

# Sulla confluenza di vene libere.

(Di BRUTO CALDONAZZO, a Milano.)

---

## INTRODUZIONE.

Il CISORTI <sup>(1)</sup> ha assegnato in termini finiti l'integrale generale del problema piano della confluenza permanente di vene liquide scorrenti tra peli liberi, quando queste vene confluiscono in una certa località in un punto della quale, *spartiacque*, avviene un *urto di filetti* (Fig. 1). Ivi la velocità si annulla. L'urto di queste vene, che diremo *affluenti*, genera altrettante vene (§§ 1 e 2) che diremo *effluenti*.

In seguito il BOGGIO <sup>(2)</sup> riprese il problema stesso, apportando alle formule del CISORTI alcune modificazioni quando l'urto avviene tra più di due vene.

In questa Nota mi propongo lo studio dello stesso problema nella ipotesi della esistenza nel campo del moto di  $m > 1$  spartiacque (Fig. 3 in cui  $m = 3$ ). Il problema viene così generalizzato. Malgrado questa generalizzazione le formule risolutive conservano la formola esauriente e semplice già messa in rilievo nei precedenti studi citati e, a dire il vero, non facilmente prevedibile in questioni fisicamente complesse quale appunto è la nostra. Infatti le considerazioni, che riguardano il carattere puramente qualitativo del problema e che (§§ 1-5) precedono la sua impostazione analitica, rivelano una complessità del fenomeno ancor superiore a quella di già rilevata per il caso di un solo spartiacque.

Sia  $n$  il numero delle vene affluenti e quindi  $n$  quello delle effluenti; per l'ipotesi che nel campo del moto esista almeno uno spartiacque deve essere  $n \geq 2$ . Sia  $m$  il numero degli spartiacque. Questo numero, dato  $n$  e

---

<sup>(1)</sup> U. CISORTI, *Vene confluenti*, Ann. di Mat., t. XXIII, serie III (1914), pp. 285-341, oppure *Nuovo Cimento*, Vol. X (1915, 2.º sem.), pp. 256-316.

<sup>(2)</sup> T. BOGGIO, *Sul problema delle vene confluenti*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, Vol. 50 (1915), pp. 1103-1119.

ammesso che il moto oltre che permanente irrotazionale sia anche *aciclico*, non si può prendere completamente ad arbitrio, ma deve soddisfare alle limitazioni (§ 4)

$$1 \leq m \leq n - 1.$$

Indichiamo con  $O_s$  un generico spartiacque ( $s = 1, 2, \dots, m$ ), con  $p_s$  il numero delle vene affluenti ad  $O_s$ . Anche i numeri  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , fissati  $n$  ed  $m$ , non sono completamente arbitrari, ma ciascuna  $p_s$  deve soddisfare alle limitazioni (§ 5)

$$2 \leq p_s \leq n - m + 1$$

ed inoltre la loro somma deve essere eguale ad

$$n + m - 1.$$

In conseguenza di ciò esistono soltanto  $\binom{n-2}{m-1}$  gruppi di  $m$  interi  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , distinti almeno per l'ordine, che danno il numero delle vene le quali possono affluire rispettivamente agli spartiacque  $O_1, O_2, \dots, O_m$ , compatibilmente col numero  $n$  delle vene e con quello  $m$  degli spartiacque.

Fissati  $n, m$  ed uno degli  $\binom{n-2}{m-1}$  gruppi di numeri  $p_1, p_2, \dots, p_m$  sono *elementi* geometrici e fisici salienti del *fenomeno* le portate, gli angoli che le direzioni asintotiche delle  $2n$  vene formano con una direzione fissata ed i  $2(m-1)$  parametri che stabiliscono le ubicazioni di  $m-1$  spartiacque.

Fra questi elementi hanno luogo  $2n-1$  relazioni notevoli (§ 10 e § 16) in termini finiti. Ma poichè tra essi figurano naturalmente come *dati della questione* le  $n$  portate e gli  $n$  angoli che definiscono le direzioni asintotiche delle  $n$  vene affluenti, così per determinare i rimanenti  $2n+2(m-1)$  elementi occorrerebbero  $2m-1$  ulteriori relazioni. Ciò mette in rilievo che sono a priori possibili  $\infty^{2m-1}$  regimi nelle condizioni specificate.

In particolare per  $m=1$  si ha una semplice infinità di soluzioni possibili, circostanza questa che il CISOTTI<sup>(3)</sup> attribuisce alla mancata conoscenza delle condizioni precedenti lo stato di regime e che, data l'ipotesi del regime permanente, non appaiono fra i dati della questione (§ 16).

Ultimamente il PALATINI<sup>(4)</sup>, riprendendo il problema nel caso dell'urto di due vene ( $n=2$  e quindi, per la limitazione soprascritta,  $m=1$ ), cercò

<sup>(3)</sup> U. CISOTTI, loc. cit. (1), pp. 316 e 317.

<sup>(4)</sup> PALATINI, *Sulla confluenza di due vene*, Atti del R. Istituto Veneto di Sc. Lett. ed Arti, t. LXXV, parte seconda (1916), pp. 451-463.

di togliere l'indeterminazione ricorrendo ad un criterio energetico. Fra tutte le soluzioni possibili egli ha discriminato quella rispetto alla quale lo stato di regime permanente viene raggiunto col minimo dispendio di energia. Gli elementi caratteristici in tal caso devono rendere minima la somma dei quadrati delle portate delle vene.

Adottando lo stesso criterio energetico al problema più generale, che forma argomento della presente Memoria, si ha conferma della elegante constatazione del PALATINI, qualunque sia il numero delle vene e quello degli spartiacque.

### § 1. POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Per porre il problema prendiamo le mosse dal caso della confluenza di  $2n$  vene con un solo spartiacque, studiato dal CISORTI e dal BOGGIO.

In una data località del piano del moto affluiscono  $n$  vene, *vene affluenti*,  $G_1, G_2, \dots, G_{2n-1}$  [Fig. 1, in cui si ha  $n=4$ ];  $n$  filetti  $g_1, g_2, \dots, g_{2n-1}$ , uno per ciascuna vena, si urtano in uno stesso punto  $O$  (*spartiacque*), momentaneamente si arrestano indi si bipartiscono ed i  $2n$  filetti che ne risultano si compenetrano a due a due dando luogo così ad altri  $n$  filetti  $g_2, g_4, \dots, g_{2n}$  direttori di altre  $n$  vene  $G_2, G_4, \dots, G_{2n}$ , *vene effluenti*. Tutti gli altri filetti vengono più o meno deviati senza subire arresti. Si ammette che il moto sia permanente irrotazionale in assenza di forze esterne e che le vene affluenti e quelle effluenti siano comprese tra peli  $\lambda$

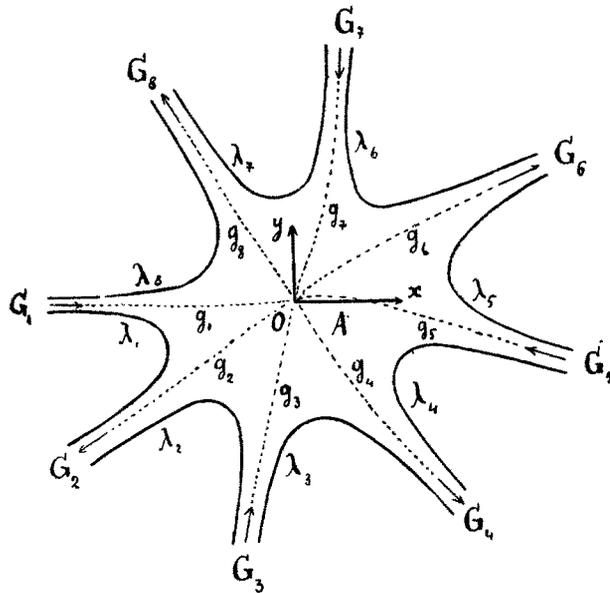


Fig. 1.

che limitano il campo del moto da un liquido in quiete. Posto eguale ad 1

la densità costante del liquido in moto, dall'equazione idrodinamica del BERNOULLI

$$p = -\frac{1}{2} V^2 + \text{cost.} \quad (1)$$

segue che sui peli  $\lambda$  la velocità assume un valore  $V$  costante (*peli liberi*). Si ammette ancora che all' $\infty$  a monte della vena  $G_{2h-1}$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) i peli liberi  $\lambda_{2(h-1)}$  e  $\lambda_{2h-1}$  tra cui essa è compresa abbiano una direzione asintotica comune e che la velocità abbia egual valore e direzione in tutti i punti della sezione asintotica  $\Omega_{2h-1}$  della vena. Altrettanto valga all' $\infty$  a valle della vena  $G_{2h}$  compresa tra i peli liberi  $\lambda_{2h-1}$  e  $\lambda_{2h}$ .

Quindi su tutti i peli liberi  $\lambda$  la velocità ha uno stesso valore costante, che assumiamo eguale all'unità.

Poichè *un pelo libero non può presentare flessi* <sup>(5)</sup>, per la possibilità del problema tutti i peli  $\lambda$  devono essere *convessi* rispetto al campo  $A$  del moto. Le vene affluenti quindi si succedono alternativamente colle effluenti, quando si percorre il contorno del campo del moto, contorno che è costituito dai peli  $\lambda$  e dalle sezioni asintotiche  $\Omega$  delle vene. Fissiamo al solito come *positivo* quel verso del contorno che lascia alla sinistra il campo e gli indici delle  $G$  e delle  $\lambda$  crescano in questo senso lungo il contorno.

Riferiamoci ad un sistema cartesiano ortogonale con l'origine in  $O$ . Diciamo  $\mathfrak{S}$  l'angolo che il vettore velocità fa con l'asse  $Ox$  [Fig. 1] contato positivamente nel senso antiorario, negativamente nel senso opposto tra limiti che ora preciseremo.

Sia  $\mathfrak{S}_r$  in particolare il valore di  $\mathfrak{S}$  all' $\infty$  di  $G_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2n$ ). Per quanto si è detto, percorrendo il contorno del campo nel verso positivo  $\mathfrak{S}$  è sempre *decescente*. Se si parte quindi con un valore  $\mathfrak{S}_1$  dall' $\infty$  a monte di  $\lambda_1$  si passerà per valori  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \dots, \mathfrak{S}_{2n}$ , all' $\infty$  di  $G_2, G_3, \dots, G_{2n}$ , sempre più piccoli *algebricamente*:

$$\mathfrak{S}_1 > \mathfrak{S}_2 > \mathfrak{S}_3 \dots > \mathfrak{S}_{2n}. \quad (2)$$

Faremo constatare che si ritorna all' $\infty$  di  $G_1$  lungo  $\lambda_{2n}$  ( $\lambda_6$  nel caso della Fig. 1) con un valore  $\mathfrak{S}$  più piccolo di  $\mathfrak{S}_1$  di un numero intero di  $2\pi$  e

<sup>(5)</sup> L. M. BRILLOUIN, *Les surfaces de glissements d'Helmholtz et la résistance des fluides*, Ann. de Chim. et de Phys., 8<sup>me</sup> Série, t. XXIII (1911), p. 150.

precisamente con un valore <sup>(6)</sup>:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 - 2(n - 1)\pi.$$

Per provarlo si consideri una circonferenza col centro in un punto al finito del piano  $xy$  e di raggio infinitamente grande. La porzione  $B_r$  del piano  $xy$  esterna al campo del moto  $A$  e compresa tra il generico pelo libero  $\lambda_r$  e detta circonferenza è semplicemente connessa: [con la Fig. 2 il lettore potrà farsi un'idea dell'area  $B_r$  immaginando di far tendere all' $\infty$  il raggio della circonferenza di cui abbiamo tratteggiato un arco]. Percorrendo una volta il contorno di  $B_r$ , a partire da un suo punto qualunque nel verso positivo *rispetto ad A* [nella Fig. 2 questo verso è indicato dalle frecce] la tangente al contorno descrive l'angolo  $-2\pi$ . Si noti che

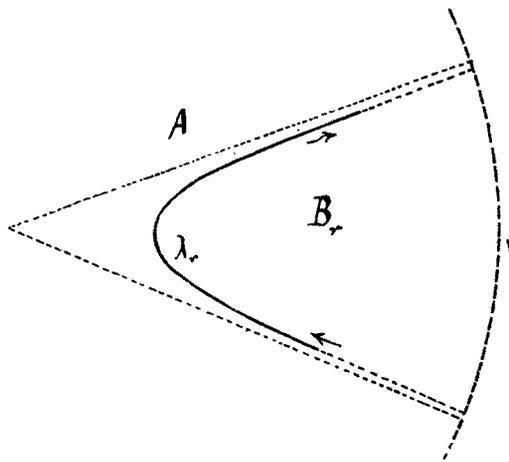


Fig. 2.

la circonferenza taglia ortogonalmente la linea  $\lambda_r$  nei suoi due punti all' $\infty$  <sup>(7)</sup>. Questi punti costituiscono pertanto due punti *angolosi* (e sono i soli) del contorno di  $B_r$ . In ciascuno di essi quindi l'angolo di cui ruota la tangente al contorno di  $B_r$ , percorso nel verso fissato, fa un brusco salto di  $-\frac{\pi}{2}$ . Ne segue che, esclusi i due punti angolosi, l'angolo di cui ruota la tangente lungo il contorno di  $B_r$  è  $-\pi$ . Poichè le aree  $B_r$  sono  $2n$ , tante quanti sono i peli  $\lambda_r$ ,

$$-2n\pi$$

è la somma degli angoli descritti dalle tangenti ai loro contorni percorsi una

<sup>(6)</sup> Questo rileva il Boggio nella nota citata <sup>(2)</sup>, senza darne la dimostrazione.

<sup>(7)</sup> Basta pensare che *qualunque* sia il centro, al finito, di una circonferenza, facendo crescere indefinitamente il suo raggio si tende sempre alla stessa circonferenza limite-all' $\infty$  del piano e che quindi si può assumere come centro della nostra circonferenza, in riguardo a  $B_r$ , il punto d'intersezione dei due asintoti di  $\lambda_r$ , i quali per la (2) si incontrano necessariamente al finito.

volta nel senso positivo rispetto ad  $A$ , purchè si escludano i punti angolosi in cui le  $\lambda_r$  vengono tagliate dalla circonferenza. Questa somma raccoglie quindi l'angolo di cui ruota la tangente complessivamente lungo le  $\lambda_r$  percorse nel verso positivo più l'angolo descritto dalla tangente alla circonferenza percorsa nel senso orario e che è  $-2\pi$ . Ne segue che l'angolo di cui ruota la tangente alle  $\lambda_r$ , percorse nel senso positivo, è

$$-2n\pi - (-2\pi) = -2(n-1)\pi.$$

Effettivamente non abbiamo percorso gli archi di circonferenza interni al campo  $A$ , archi che coincidono colle sezioni asintotiche  $\Omega$  delle vene  $G$ . Ma poichè tali sezioni sono finite, nullo è l'angolo descritto dalla tangente lungo di esse.

Se si tièn presente infine che la velocità è tangente alle linee  $\lambda_r$  e che su ciascuna  $\Omega$  la velocità si conserva parallela a se stessa, l'angolo  $-2(n-1)\pi$  di cui ruota la tangente alle  $\lambda_r$  è pure l'angolo descritto dalla velocità quando si percorre una volta, nel verso positivo, l'intero contorno del campo del moto, a partire da un suo punto qualsiasi. (c. d. d.).

Premesso ciò ed ammessa l'esistenza di *uno* spartiacque il moto è possibile se è  $n \geq 2$  (\*). Ma è proprio necessario il supporre che si abbia un solo punto spartiacque e non più? Tale questione mi sono proposto. Ammesso che il moto avvenga *qualitativamente* come nel caso ora accennato, ammettiamo ancora che esistano  $m$  punti (con  $m \geq 1$ ) in cui la velocità si annulla. E precisamente il moto di cui ci proponiamo lo studio sia caratterizzato nel modo seguente:

I. *Il moto è piano, permanente, irrotazionale non soggetto a forze* (°) *ed il liquido in moto è perfetto.*

II. *La velocità è dovunque finita, continua, diversa da zero, eccettuati  $m$  punti interni e situati al finito nei quali la velocità si annulla* (spartiacque).

III. *Il contorno del campo del moto è costituito, da  $2n$  peli liberi. Le direzioni asintotiche, a monte ed a valle di ciascuno dei peli liberi, coincidono con quella a monte rispettivamente ed a valle di due altri peli liberi (peli*

(\*) U. CISOTTI, loc. cit. (1), p. 288 e seg.

(°) Effettivamente l'integrale generale (28), cui perverremo, vale pure se intervengono forze di massa purchè *conservative* e la densità del liquido sia *continua* attraverso i peli  $\lambda$ . Vedi in proposito la mia Nota: *Vene fluenti tra pareti interrotte*, questi Annali, t. XXV, serie III (1916), p. 39.

contigui). Due peli contigui  $\lambda_{r-1}$  e  $\lambda_r$ , a distanza sufficientemente grande dalla località degli spartiacque, guidano una vena  $G_r$  (vena libera) lungo la quale il campo del vettore velocità tende a diventare asintoticamente uniforme.

#### IV. Il moto è aciclico.

Evidentemente le prime tre ipotesi si riducono, per  $m = 1$ , a quelle che fissano il moto quando si ha un solo spartiacque. La quarta ipotesi sarebbe superflua per il caso  $m = 1$ . Vedremo quali limitazioni essa importa quando  $m > 1$ .

### § 2. IL CAMPO DEL MOTO.

Abbiamo già detto, parlando del caso in cui si ha un solo spartiacque  $O$ , come in esso si urtino  $n$  filetti e da esso abbiano origine altri  $n$  filetti. Ciascuno dei primi  $n$  filetti proviene da una vena affluente, gli altri  $n$  diventano ciascuno direttore di una vena effluente.

Il punto  $O$  si può riguardare come punto di *ramificazione* di  $2n$  filetti, tanti quante sono le vene affluenti ed effluenti complessivamente e quindi in numero *pari*.

Lo stesso avviene qualitativamente in ciascuno degli  $m$  spartiacque  $O_1, O_2, \dots, O_m$  nel caso più generale che abbiamo preso a trattare. Ciascuno spartiacque  $O_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) è un punto di *ramificazione* di un certo numero *pari* di filetti. Diciamo  $2p_s$  questo numero. Ognuno di questi filetti si può considerare come direttore di una vena; le  $2p_s$  vene corrispondenti saranno alternativamente affluenti ed effluenti rispetto ad  $O_s$ . Come per il numero  $n$  così per ciascun  $p_s$  deve aversi

$$p_s \cong 2.$$

Consideriamo uno dei  $p_s$  filetti uscenti da  $O_s$ . Esso potrà proseguire, senza più arrestarsi, in una delle  $n$  vene effluenti del campo, oppure potrà arrestarsi nuovamente in un altro spartiacque (Fig. 3 in cui  $n = 5, m = 3$ ).

Analogamente uno dei filetti arrestatisi in  $O_s$  può provenire direttamente da una vena affluente oppure da un altro spartiacque.

Nel caso  $m = 1$  ciascuna vena affluente si bipartisce solamente nelle due vene contigue effluenti (Fig. 1). Invece per  $m > 1$  qualche vena affluente, oltre che dare necessariamente un contributo alle due contigue, può man-

dare ancora un ramo scorrente tra peli interni al campo del moto (*vena*

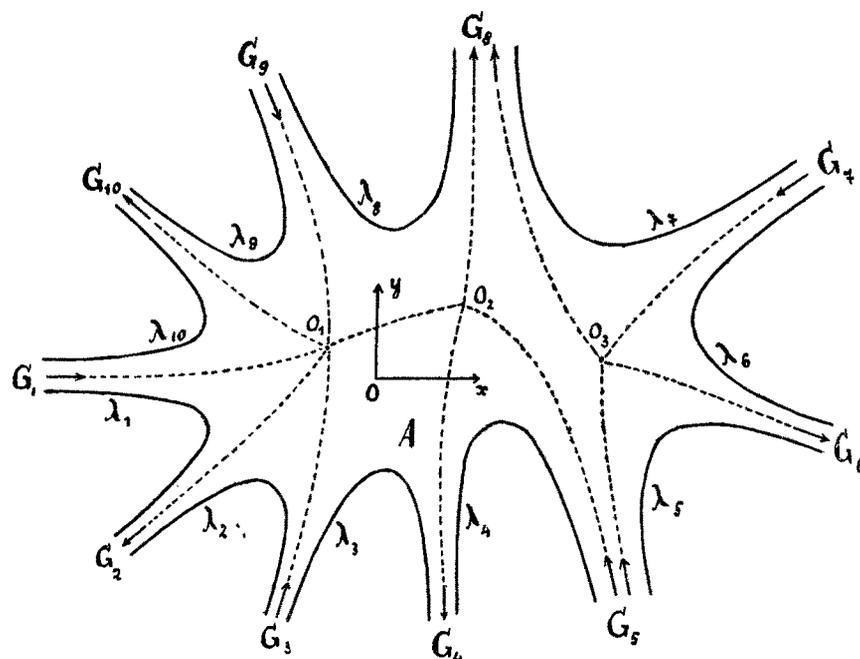


Fig. 3.

*interna*) in qualche vena effluente. [Nella Fig. 3 la vena  $G_5$  si dirama in  $G_4$  e  $G_6$  ed inoltre manda una vena interna in  $G_3$ ]. Può ancora darsi che con più di uno spartiacque ciascuna vena affluente si dirami nelle contigue soltanto [Fig. 4]. In tal caso gli spartiacque devono tutti appartenere alla stessa linea di flusso. In caso contrario [Fig. 3], gli spartiacque appartengono a diverse linee di flusso.

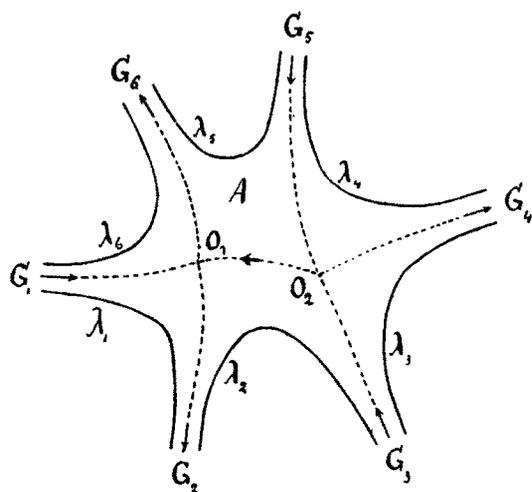


Fig. 4.

Quando due o più spartiacque appartengono ad una stessa linea di flusso potrebbe affacciarsi il caso che dei filetti facenti capo ad essi vengano a racchiudere una parte finita del campo, come è indicato ad es. nella Fig. 5. In questa regione

finita non vi può essere la quiete perchè, ipotesi II, ciò si ammette avvenire solo negli spartiacque. Vi sarà dunque moto; ma trattandosi di moto irrotazionale (I) in tale regione finita il moto è necessariamente *ciclico*. Non intendendo di occuparci di questo caso abbiamo appunto formulato l'ipotesi IV. Escludendo essa i moti ciclici esclude per conseguenza il caso che più filetti facenti tutti capo a spartiacque delimitino una regione finita. Dovrà essere pertanto possibile raggiungere, senza uscire dal campo e senza tagliare alcuno dei filetti irraggianti dagli spartiacque, un punto all' $\infty$  del campo stesso a partire da un suo punto interno qualunque. Dopo ciò e tenuto conto ancora della III possiamo concludere che il campo del moto è *semplicemente connesso* e (come pel caso  $m = 1$ ) esso si può pensare costituito da una regione situata al finito, la località degli spartiacque, da cui diramano  $2n$  vene libere alternativamente affluenti ed effluenti.

Per le stesse ragioni poi addotte pel caso  $m = 1$  le linee libere  $\lambda_r$  sono sempre *convesse* verso il campo del moto; su esse la velocità ha lo stesso valore *costante*, che conveniamo di assumere eguale ad 1.

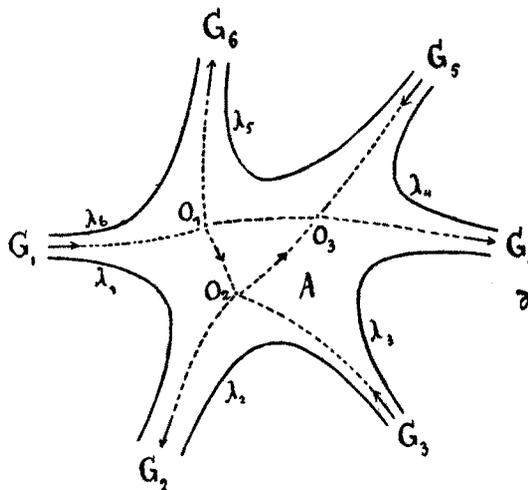


Fig. 5.

### § 3. L'ANGOLO $\vartheta$ .

Ferma restando la convenzione già fatta pel caso  $m = 1$ , sul verso positivo del contorno del campo, dopo quanto abbiamo detto, è evidente che l'angolo  $\vartheta$  che il vettore velocità fa con una direzione prefissata decresce sempre lungo il contorno del campo. Varrà ancora quindi la (2):

$$\vartheta_1 > \vartheta_2 > \dots > \vartheta_{2n},$$

in cui  $\vartheta_r$  rappresenta il valore a cui si perviene per  $\vartheta$  all' $\infty$  della vena  $G_r$ ,

quando vi si arrivi percorrendo il contorno del campo nel verso positivo a partire dall' $\infty$  a monte di  $\lambda_1$  in cui è  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$  <sup>(10)</sup>.

Ed in particolare avremo ancora che *percorrendo una volta l'intero contorno nel verso positivo, a partire da un suo punto qualunque, si ritorna al punto di partenza con un valore di  $\mathfrak{S}$  diminuito di  $2(n-1)\pi$  rispetto al valore col quale si era partiti.*

Vediamo il comportamento dell'angolo  $\mathfrak{S}$  in un generico  $O_s$ . Sia  $c_s$

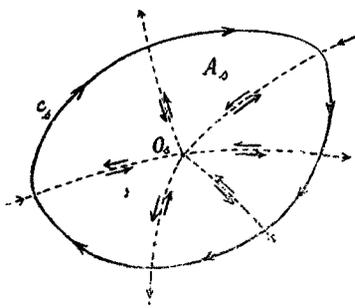


Fig. 6.

[Fig. 6, in cui si ha in particolare  $p_s = 3$ ] una curva chiusa limitante un'area semplicemente connessa  $A_s$ , tutta interna ad  $A$  e contenente nel suo interno il solo spartiacque  $O_s$ . Ammettiamo ancora per semplicità che  $c_s$  tagli una sola volta ciascuno dei  $2p_s$  filetti che irradiano da  $O_s$ . Questi  $2p_s$  filetti dividono  $A_s$  in  $2p_s$  parti pure semplicemente connesse. Percorrendo il contorno di ciascuna di queste aree parziali, lasciando alla *destra* l'area stessa, la tangente al contorno ruota dell'angolo  $-2\pi$ .

La somma di tutti gli angoli descritti dalla tangente ai singoli contorni è

$$-4p_s\pi$$

e consta dell'angolo  $-2\pi$  corrispondente alla rotazione della tangente quando si percorre l'intera curva  $c_s$ , dell'angolo  $-2p_s\pi$  di cui tale tangente ruota complessivamente nei punti di intersezione di  $c_s$  coi  $2p_s$  filetti e del rimanente angolo  $-2(p_s-1)\pi$ , che rappresenta pertanto l'angolo di cui la tangente ha ruotato nel percorrere i due bordi delle porzioni interne ad  $A_s$  dei  $2p_s$  filetti. Ma poichè sopra ciascun filetto uno dei bordi è percorso in un senso, l'altro nel senso opposto,

$$-2(p_s-1)\pi$$

è senz'altro l'angolo di cui ruota il vettore velocità (la tangente ai filetti coincide in direzione con la velocità a meno di multipli interi di  $\pi$ ) quando partendo da un punto qualsiasi si ritorna allo stesso punto percorrendo un

<sup>(10)</sup> Conveniamo una volta per sempre che l'indice  $r$  vari per valori interi da 1 a  $2n$ , l'indice  $s$  da 1 ad  $m$ .

cammino qualunque purchè racchiudente un'area semplicemente connessa cui appartenga, e come punto interno, il solo spartiacque  $O_s$ , e purchè il senso del percorso sia quello che lascia alla sinistra l'area racchiusa.

Seguendo un cammino che racchiuda oltre che  $O_s$  un altro spartiacque  $O_i$  si ritorna al punto di partenza, procedendo nel senso antiorario rispetto all'area racchiusa, con un valore di  $\mathfrak{S}$  diminuito di  $2(p_s - 1)\pi + 2(p_i - 1)\pi$ . Basta pensare che con un opportuno taglio si può ottenere da un tale cammino due cammini chiusi limitanti aree semplicemente connesse all'una delle quali appartiene il solo  $O_s$ , all'altra il solo  $O_i$ . Percorrendo ciascuno di questi cammini una volta lasciando alla sinistra l'area racchiusa si ha per  $\mathfrak{S}$  un decremento complessivo  $2(p_s - 1)\pi + 2(p_i - 1)\pi$  al quale non contribuisce affatto il cammino compiuto lungo i due bordi del taglio, perchè essi vengono percorsi in verso opposto.

Da tutto ciò risulta che  $\mathfrak{S}$  è una funzione *non uniforme* e resta ancora precisato il valore di  $\mathfrak{S}$  in un punto del campo, noto il cammino seguito per giungervi a partire da un punto del campo con un dato valore per  $\mathfrak{S}$ .

#### § 4. MASSIMO NUMERO DEGLI SPARTIACQUE COMPATIBILE CON UN NUMERO PREFISSATO DI VENE.

Sappiamo già che nel nostro campo per  $n \geq 2$  deve esistere almeno uno spartiacque:

$$m \geq 1.$$

Ci proponiamo ora di vedere quale è il numero massimo degli spartiacque compatibile col numero delle vene. A questo scopo cominciamo col'osservare che la funzione  $\mathfrak{S}$  è *armonica* nel campo  $A$  <sup>(11)</sup>. Se escludiamo

(11) Abbiamo già chiamato  $V$  il valore assoluto della velocità.

Constateremo in seguito (§ 6) che la espressione

$$v = V e^{-i\mathfrak{S}}$$

è funzione della variabile complessa  $x + iy$ ; ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $x$  ed  $y$  coordinate cartesiane, l'asse delle ascisse essendo parallelo all'asse polare rispetto al quale sono valutate le  $\mathfrak{S}$ ) e ciò in conseguenza della sola ipotesi che il moto è irrotazionale. Poichè

$$\log v = \log V - i\mathfrak{S}$$

è allora pure funzione della stessa variabile complessa, ne segue che  $\log V$  e  $-\mathfrak{S}$  sono funzioni *armoniche* associate.

dal campo del moto le aree  $A_s$ , comunque piccole, ottenute circondando ciascun  $O_s$  con una curva  $c_s$  in modo che le curve  $c$  non abbiano punti comuni, il campo rimanente diventa molteplicemente connesso. Con opportuni tagli lo si può rendere semplicemente connesso: nel campo così ridotto la funzione  $\mathfrak{P}$  è necessariamente *uniforme*. Percorrendo il contorno di tale campo, a partire da un suo punto generico, si tornerà perciò al punto di partenza col valore iniziale di  $\mathfrak{P}$ . Si noti bene che il contorno del campo semplicemente connesso consta delle linee  $\lambda_r$ , dei bordi dei tagli e delle curve  $c_s$ . Supponiamo di percorrere questo contorno nel verso positivo; le  $\lambda_r$  vengono perciò descritte nel verso antiorario e su di esse  $\mathfrak{P}$  si incrementa di (paragrafo precedente)

$$- 2(n-1)\pi;$$

i due bordi di ciascun taglio vengono percorsi in senso contrario e non recano quindi alcun contributo alla variazione totale di  $\mathfrak{P}$ ; le curve  $c_s$  vengono percorse nel verso *orario*, per lasciare alla sinistra il campo da cui sono esclusi gli  $O_s$ . La variazione di  $\mathfrak{P}$  lungo una generica  $c_s$  in tale senso è data (paragrafo precedente) da  $2(p_s - 1)\pi$ , per cui la variazione di  $\mathfrak{P}$  lungo tutte le  $c_s$  riceve il contributo

$$2(p_1 - 1)\pi + 2(p_2 - 1)\pi + \dots + 2(p_m - 1)\pi = 2\pi(\sum_s p_s - m).$$

La variazione totale di  $\mathfrak{P}$ , percorso l'intero contorno del campo ridotto, è quindi

$$2\pi \left\{ \sum_s p_s - m - (n-1) \right\}.$$

Ma tale variazione, per quanto si è notato poco sopra, deve essere nulla. Abbiamo perciò

$$\sum_s p_s - m - n + 1 = 0,$$

da cui

$$\sum_s p_s = n + m - 1. \quad (3)$$

Se teniamo conto che

$$p_s \geq 2$$

e che i termini della sommatoria nel primo membro sono in numero di  $m$ , dalla (3) si ricava

$$2m \leq n + m - 1$$

e quindi

$$m \leq n - 1$$

la quale relazione risponde alla questione che ci eravamo proposta. Risulta pertanto che *il numero massimo degli spartiacque è eguale al numero delle vene affluenti meno una.*

Il numero intero  $m$  deve quindi soddisfare alle limitazioni

$$1 \leq m \leq n - 1; \quad (4)$$

da questa scende necessariamente, come si è ammesso,

$$n \geq 2.$$

§ 5. SUL NUMERO DI VENE AFFLUENTI AD UN GENERICO SPARTIACQUE,  
FISSATI  $n$  ED  $m$ .

Il numero  $p_s$  dei filetti che s'arrestano momentaneamente nel generico  $O_s$ , è il numero delle vene che affluiscono allo spartiacque  $O_s$ , come del resto si fece notare al § 2. Sappiamo che, come pel numero  $n$ , il valore minimo di ogni  $p_s$  è 2. Dalla (3) segue quindi che, fissati  $m$  ed  $n$ , una generica  $p_s$  ha il valore massimo quando

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{s-1} = p_{s+1} = \dots = p_m = 2$$

e che tale massimo è  $n - m + 1$ .

Si ha quindi

$$2 \leq p_s \leq n - m + 1. \quad (5)$$

Queste limitazioni assieme alla (3) ci permettono di trovare quanti sono i gruppi di  $m$  interi, distinti almeno per l'ordine, che si possono assumere, compatibilmente coi numeri  $n$  ed  $m$ , quali possibili  $m$ -ple di  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Il numero di tali gruppi è

$$N_{n,m} = \binom{n-2}{m-1}. \quad (6)$$

Per dimostrarlo applichiamo il metodo induttivo. È evidente che per  $m = 1$  ed  $n$  qualunque, purchè maggiore di 1, si ha una sola  $p$  che per la (3) è eguale ad  $n$ . È quindi  $N_{n,1} = 1$ , conformemente alla (6). Si constata pure facilmente la validità della (6) per  $m = 2$  ed  $n$  qualunque. Infatti tutte le coppie

di interi  $p_1, p_2$  che soddisfanno alle (3) e (5), che in tal caso divengono

$$p_1 + p_2 = n + 1; \quad 2 \leq p_s \leq n - 1; \quad (s = 1, 2),$$

sono le seguenti

$$2, n - 1; \quad 3, n - 2; \dots \quad n - 2, 3; \quad n - 1, 2.$$

Il loro numero è evidentemente  $N_{n,2} = n - 2$ , d'accordo con la (6). Ammettiamo ora che la (6) valga per  $n$  qualunque (purchè maggiore di 1) quando il numero degli interi  $p$  è  $m - 1$ . Tale ipotesi importa, in modo particolare,

$$\left. \begin{aligned} N_{n-1, m-1} &= \binom{n-3}{m-2}, & N_{n-2, m-1} &= \binom{n-4}{m-2}, \dots \\ \dots N_{m+1, m-1} &= \binom{m-1}{m-2}, & N_{m, m-1} &= \binom{m-2}{m-2}. \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Basterà dimostrare il teorema pel caso in cui i numeri  $p$  sono  $m$ . A questo scopo si osservi che uno degli  $N_{n,m}$  gruppi cercati si ottiene facendo seguire ad un generico gruppo

$$p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$$

degli  $N_{n-1, m-1}$  il numero 2 come m.<sup>mo</sup> elemento. Infatti dovendo essere

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} = (n - 1) + (m - 1) - 1 = n + m - 3;$$

$$2 \leq p_s \leq (n - 1) - (m - 1) + 1 = n - m + 1, \quad (s = 1, 2, \dots, m - 1);$$

(tali divengono le (3) e (5) per i gruppi  $N_{n-1, m-1}$ ), gli  $m$  numeri  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, 2$  soddisfanno manifestamente alle (3) e (5). Perciò se si dà a ciascuno dei gruppi  $N_{n-1, m-1}$  il numero 2 come m.<sup>mo</sup> elemento si avranno tutti e soli quelli dei gruppi  $N_{n,m}$  che hanno l'ultimo elemento eguale a due; il loro numero è pertanto eguale ad  $N_{n-1, m-1}$ . Facendo seguire a ciascuno dei gruppi  $N_{n-2, m-1}$  il numero 3 come m.<sup>mo</sup> elemento otteniamo tutti i gruppi degli  $N_{n,m}$  in questione con l'ultimo elemento eguale a 3. Infatti in tal caso uno qualsiasi degli  $N_{n-2, m-1}$  gruppi soddisfa alle relazioni

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} = (n - 2) + (m - 1) - 1 = n + m - 4,$$

$$2 \leq p_s \leq (n - 2) - (m - 1) + 1 = n - m, \quad (s = 1, 2, \dots, m - 1);$$

si ha quindi

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 3 = n + m - 1,$$

$$2 \leq p_s \leq n - m + 1, \quad (s = 1, 2, \dots, m, \text{ con } p_m = 3).$$

Quindi tra gli  $N_{n,m}$  gruppi quelli con l'ultimo elemento eguale a 3 sono in numero di  $N_{n-2,m-1}$ .

Procedendo in modo analogo si può facilmente constatare che quelli degli  $N_{n,m}$  gruppi con l' $m^{\text{mo}}$  elemento eguale ad  $h$  sono in numero di  $N_{n-h+1,m-1}$ , ( $2 \leq h \leq n - m + 1$ ).

Ne segue pertanto che

$$N_{n,m} = N_{n-1,m-1} + N_{n-2,m-1} + \dots + N_{m+1,m-1} + N_{m,m-1},$$

ossia per le (6')

$$N_{n,m} = \binom{n-3}{m-2} + \binom{n-4}{m-2} + \dots + \binom{m-1}{m-2} + \binom{m-2}{m-2}.$$

Per una ben nota proprietà dei coefficienti binomiali il secondo membro è eguale ad  $\binom{n-2}{m-1}$ ; abbiamo dunque

$$N_{n,m} = \binom{n-2}{m-1},$$

come volevasi dimostrare.

In particolare, nel caso limite  $m = 1$ , avremo  $N_{n,1} = \binom{n-2}{0} = 1$ , come si fece già constatare. Nell'altro caso limite, in cui  $m$  ha il valore massimo  $n - 1$ , si ha  $N_{n,n-1} = \binom{n-2}{n-2} = 1$ . Si ha dunque anche in questo caso un solo gruppo di valori per le  $p$ . Questo si può constatare direttamente; basta osservare che con  $n - 1$  spartiacque tutte le  $p$  devono assumere il valore minimo 2 per poter avere, secondo la (3),

$$\sum_s p_s = 2(n - 1).$$

## § 6. LE FUNZIONI $f$ E $w$ NEL CAMPO DEL MOTO.

Assumiamo una coppia di assi cartesiani ortogonali coll'origine in un punto  $O$  del campo del moto e cogli assi  $Ox$ ,  $Oy$  orientati in modo che il verso di rotazione  $Ox \rightarrow Oy$  sia sinistrorso. Scegliamo inoltre l'asse  $Ox$  parallelo alla velocità asintotica della vena  $G_1$  [Fig. 3] e  $\mathcal{S}$  indichi ora l'an-

golo che il vettore velocità fa con  $Ox$ ; avremo (§ 1)

$$\mathcal{S}_1 = 0.$$

Indicheremo infine con  $u$  e  $v$  le componenti cartesiane della velocità.

Poichè il moto è permanente ed irrotazionale esisteranno il potenziale di velocità  $\varphi$  e la funzione di corrente  $\psi$ , funzioni *armoniche associate*, definite dalle relazioni

$$\begin{aligned} d\varphi &= u dx + v dy, \\ d\psi &= -v dx + u dy, \end{aligned}$$

a meno di una costante additiva inessenziale. Poichè il moto è aciclico (§ 2) le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  saranno inoltre *uniformi*.

Le precedenti relazioni, posto

$$z = x + iy, \quad w = u - iv, \quad f = \varphi + i\psi, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

si compendiano, come è ben noto, nell'unica equazione

$$\frac{df}{dz} = w. \quad (7)$$

Sopra ciascuna linea  $\lambda_r$ , che è linea di flusso, la funzione di corrente  $\psi$  deve assumere, come si sa, un valore costante:

$$\psi = \psi_r, \quad \text{su } \lambda_r. \quad (8)$$

Conveniamo di assumere *positive* le portate delle vene affluenti, *negative* quelle delle vene effluenti. Ricordando allora che (§ 1) gli indici  $r$  crescono quando si percorre il contorno del campo nel verso positivo, sarà

$$q_r = \psi_{r-1} - \psi_r, \quad (\psi_0 = \psi_{2n}) \quad (9)$$

la portata in *valore e segno* della vena  $G_r$ .

Manifestamente si ricava dalle (9)

$$\sum_r q_r = 0, \quad (10)$$

come è richiesto dalla condizione che il flusso totale sia nullo attraverso il contorno del campo.

Poichè, esclusi i punti  $O_s$ , si ha dovunque  $V > 0$  (§ 2), la funzione  $\varphi$  è sempre crescente su ciascuna linea di flusso, nel senso del moto, da  $-\infty$

a  $+\infty$ , come facilmente risulta dal fatto che si ha sempre

$$\frac{d\varphi}{ds} = V > 0$$

( $ds$  è un elemento di linea di flusso preso positivamente nel senso del moto) esclusi intorno comunque piccoli, non nulli, racchiudenti i punti  $O_s$ .

La funzione  $f = \varphi + i\psi$  quindi è regolare uniforme nei punti del campo del moto situati a distanza finita; diviene infinita all' $\infty$  e sul contorno la sua parte immaginaria si comporta nel modo precisato dalle (8).

Ove fosse noto il campo  $A$ , la  $f$  sarebbe definita a meno di una inessenziale costante reale.

Veniamo ora alla funzione  $w = u - iv$ .

Poichè si ha evidentemente

$$|w| = V,$$

le condizioni del problema importano (ipotesi II, § 1)

$$|w| = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ sulle } \lambda_r; \\ 0, \text{ nei punti } O_s; \\ \text{valore } > 0 \text{ e finito, in tutti gli altri punti.} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Tenuto presente il significato di  $\vartheta$  abbiamo

$$u = V \cos \vartheta, \quad v = V \sin \vartheta,$$

per le quali la  $w = u - iv$  si può scrivere

$$w = V e^{-i\vartheta}.$$

Per quanto abbiamo detto nel § 3,  $\vartheta$  decresce, algebricamente, lungo il contorno di  $A$  nel senso positivo, passando pei valori

$$\vartheta = \vartheta_r, \quad \text{all}'\infty \text{ di } G_r, \quad (12)$$

avendosi in particolare

$$\vartheta = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ all}'\infty \text{ di } G_1 \text{ lungo } \lambda_1; \\ -2(n-1)\pi, \text{ all}'\infty \text{ di } G_1 \text{ lungo } \lambda_{2n}, \end{array} \right\} \quad (12')$$

dopo aver percorso una volta l'intero contorno nel verso positivo.

Di capitale importanza è il comportamento di  $\vartheta$  in un punto  $O_s$ . Il va-

lore di  $\vartheta$  in  $O_s$  dipende dal cammino seguito per arrivare in  $O_s$ . Consideriamo il fascio di raggi di centro  $O_s$  e fissiamo il raggio parallelo all'asse  $Ox$  come asse polare. Muovendoci su di esso si giunge in  $O_s$  con un certo valore per  $\vartheta$ ; seguendo gli altri raggi di anomalia sempre crescente (nel senso antiorario), per quanto abbiamo detto nel § 3, si ottiene in  $O_s$  un valore per  $\vartheta$  sempre più piccolo, cosicchè, tendendo una seconda volta ad  $O_s$  lungo l'asse polare, si ottiene per  $\vartheta$  un valore più piccolo di  $2(p_s - 1)\pi$  di fronte al primitivo. Esprimiamo ciò dicendo che la *variazione di  $\vartheta$  intorno ad  $O_s$*  (nel senso antiorario) è

$$-2(p_s - 1)\pi.$$

Concludendo, la funzione

$$w = u - iv = V e^{-i\vartheta}$$

è finita e continua in tutto il campo del moto, il suo modulo deve soddisfare alle (11), il suo argomento alle (12) e (12') ed alla ulteriore condizione relativa ai singoli  $O_s$ , testè specificata.

### § 7. TRASFORMAZIONE DEL CAMPO DEL MOTO.

Il campo del moto è semplicemente connesso; esso si può quindi rappresentare in modo conforme diretto<sup>(12)</sup> nel cerchio  $(0, 1)$  del piano complesso  $\zeta = \xi + i\eta$  [Fig. 7].

Conveniamo di far corrispondere il punto  $\zeta = 0$  al punto  $O$  del piano del moto, il punto  $\zeta = 1$  al punto all'infinito di  $G_1$ . Ciò posto la corrispondenza biunivoca dei punti del campo del moto con quelli del cerchio è completamente determinata.

Al punto all'infinito di  $G_r$  corrisponderà nel cerchio il punto

$$j_r = e^{i\sigma_r}$$

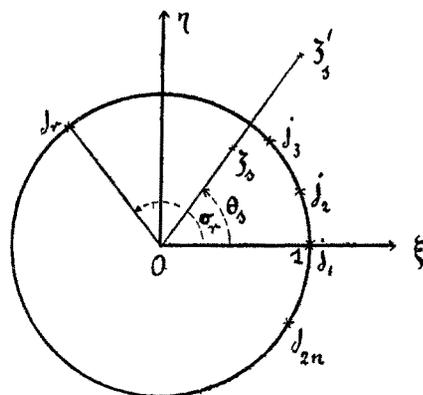


Fig. 7.

<sup>(12)</sup> Cfr. ad es. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. X.

del contorno e si avrà necessariamente

$$0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{2n} < 2\pi. \quad (13)$$

Al punto  $O_s$  corrisponderà il punto

$$\zeta_s = \rho_s e^{i\theta_s}; \quad \rho_s < 1, \quad 0 \leq \theta_s \leq 2\pi;$$

alla linea  $\lambda_r$  l'arco  $(j_r, j_{r+1})$ ; ai punti interni del campo del moto punti interni del cerchio.

Siccome è sempre possibile di rappresentare, come abbiamo già rilevato, un campo semplicemente connesso in un campo circolare, si è sicuri della esistenza di una relazione tra  $z$  e  $\zeta$  atta a rappresentare analiticamente la corrispondenza fra i due campi. Tale relazione, nel caso attuale, è ancora incognita; nulla ci vieta però di sfruttarne a priori la esistenza col considerare ad es. le funzioni  $w$  ed  $f$  del precedente paragrafo dipendenti dai punti  $\zeta$  del cerchio  $(0, 1)$  pel tramite della ancora incognita relazione. Allora tutte le condizioni interne e di contorno specificate nel § 6 si possono trasportare senz'altro dentro e sul contorno del cerchio.

### § 8. LA FUNZIONE $f(\zeta)$ .

La funzione  $f(\zeta) = \varphi + i\psi$  deve essere regolare uniforme in tutto il campo per  $|\zeta| < 1$ ; sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$  deve soddisfare, a norma delle (8), alle condizioni

$$\psi = \psi_r, \quad \text{sull'arco } (j_r, j_{r+1}), \quad (14)$$

le  $\psi_r$  essendo costanti.

Per costruire tale  $f$  consideriamo la funzione

$$\log \left( \sqrt{j_r} - \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} \right),$$

in cui

$$\sqrt{j_r} = + e^{i \frac{\sigma_r}{2}}$$

con la determinazione  $i \frac{\sigma_r}{2}$  per  $\zeta = 0$ .

Sulla circonferenza, cioè per  $\zeta = e^{i\sigma}$ , si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{j_r} - \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} &= e^{i\frac{\sigma_r}{2}} - e^{i\left(\sigma - \frac{\sigma_r}{2}\right)} = e^{i\frac{\sigma}{2}} \left( e^{i\frac{\sigma_r - \sigma}{2}} - e^{-i\frac{\sigma_r - \sigma}{2}} \right) = \\ &= 2i e^{i\frac{\sigma}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sigma_r - \sigma}{2}. \end{aligned}$$

Ne segue che sulla circonferenza si ha

$$\log \left( \sqrt{j_r} - \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} \right) = \log \left( 2i e^{i\frac{\sigma}{2}} \right) + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_r - \sigma}{2}.$$

Si constata ora facilmente che la funzione  $f(\zeta)$  da noi cercata è la seguente:

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r \log \left( \sqrt{j_r} - \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} \right) + i\psi_{2n}.$$

Infatti per la relazione trovata sopra si ha

$$f(e^{i\sigma}) = -\frac{1}{\pi} \log \left( 2i e^{i\frac{\sigma}{2}} \right) \sum_r q_r - \frac{1}{\pi} \sum_r q_r \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_r - \sigma}{2} + i\psi_{2n},$$

la quale per la (10) diviene

$$f(e^{i\sigma}) = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r \log \operatorname{sen} \frac{\sigma_r - \sigma}{2} + i\psi_{2n}.$$

Supponiamo ora che il punto  $\zeta = e^{i\sigma}$  appartenga all'arco  $(j_h, j_{h+1})$ ,  $h = 1, 2 \dots 2n$  con  $j_{2n+1} = j_1$ . In tale ipotesi avuto riguardo alle (13) si ha

$$0 = \sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma_h \leq \sigma \leq \sigma_{h+1} \dots < \sigma_{2n} < 2\pi.$$

Avremo quindi

$$-\pi \leq \frac{\sigma_r - \sigma}{2} \leq 0, \quad \text{per } r = 1, 2 \dots h;$$

$$0 \leq \frac{\sigma_r - \sigma}{2} \leq \pi, \quad \text{per } r = h+1, h+2 \dots 2n.$$

Perciò il coefficiente di  $i$  nella  $f(e^{i\sigma})$  è

$$\psi = -\sum_1^h q_r + \psi_{2n}, \quad \text{sull'arco } (j_h, j_{h+1});$$

ossia, per le (9),

$$\begin{aligned} \psi &= -(\psi_{2n} - \psi_1 + \psi_1 - \psi_2 + \dots + \psi_{h-2} - \psi_{h-1} + \psi_{h-1} - \psi_h) + \psi_{2n} = \\ &= \psi_h, \text{ sull'arco } (j_h, j_{h+1}). \end{aligned}$$

Le (14) pertanto sono soddisfatte e la  $f(\zeta)$  data sopra è la funzione richiesta. Assumendo poi

$$\psi_{2n} = 0$$

(costante inessenziale pel nostro problema) abbiamo in definitiva

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r \log \left( \sqrt{j_r} - \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} \right), \quad (15)$$

che è definita a meno di una costante reale, inessenziale essa pure pel problema.

### § 9. LA FUNZIONE $w(\zeta)$ .

Per le (11) la funzione  $w(\zeta)$  nel piano della variabile  $\zeta$  deve soddisfare alle condizioni

$$|w| = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ per } |\zeta| = 1; \\ 0, \text{ per } \zeta = \zeta_s; \\ \text{valore finito e } > 0 \text{ per i rimanenti punti } |\zeta| < 1. \end{array} \right\}. \quad (16)$$

Il suo argomento  $-\mathcal{S}$  inoltre varia tra  $0$  e  $2(n-1)\pi$  quando si percorre la circonferenza nel senso positivo a partire da  $\zeta = j_1 = 1$ . Nel punto  $\zeta_s$ , corrispondente allo spartiacque  $O_s$  nel quale deve annullarsi il modulo di  $w$ , il suo argomento  $-\mathcal{S}$  assume un determinato valore che dipende dal cammino percorso per giungere in  $\zeta_s$ . In particolare la *variazione di  $-\mathcal{S}$  intorno al punto  $\zeta_s$*  (nel senso antiorario) è  $2(p_s - 1)\pi$  (§ 3).

Per costruire la funzione  $w(\zeta)$  che soddisfa alle condizioni predette, consideriamo la funzione

$$w_s(\zeta) = \left( \frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} \right)^{p_s - 1},$$

nella quale

$$\zeta'_s = \frac{\zeta_s}{\rho_s^2} = \frac{e^{i\theta_s}}{\rho_s}$$

è l'immagine reciproca di  $\zeta_s$  rispetto alla circonferenza  $(0, 1)$ .

È noto che sui punti della circonferenza si ha

$$\left| \frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} \right| = 1;$$

ne segue che

$$|w_s(e^{i\sigma})| = 1.$$

Si ha inoltre evidentemente (poichè  $p_s \geq 2$ )

$$|w_s(\zeta_s)| = 0.$$

Vediamo infine il comportamento dell'argomento di  $\zeta_s$  nel punto  $\zeta_s$ . Si prenda perciò  $\zeta$  in un intorno di  $\zeta_s$  in modo che sia

$$\zeta = \zeta_s + \varepsilon e^{i\sigma}$$

in cui  $\varepsilon$  è reale e tale da potersi considerare infinitesimo del 1.º ordine rispetto all'unità. Per questa  $\zeta$  avremo pertanto, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo,

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} = \frac{\varepsilon e^{i\sigma}}{e^{i\theta_s} - \varepsilon \rho_s e^{i\sigma}} = \varepsilon e^{i(\sigma - \theta_s)}.$$

Quindi l'argomento del 1.º membro, a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ , è

$$\sigma - \theta_s$$

e poichè esso è indipendente da  $\varepsilon$  avremo ancora, passando al limite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \frac{\varepsilon e^{i\sigma}}{e^{i\theta_s} - \varepsilon \rho_s e^{i\sigma}} = \sigma - \theta_s.$$

Perciò la variazione di tale argomento attorno a  $\zeta_s$ , nel verso positivo, è  $2\pi$ , tale essendo quella di  $\sigma$ . Per conseguenza l'

$$\arg w_s = (p_s - 1) \arg \frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta}$$

varia attorno a  $\zeta_s$  di

$$2\pi(p_s - 1).$$

Ciò premesso la funzione

$$\Pi_s w_s(\zeta) = \Pi_s \left( \frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} \right)^{p_s - 1}$$

soddisfa manifestamente alle (16). La variazione del suo argomento in un generico punto  $\zeta_s$  si riduce esclusivamente a quella dell'argomento del suo fattore  $w_s$ , ed è quindi  $2\pi(p_s - 1)$ . Per conseguenza quando si percorre la circonferenza nel senso delle  $\sigma$  crescenti l'argomento  $\Pi_s w_s(\zeta)$  cresce di

$$2\pi(\sum p_s - m)$$

ossia, per la (3), di

$$2\pi(n - 1).$$

La  $\Pi_s w_s(\zeta)$  soddisfa pertanto alle condizioni imposte alla  $w(\zeta)$ , perciò ne differirà al più per un fattore esponenziale  $e^{i\sigma_0}$ ; avremo dunque

$$w(\zeta) = e^{i\sigma_0} \Pi_s \left( \frac{1}{\rho_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} \right)^{p_s - 1}$$

D'altra parte, per le convenzioni fatte, si deve avere

$$w = 1, \quad \text{per } \zeta = 1,$$

e quindi

$$e^{i\sigma_0} \Pi_s \left( \frac{1}{\rho_s} \frac{1 - \zeta_s}{\zeta'_s - 1} \right)^{p_s - 1} = 1.$$

Eliminando  $\sigma_0$  nella precedente per mezzo di quest'ultima otteniamo in definitiva

$$w(\zeta) = \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - 1}{1 - \zeta_s} \frac{\zeta - \zeta_s}{\zeta'_s - \zeta} \right)^{p_s - 1} \quad (17)$$

(13) Notiamo che per maggior generalità abbiamo preso ad arbitrio l'origine del sistema di riferimento nel campo del moto. In casi particolari però può essere opportuno scegliere un punto determinato. Ad es. quando si ha un solo spartiacque si presenta spontaneo il porre in esso l'origine delle coordinate. Così fecero il CISOITI (loc. cit. (1), p. 296) ed il BOGGIO (loc. cit. (2), p. 1104).

In tal caso, poichè il centro del cerchio rappresentativo è l'immagine dell'unico spartiacque la cui  $\rho$  corrispondente quindi è nulla e la  $p$  è  $n$ , la (17) diviene  $w = \zeta^{n-1}$ , da cui

$$\zeta = {}^{n-1}\sqrt{w}.$$

È questa la trasformazione cui ricorre il BOGGIO (loc. cit. (2), p. 1116). Nel caso particolare  $n = 2$  essa diviene

$$\zeta = w;$$

per essa il campo trasformato è il cerchio rappresentativo del vettore velocità. Si ha in tal modo, come fa rilevare il BOGGIO, la rappresentazione classica introdotta da KIRCHHOFF.

Con più di uno spartiacque, e quindi  $n > 2$ , tale rappresentazione non è più possibile sul cerchio come non lo è l'altra che si ottiene con la trasformazione  $\zeta = {}^{n-1}\sqrt{w}$ , del BOGGIO.

## § 10. RELAZIONI TRA LE COSTANTI.

La (17) mostra che la funzione  $w(\zeta)$  nel punto  $\zeta = \zeta_s$  ha uno zero di ordine  $p_s - 1$ . Per la (7) abbiamo

$$w = \frac{df}{dz},$$

od anche

$$w = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}.$$

Tenuto presente che  $\frac{d\zeta}{dz}$  non si annulla mai entro il campo del moto  $A$ , poichè la rappresentazione di  $A$  sul cerchio non ha punti singolari, ne segue che la  $\frac{df}{d\zeta}$  ha uno zero di ordine  $p_s - 1$  in  $\zeta = \zeta_s$ . Perciò la  $\frac{df}{d\zeta}$  e le sue successive  $p_s - 2$  derivate devono annullarsi per  $\zeta = \zeta_s$ :

$$\frac{d^{\mu_s} f}{d\zeta^{\mu_s}} = 0, \quad \text{per } \zeta = \zeta_s; \quad (\mu_s = 1, 2, \dots, p_s - 1). \quad (18)$$

Dalla (15) abbiamo

$$\frac{df}{d\zeta} = -\frac{1}{\pi} \sum_r \frac{q_r}{\zeta - j_r}, \quad (19)$$

da cui

$$\frac{d^{\mu_s} f}{d\zeta^{\mu_s}} = \frac{(-1)^{\mu_s}}{\pi} (\mu_s - 1)! \sum_r \frac{q_r}{(\zeta - j_r)^{\mu_s}}.$$

Per questa le (18) equivalgono alle

$$\sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}} = 0, \quad \begin{cases} \mu_s = 1, 2, \dots, p_s - 1, \\ s = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (20)$$

Sono queste, in virtù della (3),

$$\sum_s p_s - m = n - 1$$

relazioni *complesse* cui devono soddisfare le costanti del problema; le (20) importano quindi

$$2(n - 1)$$

relazioni *reali* tra dette costanti.

Poichè per  $\zeta = e^{i\sigma}$  si ha, (16),

$$w(e^{i\sigma}) = e^{-i\vartheta},$$

dalle (12) e (17) segue

$$w(j_r) = e^{-i\vartheta_r} = \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - 1}{1 - \zeta_s} \frac{j_r - \zeta_s}{\zeta'_s - j_r} \right)^{p_s - 1}, \quad (21)$$

le quali permettono di eliminare le  $j_r$  nelle (20). Fissati  $n, m$  ed uno degli  $\binom{n-2}{m-2}$  gruppi di valori  $p_1, p_2 \dots p_m$ , le (20) si possono pertanto considerare come relazioni che devono intercedere tra le *portate* ( $q_r$ ), le *direzioni asintotiche* delle vene ( $\vartheta_r$ ) e le *costanti* che fissano le ubicazioni degli spartiacque ( $\zeta_s$ ).

Ritourneremo in seguito su queste relazioni (§ 15). Notiamo però fin d'ora che il loro numero  $2(n-1)$  è *indipendente* dal numero  $m$  degli spartiacque.

#### § 11. DETERMINAZIONE DEL CAMPO DEL MOTO. INTEGRALE GENERALE.

Poichè conosciamo la funzione  $f$  e  $w$  nel cerchio, la relazione che ci darà  $z$  in funzione di  $\zeta$  ci farà noto  $f(z)$  e  $w(z)$ . Per ottenerla basta integrare la (7):

$$z = \int_0^\zeta \frac{1}{w} \frac{df}{d\zeta} d\zeta,$$

tenuto presente che per  $z=0$  si ha  $\zeta=0$ .

Per le (17) e (19) si ha poi esplicitamente

$$z = -\frac{1}{\pi} \Pi_s \left( \frac{1 - \zeta_s}{\zeta'_s - 1} \right)^{p_s - 1} \cdot \sum_r q_r \int_0^\zeta \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - \zeta}{\zeta - \zeta_s} \right)^{p_s - 1} \frac{d\zeta}{\zeta - j_r}, \quad (22)$$

che stabilisce la cercata relazione tra il piano del moto ed il piano ausiliario  $\zeta$ . Si presenta ora il fatto notevole che gli integrali del 2.º membro si possono valutare in termini finiti.

Prima di procedere alla loro valutazione è opportuno richiamare l'attenzione del lettore sopra la circostanza seguente.

Come risulta dalla (22), a priori si è tratti a ritenere che la  $z$  divenga infinita non solo nei punti  $j_r$ , ma anche, essendo  $p_s \geq 2$ , nei punti  $\zeta_s$ . Ora

rammentiamo che mentre il divenire  $z$  infinita per  $\zeta = j_r$ , risponde alla natura della questione in quanto si tratta dei punti all'infinito del piano del moto (§ 7), l'altra circostanza contraddirebbe l'ipotesi II (§ 1) che i punti spartiacque corrispondenti agli  $\zeta_s$  siano tutti al finito. La contraddizione però è soltanto apparente perchè, come ora faremo vedere, i coefficienti dei termini che diverrebbero infiniti per  $\zeta = \zeta_s$  sono nulli in virtù delle (20). Faremo vedere in seguito (§ 15) che reciprocamente le (20) si possono dedurre esprimendo che la  $z$  definita dalla (22) debba conservarsi finita nei punti  $\zeta_s$ .

La funzione integranda che compare nel 2.<sup>o</sup> membro della (22) è razionale fratta irriducibile nella variabile  $\zeta$ . Scomponendola in funzioni elementari col noto metodo si può scrivere

$$\frac{1}{\zeta - j_r} \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - \zeta}{\zeta - \zeta_s} \right)^{p_s-1} = \frac{1}{\zeta - j_r} \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right)^{p_s-1} + \sum_{s \neq r} \frac{A_{rs\nu_s}}{(\zeta - \zeta_s)^{\nu_s}}, \quad (23)$$

in cui  $\nu_s = 1, 2 \dots p_s - 1$  ed i coefficienti  $A_{rs\nu_s}$  seguono la seguente legge di formazione: posto per semplicità

$$F(\zeta) = \Pi_k (\zeta'_k - \zeta)^{p_k-1}, \quad G(\zeta) = \frac{\Pi_k (\zeta - \zeta_k)^{p_k-1}}{(\zeta - \zeta_s)^{p_s-1}} \quad (24)$$

in cui  $k = 1, 2 \dots m$ , si ha

$$\left. \begin{aligned} A_{rs p_s-1} &= \frac{F(\zeta_s)}{(\zeta_s - j_r) G(\zeta_s)}, & F_1(\zeta) &= \frac{F(\zeta) - A_{rs p_s-1} (\zeta - j_r) G(\zeta)}{\zeta - \zeta_s}; \\ A_{rs p_s-2} &= \frac{F_1(\zeta_s)}{(\zeta_s - j_r) G(\zeta_s)}, & F_2(\zeta) &= \frac{F_1(\zeta) - A_{rs p_s-2} (\zeta - j_r) G(\zeta)}{\zeta - \zeta_s}; \\ &\dots & & \dots \\ A_{rs 2} &= \frac{F_{p_s-3}(\zeta_s)}{(\zeta_s - j_r) G(\zeta_s)}, & F_{p_s-2}(\zeta) &= \frac{F_{p_s-3}(\zeta) - A_{rs 2} (\zeta - j_r) G(\zeta)}{\zeta - \zeta_s}; \\ A_{rs 1} &= \frac{F_{p_s-2}(\zeta_s)}{(\zeta_s - j_r) G(\zeta_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Come si vedrà, non avremo bisogno di procedere al calcolo effettivo di questi coefficienti. Sostituiamo la (23) in (22) ed eseguiamo l'integrazione indicata; ad operazione compiuta si ottiene

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{1}{\pi} \Pi_s \left( \frac{1 - \zeta_s}{\zeta'_s - 1} \right)^{p_s-1} \cdot \sum_r q_r \left\{ \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right)^{p_s-1} \log \left( 1 - \frac{\zeta}{j_r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s \neq r} \frac{A_{rs\nu_s}}{(\nu_s - 1)} \left[ \frac{1}{(\zeta - \zeta_s)^{\nu_s-1}} - \frac{1}{(-\zeta_s)^{\nu_s-1}} \right] + \sum_s A_{rs 1} \log \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_s} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

in cui col simbolo  $\Sigma_{sv_s}$  intendiamo che l'indice  $v_s$  assuma i valori  $2, 3 \dots p_s - 1$ , esclusa quindi l'unità.

Prendiamo a considerare quella parte del 2.<sup>o</sup> membro che si ottiene escludendo il 1.<sup>o</sup> dei termini entro le  $\left\{ \right\}$ , divisa pel fattore che precede il simbolo  $\Sigma_r$ . Il quoziente che si ottiene si può scrivere

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r q_r & \left\{ - \Sigma'_{sv_s} \frac{A_{rv_s}}{(v_s - 1)} \left[ \frac{1}{(\zeta - \zeta_s)^{v_s - 1}} - \frac{1}{(-\zeta_s)^{v_s - 1}} \right] + \Sigma_s A_{rs1} \log \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_s} \right) \right\} = \\ & = - \Sigma'_{sv_s} \frac{1}{(v_s - 1)} \left[ \frac{1}{(\zeta - \zeta_s)^{v_s - 1}} - \frac{1}{(-\zeta_s)^{v_s - 1}} \right] \cdot \Sigma_r q_r A_{rsv_s} + \\ & + \Sigma_s \log \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_s} \right) \Sigma_r q_r A_{rs1}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Studiamo in particolare le

$$\Sigma_r q_r A_{rsv_s}, \quad \begin{cases} s = 1, 2, \dots, m; \\ v_s = 1, 2, \dots, p_s - 1, \end{cases}$$

che manifestamente sono i coefficienti dei termini della (26) che diventano infiniti per  $\zeta = \zeta_s$ .

Per la (24) e (25) si constata che il coefficiente  $A_{rsp_s-1}$  è della forma

$$\frac{a}{\zeta_s - j_r},$$

dove  $a$  non dipende dall'indice  $r$ , indice che entra nel denominatore  $\zeta_s - j_r$  soltanto. Avuto poi riguardo alla forma di  $F_1$ , (25), ne segue che  $A_{rsp_s-2}$  si può mettere sotto forma di frazione il cui numeratore dipende dall'indice  $r$  pel tramite di  $j_r$  soltanto, che vi compare al più al 1.<sup>o</sup> grado; il denominatore invece ne dipende pel solo fattore  $(\zeta_s - j_r)^2$ . Potremo anche scrivere quindi

$$A_{rsp_s-2} = \frac{b}{\zeta_s - j_r} + \frac{c}{(\zeta_s - j_r)^2},$$

dove  $b$  e  $c$  sono indipendenti dall'indice  $r$ . Procedendo in questa indagine sui coefficienti  $A_{rsv_s}$ , la loro legge di formazione (25), per le (24), ci permette di asserire che il generico  $A_{rsv_s}$  si può scrivere come rapporto di un polinomio intero in  $j_r$  al massimo di grado  $p_s - v_s + 1$  diviso per  $(\zeta_s - j_r)^{p_s - v_s}$  e

che  $r$  vi entra solo pel tramite di  $j_r$ . Dopo ciò possiamo scrivere

$$A_{rs\nu_s} = \frac{a_{\nu_s 1}}{\zeta_s - j_r} + \frac{a_{\nu_s 2}}{(\zeta_s - j_r)^2} + \dots + \frac{a_{\nu_s p_s - \nu_s}}{(\zeta_s - j_r)^{p_s - \nu_s}},$$

in cui i coefficienti  $a_{\nu_s \mu_s}$ , ( $\mu_s = 1, 2 \dots p_s - \nu_s$ ) sono indipendenti dall'indice  $r$ . Avremo dunque ancora

$$\sum_r q_r A_{rs\nu_s} = \sum_{\mu_s} a_{\nu_s \mu_s} \sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}}. \quad (27')$$

Poichè, fissato  $s$ ,  $\nu_s$  varia tra 1 e  $p_s - \nu_s$ , tenuto presente che il minimo valore di  $\nu_s$  è 1 ne segue che  $\mu_s$  varia al massimo tra 1 e  $p_s - 1$ , tra gli stessi valori quindi tra i quali varia il  $\mu_s$  delle (18) e (20).

Ma per le (20) è

$$\sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}} = 0;$$

si ha quindi identicamente

$$\sum_r q_r A_{rs\nu_s} = 0,$$

cioè sono identicamente nulli i coefficienti dei termini della (26) che diverrebbero infiniti per  $\zeta = \zeta_s$ .

Perciò la (26) si scrive

$$z = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r \Pi_s \left| \frac{1 - \zeta_s}{\zeta_s - 1} \frac{\zeta_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right|^{p_s - 1} \log \left( 1 - \frac{\zeta}{j_r} \right).$$

Poichè per le (21)

$$\Pi_s \left| \frac{1 - \zeta_s}{\zeta_s - 1} \frac{\zeta_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right|^{p_s - 1} = e^{i\vartheta_r},$$

si ha in definitiva

$$z = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r e^{i\vartheta_r} \log \left( 1 - \frac{\zeta}{j_r} \right). \quad (28)$$

È questa la relazione che stabilisce, in termini finiti, la configurazione del campo del moto.

Essa si può in certo qual modo considerare quale *integrale generale* dei moti in questione. Infatti essa, unitamente alla (17) che esprime  $w$  in termini finiti di  $\zeta$ , definisce non solo la configurazione geometrica del campo del moto, ma altresì la distribuzione della velocità nello stesso.

## § 12. REVERSIBILITÀ DEL FENOMENO.

Se nella (28) si cambia il segno a tutte le  $q_r$  e a tutte le  $e^{i\theta_r}$ , la  $z$  non cambia. Ciò vuol dire che il campo del moto non cambia quando si invertono le correnti. Basta osservare che il cambio fatto equivale a mutar segno alle portate ed a invertire il senso delle velocità asintotiche e che conseguentemente la  $f(\zeta)$ , data dalla (15), cambia soltanto di segno.

Quindi, per la (7), anche  $w$  cambia semplicemente di segno, cioè la velocità viene invertita in ciascun punto del campo.

## § 13. COMPORTAMENTO DEI PELI LIBERI.

Sul pelo libero  $\lambda_r$  è  $\zeta = e^{i\sigma}$  con  $\sigma_r \leq \sigma \leq \sigma_{r+1}$  e quindi per essere su esso  $V = 1$ , dalla (17)

$$w = e^{-i\vartheta} = \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - 1}{1 - \zeta_s} \frac{e^{i\sigma} - \zeta_s}{\zeta'_s - e^{i\sigma}} \right)^{p_s - 1}$$

da cui

$$\vartheta = i \sum_s (p_s - 1) \log \frac{\zeta'_s - 1}{1 - \zeta_s} \frac{e^{i\sigma} - \zeta_s}{\zeta'_s - e^{i\sigma}}.$$

con la determinazione

$$\vartheta = 0 \quad \text{per} \quad \sigma = 0.$$

Tenuto presente che

$$\zeta_s = \rho_s e^{i\theta_s}, \quad \zeta'_s = \frac{e^{i\theta_s}}{\rho_s},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \log \frac{\zeta'_s - 1}{1 - \zeta_s} \frac{e^{i\sigma} - \zeta_s}{\zeta'_s - e^{i\sigma}} &= i \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_s^2) \operatorname{sen}(\sigma - \theta_s)}{(1 + \rho_s^2) \cos(\sigma - \theta_s) - 2\rho_s} + \\ &+ i \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_s^2) \operatorname{sen} \theta_s}{(1 + \rho_s^2) \cos \theta_s - 2\rho_s} \end{aligned}$$

scegliendo quella determinazione per cui il 2.º membro si annulla per  $\sigma = 0$ .

Abbiamo quindi sulle  $\lambda_r$ :

$$\mathfrak{S} = -\sum_s (p_s - 1) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_s^2) \operatorname{sen}(\sigma - \theta_s)}{(1 + \rho_s^2) \cos(\sigma - \theta_s) - 2\rho_s} + \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_s^2) \operatorname{sen} \theta_s}{(1 + \rho_s^2) \cos \theta_s - 2\rho_s} \right\}.$$

Derivando rispetto a  $\sigma$  si ottiene

$$\frac{d\mathfrak{S}}{d\sigma} = -\sum_s \frac{(p_s - 1)(1 - \rho_s^2)}{1 + \rho_s^2 - 2\rho_s \cos(\sigma - \theta_s)} \quad (29)$$

che è sempre negativa per tutti i valori di  $\sigma$ ; perciò l'angolo  $\mathfrak{S}$  lungo le  $\lambda_r$ , nel senso positivo, è sempre decrescente e quindi le  $\lambda_r$  non hanno flessi, come sappiamo deve essere.

Su  $\lambda_r$ , trattandosi di *linea di flusso*,  $d\mathfrak{S}$  è l'*angolo di contingenza*; quindi

$$\frac{d\mathfrak{S}}{ds}$$

( $ds$  è l'elemento di contorno del campo preso positivamente nel senso positivo del contorno stesso) è la *curvatura*.

Poichè, per la (29), la curvatura è sempre *negativa* le  $\lambda_r$  *rivolgono la convessità al campo del moto*. Constatiamo così a posteriori quanto si è già detto (§ 2).

Se si osserva poi che, essendo sulle  $\lambda_r$ ,  $|w| = 1$ , per la (7) è

$$ds = |dz| = |df|$$

e quindi, (19),

$$ds = \frac{1}{\pi} \left| \sum_r \frac{q_r}{e^{i\sigma} - j_r} \right| d\sigma,$$

per la (29) si ottiene la seguente espressione per la curvatura:

$$\frac{d\mathfrak{S}}{ds} = -\pi \frac{\sum_s \frac{(p_s - 1)(1 - \rho_s^2)}{1 + \rho_s^2 - 2\rho_s \cos(\sigma - \theta_s)}}{\left| \sum_r \frac{q_r}{e^{i\sigma} - j_r} \right|}.$$

Il denominatore diviene infinito nei punti  $\zeta = e^{i\sigma} = j_r$ , ed in questi soltanto; la curvatura è quindi nulla nei punti all'infinito a monte ed a valle di ciascuna  $\lambda_r$ , come del resto si sa dover essere.

## § 14. EQUAZIONI PARAMETRICHE DEI PELI LIBERI.

Sul generico pelo libero  $\lambda_h$  ( $h = 1, 2 \dots 2n$ ) si ha  $\zeta = e^{i\sigma}$  con

$$\sigma_h \leq \sigma \leq \sigma_{h+1}.$$

Pei punti di  $\lambda_h$  la (28) si può scrivere quindi

$$z = -\frac{1}{\pi} \sum_r q_r e^{i\vartheta_r} \log(1 - e^{i(\sigma - \sigma_r)}).$$

Poichè

$$\begin{aligned} 1 - e^{i(\sigma - \sigma_r)} &= e^{i\frac{\sigma - \sigma_r}{2}} \left( e^{-i\frac{\sigma - \sigma_r}{2}} - e^{i\frac{\sigma - \sigma_r}{2}} \right) \\ &= -2i e^{i\frac{\sigma - \sigma_r}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2}, \end{aligned}$$

abbiamo ancora

$$\log(1 - e^{i(\sigma - \sigma_r)}) = \begin{cases} \log(-2i) + i\frac{\sigma - \sigma_r}{2} + \log \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2}, & \text{per } r \leq h; \\ \log(-2i) + i\frac{\sigma - \sigma_r}{2} + i\pi + \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right|, & \text{per } r > h. \end{cases}$$

La  $z$  precedente si scrive dunque

$$z = -\frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \log(-2i) + i\frac{\sigma}{2} \right] \sum_1^{2n} q_r e^{i\vartheta_r} - \frac{i}{2} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r e^{i\vartheta_r} + \sum_1^{2n} q_r e^{i\vartheta_r} \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right| + i\pi \sum_{h+1}^{2n} q_r e^{i\vartheta_r} \right\}. \quad (30)$$

Il 2.<sup>o</sup> membro si semplifica pel fatto che si ha

$$\sum_r q_r e^{i\vartheta_r} = 0, \quad (31)$$

come ora dimostreremo. Scriviamo a questo scopo, tenendo conto della (21),

$$\sum_r q_r e^{i\vartheta_r} = \Pi_s \left( \frac{1 - \zeta_s}{\zeta'_s - 1} \right)^{p_s - 1} \cdot \sum_r q_r \Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right)^{p_s - 1}.$$

D'altra parte si può sempre eseguire la scomposizione

$$\Pi_s \left( \frac{\zeta'_s - j_r}{j_r - \zeta_s} \right)^{p_s - 1} = b_{s0} + \frac{b_{s1}}{\zeta_s - j_r} + \frac{b_{s2}}{(\zeta_s - j_r)^2} + \dots + \frac{b_{sp_s - 1}}{(\zeta_s - j_r)^{p_s - 1}},$$

in cui le  $b_{s\mu_s}$ , ( $\mu_s = 0, 1, 2, \dots p_s - 1$ ), non dipendono dall'indice  $r$ .

Per questa la precedente espressione diviene

$$\sum_r q_r e^{i\vartheta_r} = \Pi_s \left( \frac{1 - \zeta_s}{\zeta_s - 1} \right)^{p_s - 1} \cdot \sum_{\mu_s} b_{s\mu_s} \sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}}.$$

Ma le

$$\sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}}$$

sono tutte nulle; infatti per  $\mu_s = 1, 2 \dots p_s - 1$  esse coincidono coi primi membri delle (20), per  $\mu_s = 0$  si ha il 1.<sup>o</sup> membro della (10). Sarà nullo quindi ancora il 2.<sup>o</sup> membro della precedente relazione. La (31) è così dimostrata.

Dopo ciò la (30) si scrive

$$z = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{i}{2} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r e^{i\vartheta_r} - \sum_1^{2n} q_r e^{i\vartheta_r} \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right| + i \pi \sum_1^h q_r e^{i\vartheta_r} \right\}.$$

Separando la parte reale dall'immaginaria otteniamo le *equazioni parametriche* dei peli liberi

$$x = \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r \operatorname{sen} \vartheta_r - \pi \sum_1^h q_r \operatorname{sen} \vartheta_r - \sum_1^{2n} q_r \cos \vartheta_r \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right| \right\},$$

$$y = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r \cos \vartheta_r + \pi \sum_1^h q_r \cos \vartheta_r - \sum_1^{2n} q_r \operatorname{sen} \vartheta_r \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right| \right\},$$

le quali, posto per semplicità,

$$a = -\frac{1}{2\pi} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r \operatorname{sen} \vartheta_r - \sum_1^h q_r \operatorname{sen} \vartheta_r,$$

$$b = \frac{1}{2\pi} \sum_1^{2n} \sigma_r q_r \cos \vartheta_r + \sum_1^h q_r \cos \vartheta_r,$$

si scrivono

$$x = a - \frac{1}{\pi} \sum_r q_r \cos \vartheta_r \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right|,$$

$$y = b - \frac{1}{\pi} \sum_r q_r \operatorname{sen} \vartheta_r \log \left| \operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_r}{2} \right|,$$

( $r = 1, 2 \dots 2n$ ).

§ 15. SULLE RELAZIONI  $\sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}}$ .

Le relazioni (20) sono state trovate come condizioni necessarie perchè la velocità abbia uno zero di ordine  $p_s - 1$  nello spartiacque  $O_s$  (§ 10). Le abbiamo sfruttate poi nello stabilire la corrispondenza tra il piano del moto e quello del cerchio rappresentativo (§ 11). In virtù delle (20) infatti abbiamo dimostrato che sono nulle identicamente le somme

$$\sum_r q_r A_{rs\nu_s}.$$

In conseguenza di ciò l'integrale generale (26) si è potuto mettere sotto la forma (28) e nel passare dalla (26) alla (28) sono spariti quei termini che avrebbero fatto diventare infinita la  $\bar{z}$  per  $\zeta = \zeta_s$ , cioè negli spartiacque  $O_s$ .

Si sarebbe egualmente giunti alle (20) imponendo senz'altro alla (26) di essere finita per  $\zeta = \zeta_s$ , come richiede l'ipotesi II che gli spartiacque giacciono al finito, cosa che abbiamo già annunciato nel § 11.

Infatti, tenuto presente il significato della (27), è necessario e sufficiente perciò che siano identicamente

$$\sum_r q_r A_{rs\nu_s} = 0.$$

Ma per la (27') queste divengono

$$\sum_{\mu_s} \alpha_{\nu_s \mu_s} \sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}} = 0, \quad (32)$$

in cui  $\mu_s = 1, 2, \dots, p_s - \nu_s$ ,  $\nu_s = 1, 2, \dots, p_s - 1$ .

Le (32) devono essere verificate indipendentemente dalla ubicazione degli spartiacque nel campo del moto e quindi comunque siano prefissate nel cerchio le  $\zeta_s$ . E poichè i coefficienti  $\alpha_{\nu_s \mu_s}$  sono funzioni esclusivamente delle  $\zeta_s$  e delle  $p_s$  (non dipendendo dalle  $q_r$  e dalle  $j_r$ ), seguono come condizioni necessarie e sufficienti per l'annullarsi identicamente dei primi membri delle (32) le (20):

$$\sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}} = 0.$$

Il metodo da noi seguito per trovare le (20) coincide con quello impie-

gato dal BOGGIO. Nel caso da lui studiato si ha  $m = 1$  ed  $n$  qualunque. Egli assume come origine delle coordinate nel campo  $A$  l'unico spartiacque; riportandoci alle nostre convenzioni e notazioni si avrebbe dunque una sola  $\zeta_s$  coincidente col centro del cerchio rappresentativo:

$$\zeta_1 = 0.$$

Conseguentemente per le (3) si ha  $p_1 = n$  e quindi  $\mu_1 = h = 1, 2 \dots n - 1$ ; le (20) si riducono in tal caso alle  $n - 1$  relazioni complesse

$$\sum_r \frac{q_r}{j_r^n} = 0 \quad (14).$$

Per  $n = 2$  queste danno la sola relazione

$$\sum_r \frac{q_r}{j_r} = 0, \quad (15).$$

Il CISOTTI ha trovato questa formula con un altro metodo.

Egli parte dal teorema dovuto al LEVI CIVITA (16), valevole pure nel nostro caso e che è contenuto nella seguente formula:

$$\int_s \frac{d\varphi}{dn} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds = \frac{1}{2} \int_s V^2 e^{i\alpha} ds, \quad (33)$$

dove  $\varphi$  è il potenziale della velocità,  $s$  il contorno del campo del moto,  $n$  la normale ad  $s$  rivolta all'interno del campo ed  $\alpha$  l'angolo che essa forma con l'asse delle  $x$ . Questo teorema non importa però alcuna nuova condizione tra le costanti, ma è implicitamente contenuto nelle (20) e la (10). Infatti sia  $\Omega_r$  la sezione normale della vena  $G_r$  all' $\infty$ . Poichè si ha

$$\frac{d\varphi}{dn} = \begin{cases} 0, & \text{sulle } \lambda_r; \\ (-1)^{r-1}, & \text{su } \Omega_r, \end{cases}$$

essendo affluenti le vene  $G_r$  di indice dispari, ed ancora

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u + iv = e^{i\theta_r}, \quad \text{su } \Omega_r,$$

(14) T. BOGGIO, loc. cit. (3), p. 1118, form. 14.

(15) U. CISOTTI, loc. cit. (4), p. 207, form. 45.

(16) T. LEVI-CIVITA, *Sulla contrazione delle vene liquide*, Atti del R. Istituto Veneto di Sc. Lett. ed Arti, t. LXIV, pp. 1466-1467.

il 1.° integrale della (33) diviene

$$\sum_r (-1)^{r-1} \Omega_r e^{i\vartheta_r}.$$

Il 2.° integrale, per essere  $V = 1$  su tutto  $s$ , è identicamente nullo. Tenendo conto poi che

$$q_r = (-1)^{r-1} \Omega_r,$$

la (33) si identifica colla (31):

$$\sum_r q_r e^{i\vartheta_r} = 0,$$

la quale sappiamo è identicamente soddisfatta in virtù della (10) e delle (20).

#### § 16. SUGLI ELEMENTI CARATTERISTICI DEL PROBLEMA.

Fissato  $n$  e poi  $m$  nei limiti concessi dalla (4) ed inoltre le  $p_1, p_2 \dots p_m$  compatibilmente con le (3) e (5), sono *elementi caratteristici* del problema:

le  $2n$  portate  $q_1, q_2 \dots q_{2n}$ ;

i  $2n - 1$  angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{2n}$  (per convenzione  $\vartheta_1 = 0$ ) che individuano le direzioni asintotiche delle vene;

le  $2(m - 1)$  costanti  $\rho$  e  $\theta$  che individuano  $m - 1$  dei punti  $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_m$ . Questi punti del cerchio sono le immagini degli spartiacque  $O_1, O_2 \dots O_m$  per fissare la posizione dei quali occorrono effettivamente  $2m$  parametri. Ma bisogna por mente che nel nostro fenomeno è essenziale non l'ubicazione assoluta degli  $m$  punti, bensì quella relativa di  $m - 1$  di essi al rimanente; per questo sono necessari  $2(m - 1)$  parametri e come tali noi possiamo assumere le  $\rho$  e  $\theta$  di  $m - 1$  punti  $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_m$  del cerchio.

Complessivamente il numero degli elementi caratteristici è

$$2n + 2n - 1 + 2(m - 1) = 4n + 2m - 3.$$

Essi devono soddisfare alle relazioni (10) e (20):

$$\sum_r q_r = 0, \quad \sum_r \frac{q_r}{(\zeta_s - \zeta_r)^{\mu_s}} = 0,$$

le quali importano, come sappiamo,

$$1 + 2(n - 1) = 2n - 1$$

relazioni reali tra detti elementi.

*Si supponga ora che siano state prefissate le portate e le direzioni asintotiche delle  $n$  vene affluenti.*

È sotto questa forma del resto che si presenta spontaneamente da sé la questione, come infatti si suppose nei primi due paragrafi; si lanciano cioè  $n$  determinate vene verso una località dove avvengono  $m$  urti; a regime conseguito quale è il campo del moto?

Quindi figurano tra i dati della questione le  $n$  portate  $q_1, q_2 \dots q_{2n-1}$  e gli angoli  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_{2n-1}$  ( $\mathfrak{S}_1 = 0$  per convenzione). Le portate  $q_2, q_4 \dots q_{2n}$  e gli angoli  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_4 \dots \mathfrak{S}_{2n}$  relativi alle vene affluenti, più  $2(m-1)$  costanti  $\rho$ , e  $\theta$ , da cui dipende l'ubicazione di  $m-1$  spartiacque costituiscono effettivamente le *incognite* del problema.

Il loro numero è

$$n + n + 2(m-1) = 2(n+m-1).$$

Le relazioni (10) e (20), che sole intercedono tra queste, permettono di determinarne  $2n-1$ ; ne rimangono *indeterminate* pertanto  $2m-1$ .

Il problema quindi, nei termini come è stato posto, si presenta *indeterminato*. Precisamente si hanno  $2m-1$  *gradi di arbitrarietà* relativamente alle costanti  $q$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\rho$  e  $\theta$ .

In ogni caso il numero di questi gradi di arbitrarietà non dipende dal numero delle vene, ma dipende soltanto da quello degli spartiacque.

Nel caso particolare poi di  $m=1$  si ha quindi un solo grado di arbitrarietà, *qualunque sia  $n$*  <sup>(17)</sup>.

Concludendo, l'integrale generale del moto prova la possibilità di moti stazionari fra peli liberi con più spartiacque; però a vene affluenti con date portate e date direzioni asintotiche corrispondono infinite configurazioni del campo del moto e cioè in infiniti modi possono localizzarsi gli spartiacque e distribuirsi il flusso nelle vene uscenti. Si può pensare che ciò discenda dal fatto <sup>(18)</sup> che il moto dipende, non solo dai dati prefissati, ma ancora dalle circostanze precedenti lo stato di regime. Si può pensare cioè che originariamente vengano lanciate le vene affluenti, ognuna in un dato istante. Ammesso che dopo un certo tempo tutte le vene confluiscano in una stessa località, è plausibile ritenere che, a regime conseguito, il moto dipenda es-

<sup>(17)</sup> E quindi non solo per  $n=2$ , ma ancora per  $n>2$ ; questa è la modificazione da farsi alla Memoria del CISOTTI, alla quale accenna il BOGGIO (BOGGIO, p. 1119).

<sup>(18)</sup> U. CISOTTI, loc. cit. (1), p. 314.

senzialmente dall'ordine di lancio, nel tempo, oltre che dalle portate e dalle direzioni asintotiche delle vene affluenti.

Perciò (riferisco integralmente le parole del CISORTI<sup>(19)</sup> che ben s'adattano anche al caso generale) « l'esame completo della questione esigerebbe « lo studio del fenomeno dall'istante iniziale fino allo stabilirsi del regime « permanente. Ma il problema, posto in questi termini, presenta gravi difficoltà e non si intravede la speranza di arrivare in modo rigoroso ad una « soddisfacente risoluzione ».

Il PALATINI<sup>(19)</sup>, evitando queste difficoltà, ha cercato con un criterio ragionevole di togliere l'accennata indeterminazione. Fermandosi al caso particolarmente interessante dell'urto di due vene ( $n = 2$ ,  $m = 1$ ), nel quale il problema ammette una semplice infinità di soluzioni possibili, egli rileva che l'intuizione fisica fa presumere preponderante di fronte alle altre quella soluzione per la quale lo stato di regime permanente del fenomeno viene raggiunto con un minimo dispendio di energia. Egli cerca quindi i valori degli elementi caratteristici del problema pei quali l'energia del liquido è minima e trova che sono da ricercarsi tra quelli che rendono *minima la somma dei quadrati delle portate*.

È ben plausibile cercare di applicare tale criterio energetico anche al caso nostro in cui  $n$  ed  $m$  sono qualunque. Ciò facciamo nel paragrafo seguente verificando, anche per questo caso più generale, la condizione trovata dal PALATINI<sup>(20)</sup>.

<sup>(19)</sup> A. PALATINI, loc. cit. (4).

<sup>(20)</sup> Il PALATINI passa poi alla effettiva valutazione degli elementi caratteristici. Nel caso nostro più generale tale valutazione si presenta in modo piuttosto scomodo e complicato; ci limiteremo pertanto a ritrovare la condizione minimizzante l'energia. Crediamo opportuno però di accennare al fatto che nella nostra questione si potrebbe lasciare arbitrari a priori la  $m$  e le  $p$ , che farebbero parte così degli elementi caratteristici del problema. Pure con un numero maggiore di tali elementi a priori arbitrari il numero delle soluzioni possibili è espresso ancora da  $\infty^{2m-1}$  perchè per le (3) e (5), dato  $n$ , per ogni  $m$  compatibile con la (4) i valori arbitrari possibili per le  $p$  sono in numero finito. La condizione minimizzante l'energia permette di valutare tutti gli elementi caratteristici, in particolare la  $m$  e le  $p$ . Si avrebbe così la soluzione del problema: lanciate  $n$  vene con portate e direzioni asintotiche assegnate, trovare il numero degli spartiacque, quello delle vene confluenti in ciascuno di essi, le portate e le direzioni asintotiche delle vene effluenti per cui si ha un minimo di energia.

## § 17. CONDIZIONE MINIMIZZANTE L'ENERGIA.

Per applicare il criterio energetico suesposto al nostro problema conviene seguire lo stesso procedimento analitico adoperato dal PALATINI.

Sia  $D$  una regione del campo del moto *comprendente nel suo interno tutti gli spartiacque* e tale che la sua immagine  $C$  sul cerchio rappresentativo sia un *cerchio* di raggio  $\rho$  ( $\rho < 1$ ) col centro nell'origine. Naturalmente tale cerchio comprenderà nel suo interno tutti i punti  $\zeta$ , rappresentativi degli spartiacque  $O_s$ . Notiamo che la rappresentazione conforme non ha punti singolari interni per cui il contorno  $d$  della regione  $D$  è necessariamente una curva senza punti singolari.

Basta pensare che la sua immagine è la circonferenza  $c$  contorno di  $C$ . Inoltre la regione  $D$  è situata tutta al finito, e quindi finita, del campo del moto. Infatti i punti all'infinito di questo campo hanno per immagini i punti  $j$ , del contorno del cerchio rappresentativo; essi sono quindi esclusi da  $D$ .

Quando si fa tendere  $\rho$  ad 1 la circonferenza  $c$  tende al contorno del campo trasformato, corrispondentemente la linea  $d$  tende al contorno del campo del moto e la regione  $D$  tende all'intero campo del moto, divenendo quindi infinita.

Sia  $E_D$  l'energia cinetica del liquido della regione  $D$ ; sarà (ricordiamo che si è assunto eguale ad 1 la densità del liquido)

$$E_D = \frac{1}{2} \int_D |w|^2 dD.$$

Poichè, per la (7) e la (15),

$$\frac{df}{dz} = w = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

e

$$dD = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 dC$$

si avrà

$$dD = \frac{1}{|w|^2} \cdot \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 dC.$$

Sostituendo in  $E_D$  otteniamo

$$E_D = \frac{1}{2} \int_C \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 dC = \frac{1}{2} \int_C |\Delta_1 \varphi|^2 dC.$$

Per un noto corollario del lemma di GREEN, indicando con  $n$  la normale a  $c$  rivolta all'interno di  $C$ , si può anche scrivere

$$E_D = -\frac{1}{2} \int_c \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d c.$$

Su  $c$ , dove  $\zeta = \rho e^{i\sigma}$ , è

$$d c = \rho d \sigma, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}$$

e quindi

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d c = -\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \rho d \sigma = -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \varphi^2}{\partial \rho} d \sigma.$$

Ne segue

$$E_D = \frac{1}{4} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d \sigma. \quad (34)$$

Calcoliamo  $\varphi^2$  sulla circonferenza  $c$ . Dalla (15), poichè su  $c$  è

$$\frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} = e^{i \frac{\sigma_r}{2}} - \rho e^{i \left( \sigma - \frac{\sigma_r}{2} \right)}$$

$$= \cos \frac{\sigma_r}{2} - \rho \cos \left( \sigma - \frac{\sigma_r}{2} \right) + i \left\{ \sin \frac{\sigma_r}{2} - \rho \sin \left( \sigma - \frac{\sigma_r}{2} \right) \right\}$$

e quindi

$$\left| \frac{\zeta}{\sqrt{j_r}} \right| = \left| 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_r) \right|^{\frac{1}{2}},$$

ricaviamo che su  $c$  è

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \sum q_r \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_r) \right\}.$$

Avremo quindi

$$\varphi^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{hk} q_h q_k \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_h) \right\} \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_k) \right\},$$

in cui

$$h = 1, 2 \dots 2n; \quad k = 1, 2 \dots 2n.$$

La (34) si scrive pertanto

$$E_D = \frac{1}{16\pi^2} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{hk} q_h q_k \int_0^{2\pi} \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_h) \right\} \times \\ \times \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_k) \right\} d \sigma.$$

Ora si ha <sup>(21)</sup>

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_h) \right\} \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma - \sigma_k) \right\} d\sigma = \\ = -4\pi \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho^2 \cos(\sigma_h - \sigma_k) \right\}, \end{aligned}$$

per cui, sostituendo,

$$E_D = -\frac{1}{4\pi} \sum_{hk} q_h q_k \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho^2 \cos(\sigma_h - \sigma_k) \right\}.$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned} a &= \sum_r q_r^2, \\ b &= -\sum_{hk} q_h q_k \log \left\{ 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\sigma_h - \sigma_k) \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

in cui l'apice posto al simbolo  $\sum_{hk}$  sta ad indicare che per le coppie di valori  $h, k$  si assumono le combinazioni semplici a due a due dei numeri  $1, 2, \dots, 2n$  soltanto. Per le (35) la  $E_D$  si può scrivere infine

$$E_D = \frac{1}{2\pi} \left\{ a \log \frac{1}{1 - \rho^2} + b \right\}, \quad (36)$$

la quale ha la stessa forma della  $E_D$  valutata dal PALATINI pel suo caso.

Si noti che  $a$  è indipendente da  $\rho$ ,  $b$  dipende invece da  $\rho$  ma rimane finito anche quando  $\rho$  tende ad 1 poichè, per la (13),

$$0 < |\sigma_h - \sigma_k| < 2\pi \quad \text{per } h \neq k.$$

L'energia  $E_D$  diviene infinita quando  $\rho$  tende ad 1, perchè così si ha l'energia di tutto il liquido in moto. Questo risulta evidente nella (36), anzi per quanto si è detto  $E_D$  diviene infinita come  $\log \frac{1}{1 - \rho^2}$  soltanto.

Fissato  $\rho < 1$ , le  $a$  e  $b$  definite dalle (35) e quindi  $E_D$  (in tal caso finita) sono funzioni delle indeterminate del nostro problema.

Perciò  $E_D$  è minima per quei valori delle indeterminate pei quali è nulla la variazione 1.<sup>a</sup> di  $E_D$ , pei quali cioè

$$\delta a \cdot \log \frac{1}{1 - \rho^2} + \delta b = 0$$

<sup>(21)</sup> A. PALATINI, loc. cit. (4), p. 456.

od anche

$$\delta a + \frac{\delta b}{\log \frac{1}{1-\rho^2}} = 0.$$

Se assumiamo  $D$  sufficientemente grande e quindi  $\rho$  abbastanza vicino ad 1, poichè  $b$  resta finito al tendere di  $\rho$  all'unità, si può sempre fare in modo che il termine  $\frac{\delta b}{\log \frac{1}{1-\rho^2}}$  diventi trascurabile di fronte a  $\delta a$ .

Ne segue che la condizione minimizzante l'energia è data da

$$\delta a = 0,$$

ossia, per la 1.<sup>a</sup> delle (35), da

$$\delta \sum_r q_r^2 = 0,$$

od anche, poichè

$$q_1, q_3 \dots q_{2n-1}$$

sono dati del problema,

$$\delta (q_2^2 + q_4^2 + \dots + q_{2n}^2) = 0$$

Poichè infine il differenziale secondo di  $a$

$$\delta^2 a = 2 \left\{ (\delta q_2)^2 + (\delta q_4)^2 + \dots + (\delta q_{2n})^2 \right\}$$

è essenzialmente positivo, se ne conclude: *i valori degli elementi caratteristici che rendono minima l'energia del liquido in moto sono tra quelli che rendono minima la somma dei quadrati delle portate.*

Milano, luglio 1916.

## INDICE DEI PARAGRAFI

---

	PAG.
INTRODUZIONE .....	35
§ 1. Posizione del problema .....	37
§ 2. Il campo del moto .....	41
§ 3. L'angolo $\mathcal{D}$ .....	43
§ 4. Massimo numero degli spartiacque compatibile con un numero prefissato di vene .....	45
§ 5. Sul numero di vene affluenti ad un generico spartiacque, fissati $n$ ed $m$ .....	47
§ 6. Le funzioni $f$ e $v$ nel campo del moto .....	49
§ 7. Trasformazione del campo del moto .....	52
§ 8. La funzione $f(\zeta)$ .....	53
§ 9. La funzione $v(\zeta)$ .....	55
§ 10. Relazioni tra le costanti .....	58
§ 11. Determinazione del campo del moto. Integrale generale .....	59
§ 12. Reversibilità del fenomeno .....	63
§ 13. Comportamento dei peli liberi .....	63
§ 14. Equazioni parametriche dei peli liberi .....	65
§ 15. Sulle relazioni $\sum_r \frac{g_r}{(\zeta_s - j_r)^{\mu_s}}$ .....	67
§ 16. Sugli elementi caratteristici del problema .....	69
§ 17. Condizione minimizzante l'energia .....	72

---