LES ZÉROS
DES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE
SUR UN CORPS VALUÉ COMPLET

par Michel LAZARD

INTRODUCTION

Cet article répond à une question posée par J.-P. Serre. Soient K un corps valué complet (valuation non-archimédienne de rang 1, notée additivement selon les conventions usuelles) et f une série de Taylor à coefficients dans K qui converge pour les $x \in K$ de valuation strictement supérieure à un nombre M (disons, par abus de langage, dans un disque « ouvert »). Les zéros de f vérifient des conditions algébriques simples : dans tout disque « fermé » (c'est-à-dire pour les éléments de valuation $\geqslant m$, avec $m > M$) f a les mêmes zéros qu'un polynôme à coefficients dans K, compte tenu des multiplicités. Le « problème des zéros » s'énonce comme suit : *soient, dans un disque « ouvert », des éléments (affectés de multiplicités) qui vérifient les conditions algébriques précitées; existe-t-il une série de Taylor f dont ce sont exactement les zéros ?*

La réponse est affirmative si le groupe de valuation de K est discret. On obtient alors une décomposition des fonctions en produit (éventuellement) infini, tout à fait analogue à celle de Weierstrass pour les fonctions entières (théorème 1, § IV).

La situation est très différente si le groupe de valuation de K est dense. Il existe alors des fonctions qui n'admettent aucune décomposition raisonnable en produit; « raisonnable » signifie que les facteurs ne doivent avoir qu'un nombre fini de zéros dans le disque (proposition 7, § V). Le problème des zéros n'est plus accessible par les méthodes multiplicatives.

Si le corps K n'est pas maximalement complet (définition (5.2)), il est assez facile de donner un exemple d'impossibilité pour le problème des zéros (proposition 6, § V). La réciproque est exacte : si K est maximalement complet, le problème des zéros est toujours résoluble (théorème 2, § VII). Ce résultat semble moins élémentaire. Il s'obtient en traitant un problème additif un peu plus général, et la même méthode donne un critère de résolubilité, à vrai dire peu maniable.

Le « problème des parties principales » pour les fonctions méromorphes se résout par le théorème classique de Mittag-Leffler (théorème 3, § VIII).

Je me suis efforcé d'adapter les notations au problème étudié. Le « découpage en rondelles » (c'est-à-dire le groupement des zéros de même valuation, etc.) est systématiquement utilisé. Les diviseurs sont rationnels sur K par définition. Le § IX rassemble quelques propriétés des extensions immédiates (dans la terminologie de Schilling) des corps valués. Avant ce paragraphe, il n'est jamais question de corps résiduel ni d'extension du corps de base (sauf dans la preuve de la proposition 9, pour des raisons de simple commodité). Tout est donc « rationnel » ou « analytique », si bien que les zéros reposent cachés dans la clôture algébrique du corps de base.

L'absence de figures ne doit pas dissimuler qu'il s'agit surtout de polygones convexes infinis.

1. Notations générales. Polygone de Newton et fonctions convexes.

$\overline{\mathbf{R}}$ désigne la droite numérique achevée : $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$, et K un corps valué complet. A tout $x\in K$ nous associons ainsi sa *valuation* $v(x)\in\mathbf{R}$. Les axiomes suivants sont vérifiés : pour tous $x, y\in K$

$$v(x)>-\infty;$$
$$v(x)=+\infty \quad \text{si et seulement si} \quad x=0;$$
$$v(xy)=v(x)+v(y);$$
$$v(x+y)\geqslant \operatorname{Inf}(v(x), v(y)).$$

La valuation v définit une structure uniforme sur K : x est voisin de 0 si $v(x)$ est grand. Nous supposons que K est *complet*. Cela revient à dire qu'une série $\Sigma_n u_n$ (avec $u_n\in K$) converge si et seulement si $v(u_n)\to+\infty$.

Dans tout cet article la lettre T désignera une indéterminée. Soit $f=\Sigma_{n\in\mathbf{Z}} a_n \mathrm{T}_n$ une série de Laurent à coefficients $a_n\in K$. Nous la considérons d'abord du point de vue formel, c'est-à-dire que nous identifions f à la suite des a_n. Mais nous pouvons remplacer T par un élément x de K ou d'une extension valuée complète de K, lorsque la série $f(x)=\Sigma_{n\in\mathbf{Z}} a_n x^n$ converge. La condition est : $v(a_n x^n)=v(a_n)+nv(x)\to+\infty$, pour $|n|\to+\infty$.

Pour tout $\mu\in\mathbf{R}$, *posons*

$$v(f, \mu)=\operatorname*{Inf}_{n\in\mathbf{Z}}(v(a_n)+n\mu)\in\overline{\mathbf{R}}, \tag{1.1}$$

et définissons comme suit l'ensemble $\operatorname{Conv}(f)\subset\overline{\mathbf{R}}$:

(1.2) *Si* $\mu\in\mathbf{R}$, $\mu\in\operatorname{Conv}(f)$ *équivaut à* $\lim\limits_{|n|\to+\infty}[v(a_n)+n\mu]=+\infty$.

(1.2') *Si* $\mu=+\infty$ (resp. $-\infty$), $\mu\in\operatorname{Conv}(f)$ *équivaut à* $a_n=0$ *pour tout* $n<0$ (resp. >0).

Si $\mu=\pm\infty$, $\mu\in\operatorname{Conv}(f)$, nous posons $v(f, \mu)=v(a_0)$.

Conv (f) est toujours un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$ que nous supposerons non vide. La série de Laurent converge donc sur une « couronne ».

(1.3) *Si* I *désigne un intervalle de* $\overline{\mathbf{R}}$, *nous noterons* $\mathrm{L}_{\mathrm{K}}\mathrm{I}$ *l'ensemble des séries de Laurent* f *à coefficients dans* K *telles que* $\mathrm{I}\subset\operatorname{Conv}(f)$.

(1.4) *Les intervalles notés* $[m, M]$, $]m, M]$, $[m, M[$, $]m, M[$ *sont les ensembles des* $\mu \in \overline{\mathbf{R}}$ *qui vérifient respectivement* $m \leqslant \mu \leqslant M$, $m < \mu \leqslant M$, $m \leqslant \mu < M$, $m < \mu < M$. *Nous écrirons* $[m]$ *au lieu de* $[m, m]$.

Par exemple, $L_K]M, +\infty]$ désigne l'ensemble des séries entières qui convergent pour $v(x) > M$.

En même temps que la fonction $v(f, \mu)$ nous introduisons la fonction de Newton :

(1.5) *pour tout* $\xi \in \mathbf{R}$, *nous posons* $Nw(f, \xi) = \operatorname{Sup}_{\mu \in \mathbf{R}} [v(f, \mu) - \mu\xi]$.

La fonction de Newton permet de retrouver la fonction $v(f, \mu)$:

(1.6) $$v(f, \mu) = \operatorname{Inf}_{n \in \mathbf{Z}} [Nw(f, n) + \mu n] = \operatorname{Inf}_{\xi \in \mathbf{R}} [Nw(f, \xi) + \mu\xi].$$

Le polygone de Newton est le graphe de la fonction de Newton.

(1.7) *Si* $f \neq 0$, $\mu \in \operatorname{Conv}(f) \cap \mathbf{R}$, *nous notons* $n(f, \mu)$ (*resp.* $N(f, \mu)$) *le plus petit (resp. le plus grand) entier* i *tel que* $v(f, \mu) = v(a_i) + i\mu$.

(1.7′) *Si* $f \neq 0$, $+\infty \in \operatorname{Conv}(f)$, *nous posons* $n(f, +\infty) = 0$ *et* $N(f, +\infty) = \operatorname{ord} f$ (*le plus petit entier* i *tel que* $a_i \neq 0$).

(1.7″) *Si* $f \neq 0$, $-\infty \in \operatorname{Conv}(f)$, *nous posons* $N(f, -\infty) = 0$ *et* $n(f, -\infty) = \deg f$ (*le plus grand entier* i *tel que* $a_i \neq 0$).

Rassemblons quelques propriétés concernant une série de Laurent non nulle f.

(1.8) *Sur l'intervalle* $\operatorname{Conv}(f)$ *les fonctions* $n(f, \mu)$ *et* $N(f, \mu)$ *sont toutes deux décroissantes; elles sont respectivement continues à droite et à gauche. L'ensemble des* $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$ *tels que* $n(f, \mu) \neq N(f, \mu)$ *a une intersection finie avec tout intervalle fermé* $[m, M]$ *contenu dans* $\operatorname{Conv}(f)$.

(1.9) *Sur l'intervalle* $\operatorname{Conv}(f) \cap \mathbf{R}$, *la fonction* $v(f, \mu)$ *est concave (son opposée est convexe). Si* $n(f, \mu) \leqslant \xi \leqslant N(f, \mu)$, *on a* $Nw(f, \xi) = v(f, \mu) - \mu\xi$. *La dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction* $v(f, \mu)$ *est égale à* $n(f, \mu)$ (*resp. à* $N(f, \mu)$) *en tout point de* $\operatorname{Conv}(f) \cap \mathbf{R}$ *où elle est définie.*

(1.10) Remarque. Les affirmations précédentes sont faciles à démontrer. Nous nous contenterons d'indiquer ce qui nous semble le cadre naturel pour ces questions.

Soit F l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$, et F_0 celui des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'ensemble F est partiellement ordonné, les Sup et les Inf y sont toujours définis; $\varphi \pm \psi$ est défini pour tous $\varphi \in F_0$ et $\psi \in F$. Nous définissons une application $\mathscr{L} : F \to F$ (« transformation de Legendre ») en posant

$$(\mathscr{L}\varphi)(x) = \operatorname{Sup}_{y \in \mathbf{R}} (xy - \varphi(y)).$$

Alors $\mathscr{L}$ est une application décroissante et, pour tout $\varphi \in F$, $\mathscr{L}^2\varphi \leqslant \varphi$ ($\mathscr{L}^2\varphi = \mathscr{L}\mathscr{L}\varphi$). L'application $\mathscr{L}$ est donc une correspondance de Galois et met en dualité l'image $\mathscr{L}F$ avec elle-même. Il est naturel de prendre l'appartenance à $\mathscr{L}F$ comme définition des fonctions convexes. Si φ est convexe, les graphes de φ et de $\mathscr{L}\varphi$ sont transformés par polaires réciproques par rapport à la parabole d'équation $2x_2 - x_1^2 = 0$. Les sommets (points anguleux) du graphe de φ correspondent ainsi aux côtés du graphe de $\mathscr{L}\varphi$. La correspondance est donnée par la relation $\varphi(x) + \mathscr{L}\varphi(y) - xy = 0$, qui est croissante en (x, y).

(1.11) Dans le cas qui nous occupe, posons $Nw(f, \ ) = \varphi$ et $v(f, \ ) = \psi$. Alors φ est convexe, ainsi que $-\psi$. Les relations (1.5) et (1.6) s'écrivent respectivement $\varphi(x) = (\mathscr{L}(-\psi))(-x)$ et $\psi(x) = -(\mathscr{L}\varphi)(-x)$.

Signalons que l'intervalle $\mathrm{Conv}(f)$ ne coïncide pas toujours avec l'intervalle où ψ est fini. De plus, si μ est l'extrémité gauche (resp. droite) de $\mathrm{Conv}(f)$, il se peut que $N(f, \mu)$ (resp. $n(f, \mu)$) ne soit pas l'abscisse d'un sommet du polygone de Newton. Les fonctions n et N donnent donc, éventuellement, plus de renseignements que les fonctions v et Nw.

2. Multiplication des séries de Laurent; division par des polynômes.

Soient $f = \Sigma_{n\in\mathbf{Z}} a_n \mathrm{T}^n$ et $g = \Sigma_{n\in\mathbf{Z}} b_n \mathrm{T}^n$ deux séries de Laurent à coefficients dans K. Nous définissons leur somme $f+g$ par la formule

(2.1) $$f+g = \Sigma_{n\in\mathbf{Z}}(a_n + b_n)\mathrm{T}^n,$$

et nous avons, pour tous $\mu, \xi \in \mathbf{R}$,

(2.2) $$v(f+g, \mu) \geqslant \mathrm{Inf}\,[v(f, \mu), v(g, \mu)],$$

(2.2') $$Nw(f+g, \xi) \geqslant \mathrm{Inf}\,[Nw(f, \xi), Nw(g, \xi)].$$

Par contre, le produit fg ne peut pas être défini formellement. Nous devons supposer que

(2.3) *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$ *la série* $\Sigma_{i\in\mathbf{Z}} a_i b_{n-i}$ *converge vers un élément* $c_n \in \mathrm{K}$,
et nous posons alors

(2.4) $$fg = \Sigma_{n\in\mathbf{Z}} c_n \mathrm{T}^n.$$

Proposition 1. — *Soit* I *un intervalle non vide de* $\overline{\mathbf{R}}$. *L'ensemble* $\mathrm{L_K I}$ *est un anneau intègre pour l'addition et la multiplication précédemment définies. Si* $\mu\in\mathrm{I}$, f *et* $g\in\mathrm{L_K I}$, f *et* $g \neq 0$, *nous avons*

(1) $$n(fg, \mu) = n(f, \mu) + n(g, \mu);$$

(2) $$N(fg, \mu) = N(f, \mu) + N(g, \mu);$$

(3) $$v(fg, \mu) = v(f, \mu) + v(g, \mu).$$

Preuve. — Si $\mu = \pm\infty$, notre énoncé est bien connu. Supposons donc $\mu\in\mathbf{R}$. Nous avons, pour $i, j\in\mathbf{Z}$, $v(a_i) + i\mu \geqslant v(f, \mu)$, $v(b_j) + j\mu \geqslant v(g, \mu)$, et

$$v(a_i) + i\mu \to +\infty \quad \text{pour} \quad |i| \to +\infty,$$
$$v(b_j) + j\mu \to +\infty \quad \text{pour} \quad |j| \to +\infty,$$

d'où

$$v(a_i b_j) + (i+j)\,\mu \geqslant v(f, \mu) + v(g, \mu) \qquad \text{pour tous } i, j, \text{ et}$$
$$v(a_i b_j) + (i+j)\,\mu \to +\infty, \qquad \text{pour Sup}\,(|i|, |j|) \to +\infty.$$

Par conséquent la série $c_n = \Sigma_{i\in\mathbf{Z}} a_i b_{n-i}$ converge pour tout $n\in\mathbf{Z}$, $v(c_n) + n\mu \geqslant v(f, \mu) + v(g, \mu)$ pour tout n, et enfin $v(c_n) + n\mu \to +\infty$ pour $|n| \to +\infty$. Autrement dit :

$$fg \in \mathrm{L_K I} \quad \text{et} \quad v(fg, \mu) \geqslant v(f, \mu) + v(g, \mu).$$

Posons $n(f, \mu) = r$ et $n(g, \mu) = s$. Alors $v(a_r) + r\mu = v(f, \mu)$, $v(b_s) + s\mu = v(g, \mu)$,

$$\operatorname*{Inf}_{i<r} [v(a_i) + i\mu] = w_1 > v(f, \mu),$$
$$\operatorname*{Inf}_{j<s} [v(b_j) + j\mu] = w_2 > v(g, \mu).$$

Si $n < (r+s)$, nous avons, pour tout i, $i < r$ ou $n - i < s$, d'où

$$v(a_i b_{n-i}) + n\mu \geqslant \operatorname{Inf} [v(f, \mu) + w_2, v(g, \mu) + w_1];$$

cette dernière relation vaut encore pour $n = r + s$, $i \neq r$. Nous en déduisons que

$$v(c_n) + n\mu > v(f, \mu) + v(g, \mu)$$

pour $n < (r+s)$, et que $v(c_{r+s}) + (r+s)\mu = v(f, \mu) + v(g, \mu)$. Nous venons d'établir les relations (1) et (3) de notre proposition; la relation (2) s'établit de même. La relation (3) implique que l'anneau $L_K I$ est intègre. Elle nous permet de définir des topologies naturelles sur les K-algèbres $L_K I$.

(2.5) *Si* $I = [m_1, m_2] \subset \overline{\mathbf{R}}$, $I \neq [\pm\infty]$, *nous définissons une structure d'algèbre topologique sur* $L_K I$ *en prenant comme système fondamental de voisinages de* 0 *les* f *qui vérifient* $\operatorname{Inf}[v(f, m_1), v(f, m_2)] \geqslant n$ *(n parcourt, par exemple, l'ensemble des entiers). Dans ces conditions,* $L_K I$ *devient une algèbre séparée et complète.* Si $f_n = \Sigma_{i \in \mathbf{Z}} a_{n,i} T^i \in L_K I$, la convergence de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ implique celle de toutes les suites $(a_{n,i})_{n \geqslant 1}$. Si J est un intervalle fermé de $\overline{\mathbf{R}}$ contenu dans I, alors l'inclusion de $L_K I$ dans $L_K J$ est une application continue (car, pour tout f, $v(f, m)$ est une fonction concave de m).

(2.6) *Si* I *est un intervalle non vide de* $\overline{\mathbf{R}}$, $I \neq [\pm\infty]$, *nous définissons généralement la topologie de* $L_K I$ *comme la moins fine de celles qui rendent continues les inclusions de* $L_K I$ *dans* $L_K J$, *lorsque* J *parcourt l'ensemble des sous-intervalles fermés de* I. Les propriétés énoncées ci-dessus de l'algèbre topologique $L_K I$ sont encore vraies.

Nous considérons l'anneau des polynômes K[T] comme un sous-anneau de $L_K]-\infty, +\infty]$.

(2.7) *Définition. — Soit* $P = \Sigma_{0 \leqslant n \leqslant s} a_n T^n \in K[T]$ *un polynôme de degré* s $(a_s \neq 0)$. *Nous dirons que* P *est* μ*-dominant (resp.* μ*-extrémal) si* $N(P, \mu) = s$ *(resp.* $n(P, \mu) = 0$ *et* $N(P, \mu) = s$*).*

Cette définition équivaut à la suivante :

(2.7′) P *est* μ*-dominant (resp.* μ*-extrémal) si chaque zéro* x *de* P *dans la clôture algébrique de* K *vérifie* $v(x) \geqslant \mu$ *(resp.* $v(x) = \mu$*).*

Lemme 1. — *Soient* $m \in \mathbf{R}$, $f = \Sigma_{n \geqslant 0} a_n T^n \in L_K[m, +\infty]$, *et* $P = \Sigma_{0 \leqslant n \leqslant s} b_n T^n$ *un polynôme* m*-dominant de degré* $s > 0$. *Alors il existe* $g \in L_K[m, +\infty]$ *et un polynôme* Q *de degré* $< s$, *tels que*

(1) $$f = Pg + Q.$$

Ces propriétés déterminent univoquement g *et* Q, *et on a de plus*

(2) $$v(Q, m) \geqslant v(f, m);$$

(3) $$v(g, m) \geqslant v(f, m) - v(P, m).$$

Preuve. — Montrons d'abord l'unicité. Si $f=Pg_1+Q_1=Pg_2+Q_2$, alors

$$P(g_1-g_2)=Q_2-Q_1.$$

Si $g_1 \neq g_2$, alors (prop. 1)

$$N(P(g_1-g_2), m)=N(P, m)+N(g_1-g_2, m) \geqslant s.$$

En effet $N(P, m)=s$ (déf. (2.7)), et $N(g_1-g_2, m) \geqslant 0$, car g_1-g_2 est une série entière. D'autre part $Q_2-Q_1 \neq 0$ et

$$N(Q_2-Q_1, m) \leqslant \deg(Q_2-Q_1)<s. \qquad \text{Contradiction.}$$

Pour établir l'existence, traitons d'abord le cas où f est un polynôme de degré t. Si $t<s$, nous prenons $g=0$, $Q=f$, et l'énoncé est trivialement vérifié. Sinon nous raisonnons par récurrence sur t. Posons $g_0=a_t b_s^{-1}T^{t-s}$; nous avons

$$v(g_0, m)=v(a_tT^t, m)-v(b_sT^s, m)=v(a_tT^t, m)-v(P, m);$$

ainsi g_0 vérifie la relation (3); $f_0=f-Pg_0$ est un polynôme de degré $<t$, qui vérifie $v(f_0, m) \geqslant v(f, m)$. D'après notre hypothèse de récurrence nous avons $f_0=Pg_1+Q$, où g_1 et Q vérifient respectivement (3) et (2); nous prenons $g=g_0+g_1$.

Traitons enfin le cas général. Pour tout $n \geqslant 0$, nous écrivons $a_nT^n=Pg_n+Q_n$, comme dans l'énoncé de notre lemme. Les relations (2) et (3) nous montrent que les séries $g=\Sigma_{n\geqslant 0}g_n$ et $Q=\Sigma_{n\geqslant 0}Q_n$ convergent dans $L_K[m]$; Q est un polynôme de degré $<s$; g est une série entière, c'est-à-dire $+\infty \in \operatorname{Conv}(g)$, donc l'intervalle $\operatorname{Conv}(g)$ contient $[m, +\infty]$. Les relations (1), (2) et (3) s'établissent immédiatement.

Lemme 2. — *Soient* I *un intervalle de* $\bar{\mathbf{R}}$, $m \in I \cap \mathbf{R}$, P *un polynôme m-extrémal de degré* $s>0$, *et* $f \in L_K I$. *Alors il existe* $g \in L_K[m]$ *et un polynôme* Q *de degré* $<s$ *tels que*

$$f=Pg+Q. \tag{1}$$

Ces conditions déterminent univoquement g *et* Q, *et on a de plus*

$$g \in L_K I; \tag{2}$$

$$v(Q, m) \geqslant v(f, m); \tag{3}$$

$$v(g, m) \geqslant v(f, m)-v(P, m). \tag{4}$$

Nous dirons que Q *est le reste de la division de* f *par* P.

Preuve. — Montrons d'abord l'unicité. Supposons $f=Pg_1+Q_1=Pg_2+Q_2$, $g_1 \neq g_2$. Alors $P(g_1-g_2)=Q_2-Q_1$ et $Q_1 \neq Q_2$. La proposition 1 nous donne

$$N(P(g_1-g_2), m)=N(P, m)+N(g_1-g_2, m)=N(g_1-g_2, m)+s;$$
$$n(P(g_1-g_2), m)=n(P, m)+n(g_1-g_2, m)=n(g_1-g_2, m);$$
$$N(P(g_1-g_2), m)-n(P(g_1-g_2), m) \geqslant s.$$

D'autre part, Q_2-Q_1 est un polynôme de degré $<s$, d'où

$$N(Q_2-Q_1, m)-n(Q_2-Q_1, m)<s. \qquad \text{Contradiction.}$$

Posons $f=f_+ + f_-$, avec $f_+=\Sigma_{n\geqslant 0}a_nT^n$, $f_-=\Sigma_{n<0}a_nT^n$. Si $\mu \in I$, nous avons

$$f_+ \in L_K[\mu, +\infty], f_+ \in L_K[-\infty, \mu], v(f_+, \mu) \geqslant v(f, \mu), v(f_-, \mu) \geqslant v(f, \mu).$$

Supposons d'abord $\mu \in I$, avec $-\infty < \mu \leqslant m$. Alors P est μ-dominant (cf. (2.7')); le lemme 1 nous donne

$$f_+ = Pg_+ + Q_+,$$

où Q_+ est un polynôme de degré $<s$, $g_+ \in L_K[\mu, +\infty]$,

$$v(Q_+, \mu) \geqslant v(f_+, \mu) \geqslant v(f, \mu),$$
$$v(g_+, \mu) \geqslant v(f_+, \mu) - v(P, \mu) \geqslant v(f, \mu) - v(P, \mu).$$

Comme $g_+ \in L_K[m, +\infty]$, g_+ et Q_+ ne dépendent pas du choix de μ (d'après le lemme 1). Les relations (2), (3) et (4) sont vérifiées par g_+ et Q_+ (le cas où $-\infty \in I$ est trivial : $g_+ = 0$).

Posons maintenant $P^* = T^s P(T^{-1})$ et $f^* = T^{s-1} f_-(T^{-1})$. Plus précisément $f^* = \Sigma_{n>0} a_{-n} T^{n+s-1}$ et $P^* = \Sigma_{0 \leqslant n \leqslant s} b_{s-n} T^n$ (pour $P = \Sigma_{0 \leqslant n \leqslant s} b_n T^n$). Prenons $\mu \in I$, avec $m \leqslant \mu < +\infty$. Alors P^* est $(-\mu)$-dominant (cf. (2.7')), et nous pouvons appliquer le lemme 1; nous obtenons

(*) $$f^* = P^* g^* + Q^*.$$

Q^* est un polynôme de degré $<s$; $g^* \in L_K[-\mu, +\infty]$;

$$v(Q^*, -\mu) \geqslant v(f^*, -\mu) = v(f_-, \mu) - (s-1)\mu \geqslant v(f, \mu) - (s-1)\mu;$$
$$v(g^*, -\mu) \geqslant v(f^*, -\mu) - v(P^*, -\mu) \geqslant v(f, \mu) - v(P, \mu) + \mu;$$

g^* et Q^* ne dépendent pas du choix de μ. Transformons la relation (*) en y remplaçant T par T^{-1} :

$$f^*(T^{-1}) = P^*(T^{-1}) g^*(T^{-1}) + Q^*(T^{-1}).$$

Multiplions les deux membres de cette dernière relation par T^{s-1}; nous obtenons

$$f_- = Pg_- + Q_-,$$

avec $Q_- = T^{s-1} Q^*(T^{-1})$ et $g_- = T^{-1} g^*(T^{-1})$. Q_- est un polynôme de degré $<s$, $g_- \in L_K[-\infty, \mu]$,

$$v(Q_-, \mu) = v(Q^*, -\mu) + (s-1)\mu \geqslant v(f, \mu),$$
$$v(g_-, \mu) = v(g^*, -\mu) - \mu \geqslant v(f, \mu) - v(P, \mu).$$

Nous posons enfin $g = g_+ + g_-$ et $Q = Q_+ + Q_-$. Les relations (1) à (4) sont vérifiées.

3. Existence et continuité des zéros.

Proposition 2. — *Soient* $m \in \mathbf{R}$ *et* $f \in L_K[m]$. *Supposons* $f \neq 0$ *et* $N(f, m) - n(f, m) = s > 0$. *Alors il existe* $g \in L_K[m]$ *et un polynôme m-extrémal* P *tels que*

(1) $$f = Pg;$$
(2) $$\deg P = s;$$
(3) $$P(0) = 1.$$

Ces conditions déterminent univoquement P *et* g, *et on a de plus*

(4) $$n(g, m) = \mathrm{N}(g, m);$$

(4′) $$\mathrm{Conv}\,(g) \supset \mathrm{Conv}\,(f).$$

Preuve. — Nous multiplions f par $\mathrm{T}^{-n(f,m)}$, pour nous ramener au cas où $n(f, m) = 0$ et $\mathrm{N}(f, m) = s$. Nous allons appliquer une forme du lemme de Hensel. Nous voulons construire une suite convergente de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ qui vérifient

(5) $$\deg \mathrm{P}_n = s;$$

(5′) $$v(f - \mathrm{P}_n, m) > v(f, m).$$

Ces conditions entraînent

(5″) $$\mathrm{P}_n \text{ est } m\text{-extrémal, et } v(\mathrm{P}_n, m) = v(f, m).$$

Si $f = \Sigma_{i \in \mathrm{Z}} a_i \mathrm{T}^i$, nous prenons $\mathrm{P}_1 = \Sigma_{0 \leqslant i \leqslant s} a_i \mathrm{T}^i$. Supposons déjà construit le polynôme P_n vérifiant les relations (5). Nous pouvons appliquer le lemme 2, et nous obtenons

(6) $$f = \mathrm{P}_n g_n + \mathrm{Q}_n; \qquad \deg \mathrm{Q}_n < s; \qquad g_n \in \mathrm{L_K}[m].$$

Nous posons la relation de récurrence

(7) $$\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n + \mathrm{Q}_n.$$

Nous appliquons le lemme 2 aux relations

(8) $$f - \mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n (g_n - 1) + \mathrm{Q}_n,$$

(9) $$\mathrm{Q}_n (g_{n+1} - 1) = \mathrm{P}_n (g_n - g_{n+1}) - \mathrm{Q}_{n+1}.$$

La relation (8) nous donne

(8′) $$v(\mathrm{Q}_n, m) \geqslant v(f - \mathrm{P}_n, m);$$

(8″) $$v(g_n - 1, m) \geqslant v(f - \mathrm{P}_n, m) - v(f, m).$$

Notre définition (7) est donc correcte : P_{n+1} vérifie les conditions (5). De plus

(8‴) $$v(f - \mathrm{P}_n, m) \geqslant v(f - \mathrm{P}_1, m) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1, \text{ et}$$

(8⁗) $$v(g_n - 1, m) \geqslant v(f - \mathrm{P}_1, m) - v(f, m) > 0, \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

La relation (9) nous conduit à

(9′) $$v(\mathrm{Q}_{n+1}, m) \geqslant v(\mathrm{Q}_n, m) + v(g_{n+1} - 1, m);$$

(9″) $$v(g_n - g_{n+1}, m) \geqslant v(\mathrm{Q}_n, m) + v(g_{n+1} - 1, m) - v(f, m).$$

Nous obtenons ainsi, par récurrence sur n

(10) $$v(\mathrm{Q}_n, m) \geqslant v(f - \mathrm{P}_1, m) + (n - 1)[v(f - \mathrm{P}_1, m) - v(f, m)], \qquad \text{pour tout } n,$$

(10′) $$v(g_n - g_{n+1}, m) \geqslant (n + 1)[v(f - \mathrm{P}_1, m) - v(f, m)], \qquad \text{pour tout } n.$$

Dans l'algèbre $\mathrm{L_K}[m]$, les suites (g_n) et (P_n) convergent respectivement vers leurs limites g_∞ et P_∞. Le polynôme P_∞ vérifie les relations (5) ; nous pouvons passer à la limite dans (6), ce qui nous donne $f=P_\infty g_\infty$. Pour obtenir P et g comme dans l'énoncé de notre proposition, il n'y a plus qu'à poser $P=(P_\infty(0))^{-1}P_\infty$ et $g=P_\infty(0)g_\infty$. Les relations (1) à (3) sont alors vérifiées. La relation (4) s'obtient en calculant le $N(\ ,m)-n(\ ,m)$ des deux membres de (1); enfin (4′) est une conséquence du lemme 2. L'unicité de P et g va résulter d'une proposition plus précise dont nous aurons besoin ultérieurement.

Proposition 3. — *Soient* $m\in\mathbf{R}$ *et* g, g' *deux éléments non nuls de* $L_K[m]$; *soient* P *et* P′ *deux polynômes de même degré* $s>0, f=Pg, f'=P'g'$. *Si* $P(0)=P'(0)=1$, *si* P′ *est m-extrémal, et si* $n(g,m)=N(g,m)$, *alors*

$$v(P-P',m)-v(P,m)\geqslant v(f-f',m)-v(f,m). \tag{1}$$

Preuve. — Posons $h=f-f'$, $Q=P-P'$. La relation (1) équivaut à

$$v(Qg,m)\geqslant v(h,m). \tag{1′}$$

Or nous avons

$$P'(g-g')=h-Qg. \tag{2}$$

Supposons $v(Qg,m)<v(h,m)$. Nous obtenons $v(h-Qg,m)=v(Qg,m)<+\infty$, d'où $g-g'\neq 0$. Puis

$$N(h-Qg,m)=N(Qg,m)=N(Q,m)+N(g,m);$$
$$n(h-Qg,m)=n(Qg,m)=n(Q,m)+n(g,m).$$

Par hypothèse, $n(g,m)=N(g,m)$; Q est un polynôme de degré $\leqslant s$ dont le terme constant est nul. Nous avons donc

$$N(h-Qg,m)-n(h-Qg,m)\leqslant s-1.$$

Mais d'autre part P′ est m-extrémal de degré s, et (2) nous donne

$$N(P'(g-g'),m)-n(P'(g-g'),m)\geqslant N(P',m)-n(P',m)=s.$$ Contradiction.

Les résultats précédents nous permettent de déterminer la structure des algèbres $L_K I$ lorsque I est un intervalle *fermé* de $\overline{\mathbf{R}}$. Nous simplifierons nos énoncés en supposant $-\infty\notin I$.

Proposition 4. — *Soient* $m_1, m_2\in\overline{\mathbf{R}}$, *avec* $-\infty<m_1\leqslant m_2$, *et* f *un élément non nul de* $L_K[m_1,m_2]$. *Alors*

1) f *est inversible dans* $L_K[m_1,m_2]$ *si et seulement si* $N(f,m_1)=n(f,m_2)$.

2) *Il existe un polynôme* P *de degré* $N(f,m_1)-n(f,m_2)$ *et un élément inversible* f^* *de* $L_K[m_1,m_2]$ *tels que* $f=Pf^*$; *ces conditions déterminent* P *et* f^* *à un facteur constant près.*

Preuve. — 1) La condition est nécessaire, comme le montre un calcul de $N(\ ,m_1)-n(\ ,m_2)$. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons $N(f,m_1)=n(f,m_2)=r$. Posons $f=aT^r(1-g)$, avec $a\in K$ et $g=\Sigma_{i\neq 0}b_iT^i$. Nous avons alors

$$\operatorname{Inf}[v(g,m_1),v(g,m_2)]>0.$$

Il en résulte (cf. (2.5)) que la série $\Sigma_{n\geqslant 0}g^n$ converge dans $L_K[m_1,m_2]$ vers $(1-g)^{-1}$; aT^r est inversible car $a\neq 0$ et, dans le cas où $m_2=+\infty$, $r=0$.

2) Raisonnons par récurrence sur $s = N(f, m_1) - n(f, m_2)$. Supposons $s > 0$; soit m le plus petit élément de $[m_1, m_2]$ tel que $N(f, m) - n(f, m) = t > 0$. Si $m = m_2 = +\infty$, nous avons $t = s$ et nous prenons $P = T^s$ et $f^* = T^{-s} f$. Sinon la proposition 2 nous montre l'existence d'une décomposition $f = P_0 g$, où P_0 est un polynôme m-extrémal de degré t; nous en déduisons $N(g, m_1) - n(g, m_2) = s - t$, et nous appliquons notre hypothèse de récurrence à la fonction g, ce qui conduit à la décomposition cherchée : $f = Pf^*$. L'unicité de P à un facteur près, résulte de l'unicité des polynômes m-extrémaux dont P est le produit (prop. 2), auxquels il faut éventuellement adjoindre (si $m_2 = +\infty$) le facteur $T^{\operatorname{ord} f}$.

Corollaire. — *$L_K[m_1, m_2]$ est un anneau principal.*

Preuve. — Tout idéal A de $L_K[m_1, m_2]$ est engendré, d'après la proposition 4, par son intersection avec l'anneau de polynômes K[T]. Or ce dernier est un anneau principal.

Proposition 4 bis. — *Soit f un élément inversible de $L_K]m, M[$, avec $-\infty < m < M < +\infty$. Alors il existe $r \in \mathbf{Z}$, g et h qui vérifient*

(1) $$f = T^r gh;$$

(2) *g est un élément inversible de $L_K]m, +\infty]$;*

(3) *h est un élément inversible de $L_K[-\infty, M[$.*

L'entier r est déterminé par ces conditions ; g et h sont déterminés à un facteur constant près, et on a de plus

(4) $$\operatorname{Conv}(g) \supset \operatorname{Conv}(f) \quad \textit{et} \quad \operatorname{Conv}(h) \supset \operatorname{Conv}(f).$$

Nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser cette proposition qui est en quelque sorte la duale de la proposition 2 (les propositions 2 et 4 *bis* indiquent les décompositions de f qui correspondent respectivement à un côté et à un sommet du polygone de Newton de f). La proposition 4 *bis* justifie les simplifications que nous allons nous permettre : le problème des zéros dans une couronne se ramène au problème des zéros dans un disque. Nous nous contenterons d'indiquer les grandes lignes de sa démonstration, qui n'est qu'une adaptation du lemme de Hensel (dont il est permis de souhaiter une forme « universelle »).

L'entier r est défini par $r = n(f, \mu) = N(f, \mu)$ pour $m < \mu < M$ (cf. prop. 4). Nous définissons, pour $i \geq 0$, deux suites (g_i) et (h_i) qui vont converger respectivement vers g et h. Divisons d'abord f par aT^r $(a \in K)$ pour nous ramener au cas où $r = 0$ et $f(0) = 1$. Prenons $g_0 = h_0 = 1$. Quand g_i et h_i ont été construits, nous posons

$$f - g_i h_i = \Sigma_{n \in \mathbf{Z}} a_{n,i} T^n;$$
$$g_{i+1} = g_i + \Sigma_{n \geq 0} a_{n,i} T^n;$$
$$h_{i+1} = h_i + (g_i(0) + a_{0,i})^{-1} (a_{0,i}(1 - h_i) + \Sigma_{n<0} a_{n,i} T^n).$$

On vérifie les relations

$$\operatorname{Inf}(v(f - g_i h_i, \mu), v(g_{i+1} - g_i, \mu), v(h_{i+1} - h_i, \mu)) \geq v(f, \mu) + i(M - m),$$

pour tout $\mu \in \operatorname{Conv}(f)$ et tout entier $i \geq 0$. L'unicité se montre en prenant $\mu \in]m, M[$.

4. Problème des zéros dans un disque « ouvert ». Généralités; cas d'une valuation discrète.

Le lecteur nous tiendra peut-être rigueur d'avoir écrit le paragraphe précédent (existence et continuité des zéros) sans mentionner une seule fois les zéros en question. Il aurait fallu définir leurs ordres de multiplicité, et expliquer comment ils se groupent par « familles complètes d'éléments conjugués sur K ». Tout cela est implicitement contenu dans les prop. 2 et 4. Nous préférons parler de diviseurs, et nous adopterons une notation multiplicative qui convient à notre propos.

Nous choisissons un nombre réel M, et nous allons étudier l'anneau $L_K]M, +\infty]$.

(4.1) *Nous écrirons désormais* A_M *au lieu de* $L_K]M, +\infty]$. *Un élément de* A_M *est donc une série entière* $f = \Sigma_{n\geqslant 0} a_n T^n$ *dont les coefficients* $a_n \in K$ *vérifient la relation*

$$\varliminf_{n\to+\infty} n^{-1} v(a_n) \geqslant -M.$$

(4.2) *Pour tout* $m \in]M, +\infty]$ *nous définissons un groupe* G_m :

1) $G_{+\infty}$ *est le groupe multiplicatif des puissances entières de* T.

2) *Si* $m < +\infty$, G_m *est le groupe multiplicatif des fractions rationnelles (éléments du corps* $K(T)$*) dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes m-extrémaux, et qui prennent la valeur* 1 *quand on spécialise* T *en* 0.

(4.3) *Le groupe des diviseurs, que nous notons* Δ_M, *est un sous-groupe du produit direct* $\prod_{m>M} G_m$; *ce sous-groupe est défini par la condition suivante : quel que soit* $m_0 > M$, *les composantes de* $D \in \Delta_M$ *dans les* G_m *tels que* $m \geqslant m_0$ *doivent être égales à l'élément neutre, sauf pour un nombre fini d'entre elles.*

(4.3') *Le groupe* Δ_M *peut être défini plus brièvement comme une limite projective de « sommes directes » (notées multiplicativement), à savoir* $\varprojlim_{m_0>M} \left(\coprod_{m\geqslant m_0} G_m\right)$, *au moyen des homomorphismes canoniques.*

(4.4) *Un diviseur* $D \in \Delta_M$ *est dit entier si ses composantes dans tous les* G_m $(m > M)$ *sont des polynômes en* T.

(4.5) *Nous définissons un ordre partiel sur le groupe* Δ_M *en posant* $D_1 \geqslant D_2$ *si et seulement si* $D_1 D_2^{-1}$ *est un diviseur entier.*

(4.6) *A tout élément non nul f de* A_M (4.1), *nous associons son diviseur que nous noterons* (f) :

1) *La composante de* (f) *dans* $G_{+\infty}$ *est* $T^{\operatorname{ord} f}$;

2) *Pour* $M < m < +\infty$, *la composante de* (f) *dans* G_m *est l'élément neutre si* $n(f, m) = N(f, m)$; *sinon c'est le polynôme* P *dont la proposition* 2 *établit l'existence et la proposition* 3 *l'unicité.*

Le diviseur d'un élément de A_M est évidemment entier.

Si f et g sont deux éléments non nuls de A_M, nous avons $(fg) = (f)(g)$.

(4.7) *Soient f et g deux éléments non nuls de* A_M. *Pour que f divise g dans* A_M, *il faut et il suffit que* $(f) \leqslant (g)$.

Preuve. — La condition est nécessaire : si $g=fh$, nous avons $(g)=(f)\,(h)$ et (h) est un diviseur entier. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $m_0>\mathrm{M}$; notons P (resp. Q) le produit des composantes de (f) (resp. (g)) dans tous les G_m pour lesquels $m\geqslant m_0$. (4.3) et (4.6) montrent que cette définition est correcte. D'après la proposition (4) nous avons $f=\mathrm{P}f^*$ et $g=\mathrm{Q}g^*$, où f^* et g^* sont deux éléments inversibles de $\mathrm{L_K}[m_0, +\infty]$. Par hypothèse P divise Q dans K[T]. Nous avons donc $g=fh$, avec $h\in\mathrm{L_K}[m_0, +\infty]$. Comme les anneaux $\mathrm{L_K}[m, +\infty]$ sont intègres et emboîtés, l'élément h ne dépend pas de m_0; il appartient à tous les $\mathrm{L_K}[m, +\infty]$ pour $m>\mathrm{M}$, c'est-à-dire à $\mathrm{A_M}$.

(4.8) *Soit* $f\in\mathrm{A_M}$, $f=\Sigma_{n\geqslant 0}a_n\mathrm{T}^n$, *avec* $a_0=1$. *Pour que* f *soit inversible dans* $\mathrm{A_M}$, *il faut et il suffit que* $v(a_n)+n\mathrm{M}\geqslant 0$ *pour tout* $n\geqslant 0$.

Preuve. — Les propriétés suivantes sont équivalentes. 1) f est inversible dans $\mathrm{A_M}$. 2) $\mathrm{N}(f, m)=0$ pour tout $m>\mathrm{M}$ (cf. (4.6) et (4.7)). 3) $v(a_n)+nm\geqslant 0$ pour tout entier $n>0$ et tout $m>\mathrm{M}$. 4) $v(a_n)+n\mathrm{M}\geqslant 0$ pour tout entier $n\geqslant 0$.

Le « problème des zéros » se présente naturellement : quels éléments entiers de Δ_M sont les diviseurs d'éléments de $\mathrm{A_M}$? D'après (4.7) la solution de ce problème équivaut à l'étude de la divisibilité dans $\mathrm{A_M}$.

(4.9) *Un élément entier* $\mathrm{D}\in\Delta_\mathrm{M}$ *sera noté* $\mathrm{D}=(\mathrm{T}^r)\Pi_{n\geqslant 1}(\mathrm{P}_n)$, *avec les conventions suivantes :* T^r *est la composante de* D *dans* $\mathrm{G}_{+\infty}$; *les* P_n *sont toutes les composantes* $\neq 1$ *de* D *dans les* G_m $(m>\mathrm{M})$, *ordonnées de telle sorte que* P_n *soit* m_n*-extrémal, avec* $m_1>m_2>\ldots>m_n>\ldots>\mathrm{M}$. *L'indice n prend soit toutes les valeurs entières* $(\geqslant 1)$, *et le diviseur* D *est dit infini, soit les valeurs entières de* 1 *à* s, *et* D *est dit fini.*

Cette notation n'est pas un « abus de langage ». D'après (4.4), Δ_M possède une topologie naturelle comme limite projective de groupes discrets, et nous avons le droit d'écrire des produits infinis dans Δ_M. Elle est commode, car elle nous conduit à étudier le produit $\mathrm{T}^r\Pi_{n\geqslant 1}\mathrm{P}_n$ dans l'anneau topologique $\mathrm{A_M}$; c'est la méthode naturelle pour aborder le « problème des zéros ». Nous verrons que cette méthode ne suffit pas à le résoudre.

Le cas d'un diviseur fini est trivial. Nous pourrons aussi, sans restreindre la généralité, négliger le facteur (T^r) dans (4.9). Quant aux produits infinis, nous leur imposons les mêmes conditions qu'en analyse classique.

(4.10) *Nous disons que le produit infini* $\Pi_{1\leqslant n<+\infty}f_n$ *d'éléments non nuls de* $\mathrm{A_M}$ *converge vers* f, *et nous écrivons* $f=\Pi_{n\geqslant 1}f_n$ *si* $f\in\mathrm{A_M}$, $f\neq 0$, *et si* $\lim\limits_{s\to+\infty}\Pi_{1\leqslant n\leqslant s}f_n=f$ *dans* $\mathrm{A_M}$.

Nous trouvons un critère de convergence en appliquant la définition (2.6) : la convergence dans $\mathrm{A_M}$ équivaut à la convergence dans $\mathrm{L_K}[m, +\infty]$ pour tout $m>\mathrm{M}$.

(4.11) *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite d'éléments non nuls de* $\mathrm{A_M}$. *Pour que le produit infini* $\Pi_{n\geqslant 1}f_n$ *converge dans* $\mathrm{A_M}$, *il faut et il suffit que, pour tout* $m>\mathrm{M}$, $v(f_n-1, m)$ *tende vers l'infini avec n. Dans ce cas nous avons pour les diviseurs*

$$\Pi_{n\geqslant 1}(f_n)=(\Pi_{n\geqslant 1}f_n). \tag{1}$$

Preuve. — Le critère s'établit comme en analyse classique (il est même beaucoup plus simple). Choisissons un $m>\mathrm{M}$; nous aurons $v(f_n-1, m)>0$ pour $n\geqslant n_0$. Le produit infini $\Pi_{n\geqslant n_0} f_n$ (supposé convergent) vérifie $v(1-\Pi_{n\geqslant n_0} f_n, m)>0$; il est donc inversible dans $L_K[m, +\infty]$, d'après la proposition 4, ce qui implique la relation (1).

Si nous partons d'un diviseur entier $D=\Pi_{n\geqslant 1}(P_n)$, le produit $\Pi_{n\geqslant 1} P_n$ ne convergera pas toujours. Pour le rendre convergent nous devrons, comme en analyse classique, multiplier les P_n par des « facteurs correctifs ».

Lemme 3. — *Soient* P *un polynôme m-extrémal et s un entier* $\geqslant 1$. *Posons* $P^{-1}=\Sigma_{i\geqslant 0} a_i T^i$, $\overline{P}=\Sigma_{0\leqslant i<s} a_i T^i$, *et* $P^*=P\overline{P}$. *Alors* $\overline{P}$ *est inversible dans* $L_K]m, +\infty]$, *et* $v(P^*-1, m')\geqslant s(m'-m)$ *pour tout* $m'\geqslant m$.

Preuve. — Nous avons $P^*-1=P\overline{P}-1=P(\overline{P}-P^{-1})$, d'où

$$\mathrm{ord}(P^*-1)=\mathrm{ord}(\overline{P}-P^{-1})\geqslant s.$$

Le polynôme P et la série P^{-1} sont des éléments inversibles de $L_K]m, +\infty]$, et (4.8) nous donne $v(a_i)+im\geqslant v(a_0)$ pour tout $i\geqslant 0$. Par conséquent $\overline{P}$ et P^* sont inversibles dans $L_K]m, +\infty]$. Si $P^*=1+\Sigma_{i\geqslant s} b_i T^i$, nous avons $v(b_i)+im\geqslant 0$ pour tout $i\geqslant s$, d'où $v(P^*-1, m')\geqslant s(m'-m)$ pour tout $m'\geqslant m$.

Proposition 5. — *Soit* $D\in\Delta_M$, D *entier. Il existe* $f\in A_M, f\neq 0$, *tel que* $(f)\geqslant D$.

Preuve. — Il suffit de traiter le cas où D est infini : $D=\Pi_{n\geqslant 1}(P_n)$. Nous choisissons pour chaque n un entier $s(n)$, et nous associons ainsi à P_n un « facteur primaire » $P_n^*=\overline{P}_n P_n$. D'après (4.11) et le lemme 3, le produit infini $\Pi_{n\geqslant 1} P_n^*$ converge si $s(n)$ tend vers l'infini avec n, ce que nous pouvons supposer. Nous avons alors $(P_n^*)=(\overline{P}_n)(P_n)\geqslant(P_n)$, et (4.11) (1) établit notre assertion.

Si K est valué discret nous obtenons un résultat bien meilleur.

Théorème 1. — *Supposons que le groupe de valuation de* K *soit* $\mathbf{Z}$: $v(x)\in\mathbf{Z}$ *pour tout* $x\in K, x\neq 0$. *Soit* $D=(T^r)\Pi_{n\geqslant 1}(P_n)$ *un diviseur entier. Il existe un produit convergent* $f=T^r\Pi_{n\geqslant 1} P_n^*$, *tel que* $(P_n^*)=(P_n)$ *pour tout n, ce qui implique* $(f)=D$.

Preuve. — Nous supposons D infini. P_n est m_n-extrémal, m_n tend vers M en décroissant strictement. Posons, comme dans la preuve du lemme 3, $P_n^{-1}=\Sigma_{i\geqslant 0} a_{n,i} T^i$. Nous avons $a_{n,0}=1$, car $P_n(0)=1$. Définissons $s(n)$ comme le plus grand entier tel que

$$(1) \qquad i<s(n) \quad \text{implique} \quad v(a_{n,i})+Mi\geqslant 0.$$

Il nous suffit de démontrer que $s(n)$ tend vers l'infini avec n. En effet, nous procédons comme pour la proposition 5, mais (1) montre, d'après (4.8), que $\overline{P}_n$ est inversible dans A_M, c'est-à-dire que $(P_n)=(P_n^*)$.

Soit $t(i)$ le plus grand entier strictement inférieur à $-Mi$. Quel que soit l'entier s_0, nous aurons

$$-m_n i>t(i) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant i<s_0$$

dès que n sera assez grand. Puisque $v(a_{n,i})$ est entier, les relations $v(a_{n,i})+m_n i\geqslant 0$, entraîneront $v(a_{n,i})+Mi\geqslant 0$ pour $0\leqslant i<s_0$ dès que n sera assez grand. Autrement dit, quel que soit l'entier s_0, nous avons $s(n)\geqslant s_0$ pour n assez grand.

(4.12) *Remarque.* — Le théorème 1 nous conduit à une décomposition canonique dans A_M analogue à celle de la proposition 4. Si nous partons d'un élément non nul f, nous construisons le produit g associé au diviseur (f) comme dans l'énoncé du théorème 1, et nous posons $f=gf^*$, où f^* est inversible dans A_M. Mais cette décomposition paraît peu intéressante et, comme en analyse classique, il vaut mieux ne pas introduire de « facteurs correctifs » quand ce n'est pas nécessaire. L'exemple suivant, que m'a communiqué J.-P. Serre, éclaire cette assertion.

Soit K le corps p-adique rationnel (p nombre premier quelconque, $v(p)=1$). Prenons pour f la fonction $\mathrm{Log}(1+T)$, c'est-à-dire $\Sigma_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}n^{-1}T^n$. Posons

$$P_n=p^{-1}[(1+T)^{p^n}-1]\,[(1+T)^{p^{n-1}}-1]^{-1}.$$

Les racines de P_n sont les $x-1$, où x parcourt l'ensemble des racines primitives p^n ièmes de l'unité. Dans notre terminologie, P_n est $(p^n-p^{n-1})^{-1}$-extrémal, $M=0$, et l'on a la formule

$$f=\mathrm{Log}(1+T)=T\Pi_{n\geqslant 1}P_n \qquad \text{dans } A_0,$$

qu'il serait dommage de « corriger ». En effet, nous avons

$$T\Pi_{1\leqslant n\leqslant s}P_n=p^{-s}[(1+T)^{p^s}-1],$$

et les résultats que nous affirmons proviennent des propriétés arithmétiques élémentaires des coefficients binômiaux. Plus précisément, ils résultent des congruences

$$(-1)^{i+1}ip^{-s}\tbinom{p^s}{i}\equiv 1 \quad (\text{modulo } p^t),$$

où $0\leqslant t\leqslant s$, $1\leqslant i\leqslant p^{s-t}+1$.

Nos résultats conduisent aisément au théorème de Schnirelmann [4].

(4.13) *Soit* $f\in L_K]-\infty, +\infty]$. *Si* f *n'est pas un polynôme, nous avons une décomposition canonique de* f *en produit infini :*

$$f=aT^r\Pi_{n\geqslant 1}P_n;$$

$a\in K$; $r=\mathrm{ord} f$; *les* P_n *sont des polynômes* m_n*-extrémaux ;* $P_n(0)=1$; m_n *tend vers* $-\infty$ *en décroissant strictement.*

Si nous appliquons la proposition 4 *bis*, (4.13) donne la décomposition en produit (non canonique) des éléments de $L_K]-\infty, +\infty[$ utilisée dans la théorie des fonctions elliptiques de J. Tate.

5. Cas d'une valuation dense; principe des disques emboîtés.

(5.1) *Définition. — Soient* $x\in K$, $\lambda\in\mathbf{R}$ *et* L *une extension valuée de* K. *Nous notons* $D_L(x, \lambda)$ *l'ensemble des* $y\in L$ *tels que* $v(y-x)\geqslant\lambda$. *Pour* $L=K$ *nous écrivons simplement* $D(x, \lambda)$.

Rappelons que le « centre » x du « disque » $D(x, \lambda)$ est n'importe lequel de ses éléments.

(5.2) *Définition. — Le corps valué complet* K *est dit maximalement complet s'il vérifie le principe suivant, dit « des disques emboîtés » : pour toute suite de disques* $(D(x_n, \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *qui vérifie*

$$D(x_n, \lambda_n)\supset D(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) \qquad \textit{pour tout } n\geqslant 1,$$

on a $\bigcap_{n\geqslant 1} D(x_n, \lambda_n)\neq\varnothing$.

Nous conservons les notations du paragraphe précédent, de (4.1) à (4.11).

Proposition 6. — *Si le corps valué* K *n'est pas maximalement complet, il existe* $M \in \mathbf{R}$ *et une suite* $(y_n)_{n\geqslant 1}$ *d'éléments de* K *qui ont les propriétés suivantes :*

1) $v(y_n)$ *tend vers* M *en décroissant strictement quand n tend vers l'infini.*

2) *Aucun élément non nul de* A_M *n'a pour diviseur* $\Pi_{n\geqslant 1}((1-y_n^{-1}T))$.

Preuve. — Partons d'une suite de disques emboîtés $D(x_n, \lambda_n)$ dont l'intersection est vide. Nous pouvons supposer que ces disques sont tous distincts, et qu'on a choisi chaque x_n à l'extérieur du disque $D(x_{n+1}, \lambda_{n+1})$. Ces hypothèses s'expriment par les relations

$$\lambda_{n+1} > v(x_{n+1}-x_n) \geqslant \lambda_n, \qquad \text{pour tout } n\geqslant 1. \tag{3}$$

Les nombres λ_n ne peuvent pas tendre vers $+\infty$, car K est supposé complet, et l'intersection des disques ne pourrait pas être vide.

Nous pouvons donc poser

$$M = -\lim_{n\to+\infty} \lambda_n ; \tag{4}$$

$$y_n = (x_{n+1}-x_n)^{-1}; \qquad m_n = v(y_n). \tag{4'}$$

Nous avons ainsi

$$-\lambda_{n+1} < m_n \leqslant -\lambda_n, \tag{4''}$$

et la condition (1) est vérifiée.

Soit $f \in A_M, f = \Sigma_{n\geqslant 0} a_n T^n$. Supposons que $(f) = \Pi_{n\geqslant 0}((1-y_n^{-1}T))$. Nous avons alors $a_0 \neq 0$ et, pour simplifier, nous prendrons $a_0 = 1$. Nous allons prouver la relation

$$x_1 - a_1 \in D(x_n, \lambda_n) \qquad \text{pour tout } n\geqslant 1. \tag{5}$$

Cette contradiction démontrera (2). Transformons d'abord la relation (5); comme $x_n-(x_1-a_1) = a_1 + \Sigma_{1\leqslant i<n} y_i^{-1}$, nous obtenons une relation équivalente à (5) :

$$v(a_1 + \Sigma_{1\leqslant i<n} y_i^{-1}) \geqslant \lambda_n, \qquad \text{pour tout } n\geqslant 1. \tag{5'}$$

Les zéros de f sont les y_n; comme tous les $v(y_n) = m_n$ sont distincts, nous avons (cf. § VI) :

$$v(a_n) = -\Sigma_{1\leqslant i\leqslant n} m_i, \qquad \text{pour tout } n\geqslant 1. \tag{6}$$

Posons, pour tout entier $r \geqslant 1, f_r = \Sigma_{0\leqslant i\leqslant r} a_i T^i$. Alors f_r est un polynôme de degré r; les relations (6) montrent qu'il a toutes ses racines dans K et qu'elles ont les valuations respectives m_i $(1\leqslant i\leqslant r)$. Nous pouvons donc écrire

$$f_r = \Pi_{1\leqslant i\leqslant r}(1-y_{i,r}^{-1}T); \qquad y_{i,r} \in K; \qquad v(y_{i,r}) = m_i. \tag{7}$$

L'identification des termes en T dans (7) nous donne

$$a_1 = -\Sigma_{1\leqslant i\leqslant r} y_{i,r}^{-1}. \tag{7'}$$

Choisissons un entier n; supposons $r\geqslant n$. Nous utilisons (4''), (7) et (7') pour mettre (5') sous une forme équivalente

$$v(\Sigma_{1\leqslant i<n}(y_i^{-1}-y_{i,r}^{-1})) \geqslant \lambda_n. \tag{5''}$$

Cette dernière relation va résulter, pour r assez grand, de la proposition 3 que nous appliquons à f, f_r, $(1-y_i^{-1}\mathrm{T})$ et $(1-y_{i,r}^{-1}\mathrm{T})$. Nous obtenons

(8) $$v((y_i^{-1}-y_{i,r}^{-1})\mathrm{T}, m_i) \geqslant v(f-f_r, m_i) - v(f, m_i),$$

c'est-à-dire

(8') $$v(y_i^{-1}-y_{i,r}^{-1}) \geqslant v(f-f_r, m_i) - v(f, m_i) - m_i.$$

Or (4.1) montre que $v(f-f_r, m_i)$ tend vers $+\infty$ avec r. La relation (5'') est donc vérifiée pour r assez grand (et, *a posteriori*, pour tout r).

Voici un autre résultat « négatif » qui s'applique à tous les corps dont le groupe de valuation est dense.

Proposition 7. — *Soient f un élément non nul de $\mathrm{A_M}$ et s un entier $\geqslant 1$. Notons, comme en* (4.9), $(f) = \Pi_{n\geqslant 1}(\mathrm{P}_n)$ *le diviseur de f. Si (f) est un diviseur infini et si* $\deg \mathrm{P}_n \leqslant s$ *pour tout* $n \geqslant 1$, *alors il n'existe aucune décomposition en produit dans* $\mathrm{A_M}$:

$$f = \Pi_{n\geqslant 1} f_n,$$

telle que (f_n) soit un diviseur fini pour tout $n \geqslant 1$.

Preuve. — Supposons qu'une telle décomposition existe. Donnons-nous un $m > \mathrm{M}$ et un entier n_0. Nous allons montrer l'existence d'un entier $n \geqslant n_0$ tel que $v(f_n - 1, m) < (m-\mathrm{M})s$, ce qui est contradictoire (4.11). D'après nos hypothèses et (4.11), nous pouvons choisir un $n \geqslant n_0$ tel que $(f_n) \neq 1$ et $v(f_n - 1, m) > 0$. Posons $f_n = \Sigma_{i\geqslant 0} a_{n,i}\mathrm{T}^i$. Nous avons $v(a_{n,0}) = 0$. Soit Q le premier polynôme qui apparaît dans la décomposition du diviseur (f_n) sous la forme (4.9). Q est μ-extrémal de degré $r \geqslant 1$, $\mu > \mathrm{M}$ et $v(a_{n,r}) + r\mu = 0$. Puisque $(f_n) < (f)$, il existe un entier n' tel que Q divise $\mathrm{P}_{n'}$, d'où $r \leqslant \deg \mathrm{P}_{n'} \leqslant s$. Nous en déduisons

$$v(f_n - 1, m) \leqslant v(a_{n,r}) + rm = r(m-\mu) < s(m-\mathrm{M}).$$

6. Problème des zéros. Notations ; le lemme principal.

Dans tout ce paragraphe et le suivant nous étudions une algèbre $\mathrm{A_M} = \mathrm{L_K}]\mathrm{M}, +\infty]$, et un diviseur infini $\mathrm{D} \in \Delta_\mathrm{M}$.

(6.1) *Nous écrivons, comme en* (4.9), $\mathrm{D} = \Pi_{n\geqslant 1}(\mathrm{P}_n)$ *et nous posons* $d_n = \deg \mathrm{P}_n$.

Rappelons que $\mathrm{P}_n(0) = 1$, P_n est m_n-extrémal, m_n tend vers M en décroissant strictement. Rappelons aussi les formules

(6.2) $$v(\mathrm{P}_n, \mu) = \mathrm{Inf}(0, d_n(\mu - m_n)).$$

(6.2') $$\begin{cases} \mathrm{N}w(\mathrm{P}_n, \xi) = -m_n\xi & \text{pour } 0 \leqslant \xi \leqslant d_n ; \\ \mathrm{N}w(\mathrm{P}_n, \xi) = +\infty & \text{pour } \xi < 0 \text{ ou } \xi > d_n. \end{cases}$$

Notre problème est de trouver, si possible, un $f \in \mathrm{A_M}$ tel que $(f) = \mathrm{D}$. Nous pouvons supposer $f(0) = 1$. Ces conditions déterminent complètement les fonctions $v(f, \mu)$

et $Nw(f, \xi)$ (cf. (1.9) et (4.6)). Plus précisément un tel f vérifie $v(f, \mu) = w(\mu)$ et $Nw(f, \xi) = \varphi(\xi)$ si nous posons

(6.3) $$w(\mu) = \Sigma_{n \geqslant 1} v(P_n, \mu);$$

(6.3') $$\varphi(\xi) = \lim_{n \to \infty} Nw(\Pi_{1 \leqslant i \leqslant n} P_i, \xi).$$

Les fonctions w et φ sont liées par les relations

(6.3'') $$\begin{cases} \varphi(\xi) = \operatorname{Sup}_{\mu \in \mathbf{R}} [w(\mu) - \mu\xi]; \\ w(\mu) = \operatorname{Inf}_{n \in \mathbf{Z}} [\varphi(n) + \mu n]. \end{cases}$$

Ces relations sont un cas particulier de (1.5) et (1.6), car

(6.4) *Il existe* $f \in A_M$ *tel que* $f(0) = 1$, $v(f, \mu) = w(\mu)$, $Nw(f, \xi) = \varphi(\xi)$ *pour tous* $\mu, \xi \in \mathbf{R}$.

Nous prenons, par exemple, $f = \Sigma_{n \geqslant 0} a_n T^n$, où a_n est le coefficient de T^n dans le développement de $\Pi_{1 \leqslant i \leqslant n} P_i$.

(6.5) *Définition. — Pour tout entier* $r \geqslant 0$ *et tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *nous notons* $A(r, \lambda)$ *l'ensemble des* $f \in A_M$ *qui vérifient les conditions équivalentes*

(1) $$Nw(f, n) \geqslant \varphi(n - r) + \lambda \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbf{Z};$$

(1') $$v(f, \mu) \geqslant w(\mu) + \mu r + \lambda \qquad \textit{pour tout } \mu \in \mathbf{R}.$$

(6.6) *Soient* $\xi, \lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$, *avec* $\lambda \leqslant \lambda'$. *Alors* $\varphi(\xi - \lambda) - \lambda M \leqslant \varphi(\xi - \lambda') - \lambda' M$.

Preuve. — Appliquons la première formule (6.3''). Nous devons vérifier la relation

$$\operatorname{Sup}_{\mu \in \mathbf{R}} [w(\mu) - \mu(\xi - \lambda)] - \lambda M \leqslant \operatorname{Sup}_{\mu \in \mathbf{R}} [w(\mu) - \mu(\xi - \lambda')] - \lambda' M.$$

Or $w(\mu) = -\infty$ pour $\mu < M$; nous calculons donc les « Sup » pour $\mu \geqslant M$, et la relation devient évidente.

(6.7) *Définition. — Soit* $(Q_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de polynômes qui vérifient (pour tout* $n \geqslant 1$*) les conditions*

$$\deg Q_n < d_n;$$
$$v(Q_n, m_n) \geqslant w(m_n).$$

Pour tout entier $r \geqslant 0$ *nous notons* $B(r)$ *l'ensemble des* $f \in A_M$ *qui vérifient*

(1) $$f(0) = 1;$$

(2) $$Nw(f, n) \geqslant \varphi(n) \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbf{Z};$$

(2') $$v(f, \mu) \geqslant w(\mu) \qquad \textit{pour tout } \mu \in \mathbf{R};$$

(3) *Si* R_n *est le reste de la division de* f *par* P_n (§ II, *lemme* 2)

$$v(Q_n - R_n, m_n) \geqslant w(m_n) + r(m_n - M) \qquad \textit{pour tout } n \geqslant 1.$$

Les conditions (2) et (2') sont équivalentes. La définition de $B(r)$ fait évidemment intervenir les Q_n, maix ceux-ci resteront fixes dans tout ce paragraphe. Voici le lemme principal.

Lemme 4. — *Soient r et s deux entiers, avec $r \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$; soit $f \in B(r)$. Notons R_n le reste de la division de f par P_n (pour tout $n \geqslant 1$). Supposons que $R_n = Q_n$ pour $1 \leqslant n < s$ (la condition est donc vide pour $s = 1$). Alors il existe $g \in A_M$ qui vérifie*

(1) $$g \in B(r);$$

(2) $$g - Q_n \text{ est divisible par } P_n \text{ dans } A_M \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant s;$$

(3) $$g - f \in A(r+1, -rM - m_s) \cap A(r, -rM).$$

Preuve. — Nous allons donner une construction canonique de g. Dans $L_K[m_s]$, l'élément $T^{r+1}\Pi_{1 \leqslant i < s} P_i$ est inversible. Appliquons le lemme 2 (§ II) et divisons

$$(Q_s - R_s) T^{-(r+1)} \Pi_{1 \leqslant i < s} P_i^{-1}$$

par P_s dans $L_K[m_s]$. Soit U le reste de cette division; U est un polynôme et nous avons

(4) $$\deg U < d_s;$$

(4′) $$v(U, m_s) \geqslant v((Q_s - R_s) T^{-(r+1)} \Pi_{1 \leqslant i < s} P_i^{-1}, m_s).$$

Nous posons

(5) $$g = f + UT^{r+1} \Pi_{1 \leqslant i < s} P_i.$$

Nous avons évidemment $g \in A_M$, et nous vérifions immédiatement que la condition (2) de l'énoncé est satisfaite. Il nous reste les conditions (1) et (3). Elles seront impliquées par les relations suivantes :

(6) $$v(g - f, \mu) \geqslant w(\mu) + r(\mu - M) \quad \text{pour tout } \mu \in \mathbf{R};$$

(6′) $$v(g - f, \mu) \geqslant w(\mu) + (r+1)\mu - rM - m_s \quad \text{pour tout } \mu \in \mathbf{R}.$$

En effet (6) et (6′) sont la traduction de (3). Quant à (1), nous devons vérifier les trois conditions de la définition (6.7); la première est satisfaite car $r \geqslant 0$; la seconde résulte de (6) et de l'hypothèse sur f (cf. (6.6)); la troisième résulte de (6), du lemme 2 et de l'hypothèse sur f.

La relation (4′) et l'hypothèse $f \in B(r)$ nous donnent

(7) $$v(g - f, m_s) \geqslant v(Q_s - R_s, m_s) \geqslant w(m_s) + r(m_s - M).$$

Les relations (6) et (6′) sont donc vérifiées pour $\mu = m_s$.

Nous noterons $w'(\mu)$ la dérivée de la fonction $w(\mu)$, et, de même, $v'(\ ,\mu)$ les dérivées des fonctions $v(\ ,\mu)$. Il s'agit des dérivées à gauche ou à droite (le choix est laissé au lecteur, mais doit être fait une fois pour toutes).

Distinguons deux cas.

Premier cas : $\mu > m_s$. Nous avons alors (cf. (6.2) et (6.3))

$$v'(\Pi_{1 \leqslant i < s} P_i, \mu) = w'(\mu),$$
$$v'(UT^{r+1}, \mu) \geqslant v'(T^{r+1}, \mu) = r + 1.$$

D'après (5) nous avons donc

$$v'(g - f, \mu) \geqslant w'(\mu) + (r+1).$$

Nous en déduisons, par le théorème des accroissements finis

(8) $$v(g-f, \mu)-v(g-f, m_s) \geqslant w(\mu)-w(m_s)+(r+1)(\mu-m_s).$$

Les relations (7) et (8) impliquent (6'), qui implique (6).

Deuxième cas : $\mu < m_s$. Nous pouvons supposer $\mu > M$. Nous avons alors

$$w'(\mu) \geqslant v'(\Pi_{1 \leqslant i < s} P_i, \mu)+d_s.$$

D'autre part (4) nous donne

$$v'(UT^{r+1}, \mu) \leqslant r+d_s.$$

Nous obtenons donc

$$v'(g-f, \mu) \leqslant w'(\mu)+r.$$

Nous en déduisons, d'après le théorème des accroissements finis

(9) $$v(g-f, m_s)-v(g-f, \mu) \leqslant w(m_s)-w(\mu)+r(m_s-\mu).$$

Les relations (7) et (9) impliquent (6) qui implique (6').

7. Problème des zéros dans un disque. Cas général.

Nous conservons les notations du § VI, en particulier les définitions (6.5) et (6.7).

(7.1) *Pour tout entier n et tous entiers $r, s \geqslant 0$, nous posons*

$$\lambda(n, r, s)=\operatorname{Sup}(\varphi(n-r)-rM, \varphi(n-r-1)-rM-m_{s+1})$$

Nous avons donc $\lambda(n, r, s)=+\infty$ pour $n \leqslant r$. D'après (6.6)

(7.2) $$\varphi(n-r)-rM \leqslant \lambda(n, r, s) \leqslant \varphi(n-r-1)-(r+1)M,$$

et, pour n et r fixes, les λ croissent avec s.

Lemme 5. — *Soit r un entier $\geqslant 0$ et $f \in B(r)$. Si le corps K est maximalement complet (ou si certaines suites de disques emboîtés, qu'on précisera, ont des intersections non vides) il existe $g \in A_M$ qui vérifie*

(1) $$g \in B(r+1);$$

(2) $$g-f \in A(r+1, -rM-m_1) \cap A(r, -rM).$$

Preuve. — Posons $f_0=f$ et définissons la suite $(f_s)_{s \geqslant 0}$ par des applications successives du lemme 4. Nous traduisons la conclusion du lemme 4 sous la forme (1) de (6.5). Nous obtenons

$$f_s=\Sigma_{n \geqslant 0} a_{n, s} T^n,$$

avec

(3) $$f_s \in B(r) \quad \text{pour tout} \quad s \geqslant 0;$$

(3') f_s-Q_n est divisible par P_n dans A_M pour $1 \leqslant n \leqslant s$;

(3'') $$v(a_{n, s+1}-a_{n, s}) \geqslant \lambda(n, r, s) \qquad \text{pour tous } n, s \geqslant 0.$$

Pour chaque $n \geqslant 0$ nous avons une suite de disques emboîtés (indexés par $s \geqslant 0$) :

(4) $$D(a_{n,s}, \lambda(n, r, s)).$$

Nous précisons notre énoncé en supposant qu'il existe des $b_n \in K$ dans leurs intersections respectives, c'est-à-dire

(5) $$v(b_n - a_{n,s}) \geqslant \lambda(n, r, s) \qquad \text{pour tous } n, s \geqslant 0.$$

Posons

$$g = \Sigma_{n \geqslant 0} b_n T^n.$$

Nous obtenons (2) en prenant $s = 0$ dans (5). Vérifions (1), c'est-à-dire les trois conditions de (6.7). La première résulte de $b_0 = a_{0,0} = 1$; la seconde de (2) et de (6.6); il nous reste la troisième. Soient $n \geqslant 1$ et R_n le reste de la division de g par P_n. Si $s \geqslant n$, (3') nous montre que $Q_n - R_n$ est le reste de la division de $f_s - g$ par P_n. Or (5) implique

$$f_s - g \in A(r+1, -rM - m_{s+1}),$$

d'où, d'après le lemme 2,

$$v(Q_n - R_n, m_n) \geqslant w(m_n) + (r+1)m_n - rM - m_{s+1}.$$

Faisons tendre s vers l'infini; nous obtenons la dernière relation cherchée :

$$v(Q_n - R_n, m_n) \geqslant w(m_n) + (r+1)(m_n - M).$$

Proposition 8. — *Soit* $D = \Pi_{n \geqslant 1}(P_n)$ *un diviseur infini. Soit* w *la fonction associée à ce diviseur comme en* (6.3). *Soit* $(Q_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de polynômes qui vérifient les conditions :* $\deg Q_n < \deg P_n$ *et* $v(Q_n, m_n) \geqslant w(m_n)$ (P_n *est* m_n*-extrémal*). *Alors, si le corps* K *est maximalement complet, il existe* $f \in A_M$ *qui vérifie*

(1) $$f(0) = 1;$$

(2) $$v(f, \mu) \geqslant w(\mu) \qquad \textit{pour tout } \mu \in \mathbf{R}.$$

(3) $$f - Q_n \textit{ est divisible par } P_n \textit{ dans } A_M \textit{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Preuve. — D'après (6.4) et le lemme 2 nous pouvons choisir $g_0 \in B(0)$. Par applications successives du lemme 5 nous choisissons une suite $(g_r)_{r \geqslant 0}$, avec

(4) $$g_r \in B(r) \qquad \text{pour tout } r \geqslant 0;$$

(5) $$g_{r+1} - g_r \in A(r, -rM) \qquad \text{pour tout } r \geqslant 0.$$

Les relations (5) nous montrent que la suite (g_r) converge dans A_M vers un élément f (remarquons que cette suite converge aussi du point de vue des séries formelles).

Nous avons

(6) $$v(g_r - f, \mu) \geqslant w(\mu) + r(\mu - M) \qquad \text{pour tout } r \geqslant 0 \text{ et tout } \mu \in \mathbf{R},$$

ce qui établit (1) et (2). Notons $R_{r,n}$ et R_n les restes respectifs des divisions de g_r et de f par P_n. Alors (6) et le lemme 2 nous donnent

(7) $$v(R_{r,n} - R_n, m_n) \geqslant w(m_n) + r(m_n - M),$$

tandis que (4) nous donne

(7′) $$v(\mathrm{R}_{r,n}-\mathrm{Q}_n,\, m_n) \geqslant w(m_n)+r(m_n-\mathrm{M}).$$

Nous avons donc

(7″) $$v(\mathrm{Q}_n-\mathrm{R}_n,\, m_n) \geqslant w(m_n)+r(m_n-\mathrm{M}) \qquad \text{pour tout entier } r\geqslant 0,$$

ce qui prouve (3).

Théorème 2. — *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le corps valué complet* K *est maximalement complet* (déf. (5.2)).

(2) *Pour tout* $\mathrm{M}\in\mathbf{R}$ *et tout diviseur entier* $\mathrm{D}\in\Delta_\mathrm{M}$ *il existe* $f\in\mathrm{L}_\mathrm{K}]\mathrm{M}, +\infty]$ *tel que* $(f)=\mathrm{D}$ (déf. (4.4) et (4.6)).

Preuve. — La proposition 6 (§ V) montre que (2) implique (1). Montrons que (1) implique (2). Il nous suffit d'examiner le cas d'un diviseur infini étranger à l'origine (c'est-à-dire dont la composante dans $G_{+\infty}$ est 1), comme en (6.1). Appliquons la proposition 8 en prenant tous les Q_n nuls. Soit f l'élément de A_M ainsi obtenu. La conclusion (3) de la proposition 8 nous donne

$$(f)\geqslant \mathrm{D}.$$

Si nous avions $(f)>\mathrm{D}$, il existerait un nombre $m>\mathrm{M}$ et un polynôme P, m-extrémal de degré d tels que

$$(f)\geqslant \mathrm{D}(\mathrm{P}).$$

Mais nous aurions alors $v(f, \mu)\leqslant w(\mu)-d(m-\mu)$ pour $\mathrm{M}<\mu<m$, contrairement à la conclusion (2) de la proposition 8.

La construction de f que nous avons indiquée est fort peu canonique, mais la proposition 7 semble indiquer qu'un choix « naturel » est impossible.

Le coefficient de T^n dans f a été choisi dans l'intersection d'une suite transfinie de disques emboîtés, de type d'ordre ωn (cf. (7.2)).

Nous pouvons nous demander si notre construction fournit un *critère d'existence*. Autrement dit, si K n'est pas maximalement complet, mais s'il existe un f tel que $(f)=\mathrm{D}$, sommes-nous certains de trouver un tel f par notre construction? La réponse est affirmative.

Proposition 9. — *Conservons les notations précédentes. Les* Q_n *sont tous nuls, mais* K *n'est pas supposé maximalement complet. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe un* $f\in\mathrm{A}_\mathrm{M}$ *tel que* $(f)=\mathrm{D}$.

(2) *Pour tout* $r\geqslant 0$, *la condition du lemme* 5 (*intersections non vides des suites de disques* (4)) *est toujours vérifiée.*

Preuve. — Nous savons que (2) implique (1). Montrons l'autre implication. Reprenons les hypothèses et les notations du lemme 5. Posons $f=\Sigma_{n\geqslant 0}a_n\mathrm{T}^n$. Anticipons sur le § IX, et admettons l'existence d'une extension valuée complète $\overline{\mathrm{K}}$ de K où nos suites de disques ont une intersection non vide. Plus précisément nous supposons l'existence de $g=\Sigma_{n\geqslant 0}b_n\mathrm{T}^n$ qui vérifie la relation (5) de la preuve du lemme 5, mais dont les coefficients b_n appartiennent à $\overline{\mathrm{K}}$; d'après (7.2) et les vertus que nous attribuons à $\bar{K}$, nous pouvons supposer que $(g)=D$. Comme f et g ont mêmes termes de degré n pour $n \leqslant r$, nous avons

$$b_n \in K \text{ pour } 0 \leqslant n \leqslant r, \text{ et } b_0 = 1.$$

Notre hypothèse est qu'il existe $f' = \Sigma_{n \geqslant 0} a'_n T^n$, avec $(f') = D$ et $a'_n \in K$ pour tout n. Nous pouvons supposer que $a'_0 = 1$. Appliquons (4.7) et (4.8) au corps $\bar{K}$. La relation $(g) = (f')$ nous montre l'existence de $h = \Sigma_{n \geqslant 0} c_n T^n$ tel que $g = hf'$ et $v(c_n) \geqslant -Mn$ pour tout n. Les coefficients c_n sont dans $\bar{K}$, mais, comme h s'obtient par division des séries formelles g et f', nous voyons que

$$c_n \in K \text{ pour } 0 \leqslant n \leqslant r.$$

Posons $h^* = \Sigma_{0 \leqslant n \leqslant r} c_n T^n$ et $g' = h^* f' = \Sigma_{n \geqslant 0} b'_n T^n$. Nous avons ainsi $b'_n \in K$ pour tout n, et, pour démontrer notre proposition, il nous suffira d'établir les relations

$$(3) \qquad v(b_n - b'_n) \geqslant \varphi(n-r-1) - (r+1)M \text{ pour tout } n \geqslant 0.$$

En effet, ces relations signifient que chaque b'_n appartient à l'intersection des disques (4) de la preuve du lemme 5.

Or $g - g' = (h - h^*)f'$, et les relations $Nw(f', n) = \varphi(n)$, $Nw(h - h^*, n) \geqslant -Mn$ et $\text{ord}\,(h - h^*) \geqslant (r+1)$ impliquent (3), d'après (6.6).

Si nous ne supposons plus que les Q_n sont nuls, l'analogue de la proposition 9 est inexact. La construction indiquée dans la preuve de la proposition 8 peut conduire à une impossibilité dans le cas d'un problème résoluble, si les choix sont mal faits.

Notre critère qui caractérise les diviseurs des fonctions semble très peu maniable. Nous pouvons donner une interprétation simple des diviseurs dans l'anneau A_M.

Proposition 10. — *Dans l'anneau topologique* A_M (*définition* (4.1)), *il y a correspondance biunivoque entre diviseurs entiers et idéaux fermés non nuls. A un diviseur* D *correspond l'idéal des* f *tels que* $f=0$ *ou* $(f) \geqslant D$; *à un idéal* I *correspond la borne inférieure des diviseurs* (f) *pour* $f \in I, f \neq 0$.

Preuve. — Nous notons D_μ la composante d'un diviseur D dans le groupe G_μ (définition (4.3)).

Partons d'un diviseur entier D. La proposition 5 montre qu'il lui correspond un idéal non nul I. Notons D′ le diviseur associé à I. La relation $D' \geqslant D$ est évidente. Prenons $f \in I, f \neq 0$ et $\mu > M$. Alors $(f)_\mu$ est un polynôme multiple de D_μ; nous pouvons diviser f par $(f)_\mu D_\mu^{-1}$; nous obtenons un élément f' de I qui vérifie $(f')_\mu = D_\mu$, ce qui prouve $D' \leqslant D$.

Partons d'un idéal I; formons son diviseur D et l'idéal I′ associé à ce diviseur. Nous devons montrer que I′ est l'adhérence $\bar{I}$ de I dans A_M. Remarquons que la relation $\bar{I} \subset I'$ est évidente du point de vue fonctionnel : les idéaux de fonctions définis par des conditions d'annulation sont toujours fermés si les topologies sont raisonnables. Dans notre cas, d'après (2.6), la relation $f \in \bar{I}$ équivaut à $f \in A_M$ et, pour tous $m > M$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, il existe $g \in I$ tel que $v(g-f, m) \geqslant \lambda$.

Prenons un $f \in \overline{\mathrm{I}}$; pour montrer que $f \in \mathrm{I}'$, il faut prouver que f est divisible par D_m pour tout $m > \mathrm{M}$. Soit Q le reste de la division de f par D_m; prenons un $\lambda \in \mathbf{R}$ et un $g \in \mathrm{I}$ tel que $v(g-f, m) \geq \lambda$. Comme g est divisible par D_m, le lemme 2 nous donne $v(\mathrm{Q}, m) \geq \lambda$, c'est-à-dire $\mathrm{Q} = 0$.

Montrons enfin que $\mathrm{I}' \subset \overline{\mathrm{I}}$. Prenons $f \in \mathrm{I}'$, $m > \mathrm{M}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. La proposition 4 (§ III) et son corollaire nous montrent que I, I′ et $\Pi_{\mu \geq m} \mathrm{D}_\mu$ engendrent le même idéal dans $\mathrm{L_K}[m, +\infty]$. Nous avons donc une relation de la forme $f = \Sigma_{1 \leq i \leq n} g_i h_i$, avec $g_i \in \mathrm{I}$ et $h_i \in \mathrm{L_K}[m, +\infty]$. Prenons des polynômes h'_i tels que $v(g_i(h_i - h'_i), m) \geq \lambda$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $g = \Sigma_{1 \leq i \leq n} g_i h'_i$ est dans I et $v(g-f, m) \geq \lambda$, ce qui montre que $f \in \overline{\mathrm{I}}$.

La proposition 10 nous permet d'énoncer le théorème 2 sans parler de diviseurs. Nous le ferons sous forme d'une définition.

(7.3) *Un corps valué complet* K *est dit maximalement complet s'il vérifie la condition suivante : pour tout* $\mathrm{M} \in \mathbf{R}$, *tout idéal fermé de l'anneau topologique* $\mathrm{L_K}]\mathrm{M}, +\infty]$ *est principal.*

8. Problème des parties principales. Théorème de Mittag-Leffler et applications.

(8.1) *Soit* I *un intervalle de* $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathrm{I} \neq \overline{\mathbf{R}}$. *Nous notons* $\mathrm{M_K I}$ *le corps des fractions de l'anneau intègre* $\mathrm{L_K I}$. *Pour* $\mathrm{I} = \overline{\mathbf{R}}$ *nous posons* $\mathrm{M_K}\overline{\mathbf{R}} = \mathrm{K(T)}$, *corps des fractions rationnelles sur* K.

Si I et J sont deux intervalles de $\overline{\mathbf{R}}$, avec $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, nous avons $\mathrm{L_K I} \subset \mathrm{L_K J}$. Nous pouvons ainsi identifier $\mathrm{M_K I}$ à un sous-corps de $\mathrm{M_K J}$. La relation $\mathrm{F} \in \mathrm{L_K J}$ a donc un sens pour $\mathrm{F} \in \mathrm{M_K I}$; cependant, si elle est vérifiée, la série de Laurent qui représente F dans $\mathrm{L_K J}$ peut dépendre de J : l'exemple de $\mathrm{F} = (1-\mathrm{T})^{-1}$ est classique.

(8.2) *Soient* $\mathrm{F} \in \mathrm{M_K I}$ *et* $m \in \mathrm{I} \cap \mathbf{R}$. *Il existe une fraction rationnelle* QP^{-1} *et une seule qui possède les propriétés suivantes :*

(1) P *est un polynôme m-extrémal*;

(2) Q *est un polynôme et* $\deg \mathrm{Q} < \deg \mathrm{P}$ (*éventuellement* $\mathrm{Q} = 0$);

(3) $$\mathrm{F} - \mathrm{QP}^{-1} \in \mathrm{L_K}[m].$$

La fraction rationnelle QP^{-1} *est appelée partie principale de* F *aux pôles de valuation m.*

Preuve. — Existence : soient $\mathrm{F} = gf^{-1}$, f et $g \in \mathrm{L_K I}$, $f = \mathrm{P}h$ où P est un polynôme m-extrémal et h un élément inversible de $\mathrm{L_K}[m]$. Nous prenons pour Q le reste de la division de gh^{-1} par P.

Unicité : si $\mathrm{Q_1 P_1^{-1}}$ vérifie nos trois conditions, nous avons $\mathrm{QP}^{-1} - \mathrm{Q_1 P_1^{-1}} = \mathrm{Q_2 P_2^{-1}}$, où $\mathrm{P_2}$ et $\mathrm{Q_2}$ vérifient les conditions (1) et (2); de plus $\mathrm{Q_2 P_2^{-1}} \in \mathrm{L_K}[m]$. Cette dernière relation impliquerait, si $\mathrm{Q_2} \neq 0$,

$$\mathrm{N}(\mathrm{Q_2}, m) - n(\mathrm{Q_2}, m) \geq \mathrm{N}(\mathrm{P_2}, m) - n(\mathrm{P_2}, m),$$

d'où $\mathrm{Q_2} = 0$.

(8.2′) *Si* $+\infty \in \mathrm{I}$, *la partie principale de* F *à l'origine* (*c'est-à-dire au pôle de valuation* $+\infty$) *est la somme des termes de degré strictement négatif dans le développement de* F *comme série de puissances en* T.

(8.3) *Soit* $M \in \mathbf{R}$. *Nous posons* $B_M = M_K]M, +\infty]$ *et, comme précédemment,*

$$A_M = L_K]M, +\infty].$$

(8.4) *Soit* $F \in B_M$, $F = gf^{-1}$, *avec* f *et* $g \in A_M$, f *et* $g \neq 0$. *Le diviseur* $(g)(f)^{-1}$ *ne dépend pas de la représentation de* F. *Nous le notons* (F) *et nous l'appelons diviseur de* F.

En effet, si $gf^{-1} = g_1 f_1^{-1}$, nous avons $gf_1 = g_1 f$, d'où $(g)(f_1) = (g_1)(f)$ et $(g)(f)^{-1} = (g_1)(f_1)^{-1}$.

(8.5) *Soit* F *un élément non nul de* B_M. *Il existe deux diviseurs* $(F)_0$ *et* $(F)_\infty$ *déterminés par les conditions suivantes :*

(1) $$(F) = (F)_0 (F)_\infty^{-1};$$

(2) $(F)_0$ et $(F)_\infty$ *sont entiers et étrangers (c'est-à-dire que leur borne inférieure est le diviseur unité).*

Nous appelons respectivement $(F)_0$ *et* $(F)_\infty$ *diviseur des zéros et diviseur des pôles de* F.

(8.6) *Les parties principales de* F *déterminent son diviseur des pôles.*

Plus précisément la composante de $(F)_\infty$ dans G_m $(m > M)$ s'obtient en écrivant la partie principale de F aux pôles de valuation m sous forme de fraction rationnelle irréductible, et en normant le dénominateur selon les conditions (4.2).

(8.7) *Soient* $F \in B_M$ *et* $f \in A_M$, *avec* $F \neq 0$ *et* $f \neq 0$. *La relation* $fF \in A_M$ *équivaut à* $(f) \geqslant (F)_\infty$.

En effet $(f) \geqslant (F)_\infty$ équivaut à $(fF)_\infty = 1$. Cette dernière relation est évidemment impliquée par $fF \in A_M$ et l'entraîne d'après (4.7).

(8.8) *Deux éléments* F *et* G *de* B_M *vérifient* $F - G \in A_M$ *si et seulement si* F *et* G *ont mêmes parties principales.*

C'est une conséquence de (8.6) et (8.7).

(8.9) *Le corps* B_M *est l'intersection des corps* $L_K[m, +\infty]$ *pour* $m \in]M, +\infty[$.

C'est une conséquence de (8.7) et de la proposition 5.

Théorème 3 *(Mittag-Leffler).* — *Soit* $D \in \Delta_M$ *un diviseur entier. Donnons-nous, pour chaque*

$$m \in]M, +\infty],$$

un polynôme Q_m *tel que* $\deg Q_m < \deg D_m$ (D_m *est la composante de* D *dans* G_m *et* $Q_m = 0$ *si* $D_m = 1$). *Alors il existe* $F \in B_M$ *tel que la partie principale de* F *aux pôles de valuation* m *soit* $Q_m D_m^{-1}$.

Preuve. — Compte tenu de (8.9), la démonstration du théorème de Mittag-Leffler ([2], p. 212-215) s'applique sans modifications.

(8.10) *Soit* $D \in \Delta_M$ *un diviseur entier. Il existe un élément non nul* $F \in B_M$ *tel que* $(F)_\infty = D$.

C'est une conséquence de (8.6) et du théorème 3. Aucune condition supplémentaire n'est imposée au corps valué complet K. Si nous tenons compte du théorème 2, nous voyons que, lorsque K n'est pas maximalement complet, il existe dans B_M des éléments qui ne sont pas « simplifiables » : il est impossible de les écrire sous la forme $F = gf^{-1}$, avec f et $g \in A_M$, $(f) = (F)_\infty$ et $(g) = (F)_0$.

(8.11) *Soit* $D \in \Delta_m$ *un diviseur entier. Donnons-nous, pour chaque* $m \in]M, +\infty]$, *un élément* g_m *de* $L_K[m]$. *Alors il existe* $g \in A_M$ *tel que* $g - g_m$ *soit divisible par* D_m *dans* $L_K[m]$ *pour tout* m.

Preuve. — Soit $f \in A_M$, avec $(f) \geqslant D$ (proposition 5). Nous appliquons le théorème 3 (où nous remplaçons D par le diviseur de f), et nous construisons $F \in B_M$ qui, pour chaque m, a la même partie principale que $g_m f^{-1}$ aux pôles de valuation m. Alors $g = fF$ appartient à A_M d'après (8.7) et vérifie les conditions de l'énoncé.

(8.11) doit être rapproché de la proposition 8. Mais celle-ci constitue un résultat bien plus profond, car (8.11) ne nous donne aucune indication sur la « croissance » de la fonction g.

Proposition 11. — *Tout idéal de type fini de l'anneau topologique* A_M *est fermé.*

Preuve. — Considérons l'idéal engendré dans A_M par des éléments $f_i (0 \leqslant i \leqslant r)$ que nous supposons non nuls. La proposition 10 caractérise l'idéal fermé engendré par les f_i : son diviseur est la borne inférieure D des diviseurs (f_i). Donnons-nous un élément $g \in A_M$ tel que $(g) \geqslant D$. Nous voulons montrer que g est une combinaison linéaire, à coefficients dans A_M, des f_i. Appliquons la proposition 4 et son corollaire. Nous obtenons, pour chaque $m > M$, des éléments $g_{i,m}$ de $L_K[m]$ tels que

$$g = \Sigma_{0 \leqslant i \leqslant r} g_{i,m} f_i.$$

Appliquons maintenant (8.11); nous construisons, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, un élément g de A_M tel que, pour tout m, $g_{i,m} - g_i$ soit divisible dans $L_K[m]$ par $(f_0)_m$ (composante dans G_m du diviseur (f_0) de f_0). Formons $h = g - \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant r} g_i f_i$. Nous avons $(h) \geqslant (f_0)$, d'où $h = g_0 f_0$ avec $g_0 \in A_M$ et finalement

$$g = \Sigma_{0 \leqslant i \leqslant r} g_i f_i.$$

9. Extensions immédiates des corps valués.

Ce paragraphe rassemble, pour la commodité du lecteur, quelques résultats concernant les suites de disques emboîtés et les corps maximalement complets. La plupart semblent remonter à Ostrowski, et sont exposés dans [3]; nous ne nous intéressons qu'aux valuations de rang 1, ce qui simplifie quelque peu les démonstrations.

(9.1) *Définition. Une extension valuée* L/K *du corps valué* K *est dite immédiate si* L *a même groupe de valuation et même corps résiduel que* K. (Le corps résiduel de K s'identifie généralement à un sous-corps de celui de L.)

En particulier le complété $\hat{K}$ de K en est une extension immédiate.

Nous avons le critère suivant.

(9.2) *L'extension* L/K *est immédiate si et seulement si, pour tout* $x \in L$, $x \notin K$, *il existe* $y \in K$ *tel que* $v(x-y) > v(x)$.

Si $x \in L - K$ (différence ensembliste), la même relation vaut pour tout $x - y$ où $y \in K$. *Le critère* (9.2) *signifie donc que la distance à* K *d'un élément de* L — K *n'est pas atteinte.*

Preuve. — Si L/K est une extension immédiate et si $x \in L - K$, il existe $y_0 \in K$ tel que $v(x)=v(y_0)$. Soit $y_1 \in \mathrm{K}$ un représentant de l'élément du corps résiduel que représente xy_0^{-1}. Posons $y=y_0y_1$; nous avons $v(x-y)=v(x)+v(xy_0^{-1}-y_1)>v(x)$.

Si L/K n'est pas une extension immédiate, alors L/K donne une extension stricte du groupe de valuation ou du corps résiduel. Dans le premier cas soit $x \in \mathrm{L}$ tel que $v(x) \notin v(\mathrm{K})$. Nous avons alors $v(x-y)=\mathrm{Inf}(v(x), v(y)) \leqslant v(x)$ pour tout $y \in \mathrm{K}$. Dans le second cas soit $x \in \mathrm{L}$ un représentant d'un élément du corps résiduel de L qui n'appartient pas au corps résiduel de K. Alors $v(x-y) \leqslant 0 = v(x)$ pour tout $y \in \mathrm{K}$.

Nous allons étudier une suite fixe de disques emboîtés. Précisons nos notations.

(9.3) $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *désigne une suite fixe d'éléments de* K. *Nous posons* $\lambda_n = v(x_{n+1}-x_n)$ *et nous supposons vérifiée la relation*

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \textit{ pour tout } n \geqslant 1.$$

(9.4) *Nous abrégeons la notation introduite en* (5.1) *en posant, pour toute extension valuée* L/K

$$\mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n = \mathrm{D}_{\mathrm{L}}(x_n, \lambda_n).$$

Nous obtenons ainsi dans chaque extension L une suite de disques strictement emboîtés $\mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n$.

(9.5) *Nous supposons que* K *est complet et que*

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}}^n = \varnothing.$$

Puisque K est complet, la dernière relation implique

(9.6) $$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n < +\infty.$$

(9.7) *Un polynôme* $\mathrm{P(T)} \in \mathrm{K[T]}$ *est dit stable si la suite* $v(\mathrm{P}(x_n))$ *est stationnaire (c'est-à-dire si* $v(\mathrm{P}(x_n))$ *est constant pour n assez grand)*; P(T) *est dit instable dans le cas contraire.*

Rappelons que la valuation du corps complet K se prolonge, d'une manière et d'une seule, à sa clôture algébrique que nous notons K_a.

(9.8) *Pour qu'un polynôme* P(T) *soit stable, il faut et il suffit qu'aucun zéro de* P *n'appartienne à* $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n$. *Dans ce cas, si* L/K *est une extension valuée et si* $z \in \bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n$, *nous avons*

(1) $$v(\mathrm{P}(z)-\mathrm{P}(x_n)) > v(\mathrm{P}(z)) = v(\mathrm{P}(x_n)) \textit{ pour } n \textit{ assez grand.}$$

Preuve. — Décomposons P(T) en facteurs :

$$\mathrm{P(T)} = a\Pi_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathrm{T}-y_i), \text{ avec } a \in \mathrm{K},\ y_i \in \mathrm{K}_a.$$

Si $y_i \in \bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n$, nous avons $v(y_i - x_n) = \lambda_n$ pour tout n.

Si $y_i \notin \bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n$, il existe un entier s tel que $v(y_i - x_s) < \lambda_s$. Nous avons alors $v(y_i - x_n) = v(y_i - x_s)$ pour tout $n \geqslant s$.

Nous obtenons donc

$$v(\mathrm{P}(x_n)) = v(a) + \Sigma_{1 \leqslant i \leqslant r} v(y_i - x_n);$$

tous les termes de cette somme sont stationnaires ou croissent strictement avec n, et nous avons prouvé la première assertion de l'énoncé.

Supposons maintenant P stable et $z \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n$. Soit s un entier tel que

$$v(y_i - x_n) = v(y_i - x_s) < \lambda_s \quad \text{pour} \quad n \geqslant s \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Nous écrivons

$$(z - y_i) = (z - x_n) + (x_n - y_i). \tag{2}$$

Pour $n \geqslant s$, le second terme $(x_n - y_i)$ est dominant, c'est-à-dire que

$$v(x_n - y_i) < v(z - x_n) = \lambda_n.$$

Nous multiplions les relations (2) pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Nous obtenons $\Pi_{1\leqslant i \leqslant r}(z - y_i)$, et le second membre fait apparaître le terme dominant $\Pi_{1\leqslant i\leqslant r}(x_n - y_i)$. Cela prouve la formule (1) de l'énoncé.

Proposition 12. — *Conservons les notations antérieures. Deux cas sont possibles*

I)
$$\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n \neq \varnothing.$$

Soit d le degré minimum sur K *des éléments de* $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n$. *Si* $\theta \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n$, *et si* $[\mathrm{K}(\theta) : \mathrm{K}] = d$, *l'extension* $\mathrm{K}(\theta)/\mathrm{K}$ *est immédiate.*

II)
$$\bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{K}_a}^n = \varnothing.$$

Alors il existe une extension monogène $\mathrm{K}(z) = \mathrm{L}$ *telle que* $z \in \bigcap_{1\geqslant n} \mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n$. *Cette extension est déterminée à un* K*-isomorphisme près conservant les valuations, et* L/K *est une extension immédiate.*

Preuve. — Cas I. D'après (9.8) et la définition de d, tout polynôme de degré $< d$ est stable. Or tout élément de $\mathrm{K}(\theta)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{P}(\theta)$, où P est un polynôme de degré $< d$. La formule (1) de (9.8) montre que $\mathrm{K}(\theta)/\mathrm{K}$ est une extension immédiate, d'après le critère (9.2).

Cas II. Si $\mathrm{L} = \mathrm{K}(z)$ est une extension monogène telle que $z \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{D}_{\mathrm{L}}^n$, z doit être transcendant sur K, par hypothèse. D'après (9.8) et l'hypothèse, tout polynôme P est stable et $v(\mathrm{P}(z)) = v(\mathrm{P}(x_n))$ pour n assez grand. $\mathrm{K}(z)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{K}[z]$, et la valuation de $\mathrm{K}(z)$ est donc bien déterminée.

Montrons l'existence d'une telle extension. Posons $\mathrm{L} = \mathrm{K}(\mathrm{T})$. Un élément de L s'écrit sous la forme $\mathrm{R} = \mathrm{QP}^{-1}$, où Q et P sont des polynômes. Posons

$$w(\mathrm{R}) = \lim_{n\to\infty} [v(\mathrm{Q}(x_n)) - v(\mathrm{P}(x_n))]. \tag{1}$$

La limite existe, puisque les suites sont stationnaires, et nous vérifions qu'elle ne dépend pas de la représentation de R. Les axiomes des valuations se vérifient par des passages à la limite triviaux, et nous avons obtenu une valuation w de L qui prolonge v; nous écrirons désormais v au lieu de w. Nous appliquons la définition (1) pour vérifier que

$$v(\mathrm{T} - x_n) \geqslant \lambda_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

(en fait nous avons $v(\mathrm{T} - x_n) = \lambda_n$). Il nous faut encore montrer que L/K est une extension immédiate. Or, si $R = QP^{-1}$ comme précédemment, la relation (1) de (9.8) nous montre l'existence de deux éléments a et b dans K tels que $v(P-a) > v(P)$ et $v(Q-b) > v(Q)$. Nous en déduisons sans peine

$$v(QP^{-1} - ba^{-1}) > v(QP^{-1}),$$

ce qui achève la preuve, d'après (6.2).

Nous avons donc trouvé, dans tous les cas, une extension immédiate qui introduit un élément dans l'intersection d'une suite de disques emboîtés.

Nous obtenons encore des extensions immédiates quand nous complétons un corps ou quand nous prenons la réunion d'une tour d'extensions immédiates.

Pour prouver l'existence d'une extension immédiate maximalement complète d'un corps valué K, il nous suffirait donc de montrer que les cardinaux des extensions immédiates de K sont bornés. Cela est vraisemblable, et même vrai ([3], lemme 5, p. 37).

Nous n'avons pas besoin de ce résultat pour justifier l'existence de l'extension $\ddot{K}$ de K utilisée dans la preuve de la proposition 9. Nous aurions même pu nous dispenser de distinguer les deux cas de la proposition 12, car la dernière formule (1) définit toujours une valuation de l'extension transcendante monogène de K, et notre article pourrait ignorer les extensions immédiates. Cependant la distinction des deux cas s'impose. Le lecteur peut trouver un exemple du cas I dans [1], p. 52. Dans le cas I l'entier d (défaut de l'extension) est une puissance de la caractéristique du corps résiduel ([1], p. 56-61). On obtient facilement des exemples du cas II : il n'y a qu'à prendre pour K un corps algébriquement clos, complet mais non maximalement complet. Voici un tel corps : soit k un corps algébriquement clos; nous prenons le corps K des séries formelles de la forme $\Sigma_{n\geqslant 0} a_n T^{r(n)}$, où $a_n \in k$ et $(r(n))_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres rationnels qui croissent indéfiniment. K est valué comme un corps de séries formelles : son groupe de valuation est $\mathbf{Q}$.

Il ne faudrait pas croire que l'extension algébrique $K(\theta)$ du cas I est toujours unique. En effet le polynôme minimal P de θ sur K est caractérisé comme polynôme instable de degré minimum, et nous avons toujours $\lim\limits_{n\to\infty} v(P(x_n)) < +\infty$. Si P est inséparable, nous obtenons un polynôme séparable et instable de même degré en prenant $P(T) + aT$, où a est un élément de K dont la valuation est assez grande. Nous pouvons donc toujours choisir θ séparable sur K. Or il est parfois possible de choisir θ radiciel sur K. Plaçons-nous d'abord dans le cas II de la proposition 12, supposons K de caractéristique $p > 0$, et prenons l'extension monogène $L = K(z)$ comme dans la proposition 12. Définissons le corps K_1 comme le complété du corps $K(z^p)$. Si nous prouvons que $z \notin K_1$, nous aurons une extension radicielle immédiate L/K_1, et (6.2) nous montre que nous serons dans le cas II de la proposition 12. Or la relation $z \in K_1$ signifie qu'il existe des fractions rationnelles $R(T)$ sur K telles que $v(R(z^p) - z)$ soit arbitrairement grand. Posons $R = QP^{-1}$, où P et Q sont des polynômes, et $S(T) = Q(T^p) - TP(T^p)$. Notons S' la dérivée de S. Nous avons

$$R(T^p) - T = -S(T)(S'(T))^{-1}.$$

Soient (y_i) les zéros du polynôme S dans K_a. Nous avons l'identité

$$S'(T)(S(T))^{-1} = \Sigma_i (T - y_i)^{-1},$$

et nous vérifions que $v(z - y_i) < \lambda$ pour tout i (λ est défini en (9.6)). Nous obtenons donc $v(S(z)(S'(z))^{-1}) < \lambda$, ce qui prouve que $z \notin K_1$.

RÉFÉRENCES

[1] ARTIN (E.), *Algebraic numbers and algebraic functions*, Princeton, New York (1950-1951).
[2] BOURBAKI (N.), *Topologie générale*, chap. I et II, 3e éd., Paris, 1961.
[3] SCHILLING (O. F. G.), The theory of valuations, *Math. Surveys*, IV, 1950.
[4] SCHNIRELMANN (L. H.), Sur les fonctions dans les corps valués algébriquement clos (en russe), *Bulletin de l'Ac. des Sci. de l'U.R.S.S.*, sér. mat., 1938.

Reçu le 1er mars 1962.