Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung

Michael Neubrand (Flensburg),
Rolf Biehler (Kassel), Werner Blum (Kassel), Elmar Cohors-Fresenborg (Osnabrück), Lothar Flade (Magdeburg), Norbert Knoche (Essen), Detlef Lind (Wuppertal), Wolfgang Löding (Hamburg), Gerd Möller (Düsseldorf), Alexander Wynands (Bonn)
(Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik)

Abstract: *The German addition to the OECD-PISA mathematics assessment: Framework for the supplementary test and its connection to the international framework.* – The OECD-PISA assessment in 2000 (PISA = Programme for International Student Assessment) included two parts in Germany: the international test and national supplementary tests, which were administered one day after the international test. These two parts are intended to complement each other. In this paper, the reasons for the German national option are described and the framework for the test is explained. The description will demonstrate how the national framework relates to, refines, and supplements the international framework for PISA-mathematics. As is the case for the international frameworks, the national conceptualization is considered as a "living framework", and is therefore subject to further discussions at both, the national and the international levels.

Kurzreferat: Im Mai 2000 wurden in 33 Ländern im Auftrag der OECD die Tests der PISA-Studie (PISA = Programme for International Student Assessment) durchgeführt; im Herbst 2001 ist ein erster Bericht zu erwarten. Die Studien im Rahmen von PISA finden in Deutschland aufgeteilt in den internationalen Test und nationale Zusatzerhebungen statt. Beide Testteile ergänzen sich. In diesem Framework wird die Notwendigkeit einer deutschen Ergänzung dargelegt, deren Schwerpunkte im Vergleich zum internationalen Test beschrieben, sowie die Einordnung des Gesamt-Tests in deutsche curriculare Gegebenheiten durch eine geeignete Klassifikation der Items vorgenommen. Die Entwicklung des deutschen Frameworks ist am Aufbau des internationalen PISA-Frameworks für den Untersuchungsteil „mathematical literacy" orientiert. Es erweitert und differenziert dieses jedoch aufgrund in Deutschland vorliegender mathematikdidaktischer Sichtweisen und spezifischer Ausrichtungen des deutschen Mathematikunterrichts.

ZDM-Classification: D60

Dieses Framework ist hier im wesentlichen in der Fassung vom August 1999 wiedergegeben. Es ist das Verständnis aller - national wie international - für das PISA-Projekt konzipierten Grundlagen-Texte, dass es sich immer um sog. „living frameworks" handelt. Auch dieses Framework ist daher weiterhin Gegenstand von Diskussionen in der Expertengruppe und wird sich im Fortgang des PISA-Projekts laufend weiter verändern. Eine erste Revision wird sicher dann vorzunehmen sein, wenn die (erweiterten) Grundlagen für den nächsten Zyklus von PISA, d.h. für die im Jahre 2003 geplanten Tests, zusammengestellt werden.

1. Die Konstrukte „mathematical literacy" und „mathematische Grundbildung" als Basis des PISA-Tests

1.1 „Mathematical literacy" und die mathematischen Curricula

Der internationale PISA-Test geht in allen drei Domänen Textverständnis, Mathematik und Naturwissenschaften von der Perspektive aus, den Ertrag schulischer Ausbildung an „literacy" zu messen. Wörtlich ist dies zu nehmen bezüglich des Verstehens von Texten, im übertragenen Sinn als „mathematical literacy" bzw. „scientific literacy". Das Konstrukt „literacy" wird in der relevanten pädagogischen und fachdidaktischen Diskussion generell so bestimmt, dass von vornherein eine gewisse Distanz zu den curricularen Einzelvorgaben in den Lehrplänen eingehalten wird, freilich dabei den allgemeinen Zielen, die in den Lehrplänen – in Deutschland oft in den sog. „Präambeln" – niedergelegt sind, durchaus entsprochen wird. „Literacy" ist somit auf den schließlichen Ertrag der in den Curricula detailliert formulierten Einzelkenntnisse ausgerichtet.

Erstmals wurde das Konstrukt „mathematical literacy" bei TIMSS in der Untersuchung der Population 3 (Ende der Sekundarschulzeit) einem Test zugrunde gelegt (Mullis & al 1998, Baumert & al 2000) und dort so bestimmt:

„Unlike both other components of TIMSS and other IEA-Studies, the mathematics and science literacy study is not curriculum based. That is, it is not an attempt to measure what has been taught and learned in a given year of schooling or in a given age group of students. Instead, it is a study of the mathematics and science learning that final year students have retained regardless of their current areas of study. ... The MSL [mathematics and science literacy; MN] study could not be based on a specific intended curriculum." (Orpwood & Garden 1998, pp 10, 11).

Auch das internationale PISA-Framework (OECD 1999) konstatiert eine relative Ferne zu curricularen Einzelvorgaben, aber die Nähe zu allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts. Mit dem Begriff „mathematical literacy" soll zum Ausdruck gebracht werden, dass es im PISA-Test gerade nicht um die in den traditionellen Curricula festgelegten Wissenselemente und Fertigkeiten geht. Vielmehr wird mathematisches Wissen gezielt daraufhin untersucht, ob es funktional, mit Einsicht und flexibel eingesetzt werden kann zur Bearbeitung kontextbezogener Probleme.

Gerade Lehrerinnen und Lehrer werden allerdings zurecht darauf hinweisen, dass die Überprüfung der Leistungen von Schülerinnen und Schülern, namentlich in einem Fach wie der Mathematik, nicht von dem, was und wie in der Schule gelernt wird, abgekoppelt werden kann. Zwar ist es keineswegs so, dass die Fähigkeit, mathematische Kenntnisse in kontext-gebundenen Zusammenhängen verständig einsetzen zu können, schon gegeben wäre, wenn die zugrundeliegenden mathematischen Begriffe und Verfahren „als solche" bereitstehen. Der verständige funktionale Gebrauch von Mathematik muss vielmehr, nach allen gängigen Modellvorstellungen von sinnvollem Wissenserwerb, selbst Gegenstand des Lernens sein, wenn er erfolgreich sein soll. Somit greift auch ein „literacy"-Test zumindest indirekt zurück auf curriculare Gegebenheiten in einem Land, auch in einem Bundesland, einer Schule, einer Schulform, etc.. Allerdings geschieht dieser Rückgriff weniger auf einzelne stoffliche Festlegungen, viel mehr hingegen auf das jeweilige Umfeld, in das diese Stoffelemente eingebettet werden.

Trotz dieser Problematik - sie wird in 1.3. detailliert als Differenz zwischen dem internationalen Ansatz in PISA und den deutschen curricularen Setzungen und Fakten wieder aufgegriffen - ist es aber angebracht und legitim, Leistungen der Schülerinnen und Schüler an einem nicht direkt an curriculare Einzelstoffe gebundenen Ziel zu messen, wie es etwa noch bei TIMSS mit dem Konstrukt „Kerncurriculum“ der Fall war (Neubrand & Neubrand & Sibberns 1998). Dies ist angemessen in Hinblick auf die Zielorientierung von PISA, die Qualität der mathematischen Fähigkeiten gegen Ende der Pflichtschulzeit zu beschreiben und aus den Testresultaten schließlich positive Anregungen für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts zu gewinnen. Die administrativen Rahmensetzungen, die Vorgaben in den Lehrplänen und die daraus entstehenden Beschreibungen von Einzelstoffen und Kenntnissen in den Curricula sind ja letztlich Hilfsmittel, solche allgemeinen Ziele zu erreichen.

Diese generellen Ziele des Mathematikunterrichts können entweder normativ gesetzt sein oder durch Analyse allgemeiner Lehrziele konstruiert werden, jedenfalls sollten sie konsensuell in der jeweiligen Bezugskommunität abgesichert sein. Innerhalb eines „nationalen“ Rahmens - in Deutschland kann das auch „bundeslandbezogen“ bedeuten - ist das i.a. auch der Fall. Im internationalen Rahmen können sich aber Inkongruenzen bei diesen allgemeinen Rahmensetzungen ergeben, die man bei Erstellung und Auswertung eines auf „literacy“ bezogenen Tests zu berücksichtigen hat. Zu diesem Zweck werden daher im folgenden die Differenzen zwischen internationalem Framework und den deutschen Unterrichtsrealitäten diskutiert.

1.2 Zur Abgrenzung von „mathematical literacy“ und „mathematischer Grundbildung“

In der mathematikdidaktischen nationalen und internationalen Literatur gibt es eine permanente Diskussion über allgemeine Ausrichtungen des Mathematikunterrichts, insbesondere darüber, wo zwischen der Ausbildung spezifischer Fertigkeiten und begrifflicher Vertiefung, zwischen Orientierung am Fach und Anwendungsorientierung die akzeptable Balance zu finden ist. „Mathematical literacy“ und „mathematische Grundbildung“ sind Konzepte, diese Balance genauer zu beschreiben. Allerdings ist der Begriff „mathematical literacy“ im internationalen PISA-Framework sehr spezifisch ausgelegt. Es wird - wie unten genauer gezeigt wird - vor allem durch die Arbeiten und Sichtweisen von Hans Freudenthal (1977, 1981, 1983) geprägt.

International werden durchaus auch andere Beschreibungen von „mathematical literacy“ diskutiert. So unterscheidet beispielsweise Fujita (1996) zwischen zwei, sich gegenseitig überlappenden Konzepten:

> „... the purpose of mathematics education is to cultivate mathematical intelligence of the students through the two foci targets: namely by fostering their mathematical literacy (ML) and mathematical thinking power (MT). These two targets should be pursued in an appropriate balance ... . To be little more specific, we claim that ML = mathematical competence of intellectual citizens = mathematics for intelligent users, MT = mathematical potentiality for future career.“ (Fujita 1996, pp 184-185)

Diese Differenzierung dient Fujita dazu, Entscheidungen über die zukünftige Organisation des Faches Mathematik mittels Kern-Programmen und optionalen Programmen argumentativ zu untermauern.

Die aktuelle Debatte in Deutschland beschränkt sich nicht auf den Begriff „mathematical literacy“ in der soeben zitierten relativ engen Bestimmung. „Mathematical literacy“ wird vielmehr diskutiert als Teilproblem innerhalb der umfassenden Frage nach dem Beitrag der Mathematik zur allgemeinen Bildung (vgl. zur Übersicht und bildungstheoretischen Fundierung Heymann 1996). Oft wird der Begriff „mathematische Grundbildung“ verwendet, um diese weitere Sichtweise anzuzeigen.

Winter (1995) skizziert drei Bereiche, in denen sich die allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts zeigen müssen:

> „Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen: (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen, (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“ (Winter 1995, S. 37)

Hinzu kommt, dass das Verstehen auf den genannten drei Ebenen konstruktiv zur Gestaltung der natürlichen und technischen Umwelt, sowie zur Strukturierung der Mathematik selbst und im mentalen Bereich eingesetzt werden kann und soll. „Mathematical literacy“ in der von Fujita (1996) beschriebenen engeren Auffassung ist somit in der Beschreibung durch Winter nur eine der Komponenten, die im Mathematikunterricht in Hinblick auf „mathematische Grundbildung“ erreicht werden sollten.

Auch im internationalen PISA-Framework ist nicht die relativ enge Auffassung Fujitas abgebildet. Andererseits wird dort der Rahmen im Vergleich zu Winter (1995) in einer sehr spezifisch ausgeprägten Weise gezogen und ist somit ebenfalls von „mathematischer Grundbildung“ verschieden. Wörtlich lautet im internationalen PISA-Framework (OECD 1999) die Definition für „mathematical literacy“:

> „Mathematics literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgements and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual’s current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen.“ (OECD 1999, p 41)

Zugleich wird - wie oben dargestellt - auf die Distanz zu den traditionellen Curricula verwiesen, aber auch auf die Breite der Zugänge zu „mathematical literacy“ und die Notwendigkeit „for reflection and insight“ (p 41).

Der Bedeutungsgehalt dieser Definition wird einsichtiger, wenn man die mathematikdidaktische Hintergrundphilosophie, aus der das gesamte internationale PISA-

Framework stammt, mit bedenkt. Diese geht zurück - an mehreren Stellen des PISA-Frameworks wird explizit darauf verwiesen - auf die von Freudenthal seit den 70-er-Jahren dargelegte grundsätzliche Position. Diese ist innerhalb der mathematikdidaktischen Community wohl weitgehend in ihren Grundzügen als Basisorientierung für das Lernen und Lehren von Mathematik akzeptiert, jedenfalls hatte sie großen Einfluss auf die seitherige Entwicklung der Mathematikdidaktik - gerade auch im internationalen Rahmen.

Freudenthal folgend umfaßt ein das Lehren und Lernen von Mathematik adäquat beschreibendes und organisierendes Modell diese Komponenten: Ausgehend von einer „didaktischen Phänomenologie mathematischer Begriffe“ (Freudenthal 1983), d.h. einer Reflexion darüber, wie mathematische Begriffe „in der Welt“ verankert sind, wird über eine Reihe von Stufen einer „progressiven Schematisierung“ (Freudenthal 1981) die Bildung der entsprechenden mathematischen Begriffe bei den Schülerinnen und Schülern angeregt. Dies zielt ab auf die Ausbildung tragfähiger „mentaler Modelle für mathematische Begriffe“ (Freudenthal 1983). Freudenthals Grundkonzept beinhaltet also zwar eine Orientierung „an der Welt“, erschöpft sich aber nicht darin, sondern versucht von dort zu mathematischer Begrifflichkeit aufzusteigen.

Der Unterricht hat diese Art der Verankerung mathematischer Begriffe methodisch geeignet umzusetzen. Das Konzept der „realistic mathematics education“ (de Lange 1996) ist eine Konkretisierung dieser Grundkonzeption, ausgearbeitet bis hin zur Darstellung im Unterricht erprobter Situationen, dem Entwurf von Unterrichtseinheiten und der Bereitstellung passender Aufgaben(-serien).

Die Forderung nach einer stärkeren Anwendungsorientierung ist eine international aktuelle und übergreifende mathematikdidaktische Strömung (Blum 1996). Auch in Deutschland gibt es entsprechende Bestrebungen, z.B. durch die sog. ISTRON-Gruppe (Blum & al 1994-1997). Im Konzept der „realistic mathematics education“ im Sinne Freudenthals gibt es aber einen entscheidenden Gedanken, der die prinzipielle Differenz zu einem „nur“ anwendungsorientierten Unterrichtsansatz markiert:

> „The real world problem will be used to develop mathematical concepts. This process can be called conceptual mathematization: The problem is not in the first meant to be solved for problem solving purposes, but the real meaning lies in the underlying exploration of new mathematical concepts.“ (de Lange 1996, p 90)

Von daher ergibt es sich, dass es gerade innerhalb des Konstrukts „mathematical literacy“ im Sinne des internationalen PISA-Frameworks eine sehr starke Ausrichtung auf die konzeptuellen Seiten der Mathematik gibt, und dass dies dementsprechend auch in den Items abgebildet ist. Im PISA-Framework (OECD 1999, p 41) wird dazu eine Aussage Freudenthals wieder zitiert:

> „Our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world.“ (Freudenthal 1983).

Dies kann in zweierlei Weisen gelesen werden. Einerseits wird beschrieben, dass der Bezug zur „real world“ vielfältig sein und über eine Anwendung auf äußere Gegebenheiten hinausgehen muss. Andererseits betont diese Aussage abermals, dass es gerade die Begriffe sind, die als „tools“ zur Erschließung „der Welt“ in Frage kommen, und nicht etwa allein das Beherrschen alltagstauglicher Rechenverfahren.

Offenbar stehen also in der „realistic mathematics education“, und demnach abgeleitet auch bei „mathematical literacy“ gemäß dem internationalen PISA-Framework, mathematische Konzepte als zu erreichendes Ziel im Vordergrund. Es wird nun verständlich, dass die in den traditionellen Curricula oft vorherrschend unterrichteten mathematischen Fertigkeiten nicht den Hauptfocus von PISA bilden können. Diese „skills and routines“ werden daher im internationalen PISA-Test nicht isoliert erfasst, sondern sind stets eingebunden in konzeptuell geprägte und kontextgebundene Aufgaben und Aufgabenkomplexe.

1.3 Notwendigkeit und Grundansatz bei den Ergänzungen in der deutschen Zusatzerhebung

Das PISA-Konstrukt „mathematical literacy“, wie es im internationalen PISA-Framework (OECD 1999, Chap.2) dargestellt ist, ist somit ein ausdrücklich einer bestimmten mathematikdidaktischen Lehr-Lern-Tradition verbundenes und daher stark normativ geprägtes Konzept. Wünschenswerte Ziele des Mathematikunterrichts, nämlich praktische Nutzbarkeit und systematischen Aufbau der Mathematik so zu verbinden, dass nicht lediglich isoliertes Lernen von Fertigkeiten entsteht, sondern kontextverankerte mathematische Begriffe ausgebildet werden, sind in dieser Konzeption konkret, allerdings in einer sehr spezifischen Weise umgesetzt. Es sind also hierin Komponenten „mathematischer Grundbildung“ (Winter 1995) mit angesprochen. Aus mathematikdidaktischer Sicht und aus der Sicht aktueller Lehrplantendenzen (MNU 1999) fungiert dieses Konzept durchaus als eine Zielorientierung auch für deutsche Lehrpläne.

Allerdings gehört zu den Zielen einer „mathematischen Grundbildung“, etwa im Sinne der oben zitierten Aufgaben eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts, zusätzlich der Hinweis darauf, dass Mathematik auch als „eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (Winter 1995), gelöst von den phänomenologischen Verankerungen, gesehen werden kann und soll. Dieser Aspekt ist in der internationalen PISA-Konzeption eher unterrepräsentiert. Betont wird aber hier wie dort, dass es auf die Verbindung inhaltlicher und formaler Kenntnisse ankommt.

Im realen Mathematikunterricht in Deutschland und korrespondierend in der Struktur der Leistungen deutscher Schülerinnen und Schüler bildet sich jedoch diese Verbindung von praktischer Anbindung, formaler Kenntnis und begrifflicher Vertiefung *nicht* ab. Nach vorliegenden empirischen Untersuchungen zeigen sich vielmehr im deutschen Mathematikunterricht Probleme beim verständnisvollen Gebrauch und bei der Vernetzung mathematischer Konzepte, sowie eine Überbetonung kalkülorientierter Fertigkeiten.

Auf drei Ebenen kann dies festgemacht werden, wobei die mit unterschiedlichen Ansätzen gewonnenen Resultate sich gegenseitig stützen und so durchaus zu einem in sich stimmigen Gesamtbild konvergieren:

- Auf der Ebene der als (äußeres) Ziel verlangten Kenntnisse am Ende des Durchlaufens des curricular definierten Mathematikunterrichts, also auf der Ebene der *Leistungsnormen* hat Bauer bereits 1974 mittels einer Analyse von bayerischen Abituraufgaben die Fertigkeitsorientierung anstelle einer fähigkeitsbezogenen Ausrichtung herausgearbeitet. Wynands (1995) bestätigte dies erneut und arbeitet die zeitliche Konstanz dieses Zustands über Curriculumreformen hinweg heraus. Maier (1994) zeigt, wie in Abschlussklausuren für die baden-württembergischen Realschulen die an sich komplexen räumlich-geometrischen Aufgaben ebenfalls zu einer Abfrage isolierter Fertigkeiten verengt werden.

- Auf der Basis vorliegender internationaler detaillierter *Leistungsstudien* haben Blum & Wiegand (1998) aus Analysen ausgewählter TIMSS-Items Schwierigkeiten deutscher Schülerinnen und Schüler beim inhaltlichen Durchdringen und Strukturieren von Sachkontexten konstatiert, also insbesondere mangelnde begriffliche Fähigkeiten. Neubrand & Neubrand & Sibberns (1998) analysieren die TIMSS-Items in den Gebieten Geometrie und Umgehen mit Daten jeweils insgesamt und finden eine durchgehende Verschiebung zu relativ schwächeren Leistungen in Deutschland dann, wenn begriffliche Verbindungen herzustellen und Vernetzungen vorzunehmen sind. Diese Analysen bezogen sich auf die TIMSS-Resultate in der Sekundarstufe I (TIMSS-Population 2); die TIMSS-Resultate für Population 3 zeigen, dass sich diese Einseitigkeit im Leistungsprofil auch in der Sekundarstufe II nicht mehr auflöst (Baumert & al 2000).
- Auf der Ebene der *Unterrichtsanalysen* macht Kaiser (1999) die Kalkülorientierung als spezifisches Kennzeichen des deutschen Mathematikunterrichts im Vergleich zum englischen aus. Dörr & Zimmermann (1998) zeigen anhand des Vergleichs thüringischer Regelschulen und bayerischer Realschulen u.a. auf, dass Übungen vorwiegend auf das Abarbeiten von festen Lösungsmustern bezogen sind und nur wenige Aspektewechsel im Mathematikunterricht vorkommen. Fanghänel (1983) fand im Mathematikunterricht der DDR, dass bei ca. ¾ der Aufgaben die Festigung von soeben behandeltem Stoff die vorrangige Funktion war, selbstständige Erarbeitung neuer Stoffe also kaum vorkommt. J.Neubrand (in Druck) zeigt anhand der Stunden der TIMSS-Video-Studie auf, dass bereits bei der Stellung von Aufgaben in Deutschland eine charakteristische Überbetonung prozedural ausgerichteter Aufgaben zu beobachten ist.

Sicher ist diese Kalkülorientierung und die Tendenz zu isoliert abzuarbeitenden Aufgabenklassen ein Kennzeichen nicht allein des deutschen Mathematikunterrichts. Das PISA-Framework erkennt dies auch selbst:

„However, school mathematics is often offered to students as a strictly compartmentalised science, and over-emphasises computation and formulae.“

Dagegen setzt das internationale PISA-Konzept sein Konstrukt der „mathematical literacy“ und betont

„... for OECD/PISA, interconnections and common ideas are central elements“ (OECD 1999, p 48).

Die dominante begriffliche Orientierung des internationalen PISA-Tests, die oben als Konsequenz der „mathematical literacy“ - Definition im Framework herausgearbeitet wurde, trifft also (auch und insbesondere) in Deutschland nicht auf eine entsprechend vorbereitete Unterrichts- und curriculare Realität.

Dies hat Konsequenzen für die Anwendung des internationalen PISA-Tests in Deutschland (und ggf. gleichermaßen in anderen Ländern). Bekannt ist nämlich, dass Schülerinnen und Schüler diejenigen Aufgaben relativ zu ihrem allgemeinen Leistungsstand besser beherrschen, die ihrem Curriculum sowohl vom Stoff als auch von den impliziten Ausrichtungen, der „Färbung“ (Neubrand & Neubrand & Sibberns 1998), her am ehesten entsprechen. Darauf hat bereits Freudenthal (1975) in seiner Kritik an den früheren Untersuchungen der IEA hingewiesen. Überdies wird der PISA-Test in Deutschland aber auch verwendet, um den Ertrag des schulischen Mathematikunterrichts in den einzelnen Bundesländern vergleichen zu können. Dies verschärft das Problem der Passung nochmals.

Das internationale PISA-Framework kann also durchaus einen allgemeinen, normativ gesetzten Horizont abgeben, vor dem auch die deutschen Leistungen gesehen werden können, sogar legitimerweise gesehen werden sollten, wie eingangs herausgearbeitet wurde. Auch ist es ein Vorteil, dass dieser Horizont nicht von einer partikulären innerdeutschen Ländersicht geprägt ist. Jedoch erfordert es die spezifische, von den Grundideen des internationalen PISA-Tests distanzierte Ausrichtung des tatsächlichen deutschen Mathematikunterrichts, das internationale PISA-Framework und entsprechend den Test selbst durch weitere Komponenten zu ergänzen.

Diese sollen einerseits die Aspekte „mathematischer Grundbildung“, wie sie im deutschen Mathematikunterricht angestrebt werden, und die im internationalen PISA-Konzept weniger betont sind, aufnehmen. Andererseits muss der real existierenden Kalkülorientierung des deutschen Mathematikunterrichts in angemessener Weise Rechnung getragen werden. Nur so kann der PISA-Zusatztest in Deutschland dann auch diagnostische Funktionen erfüllen und Hinweise geben, worin Unausgewogenheiten im Leistungsprofil gegründet sein können.

Daher sind - wenigstens im ersten Zyklus von PISA - auch formale und technische Kenntnisse entsprechend zu berücksichtigen. Längerfristige Konzepte zur Fortentwicklung des Mathematikunterrichts sehen solche Fertigkeiten allerdings mehr und mehr in ihrer Vernetzung, und folglich ist der Stellenwert dieser Kenntnisse auch in den folgenden Zyklen von PISA kritisch zu prüfen. Durch diesen Ansatz werden auch die Dynamiken, die in den jetzt implementierten Reformbestrebungen für den Mathematikunterricht sichtbar werden (BLK 1997), aufgenommen. Denn gerade die Überwindung einer nur fertigkeitsbezogenen Ausrichtung des Mathematikunterrichts ist dort das Ziel. Diese Ausgangslage ist aber zuerst zu dokumentieren, um sie überwinden zu können.

Zu diesem Zweck wird im folgenden eine *Differenzierung* und *Erweiterung* des internationalen Frameworks, das gleichwohl als Ausgangsbasis dient, vorgenommen. Der internationale PISA-Test wird dabei auf der Basis dieser Überlegungen in der deutschen Zusatzerhebung durch Items ergänzt, die in dieser Art im internationalen Test entweder gar nicht vorkommen oder dort in Zusammenhängen und „Färbungen“ auftreten, die für deutsche Schülerinnen und Schüler eher ungewohnt sind. Insgesamt ergibt sich dann aus der *Kombination* des internationalen PISA-Tests und der deutschen Zusatzerhebung die Möglichkeit, die „mathematische Grundbildung“ deutscher Schülerinnen und Schüler adäquater als es durch den internationalen Test allein möglich wäre zu erfassen.

Dies bedeutet freilich nicht, dass das Konstrukt „mathematische Grundbildung“ damit endgültig fixiert sei. Vielmehr gilt auch für die deutschen Ergänzungen das, was innerhalb der PISA-Diskussionen immer wieder betont wurde: Die Frameworks sind - in Hinblick auf die Zyklenstruktur von PISA ebenso wie in Hinblick auf die spezifische Weiterentwicklung der Komponenten mathematischer Grundbildung - als „living frameworks“ aufzufassen, offen für kritische Prüfungen, auch durch die Ergebnisse des Tests selbst, für Revisionen und Weiterentwicklungen.

2. Erweiterungen und Differenzierungen der internationalen PISA-Konzeption: Framework für den PISA-Test in Deutschland

Die internationale Mathematik-Expertengruppe von OECD-PISA (sog. „Mathematics Functional Expert Group“; Leitung durch Jan de Lange, Freudenthal-Institut Utrecht) organisiert das internationale PISA-Framework um vier Aspekte. Die beiden Hauptaspekte sind

- mathematical competencies
- mathematical big ideas.

Die beiden untergeordneten Aspekte sind

- mathematical curricular strands
- situations and contexts.

Die beiden letztgenannten Aspekte dienen dazu, die Testaufgaben über Stoffgebiete und Kontexte ausgewogen zu streuen, während die beiden Hauptaspekte den Zweck haben, die allgemeinen Perspektiven, die im Test angesprochen werden und nach denen eine Beurteilung der Leistung stattfindet, zu beschreiben.

Im folgenden werden die Aspekte des internationalen Frameworks dargestellt und daraus die Erweiterungen und Differenzierungen des deutschen Frameworks entwickelt.

2.1 Kategorisierung ausgewählter mathematischer Kompetenzen

Im ersten Hauptaspekt des internationalen PISA-Frameworks „Mathematical literacy“ (OECD 1999) wird eine Liste allgemeiner mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten angegeben, die für alle Bereiche und Ebenen der mathematischen Bildung relevant sind. Über diese allgemeine Beschreibung dürfte in der Mathematikdidaktik weitgehend Konsens bestehen. Die Liste der *„competencies“* lautet so (OECD 1999, p 43)[1]:

Mathematical thinking skill. This includes posing questions characteristic of mathematics („Is there ...?“, „If so, how many?“, „How do we find ...?“); knowing the kinds of answers that mathematics offers to such questions; distinguishing between different kinds of statements (definitions, theorems, conjectures, hypotheses, examples, conditioned assertions); and understanding and handling the extent and limits of given mathematical concepts.

Mathematical argumentation skill. This includes knowing what mathematical proofs are and how they differ from other kinds of mathematical reasoning; following and assessing chains of mathematical arguments of different types; possessing a feel for heuristics („What can(not) happen, and why?“); and creating mathematical arguments.

Modelling skill. This includes structuring the field or situation to be modelled; „mathematising“ (translating „reality“ into mathematical structures); „de-mathematising“ (interpreting mathematical models in terms of „reality“); working with a mathematical model; validating the model; reflecting, analysing and offering a critique of a model and its results; communicating about the model and its results (including the limitations of such results); and monitoring and controlling the modelling process.

Problem posing and solving skill. This includes posing, formulating, and defining different kinds of mathematical problems („pure“, „applied“, „open-ended“ and „closed“); and solving different kinds of mathematical problems in a variety of ways.

Representation skill. This includes decoding, interpreting and distinguishing between different forms of representation of mathematical objects and situations and the interrelationships between the various representations; choosing, and switching between, different forms of representation, according to situation and purpose.

Symbolic, formal and technical skill. This includes: decoding and interpreting symbolic and formal language and understanding its relationship to natural language; translating from natural language to symbolic/formal language; handling statements and expressions containing symbols and formulae; using variables, solving equations and undertaking calculations.

Communication skill. This includes expressing oneself, in a variety of ways, on matters with a mathematical content, in oral as well as in written form, and understanding others' written or oral statements about such matters.

Aids and tools skill. This includes knowing about, and being able to make use of, various aids and tools (including information technology tools) that may assist mathematical activity, and knowing about the limitations of such aids and tools.

Im internationalen Framework werden die in dieser Liste aufgezählten mathematischen Kompetenzen allerdings nicht einzeln zur Erfassung von Facetten der einzelnen Items herangezogen. Die Begründung dafür liegt in einer integrativen Sicht vom Bearbeiten mathematischer Aufgaben:

„OECD/PISA does not propose the development of test items that assess the above skills individually. When doing real mathematics, it is usually necessary to draw simultaneously upon many (perhaps all) of the skills, so that any effort to assess individual skills is likely to result in artificial tasks and an unnecessary compartmentalisation of the mathematical literacy domain.“ (OECD 1999, p 43)

Vielmehr wird diese Liste in drei relativ umfangreiche Kompetenzklassen gebündelt:

Class 1: reproduction, definitions, and computations;
Class 2: connections and integration for problem solving;
Class 3: mathematical thinking, generalisation and insight.

[1] In der aktuellen internen Diskussion über die Fortentwicklung der PISA-Frameworks wird vorgeschlagen, in dieser Liste jeweils „skills“ durch „capabilities“ zu ersetzen. Dies träfe die beabsichtigten Aussagen besser.

Diese integrative Sicht auf die Items hat ihre Wurzeln wieder in der Hintergrundphilosophie der „realistic mathematics education“. Sie reflektiert also eine Vorstellung vom Lernen von Mathematik, die man als eine mathematikdidaktische Orientierung anstreben sollte, die aber jedenfalls augenblicklich in den realen deutschen curricularen Ansätzen im allgemeinen so nicht realisiert ist.

Daher erscheint das alleinige Vorgehen entlang einer Drei-Klassen-Einteilung im internationalen PISA-Framework aus zwei Gründen zu grob, um spezifische Leistungen und Defizite aufgrund des deutschen Mathematikunterrichts erfassen zu können. Einerseits erfordert es die oben beschriebene, schwerpunktmäßig auf Kalküle, Algorithmen, Prozeduren bezogene und wenig integrative Ausrichtung des deutschen Mathematikunterrichts, die technischen Fertigkeiten separat auszuweisen. Andererseits will der deutsche PISA-Ergänzungstest auch Ansätze erfassen, wo eine gezielte Weiterentwicklung des deutschen Mathematikunterrichts stattfinden kann und notwendig ist. Der Test soll also auch diagnostische Hinweise geben können.

Dazu sollten einige ausgewählte, für die Qualität des Mathematikunterrichts offenbar zentrale Kompetenzen präzisiert, differenziert und separat erfasst werden. In besonderem Maße ist das für die spätere Interpretation der Ergebnisse wichtig. Für die Beschreibung des Tests insgesamt ergibt sich dadurch aber auch eine den deutschen Verhältnissen eher angepasste Kennzeichnung.

Von besonderem Interesse für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts (vgl. nochmals: BLK 1997) dürften die Kompetenzen „mathematical argumentation skill“, „modelling skill“ und „representation skill“ sein. Im nationalen PISA-Framework in Deutschland sollten also diese Kompetenzen als einzelne Facetten eines Items festgehalten werden. Dazu werden im folgenden zunächst diese speziell ausgewählten Kompetenzen in Relation zur internationalen Kennzeichnung teilweise neu und differenzierter gegliedert beschrieben. Die „symbolic, formal and technical skills“ werden im nächsten Abschnitt in einer eigenen Kompetenzklasse berücksichtigt.

2.1.1 Begründungsfähigkeiten - mathematische Tätigkeiten

Zu einem Item kann festgehalten werden, ob „mathematical argumentation skills“, wie sie im internationalen Framework aufgezählt sind, zum Bearbeiten der Aufgabe essentiell notwendig sind, ob also explizit *Begründungen* oder *Beweise* gefordert werden. Im internationalen Framework sind Begründungsaufgaben - je nach Einbettung und Reichweite - über die Classes 2 und 3 hinweg gestreut, einzeln sind sie nicht gekennzeichnet und daher ein Verhalten auf diesen Items nicht erfassbar.

Es wird an dieser Stelle (aus pragmatischen Gründen) im deutschen Framework zusätzlich erfasst, ob vom mathematikdidaktischen Standpunkt aus interessant erscheinende weitere *mathematische Tätigkeiten*, beispielsweise ein induktiver Schluss, eine Verallgemeinerung, etc., für das Item von entscheidender Bedeutung sind. Solche mathematischen Tätigkeiten - es werden konkret nur sehr wenige sein - können frei notiert werden.

2.1.2 Modellierungsfähigkeiten

Die Beherrschung von Modellierungsprozessen, also die Fähigkeit, inner- oder außermathematische Problemsituationen in geeignete mathematische Terminologie transformieren, mittels dieser lösen und die Ergebnisse wieder auf die Ausgangssituation beziehen zu können, ist eine der wichtigsten Komponenten mathematischer Grundbildung. Das internationale Framework widmet der „mathematisation“ aus diesem Grunde einen ganzen Abschnitt. Die verschieden Stufen der „mathematisation“ werden aber in den internationalen „competency classes“ nicht mehr im einzelnen getrennt sichtbar gemacht. Es handelt sich daher beim Gedanken der „mathematisation“ eher um eine durchgehende Leitidee des internationalen PISA-Frameworks als um ein Analyseinstrument.

Die Terminologie in diesem speziellen Feld ist allerdings schon innerhalb der Mathematikdidaktik, erst recht zwischen Fachdidaktik und Lehr-Lern-Psychologie, verwirrend uneinheitlich. Im internationalen PISA-Framework wird mit „Mathematisation“ der vollständige Prozess des Anwendens von Mathematik *und* des Rückübersetzens der gewonnenen mathematischen Resultate bezeichnet. Demgegenüber wird hier - vermutlich mehrheitlichem mathematikdidaktischem Sprachgebrauch folgend (Schupp 1988, Blum 1996) – diese Terminologie verwendet: Der Begriff „Modellierung“ bezeichnet den gesamten Vorgang des Anwendens und Rückübersetzens. „Mathematisieren“ bezeichnet hier dagegen spezieller genau den Prozess des Übersetzens einer Situation in die Sprache der Mathematik. Im allgemeine gehen dem Prozesse des „Präzisierens“ und „Formalisierens“ voraus, in denen die wesentliche Variablen der Situation erfasst werden (Kaune 1995).

Aus deutscher Sicht ist es nun - in Hinblick auf eine genauere Eingrenzung auftretender Schwierigkeiten - wünschenswert, die Prozesse beim Modellieren differenzierter als im internationalen PISA-Framework auszuweisen. Denn dann kann genauer auf die vorhandenen Modellierungsfähigkeiten geschlossen werden. Dazu dient ein in der Mathematikdidaktik allgemein als Beschreibung akzeptiertes Schema (Schupp 1988, Blum 1996). Demnach besteht der Prozess des Modellierens aus diesen Komponenten:

- „präzisieren“/“formalisieren“ und „mathematisieren“, d.h. Identifizieren der relevanten Parameter und Übersetzen einer Situation in ein mathematisches Modell,
- „deduzieren“, d.h. Bearbeiten des mathematischen Modells mittels mathematischer Methoden und Verfahren, aber auch mittels der Verwendung mathematischer Begriffe,
- „interpretieren“ der im Modell gewonnenen mathematischen Aussagen und Ergebnisse in Hinblick auf die Ausgangssituation,
- „validieren“, d.h. Prüfung des gesamten Modells auf seine Adäquatheit hinsichtlich der ursprünglichen Problemstellung.

Es ist wichtig, an dieser Stelle auf einen entscheidenden Punkt im Gebrauch des Begriffs „Modellierung“ in diesem Framework hinzuweisen. Ob sich eine Modellierung auf eine innermathematische oder auf eine außermathematische Situation bezieht, ist vom kognitiven Standpunkt aus unerheblich (Cohors-Fresenborg 1996).

Es sind die gleichen kognitiven Prozesse (formalisieren, übersetzen, strukturieren, im Modell arbeiten, zurückübersetzen), die auch bei der Behandlung einer innermathematischen Aufgabe ablaufen. Bekannte typische Beispiele dafür sind etwa Berechnungen komplizierter Flächen, für die man erst eine geeignete Strukturierung – das „Modell" – finden muss, auf der die Lösung beruht.

Im folgenden wird daher der Begriff „Modellierung" konsequent sowohl auf außermathematische, wie auf innermathematische Aufgaben angewandt. Konsequenterweise ist dann in Abschnitt 2.4. auch von innermathematischen Kontexten die Rede. In Übereinstimmung mit dem erweiterten Begriff der „mathematischen Grundbildung" (siehe Abschnitt 1.2.) ermöglicht es diese Zusammenschau, die Klasseneinteilung der Items entlang qualitativer Unterschiede in den Denkprozessen vorzunehmen, und überwindet so eine Überbetonung akzidentieller Unterschiede durch die äußere Gestalt der Aufgabe.

Prinzipiell sind zwar bei jeder Aufgabe (Item) - soweit sie nicht schlicht in der Ausführung eines vorgegebenen Algorithmus besteht (siehe unten bei Klasse 1A) - alle diese vier Komponenten vorhanden. Dieses prinzipielle Vorhandensein der vier Komponenten muss also nicht eigens notiert werden. Es gibt aber Aufgaben, bei denen eine der vier Komponenten ausschließlich oder dominant gefordert ist. In diesem Falle ist diese Komponente bei der Einordnung der Aufgabe festzuhalten. Von praktischer Bedeutung wird dabei lediglich das Festhalten der beiden sich komplementär verhaltenden Kategorien
- „präzisieren" und/oder „mathematisieren", bzw.
- „interpretieren" und/oder „validieren",

sein.

2.1.3 Präsentation des Items als Indikator spezieller Modellierungsfähigkeiten

„Representation skills" werden im deutschen Framework nur insoweit betrachtet, als sie Aufschluß geben können, in welcher Darstellungsform die Aufgabe vorgelegt wird und damit, falls ein Modellierungsprozess erforderlich ist, aus welcher Repräsentationsform heraus der Modellierungsprozess einsetzt. Unterschieden wird hierfür im einzelnen:
- die Aufgabe besteht nur aus Text.
- die Aufgabe enthält Graphiken, Diagramme.
- die Aufgabe enthält Funktionsgraphen oder geometrische Zeichnungen.
- die Aufgabe enthält Tabellen.
- die Aufgabe enthält reale oder realitätsnahe Bilder (auch: Landkarte).

Die bis hierher ausgewählten mathematischen Kompetenzen werden bei einem Item „facettenartig" erfasst, d.h. nicht zu jeder Kategorie muss auch tatsächlich ein Eintrag gemacht werden.

Beispiel:

• Ein Schweizer Franken ist ungefähr 1,30 DM wert. Schreibe eine Formel auf, mit der man den Wert von x DM in Schweizer Franken berechnen kann. (Format: freie Antwort)

Die genannten Kompetenzen führen bei diesem Item zu diesen Kategorien:

in 2.1.1 (evtl.: Formalisieren)
in 2.1.2 präzisieren / mathematisieren
in 2.1.3 Text

2.2 Bildung von differenzierten Kompetenzklassen

Neben den bisher genannten ausgewählten mathematischen Kompetenzen, die eigens erfasst werden, werden auch im deutschen PISA-Framework die Items in Klassen eingeteilt. Diese Klassen entstehen teilweise aus Spezifizierungen der internationalen Classes, sind jedoch in einigen Charakteristika anders, nämlich auf deutsche Verhältnisse hin, zugeschnitten.

Wie das internationale Framework geht auch dieses Framework davon aus, dass die durch die Items zu erfassenden Lern- und Denkprozesse nicht aus einer unverbundenen Nebeneinanderstellung von separierten Kompetenzen bestehen können. Andernfalls bestünde ja die Möglichkeit, lediglich durch äußere Änderungen von Formulierungen und Einkleidungen die für das Item charakteristischen Lösungsprozesse zu beeinflussen, ohne an den nötigen Denkprozessen etwas zu ändern. Kompetenz-*Klassen* sollen also immer Items zusammenfassen, die qualitativ unterschiedliche mathematische Denkprozesse erfordern. In dieser Sichtweise stimmen nationales und internationales Framework überein. Unterschiede ergeben sich jedoch, wenn Differenzierungen so vorgenommen werden, dass Gegebenheiten des deutschen Mathematikunterrichts abgebildet werden können.

Diese differenzierten Kompetenzklassen bilden den wesentlichen Kern des Frameworks, weil sie gestatten, Profilbildungen und Strukturen in der Leistung der (insbesondere: deutschen) Schülerinnen und Schüler mathematikdidaktisch begründet abzubilden. Die Beschreibung dieser Klassen erfolgt nun.

Klasse 1A: Technische Fertigkeiten

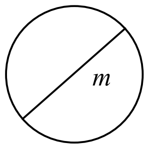
Die „symbolic, formal and technical skills" aus dem internationalen Framework gehen weit über das hinaus, was gewöhnlich in Deutschland unter dem Beherrschen von Verfahren verstanden wird, indem nämlich explizit auch Übersetzungsleistungen, die eher dem Modellieren zuzurechnen sind, einbezogen werden. Darüber hinaus sind sie ganz auf Kalküle im Sinne von rechnen, Gleichungen lösen, Terme umformen bezogen, blenden also z.B. geometrische Prozeduren (Konstruktionen) aus.

Die Kompetenz „technische Fertigkeiten" wird daher im deutschen Framework auf Items beschränkt, die *nur* „procedural knowledge" im Sinne von Hiebert (1986) erfordern. Das sind Aufgaben, bei denen lediglich das Abarbeiten eines in der Aufgabe selbst angesprochenen Algorithmus (im weitesten Sinne) und keine Modellierung, auch keine „innermathematische" (siehe unten), erforderlich ist.

Im internationalen Framework ist die Class 1 definiert unter Rückgriff auf die „symbolic, formal and technical skills". Im nationalen Framework wird daraus die Klasse 1A „Technische Fertigkeiten" als eine eigene Kompetenzklasse ausgegliedert. Mit gleicher Intention können dazu auch noch solche Items gezählt werden, die lediglich den Abruf von Faktenwissen verlangen, ohne dass im Item mit diesem Wissen gezielt mathematisch modellierend weitergearbeitet wird. Hieraus entsteht im Framework für den PISA-Test in Deutschland die

Klasse 1A:
Die Aufgabe erfordert nur technische Fertigkeiten und/oder den Abruf von Faktenwissen.

Beispiele:
- Solve the equation $7x-3 = 13x+15$!
- What is the average of 7, 12, 8, 14, 15, 9 ?
- Write 69 % as a fraction !



- Line *m* is called the circle's . . . .

(aus dem internationalen PISA-Framework, Figure 2)

Klasse 1B: Einschrittige Standardmodellierungen
Als Ergänzung zum internationalen Framework und zum internationalen Test sind außerdem Items in Betracht zu ziehen, bei denen der Modellierungsprozess einfach und einschrittig in dem Sinne ist, dass lediglich die Übertragung in ein fertiges, aus einem eng begrenzten mathematischen Gebiet stammendes, i.a. sogar im Curriculum als Stoff verankertes Modell erforderlich ist. Oft wird die Bezeichnung „eingekleidete Aufgabe" dafür gebraucht. Solche Aufgaben sind international ebenfalls in Class 1 gelegt, können aber dort nicht separat identifiziert werden, obwohl sich im Schulunterricht solche Aufgaben häufig finden und diese auch von rein technischen Aufgaben (Klasse 1A) zu unterscheiden sind. Hierfür wird die Klasse 1B gebildet:

Klasse 1B:
Zur Lösung der Aufgabe ist eine Modellierung erforderlich. Diese ist jedoch unter Rückgriff auf einen einzige Algorithmus, eine einzige Formel möglich. Es ist also die passende Formel, das passende Verfahren, die passende Prozedur aus dem vorhandenen Wissen auszuwählen und dann anzuwenden. Das zur Modellierung erforderliche Wissen stammt aus einem einzigen mathematischen Gebiet.

Beispiele:
- 100 DM werden auf ein Sparkonto mit Zinssatz 4 % gelegt. Wie ist der Kontostand nach einem Jahr? (Format: multiple choice: *4 DM / 40 DM / 104 DM / 140 DM / 400 DM*)

  Es handelt sich offenbar um eine Grundaufgabe der Prozentrechung. „Sparbuch" und „Zinssatz" sind Standardeinkleidungen in einen realitätsbezogenen Kontext (siehe auch 2.4.).
- Einem Sparkonto mit Zinssatz 4 % werden am Ende des Jahres 32 DM gutgeschrieben. Wieviel war zu Jahresbeginn auf dem Konto? (Format: multiple choice: *132 DM / 320 DM / 400 DM / 800 DM / 3200 DM*)

  Formal handelt es sich hierbei um die „Umkehraufgabe" der vorangehenden Aufgabe. Die Aufgabe wird zwar kognitiv anspruchsvoller, den Charakter einer einschrittigen Standardmodellierung behält sie jedoch bei.

Die Beispiele zeigen, dass es nicht auf Unterschiede in der rein technischen Durchführung der Berechnung ankommt, auch nicht darauf, wie „schwierig" die erforderliche Berechnung ist, sondern lediglich darauf, dass man die Aufgabe mit einem einzigen Schritt der Modellierung und dann anschließend durch ein einziges algorithmisch durchzuführendes Verfahren lösen kann.

Die Wichtigkeit der Unterscheidung dieser Klasse von Klasse 1A besteht darin, dass deutsche Unterrichts- und Schulbuchaufgaben oft diesem Muster entsprechen: Eine Aufgabe dient dazu, ein bereits eingeführtes Verfahren anzuwenden und einzuüben. In den internationalen PISA-Aufgaben kommen oft nur Teilaufgaben in diese Klasse, wobei die Gesamtaufgabe selbst komplexere Anforderungen stellt.

Klasse 2A: Begriffliche Modellierung
Die internationale Class 2 ist vor allem durch die Bedingung „connections" charakterisiert. Es sind also Querverbindungen zwischen verschiedenen Gebieten und/oder innerhalb der Aufgabe selbst zu ziehen. Die Modellierung greift nun nicht mehr auf ein einziges vorgegebenes Standardmodell zurück.

Eine erste Form, Verbindungen herzustellen, besteht darin, zur Lösung des Items begriffliches Vorgehen einzusetzen, also „conceptual knowledge" im Sinne von Hiebert (1986) zu verwenden. Essentiell für „begriffliches Wissen" in diesem Sinne ist, dass ein Zusammenhang zwischen Wissenselementen hergestellt werden muss, und dass dieser Zusammenhang sich nicht nach Durchführen eines Algorithmus erschließt sondern aufgrund einer Gemeinsamkeit der Gegenstände, eines „Hineinsehens" von Gemeinsamkeiten, u.ä..

Inhaltlich oft schwer zu unterscheiden ist, ob beim Lösen der Aufgabe wirklich eine kreative Begriffsbildung erfolgen muss, oder ob es genügt, ein geeignetes Stück bekannten begrifflichen Wissens zu aktivieren, das dann zu der Lösung der Aufgabe in einem einzigen Schritt, eben im Erkennen des Zusammenhangs, führt. Beide Fälle werden in Klasse 2A berücksichtigt:

Klasse 2A:
Der zur Lösung erforderliche Schritt ist überwiegend begrifflicher Art. Die Lösung der Aufgabe kann durch Anwendung eines einzigen begrifflichen Arguments, durch Herstellung eines begrifflichen Zusammenhangs erfolgen. Dabei genügt es auch, den erforderlichen Begriff als Wissensbestandteil abzurufen.

Beispiele:
- Für welche t ist die Gleichung $(x\text{-}2)^2 + t = 0$ lösbar? (Format: multiple choice: $t \leq 0$ / $t \geq 2$ / $t < 2$ / $t \geq 0$ / $t \geq 4$)

  Es wird nicht nach einer Berechnung der Lösung gefragt. Die Aufgabe zielt vielmehr auf das verständige Anwenden eines „Zusammenhangswissens" ab, nämlich dass Quadrate reeller Zahlen immer positiv sind.
- Ein Schweizer Franken ist ungefähr 1,30 DM wert. Schreibe eine Formel auf, mit der man den Wert von x DM in Schweizer Franken berechnen kann. (Format: freie Antwort)

Hier wird nicht nach der Berechnung konkreter Geldbeträge gefragt, sondern der Begriff des proportionalen Zusammenhangs muss sinnvoll angewendet werden. (vgl. auch 2.1.)

- Ein Waschmittelhersteller wirbt mit dem Slogan: Unser Produkt wäscht um 150 % weißer. Nimm zu dieser Aussage Stellung. (aus Henn 1998, S. 54 - Format: freie Antwort)

  Die Aufgabe zielt auf das Verständnis der Grundbegriffe der Prozentrechung ab, nicht auf die rechnerisch geprägte Durchführung einer Prozentaufgabe.

- Der Radius eines Kreises wird verdoppelt. Wie verändert sich seine Fläche?

  Keine Berechnung wird erwartet, sondern das Erkennen begrifflicher Unterschiede zwischen qualitativ verschiedenen funktionalen Abhängigkeiten. Die Aufgabe kann im konkreten Fall von Schülerinnen und Schülern auch algebraisch-rechnerisch gelöst werden. Bei der Einordnung in die Kompetenzklassen spielt dies keine Rolle, weil es auf das jeweilige in der Aufgabe steckende mathematische Potential, nicht auf tatsächlich durchgeführte Lösungswege ankommt. Tatsächliches Schülerverhalten kann in einer geeigneten Kodierung der Antworten festgehalten werden.

Die Klasse 2A- Items kontrastieren bewusst der Kalkülorientierung des deutschen Mathematikunterrichts. Es ist also sinnvoll, wenn man in der „Deduzieren-" Komponente des Modellierungsprozesses (siehe oben) bewusst unterscheidet, dass in einem Item die Modellierung nicht auf ein algorithmisches Verfahren führt, sondern begrifflich geschieht. Die Klasse 2A kennzeichnet daher ausdrücklich einen Typ von Items, der häufig in Aufgaben von Autoren aus dem Umkreis des Freudenthal-Instituts vorkommt, in Deutschland – und vermutlich auch in anderen Ländern - aber offenbar im Schulunterricht weniger verbreitet ist.

Gleichwohl werden solche Aufgaben auch in Deutschland immer dann ins Spiel gebracht, wenn mathematische Grundbildung angesprochen und eine übermäßige Kalkülorientierung vermieden werden soll. Die Klasse 2A markiert also eine mathematikdidaktisch interessierende Differenzierung. Ob sich Stärken oder Defizite auf Items dieser Kompetenzklasse zeigen, zeigt also auf, inwieweit ein Schritt zu einem mehr begrifflich ausgerichteten Verständnis von Mathematik vollzogen wurde. Im deutschen Test werden solche Aufgaben zusätzlich derart eingebaut, dass sie isoliert von weiteren Aufgabenkontexten erscheinen, während im internationalen Test Klasse-2A-Items wiederum häufig Bestandteile komplexerer Gesamtaufgaben sind.

Klasse 2B: Mehrschrittige Modellierungen

Oft sind die zur Lösung eines Items notwendigen Berechnungen selbst mehrschrittig oder mit der Verwendung geeigneter Elemente begrifflichen Denkens gemischt. Es bleibt dann bei den die internationale Class 2 kennzeichnenden „connections". Im mathematischen Modell sind mehrere Schritte zu kombinieren, Wissen aus mehreren Zusammenhängen oder Gebieten einzusetzen oder einzelne Wissenselemente mehrmals zu verwenden und aufeinander zu beziehen. Dies ergibt

Klasse 2B:
Die Struktur der Modellierung ist mehrschrittig, d.h. bei der Lösung der Aufgabe ist entweder Wissen aus mehreren mathematischen Zusammenhängen einzusetzen oder mehrfach gleiche Schritte sind vorzunehmen und zu kombinieren.

Beispiele:

- Die Büro-Mieten-Aufgabe aus TIMSS-2. (Baumert & al. 1997, S. 73; Kaune 2000):

  Mehrfach sind für den Vergleich Rückrechnungen der Miete auf die gleiche Zeiteinheit und die gleiche Flächengröße notwendig. Kaune (2000) schlüsselt die möglichen Lösungsstrategien auf dem Hintergrund des kognitiven Werkzeugs „Funktion mehrerer Variabler" auf. Allen Ansätzen ist gemeinsam, dass sie auf mehrere Variable, die geeignet miteinander in Beziehung zu setzen sind, zugreifen. Dies bewirkt die Klassifizierung als 2B-Aufgabe.

- Die Dreiecksaufgabe aus TIMSS-2 (vgl. Baumert & al 1997, S. 72; Neubrand & Neubrand & Sibberns 1998, S. 23):

  Die Dreiecke sind durch eine Kongruenzabbildung mental zur Deckung zu bringen und dann ist mit der Winkelsumme weiter zu argumentieren. Es sind also Kenntnisse sowohl der Kongruenzgeometrie, wie auch der rechnerischen Geometrie zu verwenden und zu kombinieren.

Wie die Beispiele zeigen, gibt es zwei charakteristische Kennzeichen bei vielen dieser Aufgaben. Es gibt Aufgaben, bei denen der Lösungsprozess aufgrund der Modellierung (überwiegend) „*repetitiv*" verläuft, nämlich wenn mehrmals gleiche Schritte hintereinander auszuführen und zu verknüpfen sind, sowie Aufgaben, bei denen die Struktur der Modellierung (überwiegend) „*integrativ*" ist, also unterschiedliche Modelle heranzuziehen, durchzuführen, aufeinander zu beziehen und/oder ineinander gestaffelt zu verarbeiten sind. Nicht bei allen Items der Klasse-2B ist diese Unterscheidung inhaltlich anwendbar. Falls dies aber möglich ist, wird dem Item zusätzlich ein Index „ *R* " bzw. „ *I* " gegeben.

Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung

Klasse-2B - Items beschränken sich aber immer noch auf die Betrachtung einer Situation, auf die Anwendung von Kenntnissen zur Modellierung eines bestimmten Problems. Den Übergang zur („höchsten") Klasse 3 markieren Aufgaben, in denen ausdrücklich eine Verallgemeinerung der Situation, das Entwerfen einer umfassenden Strategie, die Einbettung einer gegebenen Situation in einen allgemeinen mathematischen Zusammenhang, kurz die Herausarbeitung einer allgemeinen mathematischen Struktur erforderlich ist. Diese Klasse ist daher identisch mit der Class 3 im internationalen Framework: „mathematical thinking, generalization and insight" werden verlangt. Man auch von notwendigen „metakognitiven Aktivitäten" (Sjuts 1999) sprechen, wenn man darunter die Kontrolle der der Aufgabe zugrundeliegenden mathematischen Strukturen meint.

Unerheblich für die Klassifizierung ist allerdings, ob sich „insight" explizit im Niederschreiben eines formalen

Zusammenhangs äußert, oder ob der gefragte Einblick in die allgemeine Struktur in informeller, beschreibender Weise geschieht. Insbesondere ist die Bedingung für Klasse 3 dann erfüllt, wenn im Prozess der Modellierung auch explizit eine Validierung des gesamten mathematischen Modells erwartet wird, wenn eine komplexe Strategie zu entwickeln und zu hinterfragen ist, usw..

Klasse 3:
Die Aufgabe beinhaltet Schritte der Verallgemeinerung, des Entwerfens einer allgemeinen komplexen Strategie, der Reflexion über das verwendete mathematische Modell, die Präsentation eines subtilen mathematischen Arguments, etc..

Beispiele:

• In a certain country, the national defence budget is \$ 30 million for 1980. The total budget for that year is \$ 500 million. The following year the defence budget is \$ 35 million, while the total budget is \$ 605 Million. Inflation during the period covered by the two budgets amounted to 10 %.

a) Your are invited to give a lecture for a pacifist society. You intend to explain that the defence budget decreased over this period. Explain how you would do this.

b) Your are invited to give a lecture to a military academy. You intend to explain that the defence budget inecreased over this period. Explain how you would do this.

(aus dem internationalen PISA-Framework, Figure 6; auch in de Lange 1996 und in dieser Art sicher nicht als Beispiel für einen Test mit 15-jährigen Schülerinnen und Schülern gedacht. – Format: freie Antwort)

Das Nachdenken über die allgemeine Struktur der Prozentrechnung, nämlich wie Prozentsatz, Grundwert und Prozentwert zusammenhängen, und wie folglich damit „jongliert" werden kann, bildet den Kern dieser Aufgabe.

• Ein Oberstufenschüler behauptet: Die natürlichen Zahlen sind nur spezielle Bruchzahlen. Was sagst Du zu dieser Aussage? (aus Henn 1998, S. 50; - Format: freie Antwort)

Die Erörterung allgemeiner begrifflicher Zusammenhänge, nämlich die Einbettung der natürlichen Zahlen in den Bereich der rationalen Zahlen, soll erfolgen.

Da Klasse-3-Items kaum mehr spezifische curriculare Einzelheiten reflektieren müssen, diese vielmehr als mit Einsicht erworben und vernetzt voraussetzen, ist im deutschen Framework an dieser Stelle nicht mehr weiter zu differenzieren. Die Bearbeitung von Items in dieser Klasse setzt tieferes Verständnis voraus. Solches Verständnis baut auf dem Lernen in der Schule auf, verlangt aber zusätzlich, dass die Kenntnisse aus dem Unterricht in reflektierender Weise (Neubrand 2000; Sjuts 1999) verarbeitet wurden.

Klasse-3-Aufgaben bestimmen sich allerdings, wie die Beispiele zeigen, nicht daraus, dass die Durchführung der gefundenen Modellierung kompliziert in einem rein technischen Sinne oder von einem hohen Formalisierungsgrad sein muss. Klasse-3 - Items befinden sich im internationalen und in kleinerem Ausmaß im nationalen Testteil von PISA.

2.3 Weitere grundlegende Aspekte von Aufgaben

Das mathematische Potential und die kognitive Komplexität von Aufgaben können noch feiner, als es in den oben gebildeten Klassen erfolgt, gekennzeichnet und bewertet werden. Grundlage hierfür können solche mathematikdidaktischen und psychologischen Arbeiten sein, die die Bedingungen für die Schwierigkeit einer Aufgabe untersuchen. Allerdings sind die detailliertesten Arbeiten zu diesem Problemkreis gezielt auf arithmetische Aufgaben bezogen, etwa auf die Kennzeichnung additiver oder multiplikativer Sachaufgaben (zur Übersicht vgl. Stern 1997), decken also nicht die ganze Bandbreite mathematischer Anforderungen ab.

Spezielle Gesichtspunkte dieser Art, die in der deutschen Mathematikdidaktik diskutiert werden, können beispielsweise folgendermaßen eingebracht werden:

- In der mathematikdidaktischen Theorie „Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation" (Cohors-Fresenborg 1996) werden die Komponenten „sprachlogische Komplexität" und „kognitive Komplexität" unterschieden. So ist etwa zu beachten, inwieweit der sprachliche Fluss bei der Aufgabenstellung mit dem Lösungsgang in einem mathematischen Modell übereinstimmt. Die zweitgenannte Komponente nimmt auf, ob die Lösung einer Aufgabe mittels mehrerer parallel stehender Variablen erfolgen kann, oder ob das tiefgestaffelte Einsetzen mehrere Funktionen ineinander erforderlich ist (vgl. Kaune 2000 für ein Beispiel). Teilweise wird dies durch die Indizes „repetitiv" und „integrativ" bei Klasse 2 erfasst.
- Die Untersuchung von einzelnen Items auf die Anzahl, Art und Qualität der in ihnen angesprochenen „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte" (vom Hofe 1995) kann zu einzelnen Stoffbereichen Erklärungsansätze und Interpretationen liefern. Das Konzept der Grundvorstellungen beinhaltet insbesondere normative Komponenten, die zu einer detaillierten Beschreibung der wünschenswerten Qualität der Kenntnisse zu einzelnen mathematischen Begriffen und Verfahren führen. Mit diesem Ansatz kann vor allem auch die Brücke von den Testresultaten zu einer produktiven Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts geschlagen werden.
- Ebenfalls hier einzubringen sind formale, auf den Problemlösungsprozess bezogene Eigenschaften der Items. Dazu gehört beispielsweise, ob es sich beim Item um ein Umkehraufgabe, d.h. eine Aufgabe, die gegen den Gedankengang der zugehörigen Grund- oder Standardaufgabe zu lösen ist, handelt. Die Lösung solcher Aufgaben kann möglicherweise anzeigen, dass Flexibilität in der Anwendung von Begriffen vorhanden ist.

Kennzeichnungen der genannten Art beziehen sich per se immer speziell auf einzelne Aufgaben, weil die entsprechenden Kategorien für jede Aufgabe neu interpretiert bzw. aus einem breiten Fundus von speziellen Kategorien neu zusammengestellt werden müssen. Diese Theorien liefern also bei der Auswertung der im Test zu bestimmten Items oder Itemgruppen erbrachten Leistungen wertvolle Ansätze für inhaltsbezogene Erklärungen, sind aber weniger für die Strukturierung des Tests insgesamt geeignet.

2.4 Stoffgebiete und „big ideas"

Die zweite Hauptkomponente, auf der das internationale PISA-Framework aufbaut, sind die „big ideas". Darunter sind miteinander stark vernetzte mathematische Konzepte verstanden, die unter einem gemeinsamen übergeordneten Gesichtspunkt gesehen werden können. Beispiele für „big ideas" sind etwa „Chance", „Change and growth", „Dependency and relationships", „Space and shape", usw.. Es sind dies also Bündel von Konzepten, die durch einen gemeinsamen Phänomenbereich zusammengehalten werden.

Die „big ideas" kommen wiederum aus Freudenthals grundlegendem Denkansatz der „didaktischen Phänomenologie" (Freudenthal 1983). Sie verbinden sich daher in organischer Weise mit dem literacy-Konzept:

„These competencies relate closely to both, our definition of mathematical literacy and the competencies defined earlier in this framework." (OECD 1999, p 49)

Die „big ideas" sind anders zugeschnitten als die in der deutschen Mathematikdidaktik häufiger diskutierten „Fundamentalen Ideen" (Schreiber 1979, Schweiger 1992). Dort stehen nämlich relativ abstrakte mathematische Denkweisen - Beispiele: Abbildung, Symmetrie, Approximation, Exhaustion, Stetigkeit, usw. - als Gesichtspunkte der Bündelung im Vordergrund und nicht in erster Linie der Bezug zu einem umweltbezogen definierten Phänomenbereich.

Für den internationalen Teil im ersten Zyklus von PISA, bei dem Mathematik eine untergeordnete Rolle spielt, wurden zwei „big ideas" herausgegriffen, nämlich „Change and growth" und „Shape and space". Die Items im internationalen Test wurden diesen zugeordnet.

Zu „Change and growth" gehören Items, die Muster der Veränderung oder des Wachstums in der Natur und der Mathematik zum Thema haben. Dazu gehört das Erkennen und die Darstellung typischer Veränderungen (z.B. lineares vs. exponentielles Wachstum) und die Anwendung dieser Kenntnisse auf die Interpretation von Wachstumsvorgängen. Diese Zusammenstellung folgt - ausdrücklich so gewollt - nicht den traditionellen Fachgebieten, berührt aber viele Inhalte aus diesen; denn in natürlicher Weise werden hierbei etwa geometrische Aufgabenstellungen mit algebraischen Beschreibungen kombiniert.

Unter „Space and shape" werden Items gesammelt, die „Muster" in einem sehr allgemeinen Sinn ansprechen. Der Beitrag der Geometrie besteht darin, dass sie einfache Modelle für diese Vielfalt an Mustern zur Verfügung stellt. Hinzu kommen Aufgabentypen, die auf die relative Lage von Gegenständen im Raum und auf Abbildungen räumlicher Objekte abheben. Auch im Bereich dieser „big idea" gilt daher, dass es zwar enge Bindungen zur Geometrie als traditioneller mathematischer Teildisziplin gibt, aber in den meisten Ländern nur wenig Realisierung von „space & shape" - Themen in der Schulgeometrie.

„Big ideas" haben - nach dem internationalen PISA-Framework - den Vorteil, dass sie die Mathematik nicht in verschiedene separierte Themengebiete wie Algebra oder Geometrie aufspalten, sondern fachgebietsübergreifend mathematische Ideen realisieren. In den deutschen Lehrplänen ist allerdings von „Big ideas", und übrigens auch von „Fundamentalen Ideen", höchstens in den Präambeln, und dann vor allem unter dem normativen Aspekt der Legitimation gewisser Stoffteile, nicht jedoch als Strukturierungsgesichtspunkt für das Curriculum, die Rede. Vielmehr werden, was durchaus beklagt wird (vgl. MNU 1999), die einzelnen Teilgebiete der Mathematik i.a. isoliert voneinander unterrichtet. Selten zeigen sich Vernetzungen zwischen den Gebieten, wie sie z.B. durch die „Big ideas" strukturell bedingt werden. Die deutschen Testinstrumente werden daher zusätzliche Items aufnehmen, bei denen die Inhalte nicht über die Themengebiete hinweg vernetzt sind.

Gerade im Bereich von „Space and shape", weniger deutlich bei „Change and growth", zeichnet sich noch eine spezielle Distanz zum deutschen Mathematik-Curriculum ab. Es ist ein ständiges Desiderat der deutschen Mathematikdidaktik, Aspekte der räumlichen Geometrie und den Modellcharakter der Geometrie zur Strukturierung räumlicher Phänomene im Unterricht stärker einzubringen (zur Übersicht vgl. Graumann & al. 1996). Aber eben bei dieser „big idea" scheint in Deutschland ein großer Nachholbedarf zu bestehen.

Die nationale Zusatzerhebung wird daher nicht um die „big ideas" gruppiert. Vielmehr sind die im internationalen PISA-Framework nur als „minor aspect" genannten „content strands" die besser geeignete Orientierung bei der Test-Konstruktion (nicht notwendig auch bei der Auswertung). Es kann damit eher die Vielfalt der gestellten Testitems abgeschätzt und beurteilt werden. Deshalb wird die Einordnung in die traditionellen Stoffgebiete wie folgt vorgenommen, wobei allerdings ein pragmatischer, auf die deutschen Verhältnisse passender Zusammenschnitt der „content strands" erfolgt:

Arithmetik (einschließlich Schätzen, Bruchrechnung, etc.)
Proportionalität (Dreisatz, Prozentrechnung, Zinsen, etc.)
Algebra (einschließlich Darstellung und Behandlung von Funktionen, speziell der linearen Funktionen)
Geometrie (Elementargeometrie, rechnerische Geometrie einschließlich einfacher Körperformen)
Stochastik und Umgehen mit Daten (insbesondere Lesen und Aufstellen von Diagrammen)

Diese Themengebiete orientieren sich in etwa an den Einteilungen, die in den deutschen Curricula realisiert sind. In den einzelnen Schulformen sind dabei unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt, im Gymnasium etwa gibt es eine stärkere Betonung von traditionellen Inhalten aus Geometrie und Algebra, in den Hauptschulen eher eine Gewichtung von Bezügen zur Realität. Dies ist bei der Auswertung zu beachten. Insbesondere in der Geometrie sind die curricularen Unterschiede zwischen Gymnasium und Hauptschule eklatant, ein Faktum, das speziell für den deutschen Mathematikunterricht gilt. Es wird auf diese spezifische Problematik in 4. nochmals eingegangen.

2.5 Kontexte und Situationen

Als vierter, aber untergeordneter Aspekt werden im internationalen PISA-Framework die Begriffe „situations and context" eingeführt:

„An important part of the definition of mathematical literacy is doing and using mathematics in a variety of situations."

Unter „situations" werden spezielle Aufgaben-Kontexte verstanden. Diese unterscheiden sich bezüglich der „Distanz", die sie zu den Schülerinnen und Schülern haben. Eine entsprechende Skala wird so definiert:

„The closest is personal life, next is school life, work and sports (or leisure in general), followed by the local community and society as encountered in daily life, and furthest away are scientific contexts." (OECD 1999, p 50)

Für die deutsche Zusatzerhebung wird diese Idee der speziellen Zuordnung von Items zu Situationen nicht übernommen. Sie wäre nicht durchzuhalten, wenn man die bisher bereits geschilderten notwendigen Ergänzungen betrachtet. Statt dessen wird der Begriff des Kontexts, der im internationalen PISA-Framework erst unter „task characteristics" auftritt, zur inhaltlichen Kennzeichnung von Aufgaben verwendet. Es wird also weniger der spezielle Kontext (situation), sondern der Typ des in einer Aufgabe angesprochenen Kontexts erfasst. Wie im internationalen Framework wird zwischen inner- und außermathematischen Kontexten unterschieden:

„The term context is used in accordance with the established use of this term in mathematics education. A context is an extra-mathematical or intra-mathematical setting within which the elements of a mathematical complex (i.e. a problem, a task or a collection of mathematical objects, relations, phenomena, etc.) are to be interpreted." (OECD 1999, p 51).

Im wesentlichen folgt die Einteilung im deutschen Framework dem internationalen Muster, jedoch mit einigen Differenzierungen. Demnach kann in einer Aufgabe angesprochen sein:

- ein *authentischer* Kontext: die verwendeten Daten sind einer wirklichen Situation entnommen und das Problem entspricht einer relevanten Fragestellung,
- ein *realitätsbezogener* Kontext: die Aufgabe enthält zwar Daten mit realer Bedeutung, diese sind jedoch konstruiert zum Zwecke des Stellens einer mathematischen Aufgabe.

Die realitätsbezogenen Kontexte reichen von realitätsnaher, aber zu Zwecken der Rechnung vereinfachter Datenauswahl bis zu den sog. „eingekleideten Aufgaben". Als Sonderfall sind aber die Aufgaben zu betrachten, die keine Modellierung, sondern lediglich ein rechnerisch-kalkülhaftes Umgehen mit Größen verlangen (Beispiel: Berechne die Fläche eines Rechtecks mit Länge 3 cm und Breite 5 cm !). Diese Aufgaben werden unter

- Kontext: Rechnen mit *Größen*

eingeordnet. Im PISA-Framework wird ausdrücklich betont, dass im internationalen Test authentische Aufgaben den Vorrang haben und Aufgaben des „eingekleideten" Typs („real but not authentic"), erst recht reine Größenberechnungen, nach Möglichkeit vermieden werden sollen. Die Bedingungen der deutschen Zusatzerhebung, wie sie in 1.3. dargelegt wurden, erfordern aber eine Berücksichtigung auch dieser Typen.

Zusätzlich zu diesen außermathematischen Kontexten wird - auch aufbauend auf dem Gedanken der mathematischen Grundbildung - als weitere Kategorie

- ein innermathematischer Kontext

eingeführt. Dieser zeigt in Übereinstimmung mit dem Gebrauch des Wortes „intra-mathematical context" im internationalen Framework an, dass im Item eine Vernetzung innerhalb der Mathematik stattfindet, sei es von einem mathematischen Teilgebiet zu einem anderen, sei es durch den Gebrauch eines Begriffes in einem anderen als dem ihn ursprünglich definierenden Zusammenhang. Diese innermathematische Vernetzung ersetzt in gewisser Weise die im internationalen Framework durch die „big ideas" hergestellte Verbindung von Aufgaben zu größeren Zusammenhängen. Sie ist vor allem aber konsistent mit dem erweiterten Gebrauch des Begriffs „Modellierung", wie er in 2.1. beschrieben wurde.

Bekannte Beispiele für innermathematische Kontexte liefern die sog. „Punktmuster", wobei die Anzahl der Punkte in geometrischen Konfigurationen algebraisch ausgedrückt werden soll. Es stellt auch eine Reaktion auf die Kompartmentalisierung des deutschen curricularen Denkens (siehe 1.3.) dar, wenn die innermathematischen Kontexte - gerade auch im internationalen Testteil - separat aufgeführt werden; denn auch diese Art des Kontexts zeigt Vernetzungen an. In der internationalen Klassifikation geschieht diese separate Markierung nicht, obwohl gerade auch dort Items mit innermathematischem Kontext vorhanden sind.

Für Items, die nur technisches Wissen außerhalb jeglicher Kontextanbindungen erfordern und die in der deutschen Zusatzerhebung ausdrücklich aufgenommen sind (z.B. die Items in der Klasse 1A), wird die Kategorie

- *ohne* zusätzlichen Kontext

verwendet.

2.6 Zusammenfassung

Den wesentlichen Kern des Frameworks bilden die Kompetenzklassen. Denn diese strukturieren das Spektrum mathematischer Leistungsanforderungen und damit den Test insgesamt.

Kompetenzklasse:

Klasse 1A: Technische Fertigkeiten
Klasse 1B: Einschrittige Standardmodellierungen
Klasse 2A: Begriffliche Modellierung
Klasse 2B: Mehrschrittige Modellierungen (ggf. integrativ / repetitiv)
Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung

Die Items werden zusätzlich eingeordnet nach diesen Aspekten:

Mathematische Tätigkeit:
Begründung/Beweis
spezielle mathematische Tätigkeit

Modellierung:
präzisieren / mathematisieren
interpretieren / validieren

Präsentation:
Text
Graphik, Diagramm
Funktionsgraph, geometrische Zeichnung
Tabelle
Bild

Stoffgebiet:
Arithmetik
Proportionalität (insbes. Prozentrechnung)
Algebra (insbes. lineare Funktionen)
Geometrie

Stochastik und Umgehen mit Daten
Kontext:
authentisch
realitätsbezogen
Rechnen mit Größen
innermathematisch
ohne

Gesichtspunkte für die Analyse einzelner Items sind darüber hinaus:
Art der angesprochenen Grundvorstellungen
sprachlogische und kognitive Komplexität
formaler Typus des Problemlöseprozesses

3. Aufbau des internationalen und des nationalen PISA-Mathematik-Tests

3.1 Aufgabenformate

Wie im internationalen PISA-Framework wird auch in der nationalen Zusatzerhebung unterschieden zwischen diesen Aufgabenformaten:
- multiple choice,
- kurze freie Antwort („closed constructed response“),
- ausführliche freie Antwort („open constructed response“),

Eine „kurze freie Antwort“ bedeutet, dass ein Ergebnis nur mitgeteilt bzw. eine Frage mit einer Zahl, einem Wort oder einem Satz beantwortet werden soll, ohne dass die Antworten wie bei den multiple-choice - Aufgaben schon vorgegeben wären. Aufgaben des Typs „open constructed response“ erfordern vom Probanden, dass zusätzlich auch der Weg zum Ergebnis dargestellt wird. Solche Aufgaben sollen ca. 25 - 35 % der Testzeit im internationalen PISA-Mathematik-Test beanspruchen. Im nationalen Teil des PISA-Test wird die Testzeit ungefähr im Verhältnis 2 : 1 : 1 auf die obigen drei Formattypen verteilt.

Die internationalen Items zeichnen sich darüber hinaus dadurch aus, dass mehrmals eine Reihe von einzelnen Aufgaben aus einem gemeinsamen „stimulus material“ heraus gestellt wird. Dieser Stimulus kann ein Text, eine Graphik, eine sonstwie geschilderte Situation sein, zu der dann verschiedene Teilaufgaben gestellt werden. Wieder entspricht dieses Format in hohem Maße dem in 1. dargestellten allgemeinen Ansatz des internationalen PISA-Tests und steht folglich in dem schon mehrfach hervorgehobenen Kontrast zu deutschen curricularen Gewohnheiten. Das nationale Testinstrument vermeidet daher bis auf gezielte Ausnahmen diese aufeinander aufbauenden Aufgaben und versucht dadurch die deutsche Unterrichtssituation aufzunehmen, bei der Aufgaben meist in isolierter Form gestellt werden. Dadurch wird auch das (auswertungs-technische) Ziel erreicht, dass die Erreichung der Punkte (scores) bei den Teilaufgaben voneinander unabhängig erfolgen soll.

3.2 Inhaltlicher Testaufbau

Die Aufteilung der Testzeit auf die „big ideas“ im internationalen PISA-Test ist mit etwa 1 : 1 vorgesehen. Dies betrifft den deutschen Zusatztest nicht, der sich an den Stoffgebieten orientiert.

Die Aufteilung der Testzeit auf die drei competency classes im internationalen Teil soll wie 1 : 2 : 1 erfolgen. Es werden dabei aber stets die Teilaufgaben separat erfasst, so dass auch bei Vorliegen eines gemeinsamen Stimulus unterschiedliche Klassen innerhalb des gesamten Aufgabenkomplexes auftreten können. Da im deutschen Framework mehr Klassen als international gebildet wurden und die Klasse 1A aus den dargestellten Gründen der Kompensation dient, erscheint eine Verteilung mit Anteilen 1 : 1 auf die Klassen 1 und 2 angemessen. Klasse-3-Aufgaben gibt es sowohl im internationalen, als auch im nationalen Testteil, und zwar mit etwa 1/5 der Gesamttestzeit.

Es ist insgesamt zu beachten, dass beide Testteile - national und international - komplementär aufgefasst werden. Ein ausgewogenes Verhältnis bei der Auswertung entsteht durch die Kombination beider Teile.

4. Zwei spezifische Probleme bei der Implementierung des PISA-Tests in Deutschland

1. Wie in 1. und 2. begründet dargestellt wurde, beinhaltet die nationale Zusatzerhebung zum internationalen PISA-Mathematik-Test zur Ergänzung des Tests auch solche Aufgaben, die technische Fertigkeiten isoliert erfassen sollen. Dies geschieht im ersten PISA-Zyklus zur Sicherung einer gewissen curricularen Valididät, obwohl in den Konstrukten „mathematical literacy“ und „mathematische Grundbildung“ gleichermaßen solche isolierten Fertigkeiten stets in ihrer Vernetzung zu mathematischen Fähigkeiten gesehen werden. Die Hereinnahme dieser Aufgaben wird jedoch problematisch aufgrund der in Deutschland existierenden Gliederung des Schulwesens. So müssen nun - beispielsweise wegen der Berücksichtigung algebraischer Techniken – einige wenige Items eingesetzt werden, die definitiv nur für Gymnasien curricular valide sind, bei denen also z.B. Hauptschüler keine entsprechende Vorbereitung aufweisen. Diese Items lassen sich benennen und bei der Auswertung muss aber auf die Berücksichtigung solcher curricularer Differenzen geachtet werden. Im internationalen Bereich tritt hingegen diese Problematik nicht mit dieser Schärfe auf, weil die Einzelcurricula dort i.a. nicht derart schulbezogen separiert sind.

Eine Lösung dieses Problems kann jedoch nicht darin bestehen, Items eindeutig gymnasialer Provenienz auszuschließen, solange sie sich jedenfalls Aspekten mathematischer Grundbildung zuordnen lassen. Denn auch diese Items dienen der Verwendung von Mathematik zur Erschließung der Welt.

Ein besonders passendes Beispiel ist die Ausbildung eines fundierten Variablenbegriffs, der insbesondere zu einer Vertiefung von Anwendungsbezügen beitragen kann. So verstanden ist es dann gerade gegen die Idee der mathematischen Grundbildung, wenn Hauptschülern ein Zugang zu elementaren algebraischen Techniken vorenthalten bleibt (vgl. zu dieser Argumentation auch den Mathematik-Teil in der Expertise zum BLK-Modellversuch: BLK 1997). Von einer diese Problematik reflektierenden Auswertung des PISA-Tests können also u.U. auch curriculare Anregungen ausgehen.

2. Die Leitidee des internationalen PISA-Tests, auf das mathematische Verständnis als Produkt aus den Kenntnissen mathematischer Begriffe und Verfahren gegen Ende der Pflichtschulzeit abzuzielen, bringt ein weiteres spezifisches Problem bei der Verwendung des PISA-Tests in Deutschland mit sich.

Aus der Altersstruktur in Deutschland bei der TIMSS-Untersuchung weiß man, dass deutsche Schülerinnen und Schüler ca. ein Jahr zu alt sind relativ zur besuchten Klassenstufe. PISA-international zieht seine Stichprobe altersbasiert aus der Gruppe der 15-jährigen. International besuchen diese mehrheitlich das Analogon zur 10. Klassenstufe, in Deutschland allerdings vorwiegend die Klasse 9. Deutsche Schülerinnen und Schüler werden also im internationalen PISA-Test mit einigen Aufgaben konfrontiert, die aufgrund mangelnder schulischer Vorbereitung nur schwer lösbar sein werden. Dass für die nationale Zusatzerhebung in Deutschland die Stichprobe ergänzungsweise auch klassenbasiert gezogen wird, kann dies nur zum Teil ausgleichen. Die deutsche Zusatzerhebung im Bereich Mathematik wird daher die Items stofflich dem 9. Schuljahr anpassen.

Andererseits kann auch diese Problematik - bei einer entsprechend zu gestaltenden nationalen Auswertung - wieder zu einer Reflexion über den curricular bedingten Kenntnisstand in Deutschland anregen. Immerhin gibt es - auch dies trifft wieder vorwiegend Hauptschüler - einen Teil der Schülerschaft, der die schulische Ausbildung auf einem Niveau beendet, der dem internationalen Konstrukt „mathematical literacy“ nicht entsprechen kann.

5. Literatur

Bauer, L. (1978): Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn: Schöningh.

Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., Köller, O. & Neubrand, J. (1997): TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich: Deskriptive Befunde. Opladen: Leske & Budrich.

Baumert, J., Bos, W. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2000): TIMSS/III - Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie: Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Bde 1 und 2. Opladen: Leske & Budrich.

BLK - Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.) (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (= BLK - Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60). Bonn: BLK.

Blum, W. & al. (Hrsg.) (1994 - 1997): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Bd. 1 - Bd. 4. Hildesheim: Franzbecker.

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven. In G. Kadunz & al. (Hrsg.), Trends und Perspektiven - Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt Sept.1994 (S. 15 - 38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Blum, W. & Neubrand, M. (Hrsg.) (1998): TIMSS und der Mathematikunterricht: Informationen, Analysen, Konsequenzen. Hannover: Schroedel.

Blum, W. & Wiegand, B. (1998): Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande? Ein Interpretationsansatz auf der Basis stoffdidaktischer Analysen. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), TIMSS und der Mathematikunterricht - Informationen, Analysen, Konsequenzen (S. 17 - 27). Hannover: Schroedel.

Cohors-Fresenborg, E. (1996): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. In G. Kadunz & al. (Hrsg.), Trends und Perspektiven - Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt Sept.1994 (S. 85 - 90). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

De Lange, J. (1996): Real problems with real world mathematics. In C. Alsina & al. (Eds.), Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla July 1996 (pp 83 - 110). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Dörr R. & Zimmermann, B. (1998): Vergleichende Untersuchungen zur Gestaltung von Übungen im Mathematikunterricht der ehemaligen DDR sowie neuer und alter Bundesländer. (= Bericht zum DFG - Forschungsprojekt Zi 523 / 1-1.). Jena: Friedrich-Schiller Universität.

Fanghänel, G. (1983): Zum Arbeiten mit Aufgaben im Mathematikunterricht an der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der DDR. Dissertation B. Berlin: Akademie der Pädagogischen Wissenschaften.

Freudenthal, H. (1975): Pupil's achievements internationally compared - the IEA. Educational Studies in Mathematics 6, 127 - 186.

Freudenthal, H. (1977): Mathematik als pädagogische Aufgabe. (Bd.1, Bd.2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1981): Major problems of mathematical education. Educational Studies in Mathematics 12, 133 - 150.

Freudenthal, H. (1983): Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Fujita, H. (1996): Highlights and shadows of current Japanese national curriculum of mathematics today. In C. Alsina & al. (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures. Sevilla July 1996. (pp 181 - 193). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Graumann, G, Hölzl, R., Krainer, K., Neubrand, M. & Struve, H. (1996): Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. Journal für Mathematikdidaktik 17, 163 - 237.

Henn, H.-W. (1998): TIMSS - Katalysator für eine neue Unterrichtskultur. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), TIMSS und der Mathematikunterricht - Informationen, Analysen, Konsequenzen (S. 46 - 56). Hannover: Schroedel.

Heymann, H.W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Basel: Beltz.

Hiebert, J. (Ed.) (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaiser, G. (1999): Unterrichtswirklichkeit in England und Deutschland - Vergleichende Untersuchungen am Beispiel des Mathematikunterrichts. Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Kaune C. (1995): Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In H.G. Steiner & H.J. Vollrath (Hrsg.), Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathematikdidaktischen Forschung (S. 66-76). Köln: Aulis.

Kaune, C. (2000): Analyse einer TIMSS-Aufgabe mit den Methoden der kognitiven Mathematik. Beiträge zum Mathematikunterricht 2000, S. 330-333.

Maier, P. (1994): Räumliches Vorstellungsvermögen - Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. Frankfurt/M. u.a.: Peter Lang Verlag.

MNU (1999): Empfehlungen des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) zur Gestaltung von Lehrplänen bzw. Rahmenplänen für den Mathematikunterricht. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 68, 36 - 44.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A,E., Gonzales, E.J., Kelly, D.L. & Smith, T.A. (1998): Mathematics and science achievement in the final year of secondary school: IEA's Third International Mathematics and Science Study. Chestnut Hill, MA: Boston College

Neubrand, J. (in Druck): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Dissertation: FU Berlin.

Neubrand, M. (2000): Reflecting as a Didaktic construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In: I. Westbury, St. Hopmann & K. Riquarts(Eds.): Teaching as a Reflective Practice: The German Didaktik Tradition (pp 251-265). Mahwah, N.J., London: Lawrence Erlbaum.

Neubrand, J., Neubrand, M. & Sibberns, H. (1998): Die TIMSS-Aufgaben aus mathematik-didaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler. In W. Blum & M. Neubrand (Hrsg.), TIMSS und der Mathematikunterricht - Informationen, Analysen, Konsequenzen (S. 17 - 27). Hannover: Schroedel.

OECD (Ed.) (1999): Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment. Paris: OECD Publication Service.

Orpwood, G. & Garden, R.A. (1998): Assessing mathematics and science literacy (TIMSS-monograph No. 4). Vancouver: Pacific Educational Press.

Schreiber, A. (1979): Universelle Ideen im mathematischen Denken - Ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. mathematica didactica 2, 165 - 171.

Schupp, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. Der Mathematikunterricht 34 (6), 5 - 16.

Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen: Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematik-Didaktik. Journal für Mathematik-Didaktik 13, 199 - 214.

Sjuts, J. (1999): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Stern, E. (1997): Kap.10: Mathematik. In F.E. Weinert (Hrsg.), Enzyklopädie der Psychologie, D, I, 3 „Psychologie des Unterrichts und der Schule“ (S. 397 - 426). Göttingen: Hogrefe.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, 37 - 46.

Wynands, A. (1995): Abiturklausuren in Mathematik von 1960 bis 1992: Analyse von Anforderungssituationen. Mathematik in der Schule 33(11), 625-633.

Autoren:

PISA-Expertengruppe Mathematik. Sprecher:

Michael Neubrand, Prof. Dr., Universität Flensburg, Mürwiker Straße 77, D-24943 Flensburg.
E-mail: neubrand@uni-flensburg.de

PISA-Projekt-Koordination in Deutschland:

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Lentzeallee 94, D-14195 Berlin.
E-mail: pisa@mpib-berlin.mpg.de