolskii [27]) qui l'ont établi par des méthodes différentes; notre méthode a toutefois l'inconvénient de supposer $s \geq 1$ alors que le résultat est vrai pour $s > \frac{1}{p}$ (Besov, Uspenskii).

Consulter également P. Grisvard [10] [11].

CHAPITRE VIII

CAS DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Soient A_0 et A_1 deux espaces vectoriels topologiques localement convexes contenus dans un espace localement convexe séparé $\mathscr{A}$, l'injection de A_i dans $\mathscr{A}$ étant continue.

Nous supposons que les espaces A_0 et A_1 sont *complets*.

On suppose que la topologie de A_i est définie par la famille de *normes :*

$$p_\alpha^{(i)}(a), \qquad a \in A_i, \qquad\qquad i = 0, 1,$$

α parcourant un ensemble d'indices J.

L'espace $A_0 + A_1$ est muni de la topologie isomorphe à celle de $(A_0 \times A_1)/Z$, $Z = \{a_0, a_1 \mid a_0 + a_1 = 0, a_i \in A_i\}$. Il revient au même de la munir de la famille de normes

$$q_{\alpha\beta}(a) = \inf_{a_0 + a_1 = a} [p_\alpha^{(0)}(a_0) + p_\beta^{(1)}(a_1)].$$

1.2. Pour éviter toute difficulté de mesurabilité, nous utilisons uniquement les définitions *discrètes* des espaces de moyennes.

Nous considérons d'abord l'espace des suites $\{u_n\}$, $u_n \in A_0 \cap A_1$, telles que pour tout $p_\alpha^{(0)}$ et pour tout $p_\alpha^{(1)}$ on ait

$$k^{n\theta} p_\alpha^{(0)}(u_n) \in l^{p_0}, \tag{1.1}$$

$$k^{n(\theta-1)} p_\alpha^{(1)}(u_n) \in l^{p_1}; \tag{1.2}$$

k est fixé > 1, et θ est donné dans $]0, 1[$.

Cet espace de suites est muni de la topologie définie par les normes

$$\max(\|p_\alpha^{(0)}(k^{n\theta} u_n)\|_{l^{p_0}}, \|p_\beta^{(0)}(k^{n(\theta-1)} u_n)\|_{l^{p_1}}) = r_{\alpha\beta}(\{u_n\}). \tag{1.3}$$

On vérifie sans peine que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ est convergente. *On désigne par*

$$s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1)$$

l'espace décrit par $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ *lorsque* u_n *varie en satisfaisant à* (1.1) et (1.2).

On le munit de la topologie définie par les normes

$$r_{\alpha\beta}(a) = \inf_{\Sigma u_n = a} r_{\alpha\beta}(\{u_n\}). \tag{1.4}$$

Comme au chapitre I^er^, on vérifiera sans peine que *les espaces* $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta - 1, A_1)$ *ont la propriété d'interpolation par rapport aux applications linéaires.*

Comme au chapitre II, remarque 2.1, on vérifie que *l'espace* $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ *ne dépend pas du choix de* k (*satisfaisant à* $k>1$).

1.3. On considère maintenant (par analogie avec le chap. II) l'espace des couples de suites $\{v_{0n}\}$, $\{v_{1n}\}$ telles que, pour $p_\alpha^{(0)}$ et $p_\alpha^{(1)}$:

$$k^{n\theta} p_\alpha^{(0)}(v_{0n}) \in l^{p_0}, \tag{1.5}$$

$$k^{n(\theta-1)} p_\alpha^{(1)}(v_{1n}) \in l^{p_1}, \tag{1.6}$$

avec

$$v_{0n} + v_{1n} = a \qquad \text{indépendant de } n. \tag{1.7}$$

On munit l'espace des couples de suites $\{v_{0n}\}$, $\{v_{1n}\}$ des normes

$$\max\left(\|p_\alpha^{(0)}(k^{n\theta} v_{0n})\|_{l^{p_0}}, \|p_\beta^{(1)}(k^{n(\theta-1)} v_{1n})\|_{l^{p_1}}\right) = s_{\alpha\beta}(v_{0n}, v_{1n}). \tag{1.8}$$

On désigne par $\underline{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ *l'espace décrit par* $v_{0n}+v_{1n}=a$ *lorsque le couple* $\{v_{0n}\}\{v_{1n}\}$ satisfait à (1.5), (1.6), (1.7).

On le munit de la topologie définie par les normes

$$s_{\alpha\beta}(a) = \inf_{v_{0n}+v_{1n}=a} s_{\alpha\beta}(v_{0n}, v_{1n}). \tag{1.9}$$

Ici encore, $\underline{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ est *indépendant du choix de* k, *avec* $k>1$.

Par « discrétisation » de la démonstration du théorème 2.1, chapitre I^er (les produits de composition sur R étant remplacés par les produits de composition sur le groupe des entiers), on montre le :

Théorème (**1.1**). — *Les espaces* $s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ *et* $\underline{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$ *coïncident, avec des topologies équivalentes.*

On posera désormais

$$S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) = s(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) = \underline{s}(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1).$$

1.5. Également par « discrétisation » de la démonstration du théorème 5.3, chapitre I^er, on démontre le

Théorème (**1.2**). — *Soient* $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$. *Alors*

$$S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1) \subset S(q_0, \theta, A_0; q_1, \theta-1, A_1).$$

2. UN EXEMPLE

2.1. On désigne par $\mathscr{H}_R$ l'espace des fonctions

$$a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \tag{2.1}$$

holomorphes dans le disque $|z|<R$, muni de la topologie habituelle de la convergence uniforme sur tout compact.

Nous allons considérer le cas suivant :

$$A_0 = \mathscr{H}_{R_0}, \qquad A_1 = \mathscr{H}_{R_1}, \tag{2.2}$$

où, pour fixer les idées, $R_0 < R_1$.

Nous démontrerons le

Théorème (**2.1**). — *Quels que soient* p_0 *et* p_1 *(avec* $1 \leq p_i \leq \infty$*), on a :*

(**2.3**) $$S(p_0, \theta, \mathscr{H}_{R_0}; p_1, \theta - 1, \mathscr{H}_{R_1}) = \mathscr{H}_R$$

avec des topologies équivalentes, où

(**2.4**) $$R = R_0^{1-\theta} R_1^{\theta}.$$

Remarque (**2.1**). — On note ainsi que le résultat (2.3) est *indépendant du choix de* p_0 *et* p_1. Il semble probable que cette propriété soit liée à la *nucléarité* des espaces $\mathscr{H}_{R_0}$ et $\mathscr{H}_{R_1}$.

Avant de passer à la démonstration du théorème, explicitons les deux conséquences suivantes, maintenant immédiates :

Corollaire (**2.1**). — *Si* π *est un opérateur linéaire continu de* $\mathscr{H}_{R_0}$ *dans lui-même et de* $\mathscr{H}_{R_1}$ *dans lui-même, c'est un opérateur linéaire continu de* $\mathscr{H}_R$ *dans lui-même,* $R_0 < R < R_1$.

On retrouve ainsi un résultat de Zerner (non publié) qui a démontré que

(**2.5**) $$[\mathscr{H}_{R_0}, \mathscr{H}_{R_1}, \delta(\theta)] = \mathscr{H}_R, \qquad R = R_0^{1-\theta} R_1^{\theta}$$

Corollaire (**2.2**). — (Notations du chap. VII, § 2, n° 4.) *Si* π *est un opérateur linéaire continu de* $\mathscr{H}_{R_1}$ *dans* $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ *et de* $\mathscr{H}_{R_0}$ *dans* $L^p(\mathbf{R}^n)$*, c'est un opérateur linéaire continu de* $\mathscr{H}_R$ *dans* $B^{\theta m, p}(\mathbf{R}^n)$, $R = R_0^{1-\theta} R_1^{\theta}$.

2.2. Pour la démonstration du théorème 2.1, notons d'abord que la topologie de $\mathscr{H}_R$ peut être définie par les normes

(**2.6**) $$||a||_{r,\rho} = \left(\sum_0^{\infty} (|a_\nu| r^\nu)^\rho\right)^{1/\rho},$$

où $r < R$ et où ρ est *quelconque* (avec $1 \leq \rho \leq \infty$). Il suffit de prendre une suite de normes (2.6) correspondant à $r_n < R$, $r_n \to R$.

Nous allons successivement démontrer

(**2.7**) $$S(\infty, \theta, \mathscr{H}_{R_0}; \infty, \theta - 1, \mathscr{H}_{R_1}) \subset \mathscr{H}_R,$$

(**2.8**) $$\mathscr{H}_R \subset S(1, \theta, \mathscr{H}_{R_0}; 1, \theta - 1, \mathscr{H}_{R_1}),$$

ce qui, grâce au théorème 2.1, implique le théorème.

Démonstration de (**2.7**). — Soit $a \in S(\infty, \theta, \mathscr{H}_{R_0}; \infty, \theta - 1, \mathscr{H}_{R_1})$. Donc on peut écrire

(**2.9**) $$a = v_{0n} + v_{1n}$$

où

(**2.10**) $$\sup_n ||k^{n\theta} v_{0n}||_{r_0,\infty} \leq M_0 < \infty, \qquad r_0 \text{ quelconque } < R_0,$$

(**2.11**) $$\sup_n ||k^{n(\theta-1)} v_{1n}||_{r_1,\infty} \leq M_1 < \infty, \qquad r_1 \text{ quelconque } < R_1,$$

M_i dépendant de r_i.

Nous allons montrer que, pour r donné quelconque avec $r < R$, on a :

(**2.12**) $$||a||_{r,\infty} \leq M < \infty \qquad (M \text{ dépendant de } r).$$

Nous choisissons r_0 et r_1 par :

$$r_i = (\frac{r}{\mathrm{R}})\mathrm{R}_i, \qquad i = 0, 1$$

et nous *choisissons* $k\,(>1)$ par

$$k = \mathrm{R}_1/\mathrm{R}_0 = r_1/r_0.$$

Noter que $r = r_0^{1-\theta} r_1^{\theta}$. Si $v_{in}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{in\nu} z^{\nu}$, $i = 0, 1$, on a, d'après (2.10) et (2.11) :

$$k^{n\theta} | v_{0n\nu} | r_0^{\nu} \leq \mathrm{M}_0,$$
$$k^{n(\theta-1)} | v_{1n\nu} | r_1^{\nu} \leq \mathrm{M}_1$$

et ceci *quel que soit n*. Prenant $n = \nu$, il vient

$$r^{\nu} | v_{0\nu\nu} | \leq \mathrm{M}_0, \qquad r^{\nu} | v_{1\nu\nu} | \leq \mathrm{M}_1$$

et donc

$$r^{\nu} | a_{\nu} | \leq r^{\nu} | v_{0\nu\nu} | + r^{\nu} | v_{1\nu\nu} | \leq \mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1.$$

Donc (2.12) est vérifié, et $a \in \mathscr{H}_{\mathrm{R}}$. Le raisonnement précédent montre également la continuité de l'injection dans (2.7).

Démonstration de **(2.8)**. — Soit maintenant $a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ donné dans $\mathscr{H}_{\mathrm{R}}$. On introduit $u_n\,(\in \mathscr{H}_{\mathrm{R}_0} \cap \mathscr{H}_{\mathrm{R}_1}!)$ par

$$u_n(z) = a_n z^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

(et $u_n = 0$ si $n < 0$).

Soient r_0 et r_1 donnés avec $r_i < \mathrm{R}_i$. On veut montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} || k^{n\theta} u_n ||_{r_0, 1} < \infty, \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} || k^{n(\theta-1)} u_n ||_{r_1, 1} < \infty, \tag{2.14}$$

pour un $k\,(>1)$ convenable. Il suffit de vérifier cela pour une suite de r_0 et de r_1, avec $r_0 \to \mathrm{R}_0$, $r_1 \to \mathrm{R}_1$. On peut donc toujours supposer que $r_1 > r_0$ et que

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}.$$

Nous prenons ensuite $k = \frac{r_1}{r_0}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} || k^{n\theta} u_n ||_{r_0, 1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{n\theta} | a_n | r_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n | r^n < \infty$$

ce qui montre (2.13), et

$$\sum_{n=0}^{\infty} || k^{n(\theta-1)} u_n ||_{r_1, 1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{n(\theta-1)} | a_n | r_1^n = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n | < \infty$$

ce qui montre (2.14) et achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, E. Gagliardo, A paraître.

[2] O. V. Besov, Étude d'une classe d'espaces de fonctions liées aux théorèmes de plongement et de prolongement, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, t. 60 (1961), p. 42-81.

[3] A. P. Calderòn, Intermediate spaces and interpolation, *Reports on the conference on Functional Analysis*, Varsovie, 1960.

[4] —, Article à paraître.

[5] C. Foias, J.-L. Lions, Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Scient. Math. Szeged*, t. XXII (1961), p. 269-282.

[6] E. Gagliardo, Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, *Ricerche di Matematica*, t. IX (1960), p. 58-81.

[7] —, Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali (I), *Ricerche di Matematica*, t. X (1961), p. 245-281.

[8] —, Caratterizzazione della tracce sulla frontiera relative ad alcune classi de funzioni in *n* variabili, *Rend. Sem. Mat. Padova*, t. 27 (1957), p. 284-305.

[9] R. P. Gosselin, Some integral inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. XIII (1962), p. 378-384.

[10] P. Grisvard, *C. r. Acad. Sc.*, t. 256 (1963), p. 2745-2748, 2990-2992, 3226-3228 et t. 257 (1963), p. 349-352.

[11] —, A paraître, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.*

[12] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1957.

[13] S. G. Krein, Sur un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, *Doklady Akad. Nauk*, t. 130 (1960), p. 491-494.

[14] —, Sur la notion d'échelle normale d'espaces, *Doklady Akad. Nauk*, t. 132 (1960), p. 510-513.

[15] S. G. Krein, E. M. Semenov, Sur une échelle d'espaces, *Doklady Akad. Nauk*, t. 138 (1961), p. 763-766.

[16] P. Lax, Symmetrizable linear transformations, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. VII (1954), p. 633-647.

[17] V. I. Levin, Constantes exactes dans des inégalités de type Carlson, *Doklady Akad. Nauk*, t. 59 (1948), p. 635-638.

[18] J.-L. Lions, Théorèmes de traces et d'interpolation (I)-(V) : (I), (II) *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. XIII (1959), p. 389-403, t. XIV (1960), p. 317-331; (III) *Journal de Liouville*; (IV) *Math. Annalen*; (V) *Summa Brasil. Mat.*

[19] —, Sur les espaces d'interpolation; dualité, *Math. Scand.*, t. IX (1961), p. 147-177.

[20] —, Sur certains théorèmes d'interpolation, *C. r. Acad. Sc.*, t. 250 (1960), p. 2104-2106.

[21] —, Une construction d'espaces d'interpolation, *C. r. Acad. Sc.*, t. 251 (1961), p. 1853-1855.

[22] —, Properties of some interpolation spaces, *Journal of Math. and Mech.*, t. XI (1962), p. 969-977.

[23] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (V), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. XVI (1962), p. 1-44.

[24] J.-L. Lions, J. Peetre, Propriétés d'espaces d'interpolation, *C. r. Acad. Sc.*, t. 253 (1961), p. 1747-1749.

[25] G. G. Lorentz, Some new functional spaces, *Ann. Math.*, t. 51 (1950), p. 37-55.

[26] J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérateurs, *C. r. Acad. Sc.*, t. 208 (1939), p. 1272-1273.

[27] S. M. Nikolski, Sur les théorèmes de plongement, de prolongement et d'approximation des fonctions différentiables de plusieurs variables, *Uspehi Mat. Nauk*, t. XVI (1961), p. 63-114.

[28] J. Peetre, Relations d'inclusion entre quelques espaces fonctionnels, *Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förh.*, 30 (1960), p. 47-50.

[29] —, Relations entre deux méthodes d'interpolation, A paraître.

[30] —, Espaces intermédiaires et la théorie constructive des fonctions, *C. r. Acad. Sc.*, t. 256 (1963), p. 54-55.

[31] —, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, *C. r. Acad. Sc.*, t. 256 (1963), p. 1424-1426.

[32] E. T. Poulsen, Boundary values in function spaces, *Math. Scand.*, t. X (1962), p. 45-52.

[33] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, t. 49 (1927), p. 465-497.

[34] M. Schechter, On L^p estimates and regularity, A paraître.

[35] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles : (I) *Annales Institut Fourier*, t. VII (1957), p. 1-139; (II) t. VIII (1958), p. 1-209.

[36] —, *Lectures on mixed problems in partial differential equations and representations of semi-groups*, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay, 1958.

[37] L. N. Slobodetski, Sur le prolongement de l'espace $W_p^{l_1,\ldots,l_n}$ dans l'espace $H_p^{l_1,\ldots,l_n}$ de S. M. Nikolski, *Uspehi Mat. Nauk*, t. XIV (1960), p. 176-180.

Reçu le 1er mars 1963.