ÜBER DIE INTEGRALE DES VIELKÖRPER-PROBLEMS[1]

VON

H. BRUNS

in LEIPZIG.

I.

1. Die bis jetzt bekannten Integrale des Vielkörper-Problems, nämlich die Schwerpunkts- und Flächen-Sätze und der Satz von der lebendigen Kraft, besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie die Coordinaten und die Geschwindigkeits-Componenten nur in algebraischen Verbindungen enthalten. Dieser Umstand, sowie die Vergeblichkeit der bisherigen Bemühungen zur Auffindung weiterer Integrale legen die Vermuthung nahe, dass der Kreis der algebraischen Integrale mit den genannten abgeschlossen sei. Es soll deshalb hier die Aufgabe behandelt werden, alle algebraischen, die Zeit nicht explicite enthaltenden Integrale aufzusuchen. Das Ergebniss ist, wie hier gleich bemerkt werden soll, negativer Art, d. h. die noch fehlenden Integrale sind sämmtlich transcendent.

Es seien $m_\alpha, x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ die Massen und die Coordinaten der materiellen Punkte, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der Massen m_α, m_β,

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction für den Fall des NEWTON'schen Gravitationsgesetzes, dann können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha, \qquad \frac{dX_\alpha}{dt} = \frac{1}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad \text{etc.}$$

[1] Mit Genehmigung des Verfassers abgedruckt aus den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1887; Math. Cl. 1—39, 55—82.

schreiben. Wir beschränken uns, wie bereits angedeutet, auf die von t freien Integrale und bezeichnen, wie üblich, als Integral einen aus den $x, X, \ldots$ gebildeten Ausdruck φ, dessen Ableitung nach t unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen (1) identisch verschwindet, der also der Bedingung

$$(2) \qquad 0 = \sum_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} X_\alpha + \ldots + \sum_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \ldots$$

genügt. Ausserdem werden wir mit Ausdrücken φ zu thun haben, welche die Bedingung (2) zwar nicht identisch befriedigen, wohl aber in Folge der Bedingung $\varphi = 0$. Derartige Ausdrücke wollen wir, in Ermangelung einer anderen Bezeichnungsweise, kurz »Integralgleichungen« nennen. Solche Ausdrücke entstehen z. B. durch Verbindung und Umformung von Gleichungen, welche Bestandtheile einer allgemeinen, particulären oder singulären Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen sind. Im vorliegenden Falle haben wir diese verschiedenen Möglichkeiten nicht näher zu untersuchen; wir können deshalb auch davon absehen, dass das vorgelegte Problem überhaupt keine singulären Lösungen besitzt.

Zur Abkürzung des Ausdruckes wollen wir noch festsetzen, dass die Zeichen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$ benutzt werden sollen, wenn es sich nur darum handelt, anzuzeigen, dass eine Grösse eine ganze Function oder eine rationale Function ist, ohne dass es dabei auf die besondere Form derselben weiter ankommt.

2. Bei der Aufsuchung der algebraischen Integrale des Systems (1) wollen wir zunächst ein etwas allgemeineres System von Differentialgleichungen zu Grunde legen, und erst später auf das System (1) zurückgehen. Es seien die $2m$ Variablen $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m$ als Functionen von t durch das Gleichungssystem

$$(3) \qquad \frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha(x_1, \ldots, x_m).$$

definirt, wo die A_α algebraische Functionen der $x_1, \ldots, x_m$ ohne t bedeuten. Diese algebraischen Functionen können wir uns immer dargestellt denken als rationale Functionen der x und einer einzigen algebraischen Irrationalität s, welche als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$(4) \qquad F(s, x_1, \ldots, x_m) = s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0$$

definirt ist, in der $S_\alpha = \mathfrak{G}(x)$. Wir werden vorläufig bezüglich der $A_1, \ldots, A_m, F$ nur folgende zwei Einschränkungen festsetzen. Erstlich soll F eine ganze homogene Function (vom n^{ten} Grade) der Variablen s und x, ohne willkürliche, in den A_α nicht vorkommende Constanten, bedeuten; zweitens sollen die A homogene Functionen der x, s und zwar von einer geraden Ordnung $2N$ sein. Beide Einschränkungen treffen für unser specielles Problem (1) zu. Setzt man nämlich

$$(5) \qquad s = \sum r_{\alpha\beta},$$

und schafft man die Quadratwurzeln, als welche sich die r darstellen, fort, so erhält man für s in der That eine Gleichung der vorausgesetzten Art. Ferner werden die Ableitungen der Kräftefunction in (1) homogene rationale Functionen von den x, y, z und von s, und zwar von der Ordnung -2, indem sich jedes r rational durch diese Variablen ausdrücken lässt. Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur nöthig, in (5) alle Quadratwurzeln bis auf eine fortzuschaffen.

Ein algebraisch von den x, y abhängiges Integral φ der Gleichungen (3) lässt sich nun immer definiren als Wurzel einer gewissen Gleichung

$$(6) \qquad \varphi^p + B_1\varphi^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

in welcher $B_\alpha = \mathfrak{R}(x, y)$ ist, und von der wir voraussetzen dürfen, dass sie nicht in Factoren von ähnlicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Die Differentiation nach t liefert

$$(7) \qquad \frac{dB_1}{dt}\varphi^{p-1} + \ldots + \frac{dB_p}{dt} = 0.$$

Verschwinden in dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten, so sind die B rational aus den x, y zusammengesetzte Integrale, also φ eine algebraische Verbindung rationaler Integrale. Verschwinden die Ableitungen der B nicht, so nehmen sie die Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ an, und die Gleichungen (6) und (7) besitzen eine gemeinsame Wurzel, d. h. die Gleichung (6) wird reductibel, wenn man den Variablen x, y die Irrationalität s »adjungirt». Beide Gleichungen besitzen also einen gemeinsamen Theiler

$$(8) \qquad \varphi^q + C_1\varphi^{q-1} + \ldots + C_q, \qquad [C_\alpha = \mathfrak{R}(x, y, s)],$$

welcher nicht in Factoren von ähnlicher Form zerlegbar ist und der verschwindet, wenn für φ das betrachtete algebraische Integral substituirt wird. Die Wiederholung derselben Schlussweise führt zu der Bedingung

$$\frac{dC_1}{dt}\varphi^{q-1}+\ldots+\frac{dC_q}{dt}=0,$$

welche wegen der Irreductibilität von (8) nicht anders erfüllt sein kann, als wenn die Ableitungen der C sämmtlich verschwinden. Die C sind daher Integrale von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Zusammenfassend können wir also sagen: die gesuchten algebraischen Integrale lassen sich immer als algebraische Verbindungen von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ darstellen.

3. Es sei nun φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$. Denken wir uns dasselbe als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, y, s)$ geschrieben, so können die Coefficienten in Zähler und Nenner ausser den in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten noch irgend welche Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthalten, denen beliebige constante Werthe beigelegt werden dürfen, ohne dass φ aufhört Integral zu sein. Wir wollen zeigen, dass ein solches Integral sich allemal als rationale Verbindung von parameterfreien Integralen derselben Art darstellen lässt. Zu dem Ende denken wir uns einen Quotienten φ' zweier Polynome D und E angesetzt, welche genau dieselben Terme wie Zähler und Nenner von φ, aber mit unbestimmten Coefficienten $D_1, D_2, \ldots$, resp. $E_1, E_2, \ldots$ enthalten.

Die Forderung, dass φ' ein Integral sein soll, führt zu der Bedingung

$$D\frac{dE}{dt}-E\frac{dD}{dt}=0, \tag{9}$$

welche, vollständig entwickelt, eine gewisse Anzahl von Gleichungen liefert, die in Bezug auf die Coefficienten $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ bilinear sind. Diese Gleichungen sind mit einander verträglich, denn sie werden durch die Coefficienten von φ erfüllt; andererseits sind die $D_1, D_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ nicht vollständig durch jene Gleichungen bestimmt, wenn φ die Parameter $a_1, a_2, \ldots$ enthält. Die allgemeinste Art und Weise, der Bedingung (9) durch den Quotienten φ' zu genügen, besteht nun darin, dass die $D_1, D_2, \ldots$, $E_1, E_2, \ldots$ gewissen Ausdrücken gleichgesetzt werden, welche in rationaler Weise 1) eine gewisse Anzahl von Parametern $b_1, b_2, \ldots$; 2) eine einzige algebraisch von den Parametern b abhängige Grösse c enthalten. Die Grösse c können wir uns definirt denken als Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$c^k + c_1 c^{k-1} + \ldots + c_k = 0, \tag{10}$$

in welcher die $c_1, c_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{R}(b)$ besitzen. Aus dem auf diese Art gewonnenen Integral φ' wird φ erhalten, wenn man für die b gewisse Verbindungen der Parameter a einsetzt. Ferner lässt sich jede an φ' ausführbare Umformung oder Zerlegung auch an φ ausführen, so dass wir uns auf die Untersuchung von φ' beschränken dürfen. Wir denken uns nun φ' auf die Form

$$\varphi' = F_0 + F_1 c + \ldots + F_{k-1} c^{k-1}$$

gebracht, wo die F gleich $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ sind. Dieser Ausdruck kann wegen der Irreductibilität von (10) nicht anders ein Integral sein, als wenn die $F_0, F_1, \ldots$ Integrale sind, d. h. man kann jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches die Parameter in nicht rationaler Weise enthält, als ein Aggregat von Integralen der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$ darstellen.[1]

4. Es sei jetzt φ ein Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s, b)$. Wir greifen einen der Parameter heraus — derselbe werde b genannt — und betrachten φ als Function von b. Wenn φ oder der reciproke Werth von φ die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen, so sind offenbar die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ oder dem reciproken Ausdrucke Integrale, welche den Parameter b nicht enthalten. Wenn weder φ, noch der reciproke Werth von φ nach b ganz rational sind, so schreiben wir φ in der Form $H:K$, wo H und K die Form $\mathfrak{G}(b)$ besitzen. Zerlegen wir dann φ in den nach b ganzen Theil φ_1 und in den echtgebrochenen Theil ψ_1, so sind, wie man sofort durch Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von b erkennt, φ_1 und ψ_1 Integrale, und zwar sind auch die Coefficienten der einzelnen Potenzen von b in φ_1 Integrale. Den reciproken Werth von ψ_1, welcher unecht gebrochen ist, zerlegen wir wieder

[1] Wenn die Differentialgleichungen gewisse Parameter $e_1, e_2, \ldots$, welche nicht in der Gleichung für s vorkommen, in rationaler Weise enthalten, so lässt sich auf ähnliche Weise zeigen, dass Integrale, in denen die e algebraisch vorkommen, sich auf solche von der Form $\mathfrak{R}(e_1, e_2, \ldots)$ reduciren lassen. Derartige Parameter sind z. B. beim Vielkörperproblem durch die Massen gegeben.

in den ganzen rationalen Theil φ_2 und in den echt gebrochenen ψ_2, dann sind φ_2 und ψ_2 ebenfalls Integrale. Setzt man dieses Verfahren, welches schliesslich von selbst abbricht, bis an's Ende fort, so gelangt man zu der Kettenbruchdarstellung

$$\varphi = \varphi_1 + 1 : \varphi_2 + 1 : \varphi_3 + \ldots,$$

wo die φ_a ganze Functionen der b bedeuten, deren Coefficienten Integrale ohne den Parameter b sind. Durch Wiedereinrichtung des Kettenbruches erhält man dann φ als Quotienten zweier ganzen Functionen von b, deren Coefficienten von b freie Integrale der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$ sind.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erkennt man, dass jedes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches gewisse Parameter $b_1, b_2, \ldots$ in rationaler Weise enthält, allemal aus einer Anzahl parameterfreier Integrale in ganz oder gebrochen linearer Form zusammengesetzt werden kann. Dieser Satz führt in Verbindung mit den über die Differentialgleichungen (3) gemachten Voraussetzungen sofort zu einer für das Folgende wichtigen Consequenz. Es sei k eine beliebige constante Zahl; man ersetze in den Differentialgleichungen die Grössen x, t und entsprechend s, y durch

$$xk^2, \; tk^{1-2N}, \; sk^2, \; yk^{1+2N},$$

wo N die in § 2 angegebene Bedeutung besitzt, dann hebt sich die Grösse k aus den Differentialgleichungen heraus, und es geht deswegen jedes Integral φ durch diese Substitution wiederum in ein Integral über, welches jedoch jetzt im Allgemeinen den Parameter k enthält. Es sei nun φ ein parameterfreies Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches durch die angegebene Substitution in φ' übergehen möge. Wir schreiben φ in der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$«, dann nimmt jeder Term in Zähler und Nenner nach der Substitution wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch mit einer bestimmten Potenz von k multiplicirt, deren Exponenten wir als die Dimension des betreffenden Terms bezeichnen. Schreiben wir nun Zähler und Nenner von φ' in der Form

$$L = L_0 k^p + L_1 k^{p-1} + \ldots + L_p,$$
$$M = M_0 k^q + M_1 k^{q-1} + \ldots + M_q,$$

so umfassen die Coefficienten L_α, M_α immer nur Terme gleicher Dimension. Diese Coefficienten müssen nun durch Multiplication mit einem und demselben Factor in Integrale übergehen, und man erkennt leicht, dass man für diesen Multiplicator den reciproken Werth irgend eines der Coefficienten z. B. $1 : L_0$ wählen darf. Wir erhalten dann φ linear zusammengesetzt aus Integralen der Form »$\mathfrak{G}(x, y, s)$ dividirt durch $\mathfrak{G}'(x, y, s)$», deren Zähler und Nenner nur Terme von gleicher Dimension enthalten. Solche Integrale sollen »homogen in den Dimensionen» oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, schlechtweg homogen heissen.

5. Es sei jetzt φ ein homogenes Integral von der Form $\mathfrak{R}(x, y, s)$, welches wir uns in die Gestalt $\mathfrak{G}(x, y, s) : \mathfrak{G}'(x, y, s)$ gebracht denken. Da ein von den y freier Ausdruck nicht der Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

identisch genügen kann, wenn er nicht gleichzeitig von den x frei ist, so muss wenigstens eine der Variabeln y in φ vorkommen. Es sei dies y_1. Wir denken uns Zähler und Nenner von φ nach y_1 in Linearfactoren zerlegt, setzen also an

$$(11) \qquad \varphi = Q(y_1 - \eta_1)^\alpha (y_1 - \eta_2)^\beta (y_1 - \eta_3)^\gamma \ldots,$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, die η rationale oder algebraische Functionen der Variabeln x, y, s unter Ausschluss von y_1 bedeuten und Q eine rationale Function derselben Variablen ist. Da φ Integral ist, so erhalten wir

$$0 = \frac{d \log \varphi}{dt} = \frac{d \log Q}{dt} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1}\left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{dt}\right).$$

Zur Umformung dieses Ausdruckes wollen wir für den Augenblick die Zeit t, so weit sie in den Variablen x, y, s unter Ausschluss von x_1 und y_1 vorkommt, mit τ bezeichnen, dann ist

$$\frac{d \log Q}{dt} = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau},$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} y_1 + \frac{d\eta_1}{d\tau},$$

also

$$o = \frac{\partial \log Q}{\partial x_1} y_1 + \frac{d \log Q}{d\tau} - \sum \alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \sum \frac{\alpha}{y_1 - \eta_1} \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \right).$$

Da nun y_1 in dieser Gleichung nur insofern vorkommt, als es explicite hingeschrieben ist, so folgt

$$\text{(12)} \qquad \frac{dy_1}{dt} - \frac{d\eta_1}{d\tau} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = o.$$

Zur weiteren Verwendung dieser Relation, welche offenbar in Bezug auf η_1 eine partielle Differentialgleichung darstellt, denken wir uns jetzt Zähler und Nenner des betrachteten Integrals φ, statt in Linearfactoren, so weit als möglich in die einfachsten Factoren zerlegt, welche noch die Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen. Die von einander verschiedenen Theiler, welche die Variablen y wirklich enthalten, mögen mit $\psi_1, \psi_2, \ldots$ bezeichnet werden, so dass wir ansetzen können

$$\varphi = T \psi_1^{\lambda} \psi_2^{\mu}, \ldots,$$

wo die $\lambda, \mu, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten und T die Form $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzt. Die Wurzeln η in (11) werden dann erhalten, wenn man diejenigen ψ, welche y_1 enthalten, gleich Null setzt und nach y_1 auflöst. Es sei $\psi_1(y_1)$ ein solcher Theiler, welcher die in (12) benutzte Wurzel η_1 liefert. Dann erhält man aus der Identität

$$\text{(13)} \qquad \psi_1(\eta_1) = o$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta}. \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, m \\ \beta = 2, 3, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Beachtet man nun noch die Differentialgleichungen (3), so geht (12) successive über in

$$A_1 - \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial x_\beta} - \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \eta_1}{\partial y_\beta} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = o,$$

$$(\beta = 2, 3, \ldots, m)$$

$$\text{(14)} \qquad A_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} + \sum_\beta y_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_\beta} + \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial y_\beta} + \eta_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = o.$$

Die linke Seite der letzteren Gleichung ist offenbar nichts anderes, als der vollständig entwickelte Ausdruck für

$$\frac{d\psi_1(y_1)}{dt},$$

vorausgesetzt, dass für y_1 überall die aus (13) sich ergebende Wurzel η_1 geschrieben wird. Hiernach ist also $\psi_1(y_1)$ eine Integralgleichung, denn die Ableitung von ψ_1 nach t verschwindet nach (14) wenn nicht identisch, so doch sicher in Folge der Gleichung

$$\psi_1(y_1) = 0.$$

Derselbe Schluss gilt offenbar für die übrigen Theiler ψ. Angenommen nun man könnte beweisen, dass jeder der Theiler $\psi_1, \psi_2, \ldots$ durch Multiplication mit einem Factor von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in ein Integral $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ verwandelt werden kann, so würde daraus folgen, dass jedes homogenes Integral φ sich auf die Form

$$\varphi = U\varphi_1^\lambda\varphi_2^\mu \ldots$$

bringen lässt, wo die homogenen Integrale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ besitzen, und der Factor U, welcher höchstens die x, s enthalten kann, sich auf eine Constante reducirt, weil er der Bedingung

$$\frac{dU}{dt} = 0$$

genügen muss. Ferner würde damit die Aufgabe, alle algebraischen Integrale der vorgelegten Differentialgleichungen zu finden, auf die andere zurückgeführt sein, alle homogenen Integrale der Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$ zu ermitteln. Wir werden nun zeigen, dass eine solche Reduction der homogenen Integralgleichungen $\psi_1, \psi_2, \ldots$, auf die uns die Untersuchung geführt hat, unter den hier gemachten Voraussetzungen in der That immer möglich ist.

6. Es sei ψ eine homogene Integralgleichung der Form $\mathfrak{G}(y)$ resp. $\mathfrak{R}(x, s)$, welche sich nicht in Theiler von ähnlicher Gestalt, die die y wirklich enthalten, zerlegen lässt. Der vollständig entwickelte Ausdruck für die Ableitung von ψ nach t besitzt eine ähnliche Gestalt wie ψ, nur dass der Grad in Bezug auf die y um eine Einheit höher ist als in ϕ. Diese Ableitung muss verschwinden, wenn ϕ verschwindet, muss also wegen der vorausgesetzten Irreductibilität von ϕ durch ϕ selber theilbar sein, so dass wir ansetzen können

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi \,.\, \omega,$$

wo ω in Bezug auf die y ganz linear und ebenso wie ϕ in den Dimensionen homogen ist. Schreiben wir

$$\omega = \omega_0 + \Sigma y_a \omega_a,$$

so sind die $\omega_0, \omega_1, \ldots$ homogene rationale Functionen von den x, s. Substituirt man ferner für die Variabeln x, t, s, y wie früher

$$xk^2,\ tk^{1-2N},\ sk^2,\ yk^{1+2N},$$

so ergibt sich, dass die Dimension von ω ungerade ist. Ferner sind die Dimensionen der $\omega_0, \omega_1, \ldots$ gerade, die der y ungerade, es muss also in ω das Glied ω_0 fehlen, d. h. ω ist in Bezug auf die y homogen linear. Dieser Umstand ist für die folgende Beweisführung von wesentlicher Bedeutung und bildet den Grund, weshalb wir in den Differentialgleichungen (3) die A als homogene Functionen gerader Ordnung in Bezug auf die x, s vorausgesetzt haben. Es wäre möglich, dass diese Einschränkung bei einem andern Beweisgange sich als unnöthig herausstellt. Ich gehe auf diese Frage nicht näher ein, weil sie für unser eigentliches Ziel, nämlich die Aufsuchung der algebraischen Integrale des Eingangs aufgestellten Vielkörper-Problems, unerheblich ist.

Es werde ϕ als Polynom der y geschrieben; sein Grad in Bezug auf diese Variabeln sei p, und es werde angesetzt

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \cdots,$$

wo die $\phi_0, \phi_1, \ldots$ die Terme vom Grade $p, p-1, \ldots$ zusammenfassen. Mit Rücksicht auf das Vorhergehende ist dann

$$(15) \qquad \sum y_a \frac{\partial \phi_0}{\partial x_a} = \phi_0\, \omega, \qquad \omega = \sum y_a \frac{\partial \log \phi_0}{\partial x_a},$$

so dass es für die Untersuchung von ω lediglich auf das Anfangsglied ψ_0 ankommt. Die Coefficienten ω_a in ω hängen auf einfache Weise mit gewissen Coefficienten in ψ_0 zusammen. Man ordne ψ_0 nach einem der darin vorkommenden y — sagen wir y_1 — und setze an

$$\psi_0 = V_0 y_1^r + V_1 y_1^{r-1} + \ldots + V_r,$$

wo die V ganze Functionen der übrigen y sind, dann folgt aus (15)

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_1} = V_0 \omega_1 . \tag{16}$$

Sind $a, a', \ldots$ die Coefficienten des Polynoms V_0, so ist, da die Relation (16) für beliebige y bestehen muss,

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = a\omega_1, \qquad \frac{\partial a'}{\partial x_1} = a'\omega_1, \quad \text{etc.};$$

wir können also allgemein ansetzen

$$\omega_a = \frac{\partial \log a_a}{\partial x_a},$$

wo die a_a gewisse Coefficienten in ψ_0 bedeuten.

Als Vorbereitung für das Folgende betrachten wir zunächst den Fall, wo die Coefficienten in ψ_0 sämmtlich von der Irrationalität s frei sind. Es sei χ eine Function der x, y, ganz homogen nach den y, rational homogen nach den x, welche der Bedingung

$$\begin{aligned} &\sum y_a \frac{\partial \chi}{\partial x_a} = \chi \cdot \tau, \\ &\tau = \sum y_a \frac{\partial \log b_a}{\partial x_a}, \end{aligned} \tag{17}$$

genügen, wo die b_a gewisse Coefficienten des nach den y geordneten Ausdruckes χ bedeuten. Man denke sich sämmtliche Coefficienten in χ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner M gebracht und den etwa vorhandenen gemeinsamen grössten Theiler L aller Coefficientenzähler aufgesucht, dann ist

$$\chi' = \frac{M}{L}\chi$$

ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welcher keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt. Ferner wird

$$(18) \qquad \begin{gathered} \sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = \chi' \cdot \tau', \\ \tau' = \sum y_\alpha \frac{\partial \log b'_\alpha}{\partial x_\alpha}, \end{gathered}$$

wo die b'_α gewisse Coefficienten in χ' bedeuten. Es sei nun Q ein irreductibler Theiler von b'_α, welcher die Variable x_α wirklich enthält, dann tritt in τ' ein Glied der Form

$$\frac{y_\alpha}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_\alpha}$$

auf, welches sich, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen bleiben, nicht gegen andere Glieder in τ' fortheben kann. Der Ausdruck τ' wird also sicher unendlich für alle endlichen Werthsysteme der x, für welche Q verschwindet. Es müsste also, da für endliche x die linke Seite von (18) sicher endlich bleibt, wider die Voraussetzung, χ' durch Q theilbar sein. Der Coefficient b'_α ist daher von x_α unabhängig, d. h. τ' ist gleich Null und

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \chi'}{\partial x_\alpha} = 0,$$

woraus folgt, dass sich χ' als eine ganze rationale Verbindung der Ausdrücke

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m,$$

ohne x_1 darstellen lässt.

7. Zu der Relation

$$(15) \qquad \sum y_\alpha \frac{\partial \log \psi_0}{\partial x_\alpha} = \omega = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

zurückkehrend, wollen wir den Satz beweisen, dass der Ausdruck

$$\Sigma \omega_\alpha dx_\alpha$$

ein totales Differential ist, dass also die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{a_\alpha}{a_\beta}\right) = 0$$

sämmtlich erfüllt sind. Zu dem Ende wollen wir in ψ_0 die Grössen $y_3, \ldots, y_m$ gleich Null setzen, jedoch, um Unbestimmtheiten zu vermeiden, folgendermassen vorgehen. Wenn ψ_0 durch eine Potenz von y_m theilbar ist, so unterdrücken wir diesen Theiler, welcher für die Gleichung (15) bedeutungslos ist, und bezeichnen ψ_0 mit $\psi_{0,m}$. Darauf setzen wir y_m gleich Null und bezeichnen den Ausdruck, in welchem $\psi_{0,m}$ hierdurch übergeht mit $\psi_{0,m-1}$. Derselbe genügt der Gleichung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \psi_{0,m-1} = \sum y_\alpha \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}. \qquad {\scriptstyle (\alpha=1,2,\ldots,m-1)}$$

Hierauf unterdrücken wir in $\psi_{0,m-1}$ die etwa als Theiler auftretende Potenz von y_{m-1} und setzen y_{m-1} gleich Null, wodurch wir zu dem Ausdrucke $\psi_{0,m-2}$ gelangen, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise, bevor auch y_3 gleich Null gesetzt wird, für $\varphi_{0,k}$ zu einem Monom von der Form

$$Cy_1^\alpha y_2^\beta \ldots y_k^\lambda,$$

so kann offenbar in ω für die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ der eine Coefficient C gesetzt werden, und es sind die zu den aus $x_1, \ldots, x_k$ gebildeten Variablenpaaren gehörigen Integrabilitätsbedingungen von selbst erfüllt. Wir haben deshalb nur noch den ungünstigsten Fall zu verfolgen, dass man nämlich, nachdem auch y_3 beseitigt ist, mit Unterdrückung der einflusslosen Potenztheiler zu einem ψ_{02} von der Form

$$\psi_{02} = c_0 y_1^q + c_1 y_1^{q-1} y_2 + \ldots + c_q y_2^q$$

gelangt, in welchem q mindestens gleich Eins und die Endcoefficienten c_0 und c_q von Null verschieden sind. Dieses ψ_{02} genügt der Bedingung

$$\sum_\alpha y_\alpha \frac{\partial \log \psi_{02}}{\partial x_\alpha} = \sum_\alpha y_\alpha \omega_\alpha, \qquad {\scriptstyle (\alpha=1,2)}$$

wo in

$$\omega_\alpha = \frac{\partial \log a_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

für die Coefficienten a_1, a_2 offenbar c_0 und c_q zu nehmen sind. Die gefundenen Relationen formen wir um in

$$(19)\qquad \begin{gathered} \psi' = \psi_{02} : c_0 = y_1^q + \frac{c_1}{c_0} y_1^{q-1} y_2 + \ldots + \frac{c_q}{c_0} y_2^q, \\ \sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \psi'}{\partial x_\alpha} = y_2 \frac{\partial \log}{\partial x_2} \left(\frac{c_q}{c_0}\right). \end{gathered}$$

Die Coefficienten von ψ' können nun die Irrationalität s enthalten. Ist dies der Fall, so gilt die Gleichung (19) für alle Wurzelwerthe $s_1, s_2, \ldots, s_n$, welche s annehmen kann. Summiren wir die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Gleichungen (19) und setzen

$$\psi'(s_1) \cdot \psi'(s_2) \ldots \psi'(s_n) = \Psi,$$

$$\frac{c_q(s_1)}{c_0(s_1)} \cdot \frac{c_q(s_2)}{c_0(s_2)} \ldots \frac{c_q(s_n)}{c_0(s_n)} = C,$$

so sind Ψ und C homogen rational nach den x; ferner ist

$$\sum_1^2 y_\alpha \frac{\partial \log \Psi}{\partial x_\alpha} = y_\alpha \frac{\partial \log C}{\partial x_2}.$$

Der Ausdruck Ψ ist also eine Function von derselben Beschaffenheit, wie die vorhin mit χ bezeichnete. Bedeutet H den kleinsten gemeinsamen Nenner der Coefficienten in Ψ, so ist $H\Psi$ eine Function der Form $\mathfrak{G}(x, y)$, welche keinen von den y unabhängigen Theiler der Form $\mathfrak{G}(x)$ besitzt und der Bedingung

$$y_1 \frac{\partial (H\Psi)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial (H\Psi)}{\partial x_2} = 0$$

genügt. Es ist also, abgesehen von einem constanten Coefficienten

$$H\Psi = (y_1 x_2 - y_2 x_1)^{nq},$$

$$\Psi = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^{nq}.$$

Hieraus folgt sofort

$$\psi' = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{c_q}{c_0} = \frac{a_2}{a_1} = \pm \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^q,$$

$$\frac{\partial^2 \log}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right) = 0.$$

Damit sind offenbar die Integrabilitätsbedingungen allgemein bewiesen, und wir haben ferner für das ursprüngliche ψ_0 die Relation

$$\sum_1^m y_\alpha \frac{\partial \log}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\psi_0}{a_1}\right) = -\sum_2^m y_\alpha \frac{q_\alpha}{x_\alpha},$$

wo die q_α ganze positive Zahlen, die Null eingeschlossen bedeuten. Ferner erkennt man hieraus, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi}{a_1} x_2^{q_2} \ldots x_m^{q_m}\right) = 0$$

ist, dass also die Integralgleichung ψ durch den Multiplicator

$$(x_2^{q_2} \ldots x_m^{q_m}) : a_1$$

in ein Integral verwandelt wird. W. z. b. w.

Es sei jetzt φ das zu ψ gehörige Integral. Wir spalten dasselbe ähnlich wie ψ, setzen also an

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots,$$

wo φ_0 sich von ψ_0 durch den integrirenden Multiplicator unterscheidet und der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0$$

genügt. Wir wollen nun zeigen, dass φ_0 sich als eine ganze rationale Function der $m - 1$ Verbindungen

$$x_2 y_1 - x_1 y_2, \qquad x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad \ldots, \quad x_m y_1 - x_1 y_m$$

ohne x_1 darstellen lässt. Zur Vereinfachung des Beweises schicken wir folgende Bemerkung vorauf.

8. Angenommen man hätte in dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = y_\alpha, \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = A_\alpha(x_1, x_2, \ldots)$$

statt der Variabeln x, y andere Variable ξ, η durch die lineare Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\eta_\beta$$

eingeführt, in der die c feste Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten, so würde dadurch an den über die Differentialgleichungen und die Irrationalität s gemachten Voraussetzungen nichts geändert worden sein; es würde also auch die ganze bisherige Untersuchung ohne Weiteres für das transformirte System gültig bleiben. Insbesondere würde der Satz, dass die hier untersuchten Integralgleichungen durch einen Multiplicator von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ in Integrale übergehen, wenn er vor der Transformation gilt, auch nach derselben gelten und umgekehrt. Diese Bemerkung benutzen wir in folgender Weise. Die Discriminante Δ der Gleichung für s ist eine homogene ganze rationale Function der x vom Grade

$$n(n-1) = \mu.$$

Die Discriminante Δ' der transformirten Gleichung für s geht aus Δ hervor, wenn man statt der x die ξ einführt. Bei passender Wahl der Substitutionscoefficienten c lässt sich nun stets erreichen, dass in Δ' die Glieder mit

$$\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \ldots, \xi_m^\mu$$

wirklich vorkommen. Es ist deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, dass bereits in der ursprünglichen Discriminante Δ die Glieder mit

$$x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_m^\mu$$

wirklich vorkommen, da diese Eigenschaft, wenn sie ursprünglich nicht vorhanden ist, durch eine vor Beginn der ganzen Untersuchung vorgenommene Transformation stets herbeigeführt werden kann.

Wir denken uns nun in der Gleichung für s den Variablen $x_2, \ldots, x_m$ irgend welche endliche Werthe, dem x_1 dagegen einen ausserordentlich grossen Werth beigelegt, dann lässt sich jede Wurzel s nach fallenden Potenzen von x_1 in eine Reihe entwickeln, welche unter den gemachten Voraussetzungen die Form

$$s = \sigma x_1 + \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{x_1} + \frac{\sigma_2}{x_1^2} + \ldots$$

besitzt. Hierin ist σ die Wurzel einer Gleichung

$$\sigma^n + \Sigma_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \Sigma_n = 0,$$

welche keine mehrfachen Wurzeln besitzt und deren Coefficienten nur von den in der ursprünglichen Gleichung für s auftretenden Constanten, aber nicht von den x abhängen. Die übrigen Coefficienten σ_0, σ_1, ... besitzen die Gestalt $\mathfrak{R}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{G}(x_2, \ldots, x_m)$.

Führt man jetzt statt der Variablen x neue Variable p durch die lineare Substitution

$$p_1 = x_1, \qquad p_2 = x_2 - x_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_m = x_m - x_1 \frac{y_m}{y_1}$$

ein, so erhält man das Glied mit p_1^μ in der Discriminante, wenn man an Stelle der $x_1, \ldots, x_m$ resp.

$$p_1, \quad p_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad \ldots, \quad p_1 \frac{y_m}{y_1}$$

schreibt. Der Coefficient von p_1^μ in der Discriminante wird also, so lange specielle Werthsysteme der y ausgeschlossen werden, von Null verschieden sein. Infolge dessen lässt sich für grosse Werthe von p_1 und endliche Werthe der $p_2, \ldots, p_m$ die Irrationalität s nach fallenden Potenzen von p_1 in die Reihe

$$s = \rho p_1 + \rho_0 + \frac{\rho_1}{p_1} + \frac{\rho_2}{p_1^2} + \ldots$$

entwickeln, wo ρ eine von den p unabhängige Irrationalität, $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ dagegen ganze rationale Functionen der $\rho, p_2, \ldots, p_m$ bedeuten.

Dies vorausgeschickt betrachten wir wieder den Anfangsterm φ_0 in dem Integral φ. Derselbe stellt sich, wenn er die Irrationalität s wirklich enthält, zunächst dar in der Form

$$\mathfrak{R}(p_1, p_2, \ldots, p_m, s),$$

muss aber in Wirklichkeit von p_1 frei sein. Entwickelt man nun s und darauf φ_0 nach fallenden Potenzen von p_1, so muss diese Reihe sich auf den einen von p_1 freien Term reduciren, welcher nach den vorausgehenden Bemerkungen die Variablen $p_2, \ldots, p_m$ nur in rationaler Weise enthält, d. h. φ_0 enthält auch die x nur in rationaler Weise und ist in Wirklichkeit frei von s. Hieraus folgt weiter, wenn man die in § 6 über die Ausdrücke χ und χ' gemachten Bemerkungen beachtet, dass φ_0 eine ganze Function der x ist.

9. Fassen wir die Resultate, zu denen wir bisher gelangt sind, zusammen, so können wir folgende Sätze aussprechen.

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_a}{dt} = y_a, \qquad \frac{dy_a}{dt} = A_a, \qquad (a=1,2,\ldots,m)$$

in welchem die A als homogene rationale Functionen von der geraden Ordnung $2N$ aus den x und einer gewissen Irrationalität s zusammengesetzt sind. Die Grösse s ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$s^n + S_1 s^{n-1} + \ldots + S_n = 0,$$

deren linke Seite eine ganze homogene Function der s, x von der n-ten Ordnung bildet. Wenn das vorgelegte System von Differentialgleichungen algebraische, von t freie Integrale besitzt, so lassen sich dieselben allemal darstellen als algebraische Functionen eines oder mehrerer Integrale φ, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Jedes φ ist eine ganze rationale Function der y, eine rationale Function der x und s.

2) φ ist in den Dimensionen homogen, d. h. wenn man für die x, s, y resp. setzt

$$xk^2, \quad sk^2, \quad yk^{1+2N}, \quad (k = \text{Constante}),$$

so nimmt φ wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch versehen mit einer gewissen Potenz von k als Factor.

3) Bedeutet φ_0 das Aggregat der Glieder in φ, welche in Bezug auf die y von der höchsten Ordnung sind, so sind, wenn φ_0 nach den y geordnet wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen der x ohne gemeinsamen Theiler.

4) Der Ausdruck φ_0 genügt der Bedingung

$$\sum y_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} = 0,$$

enthält also die x nur in den Verbindungen

$$y_1 x_\alpha - y_\alpha x_1. \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, m)$$

Nachdem wir bis zu diesem Punkte gelangt sind, brechen wir die allgemeine Untersuchung ab und wenden uns wieder zu dem Vielkörper-Problem zurück, welches ja den Ausgangspunkt bildete, und welches, wie bereits bemerkt, einen speciellen Fall der hier betrachteten Differentialgleichungen repräsentirt.

10. Es seien

$$m_\alpha, \quad x_\alpha, \quad y_\alpha, \quad z_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

die Massen und die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte in dem betrachteten Vielkörper-Problem,

$$X_\alpha, \quad Y_\alpha, \quad Z_\alpha$$

die Geschwindigkeitscomponenten, $r_{\alpha\beta}$ die Distanz der beiden Massen m_α, m_β, dann haben wir

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha, \qquad \frac{dX_\alpha}{dt} = A_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{x_\beta - x_\alpha}{r_{\alpha\beta}^3},$$

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = Y_\alpha, \qquad \frac{dY_\alpha}{dt} = B_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{y_\beta - y_\alpha}{r_{\alpha\beta}^3},$$

$$\frac{dz_\alpha}{dt} = Z_\alpha, \qquad \frac{dZ_\alpha}{dt} = C_\alpha = \sum_\beta m_\beta \frac{z_\beta - z_\alpha}{r_{\alpha\beta}^3},$$

wo bei den Summationen, ebenso wie weiterhin, zu beachten ist, dass Glieder mit r_{aa} nicht vorkommen dürfen. Es sei φ ein homogenes Integral von der Form

$$\mathfrak{G}(X, Y, Z) \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{R}(x, y, z),$$

welches in Bezug auf die X, Y, Z vom Grade p ist; ferner setze man

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots,$$

wo die $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ die Aggregate der Glieder bedeuten, welche in den X, Y, Z von den Ordnungen $p, p-1, \ldots$ sind; endlich bezeichne man die Zeit t, je nachdem sie in den Coordinaten oder in den Geschwindigkeiten vorkommt, mit u resp. v, führe also die Operationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial u} = \sum_a \left(X_a \frac{\partial}{\partial x_a} + Y_a \frac{\partial}{\partial y_a} + Z_a \frac{\partial}{\partial z_a}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_a \left(A_a \frac{\partial}{\partial X_a} + B_a \frac{\partial}{\partial Y_a} + C_a \frac{\partial}{\partial Z_a}\right)$$

ein, dann muss sein

$$(22) \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = 0.$$

Diese beiden Bedingungen werden sich als für unseren Zweck ausreichend erweisen. Die erste Bedingung besagt, dass φ_0 die x, y, z nur ganz rational in den Verbindungen

$$f_a = x_a X_1 - x_1 X_a, \qquad g_a = y_a X_1 - x_1 Y_a, \qquad h_a = z_a X_1 - x_1 Z_a$$

enthält, d. h. wenn man statt der x, y, z in φ_0 die Ausdrücke

$$x_a = \frac{f_a}{X_1} + x_1 \frac{X_a}{X_1}, \qquad y_a = \frac{g_a}{X_1} + x_1 \frac{Y_a}{X_1}, \qquad z_a = \frac{h_a}{X_1} + x_1 \frac{Z_a}{X_1}$$

einsetzt, so verwandelt sich φ_0 in eine Function der Grössen

$$f_2, \ldots, f_n; \; g_1, \ldots, g_n; \; h_1, \ldots, h_n,$$

welche von x_1 frei ist, und abgesehen davon, dass eine Potenz von X_1

als Nenner vorkommen kann, die X, Y, Z nur ganz rational enthält. Im Folgenden werden wir voraussetzen, dass φ_0 bereits durch die f, g, h ausgedrückt sei.

Bilden wir jetzt die Ableitung von φ_0 nach v, so enthalten die einzelnen Glieder im Nenner die dritte Potenz eines $r_{\alpha\beta}$, sind aber im Übrigen rational aus den verschiedenen Variabeln zusammengesetzt. Bilden wir ferner die verschiedenen Irrationalitäten, welche einschliesslich der $r_{\alpha\beta}$ selber dadurch entstehen, dass man je zwei, je drei u. s. w. verschiedene $r_{\alpha\beta}$ mit einander multiplicirt, und bezeichnet man diese Irrationalitäten in irgend einer Reihenfolge mit $\rho_1, \rho_2, \ldots$, so lässt sich φ_2 stets auf die Gestalt

$$\varphi_2 = \varphi_{20} + \sum \frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho_\alpha}$$

bringen, wo die $\varphi_{20}, \varphi_{21}, \ldots$ rational aus den x, y, z, X, Y, Z zusammengesetzt sind. Mit Rücksicht auf (22) folgt daraus, dass

$$\frac{\partial \varphi_{20}}{\partial u} = 0$$

ist, und dass ferner der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi_{2\alpha}}{\rho}\right)$$

allemal verschwindet, wenn die Irrationalität ρ sich nicht auf ein einziges $r_{\alpha\beta}$ reducirt. Führt man ferner in φ_2 statt der x, y, z die f, g, h ein, wobei möglicherweise x_1 sich nicht aus φ_2 fortheben wird, so geht die partielle Ableitung von φ_2 nach u über in

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} X_1 .$$

Ersetzt man ebenso in der Ableitung von φ_0 nach v die ursprünglichen Variablen durch die f, g, h, X, Y, Z und x_1, und integrirt nach x_1, indem alle übrigen Grössen als constant angesehen werden, so darf die Integration keine logarithmischen, sondern nur algebraische Glieder liefern. Dieser Umstand wird uns gestatten, die Verbindungen der f, g, h, aus welchen sich φ_0 zusammensetzt, vollständig zu bestimmen.

11. Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir festsetzen, dass die Indices $\alpha, \beta, \ldots$ die Werthe $1, 2, \ldots, n$, dagegen die Indices $\lambda, \mu, \ldots$ nur die Werthe $2, 3, \ldots, n$ annehmen sollen. Wir suchen nun diejenigen Glieder in der Ableitung von φ_0 nach v auf, welche die dritte Potenz von $r_{1\lambda}$ resp. $r_{\lambda\mu}$ im Nenner enthalten. Die Ableitung von φ_0 besitzt zunächst die Gestalt

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 A_1 - x_1 B_1) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 A_1 - x_1 C_1)\\ + \sum_\lambda \left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda}(x_\lambda A_1 - x_1 A_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial g_\lambda}(y_\lambda A_1 - x_1 B_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_\lambda}(z_\lambda A_1 - x_1 C_\lambda)\right\}\\ + \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1}A_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_1}B_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_1}C_1 + \sum_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}A_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Y_\lambda}B_\lambda + \frac{\partial\varphi_0}{\partial Z_\lambda}C_\lambda\right\}.\end{gathered}$$

Die Glieder, welche $r_{1\lambda}^3$ im Nenner enthalten, werden, mit Fortlassung des Nenners, und wenn wir der Kürze halber das Zeichen S einführen, um eine Summation über die drei Coordinatenaxen anzudeuten,

$$\begin{gathered}m_\lambda\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial g_1}(y_1 x_\lambda - x_1 y_\lambda) + \frac{\partial\varphi_0}{\partial h_1}(z_1 x_\lambda - x_1 z_\lambda)\right\} + m_\lambda(x_\lambda - x_1)\sum_\mu\left[\mathsf{S}\left(x_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\right]\\ + m_1 x_1 \mathsf{S}(x_\lambda - x_1)\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} + \mathsf{S}(x_\lambda - x_1)\left(m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_1} - m_1\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda}\right).\end{gathered}$$

Ähnlich werden die zu $r_{\lambda\mu}$ gehörigen Terme

$$\begin{gathered}- x_1 \mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial f_\mu}\right)\\ + \mathsf{S}(x_\mu - x_\lambda)\left(m_\mu\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\lambda} - m_\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\mu}\right).\end{gathered}$$

Führt man hierin auch für die ausserhalb φ_0 vorkommenden x, y, z die Grössen x_1, f, g, h ein, so müssen die Terme, welche das Quadrat von x_1 enthalten, verschwinden, weil sonst die oben erwähnte Integration nach x_1 auf logarithmische Glieder führen würde. Es muss also sein

$$\begin{aligned} 0 = m_\lambda \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial g_1}(Y_1 X_\lambda - X_1 Y_\lambda) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial h_1}(Z_1 X_\lambda - X_1 Z_\lambda) \right\} \\ + m_\lambda (X_\lambda - X_1) \sum_\mu \left[\mathrm{S} \left(X_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right] + m_1 X_1 \mathrm{S} \left[(X_\lambda - X_1) \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} \right], \end{aligned}$$

$$0 = \mathrm{S} \left[(X_\mu - X_\lambda) \left(m_\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\lambda} - m_\lambda \frac{\partial \varphi_0}{\partial f_\mu} \right) \right].$$

Die vorstehenden Bedingungen, in welchen die Indices λ, μ alle zulässigen Werthe anzunehmen haben, können wir jetzt als lineare partielle Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen f, g, h und mit der abhängigen Variablen φ_0 ansehen. Die Coefficienten sind von den f, g, h unabhängig und deshalb bei der Aufsuchung der allgemeinen Lösung als Constanten anzusehen. Um die allgemeine Lösung aufzustellen, genügt im vorliegenden Falle die Kenntniss einer gewissen Anzahl von Particularlösungen, welche die f, g, h homogen linear enthalten. Fünf solcher Lösungen werden durch die bekannten Integrale des Vielkörper-Problems geliefert; es wird sich zeigen, dass damit die gemeinsamen Lösungen des oben angesetzten Systems erschöpft sind.

Es werde gesetzt

$$\begin{aligned} \Sigma m_a x_a &= L, & \Sigma m_a y_a &= M, & \Sigma m_a z_a &= N, \\ \Sigma m_a X_a &= L', & \Sigma m_a Y_a &= M', & \Sigma m_a Z_a &= N', \end{aligned}$$

dann erhalten wir, wenn die Buchstaben a, b, c ganz willkürliche Grössen bedeuten, zunächst drei Particularlösungen A', B', C' durch die eine zusammenfassende Gleichung

$$aA' + bB' + cC' = \begin{vmatrix} a & L & L' \\ b & M & M' \\ c & N & N' \end{vmatrix}.$$

Diese drei Lösungen sind jedoch nicht unabhängig von einander, weil zwischen ihnen die Relation

$$L'A' + M'B' + N'C' = 0$$

besteht. Drei weitere Lösungen A, B, C erhalten wir in ähnlicher Weise durch die zusammenfassende Gleichung

$$a'A + b'B + c'C = \sum_{a} m_a \begin{vmatrix} a' & x_a & X_a \\ b' & y_a & Y_a \\ c' & z_a & Z_a \end{vmatrix},$$

wo die a', b', c' ebenfalls willkürliche Zahlen bedeuten. Dass in der That die A, A', ... Lösungen sind, lässt sich auch ohne Rechnung durch folgende Überlegung nachweisen. Die A, A', ... sind nämlich nichts anderes als die Flächenintegrale und drei aus den Schwerpunktsätzen zusammengesetzte Integrale, und zwar homogene Integrale von der hier untersuchten Beschaffenheit, bei denen überdies das φ sich auf den Anfangsterm φ_0 reducirt. Es müssen also die hier für φ_0 aufgestellten Bedingungen von selbst erfüllt sein.

Drückt man jetzt die A, A', ... durch die f, g, h aus, so erhält man zunächst

$$X_1(aA' + bB' + cC') = \begin{vmatrix} a, & 0 & + \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda, & L' \\ b, & m_1 g_1 & + \sum_\lambda m_\lambda g_\lambda, & M' \\ c, & m_1 h_1 & + \sum_\lambda m_\lambda h_\lambda, & N' \end{vmatrix}$$

$$X_1(a'A + b'B + c'C) = m_1 \begin{vmatrix} a' & 0 & X_1 \\ b' & g_1 & Y_1 \\ c' & h_1 & Z_1 \end{vmatrix} + \sum_\lambda m_\lambda \begin{vmatrix} a' & f_\lambda & X_\lambda \\ b' & g_\lambda & Y_\lambda \\ c' & h_\lambda & Z_\lambda \end{vmatrix}$$

Wir untersuchen nun, ob aus diesen Gleichungen sich die Grössen

$$g_1, \quad h_1, \quad f_2, \quad g_2, \quad h_2$$

durch die A, A', ... und die übrigen f, g, h ausdrücken lassen. Nun sind in den Ausdrücken für

$$X_1 B', \quad X_1 C', \quad X_1 A, \quad X_1 B, \quad X_1 C$$

die Coefficienten der fünf Grössen

$$m_1 g_1, \quad m_1 h_1, \quad m_2 f_2, \quad m_2 g_2, \quad m_2 h_2$$

durch nachstehende Zeilen gegeben

$$\begin{array}{ccccc}
0, & +L', & -N', & 0, & +L', \\
-L', & 0, & +M', & -L', & 0, \\
+Z_1, & -Y_1, & 0, & +Z_2, & -Y_2, \\
0, & +X_1, & -Z_2, & 0, & +X_2, \\
-X_1, & 0, & +Y_2, & -X_2, & 0,
\end{array}$$

und es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, dass die aus diesen Zeilen gebildete Determinante nicht identisch verschwindet. Berechnet man dieselbe, so erhält man

$$L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_2 & L' & X_1 \\ Y_2 & M' & Y_1 \\ Z_2 & N' & Z_1 \end{vmatrix};$$

die Grössen $g_1, \ldots, h_2$ lassen sich also in der That durch die $A, \ldots$ und die übrigen f, g, h ausdrücken. Infolge dessen dürfen wir bei der Aufsuchung etwaiger weiterer Particularlösungen voraussetzen, dass dieselben von den $g_1, \ldots, h_2$ unabhängig sind.

12. Die noch aufzusuchenden Particularlösungen bezeichnen wir mit χ und setzen fest, dass die Indices $\sigma, \tau, \ldots$ nur die Werthe $3, 4, \ldots, n$ annehmen sollen. Die gesuchten Lösungen müssen den Differentialgleichungen genügen, welche aus denen für φ_0 dadurch entstehen, dass man für φ_0 die Grösse χ schreibt, ferner die Ableitungen von χ nach den $g_1, \ldots, h_2$ gleich Null setzt und die Fälle $\lambda, \mu = 2$ von den Fällen $\lambda, \mu = \sigma$ trennt. Auf diese Weise erhält man zunächst das System

$$(23)\qquad 0 = \sum_\sigma \left[\mathrm{S}\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma}\right)\right],$$

$$(24)\qquad 0 = m_\tau(X_\tau - X_1)\sum_\sigma\left[\mathrm{S}\left(X_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma}\right)\right] + m_1 X_1 \mathrm{S}\left((X_\tau - X_1)\frac{\partial \chi}{\partial f_\tau}\right),$$

$$(25)\qquad 0 = \mathrm{S}\left((X_\tau - X_2)\frac{\partial \chi}{\partial f_\tau}\right),$$

$$(26)\qquad 0 = \mathrm{S}\left[(X_\sigma - X_\tau)\left(m_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial f_\tau} - m_\tau \frac{\partial \chi}{\partial f_\sigma}\right)\right].$$

Aus (23) und (24) folgt

$$(27) \qquad \mathrm{o} = \mathsf{S}\left((X_\tau - X_1)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right)$$

und hieraus in Verbindung mit (25) die zusammenfassende Gleichung

$$(28) \qquad a\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau} + b\frac{\partial\chi}{\partial g_\tau} + c\frac{\partial\chi}{\partial h_\tau} = k_\tau \begin{vmatrix} a, & X_1 - X_\tau, & X_2 - X_\tau \\ b, & Y_1 - Y_\tau, & Y_2 - Y_\tau \\ c, & Z_1 - Z_\tau, & Z_2 - Z_\tau \end{vmatrix},$$

in welcher k_τ einen vorläufig unbestimmten Proportionalitätsfactor bedeutet. Bezeichnen wir den Werth, welchen die Determinante in (28) für

$$a = X_\sigma - X_\tau, \qquad b = Y_\sigma - Y_\tau, \qquad c = Z_\sigma - Z_\tau$$

annimmt, mit D, so erhält man mit einer kleinen Umformung

$$D = |X_\sigma - X_\tau, X_1, X_2| + |X_\sigma, X_\tau, X_1 - X_2|,$$

wo von den Determinanten nur die erste Zeile angesetzt ist. Durch Vertauschung der Indices σ und τ ändert also D nur sein Vorzeichen. Infolge dessen erhalten wir aus (28) die beiden Gleichungen

$$\mathsf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = k_\tau . D,$$

$$\mathsf{S}\left((X_\sigma - X_\tau)\frac{\partial\chi}{\partial f_\sigma}\right) = k_\sigma . D,$$

also mit Berücksichtigung von (26)

$$(m_\sigma k_\tau - m_\tau k_\sigma) D = \mathrm{o},$$

d. h. es ist

$$k_\sigma = l m_\sigma,$$

wo l einen von dem Index σ unabhängigen Factor bedeutet. Hiermit liefert die Gleichung (28) weiter

$$\mathsf{S}\left(X_\tau \frac{\partial\chi}{\partial f_\tau}\right) = l m_\tau |X_\tau, X_1, X_2|,$$

woraus, wenn man nach τ summirt, mit Rücksicht auf (23)

$$0 = l \left| \Sigma m_\tau X_\tau \, , \, X_1 \, , \, X_2 \right|$$

folgt. Es verschwinden also l, die k und infolge dessen auch die sämmtlichen Ableitungen von χ, d. h. es existiren ausser den bereits angegebenen fünf Particularlösungen keine weiteren, und es enthält φ_0 die Variablen x, y, z nur in den Verbindungen

$$A\,, B\,, C\,, \qquad A'\,, B'\,, C'.$$

Eliminirt man also z. B. y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 mittelst der Ausdrücke $A, A', \ldots$ aus φ_0, so fallen alle übrigen x, y, z von selbst heraus. Bei dieser Elimination nimmt φ_0 die Form $\mathfrak{G}(A, A', \ldots)$ an, dagegen kann φ_0 aufhören eine ganze Function der X, Y, Z zu sein. Wir wollen nun zeigen, dass sich φ_0 immer auf die Form

$$\mathfrak{G}(A\,, B\,, C\,, A'\,, B'\,, C'\,, X\,, Y\,, Z)$$

bringen lässt.

13. Da bei der Elimination von $y_1, \ldots, z_2$ aus φ_0 die übrigen x, y, z von selbst fortfallen, so kann man die Elimination in der Weise bewirken, dass man sowohl in φ_0 als auch in B', C', A, B, C die schliesslich fortfallenden Variablen von vornherein gleich Null setzt, die $y_1, \ldots, z_2$ durch die $B', \ldots$ ausdrückt und die so gewonnenen Ausdrücke in das vereinfachte φ_0 substituirt. Nun sind die Grössen

$$m_1 y_1, \quad m_1 z_1, \quad m_2 x_2, \quad m_2 y_2, \quad m_2 z_2$$

in B', C', A, B, C mit Coefficienten verbunden, die durch nachstehende Zeilen gegeben sind

$$\begin{array}{rrrrr}
0\,, & +L'\,, & -N'\,, & 0\,, & +L'\,, \\
-L'\,, & 0\,, & +M'\,, & -L'\,, & 0\,, \\
+Z_1\,, & -Y_1\,, & 0\,, & +Z_2\,, & -Y_2\,, \\
0\,, & +X_1\,, & -Z_2\,, & 0\,, & +X_2\,, \\
-X_1\,, & 0\,, & +Y_2\,, & -X_2\,, & 0\,,
\end{array}$$

welche, wie wir bereits früher gesehen haben, zu der Determinante

$$E = L'(X_2 - X_1)\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & L' \\ Y_1 & Y_2 & M' \\ Z_1 & Z_2 & N' \end{vmatrix}$$

führen. Der umgeformte durch die B', C', A, B, C dargestellte Ausdruck von φ_0 könnte also eine Potenz von E im Nenner haben, oder die Gestalt

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : E^q$$

besitzen. Diese Form ist nun von der Art und Weise, wie die Elimination im Einzelnen ausgeführt wird, unabhängig. Hätte man die Elimination mittelst der Variablen

$$y_1, \quad z_1, \quad x_3, \quad y_3, \quad z_3$$

bewirkt, so würde man im Nenner von φ_0 statt des vorstehenden E ein anderes

$$E' = L'(X_3 - X_1)\,|\,X_1, X_3, L'\,|$$

erhalten haben. Nun haben E und E' nur den Theiler L' gemeinsam, woraus wir schliessen, dass die übrigen Theiler von E oder E' in dem Ausdrucke von φ_0 sich gegen entsprechende Theiler des Zählers fortheben, so dass nur eine Potenz von L' im Nenner von φ_0 verbleiben kann.

Hätte man statt der Variablen y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 die Variablen x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 und statt B', C' die Ausdrücke C', A' bei der Elimination benutzt, so würde man für φ_0 einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{G}(C', A', A, B, C, X, Y, Z) : (M')^r$$

statt des früheren

$$\mathfrak{G}(B', C', A, B, C, X, Y, Z) : (L')^q$$

erhalten haben. Auf analoge Art könnte man noch zu einer dritten Darstellung

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A', B', A, B, C, X, Y, Z) : (N')^s$$

gelangen. Um nun zu zeigen, dass diese Nenner immer durch passende

Umformung von φ_0 beseitigt werden können, haben wir nur den Fall in's Auge zu fassen, wo keine der drei Zahlen q, r, s gleich Null ist.

Zunächst schicken wir die Bemerkung voraus, dass abgesehen von der Relation

$$A'L' + B'M' + C'N' = 0 \tag{29}$$

die $A, A', \ldots$ von einander unabhängig sind, d. h. es existirt zwischen den $A, A', \ldots$ keine weitere Relation

$$0 = PA + QB + RC + P'A' + Q'B' + R'C',$$

in welcher die Coefficienten $P, P', \ldots$ von den x, y, z unabhängig sind. Infolge dessen darf man in φ_0 die Variablen

$$A, \ldots, A', \ldots, X_1, \ldots, Y_1, \ldots, Z_1, \ldots$$

als Grössen ansehen, welche, abgesehen von der einen Einschränkung (29), völlig willkürlich gewählt werden können. Es sei nun auf irgend eine Art für φ_0 die Darstellung

$$\varphi_0 = H(A', B', C', A, B, C, L', M', N', X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n):(L')^m$$

gefunden worden, wo in φ_0 die X_1, Y_1, Z_1 durch die L', M', N' und die übrigen X, Y, Z ausgedrückt zu denken sind, dann kann, so lange die x, y, z, X, Y, Z, endliche Werthe besitzen, φ_0 nicht unendlich werden. Ordnen wir nun φ_0 nach fallenden Potenzen von L', setzen also an

$$\varphi_0 = \frac{H_0}{L'^m} + \frac{H_1}{L'^{m-1}} + \cdots,$$

wo die $H_0, H_1, \ldots$ ganze Functionen der vorkommenden Grössen bedeuten, so muss, sobald L' verschwindet, sobald also

$$B'M' + C'N' = 0$$

ist, der Ausdruck H_0 verschwinden, wie auch die Werthe der übrigen darin vorkommenden Grössen beschaffen sein mögen. Es muss also H_0 durch

$$B'M' + C'N'$$

theilbar sein, d. h. man hat identisch

$$H_0 = (B'M' + C'N')H_{01},$$

wo H_{01} wiederum eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen ist. Infolge dessen wird

$$\varphi_0 = \frac{H_1 - A'H_{01}}{L'^{m-1}} + \frac{H_2}{L'^{m-2}} + \dots .$$

Wendet man auf diese Darstellung dieselbe Schlussweise an, u. s. w., so gelangt man schliesslich dahin, den Nenner von φ_0 ganz zu beseitigen, d. h. φ_0 ist immer als eine ganze Function der Grössen

$$A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_n, Y_n, Z_n$$

darstellbar.

14. Um nun die Verbindungen der X, Y, Z zu ermitteln, welche in φ_0 vorkommen, bilden wir in

$$0 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}$$

zunächst das erste Glied rechts. Dasselbe hat die Gestalt

$$\sum \Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta},$$

wo

$$\Phi_{\alpha\beta} = \mathsf{S}\left[(x_\beta - x_\alpha)\left(m_\beta \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\alpha} - m_\alpha \frac{\partial\varphi_0}{\partial X_\beta}\right)\right],$$

und die Ableitungen von φ_0 sich nur auf die explicite vorkommenden X, Y, Z beziehen, weil die A, B, C, A', B', C' den Bedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial C'}{\partial v} = 0$$

genügen. Führt man in dem Quotienten

$$\Phi_{\alpha\beta} : r^3_{\alpha\beta}$$

statt der x, y, z die f, g, h und x_1 als Variable ein, so muss die Integration desselben nach x_1 den mit dem Factor $-X_1$ versehenen Term in φ_2 liefern, welcher $r_{\alpha\beta}$ im Nenner hat, und der im Übrigen eine ganze Function der X, Y, Z ist. Nun ist

$$\int dx(Px + Q)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}} = (Vx + W)(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn zwischen den von x unabhängigen Grössen P, Q, a, b, c, V, W die Relationen

$$D = b^2 - ac,$$

$$DV = bP - Qa,$$

$$DW = cP - Qb,$$

$$D(Vx + W) = P(bx + c) - Q(ax + b)$$

stattfinden. Mit Rücksicht hierauf setzen wir an

$$x_\alpha - x_\beta = x_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$f_\alpha - f_\beta = f_{\alpha\beta}, \ldots\ldots$$

$$X_\alpha - X_\beta = X_{\alpha,\beta}, \ldots\ldots$$

$$m_\alpha \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\beta} - m_\beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\alpha} = A_{\alpha,\beta}, \ldots\ldots$$

$$r_{\alpha,\beta}^2 = ax_1^2 + 2bx_1 + c,$$

$$aX_1^2 = \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}^2, \qquad bX_1^2 = \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}f_{\alpha,\beta}, \qquad cX_1^2 = \mathsf{S}f_{\alpha,\beta}^2,$$

$$\Phi_{\alpha,\beta} = Px_1 + Q,$$

$$PX_1 = \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}, \qquad QX_1 = \mathsf{S}f_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta},$$

$$(ax_1 + b)X_1 = \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta}, \qquad (bx_1 + c)X_1 = \mathsf{S}f_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta},$$

$$(b^2 - ac)X_1^2 = (\mathsf{S}X_{\alpha\beta}x_{\alpha,\beta})^2 - (\mathsf{S}X_{\alpha,\beta}^2)\,.\,(\mathsf{S}x_{\alpha,\beta}^2) = E,$$

$$Er_{\alpha,\beta}\int dx_1 \frac{\Phi_{\alpha,\beta}}{r_{\alpha,\beta}^3} = X_1^2 \begin{vmatrix} P & ax_1 + b \\ Q & bx_1 + c \end{vmatrix} = FX_1,$$

$$FX_1 = \begin{vmatrix} \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta} & \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta} \\ \mathsf{S}f_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta} & \mathsf{S}f_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta} \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta} & \mathsf{S}X_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta} \\ \mathsf{S}x_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta} & \mathsf{S}x_{\alpha,\beta}x_{\alpha,\beta} \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck

$$-\frac{F}{E r_{\alpha\beta}}$$

ist, wie bereits erwähnt, derjenige Term in φ_2, welcher $r_{\alpha\beta}$ als Nenner enthält; es muss also der Quotient $F:E$ eine ganze Function der X, Y, Z sein. Da nun F und E ganze Functionen der $x, X, \ldots$ sind, und da E als Function der $x, X, \ldots$ betrachtet irreductibel ist, so muss der Quotient $F:E$ auch eine ganze Function der x, y, z sein.

Um die Vorstellung zu fixiren, nehmen wir für den Augenblick an, dass die Indices α, β in F und E auf die Werthe $3, 4, \ldots$ beschränkt seien. Weiter denken wir uns in F und E die x, y, z zunächst durch die f, g, h und x_1, und dann die Grössen g_1, h_1, f_2, g_2, h_2 durch die A, B, C, B', C' und die übrigen f, g, h ausgedrückt. Durch diese linearen Transformationen wird an der Theilbarkeit von F durch E nichts geändert. Der Ausdruck für E enthält dann nur die Variablen $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, f_\beta, g_\beta, h_\beta$, während F sich zunächst als eine ganze homogene Function zweiten Grades derselben f, g, h und von x_1 darstellt, deren Coefficienten die x, y, z nur in den Verbindungen $A, A', \ldots$ enthalten. Setzen wir demgemäss an

$$F = F_0 x_1^2 + F_1 x_1 + F_2,$$

so müssen F_0, F_1, F_2 einzeln durch E theilbar sein. Nun sind die F_1 und F_2, wenn sie vorkommen, in Bezug auf die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ von der ersten, resp. nullten Ordnung, woraus wir schliessen, dass sie in Wirklichkeit identisch verschwinden, dass also F sich auf den Term F_2 reducirt, und dass infolge dessen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist. Führt man nun die Differentiation nach u aus, so erhält man

$$(\mathrm{S} x_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}) \cdot (\mathrm{S} X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta})(\mathrm{S} X_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}),$$

und hieraus

$$(\mathrm{S} f_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}) \cdot (\mathrm{S} X_{\alpha\beta}^2) = (\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta})(\mathrm{S} X_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}).$$

Die vorstehende partielle Differentialgleichung für φ_0 kann nun, da die

$A_{\alpha\beta}, \ldots$ die $f_\alpha, \ldots, h_\beta$ nicht enthalten, nicht anders bestehen, als wenn die mit den f, g, h multiplicirten Glieder links und rechts einzeln einander gleich sind, d. h. es ist

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}} = \frac{C_{\alpha\beta}}{Z_{\alpha\beta}} = \frac{\mathrm{S} X_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}}{\mathrm{S} X_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}}.$$

Zu diesem System von Differentialgleichungen, welche aus Gründen der Symmetrie auch noch gelten, wenn die Indices α, β die Werthe 1 oder 2 annehmen, gehören zunächst die vier Particularlösungen

$$L' = \Sigma m_\alpha X_\alpha, \qquad M' = \Sigma m_\alpha Y_\alpha, \qquad N' = \Sigma m_\alpha Z_\alpha,$$
$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_\alpha (X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2). \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

Es fragt sich nun, ob noch andere gemeinsame Particularlösungen existiren können. Die Integration der Gleichung

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{X_{\alpha\beta}} = \frac{B_{\alpha\beta}}{Y_{\alpha\beta}}$$

ist durch die drei Particularlösungen L', M', T vollständig erschöpft, d. h. die weiteren noch aufzusuchenden Particularlösungen dürfen als unabhängig von $X_\alpha, X_\beta, Y_\alpha, Y_\beta$ vorausgesetzt werden. Dies führt zunächst zu der Gleichung

$$C_{\alpha\beta} = 0,$$

welcher die Lösung N' genügt. Infolge dessen können die noch etwa fehlenden Lösungen als unabhängig auch von Z_α, Z_β vorausgesetzt werden. Es muss also, wenn noch weitere Lösungen, die von den gefundenen unabhängig sind, existiren, durch einen von $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ unabhängigen Ausdruck φ_0 das System

$$A_{\alpha\gamma} : X_{\alpha\gamma} = B_{\alpha\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = C_{\alpha\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial X_\gamma} : X_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y_\gamma} : Y_{\alpha\gamma} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z_\gamma} : Z_{\alpha\gamma}$$

befriedigt werden können, was offenbar nicht möglich ist, wenn φ_0 die

X_γ, Y_γ, Z_γ wirklich enthält. Wir schliessen hieraus, dass der Ausdruck φ_0 die Variablen X, Y, Z nur in vier von den x, y, z unabhängigen Verbindungen, nämlich L', M', N', T enthält. Eliminirt man also aus

$$\varphi_0 = \mathfrak{G}(A, B, C, A', B', C', X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n)$$

vier der $X, Y, \ldots$, z. B. X_1, Y_1, Z_1, X_2 mittelst der Ausdrücke L', M', N', T, so müssen die übrigen X, Y, Z von selbst herausfallen. Man erkennt leicht, dass dann φ_0 die Gestalt

$$\varphi_0 = \mathfrak{K}(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T)$$

annimmt, wo $\mathfrak{K}$ eine ganze Function der darin vorkommenden Grössen bedeutet. Hiermit sind wir im Wesentlichen an das Ziel gelangt. Ist nämlich

$$U = \sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

die Kräftefunction, so sind die Ausdrücke

$$A, B, C, A', B', C', L', M', N', T - U$$

homogene Integrale von der hier untersuchten Art. Der Ausdruck

$$J = \mathfrak{K}(A, B, \ldots, M', N', T - U)$$

ist ein ebensolches Integral, welches entwickelt und nach den X, Y, Z geordnet, mit dem hier untersuchten Integral φ in den Gliedern höchster Ordnung, nämlich in dem Anfangsterm φ_0 übereinstimmt. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist wiederum ein Integral von derselben Art wie φ, nur dass die Ordnung in Bezug auf die X, Y, Z in φ' um wenigstens eine Einheit niedriger ist, als in φ. Es lässt sich also von dem vorgelegten Integral φ stets ein aus den bekannten Integralen zusammengesetztes Integral in der Weise abspalten, dass das übrig bleibende Integral nach den X, Y, Z von niedrigerer Ordnung ist als φ. Wiederholt man diese Abspaltung, so gelangt man schliesslich zu einem Integral, welches die X, Y, Z nicht enthält, welches sich deshalb auf eine Constante reducirt.

Hiermit haben wir den Satz gewonnen:

Bei dem Vielkörper-Problem ist der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktsätzen, den Flächensätzen und dem Satze von der lebendigen Kraft abgeschlossen.

15. Aus dem gefundenen Ergebniss lassen sich sofort einige weitere Folgerungen ziehen. Wir führen ein

$$m_\alpha X_\alpha = \xi_\alpha, \qquad m_\alpha Y_\alpha = \eta_\alpha, \qquad m_\alpha Z_\alpha = \zeta_\alpha$$

und schreiben demgemäss die lebendige Kraft in der Form

$$T = \sum \frac{1}{2m_\alpha}(\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \zeta_\alpha^2);$$

ferner setzen wir, wenn U wieder die Kräftefunction bedeutet,

$$T - U = H,$$

dann haben die Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \frac{d\xi_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \qquad \text{etc.}$$

Diese Gleichungen transformiren wir, indem wir statt der $x, \xi, \ldots$ neue Variable

$$p_1, \ldots, p_{3n}, \qquad q_1, \ldots, q_{3n}$$

durch die Gleichungen

$$\xi_\alpha = \frac{\partial V}{\partial x_\alpha}, \qquad \eta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial y_\alpha}, \qquad \zeta_\alpha = \frac{\partial V}{\partial z_\alpha},$$

$$q_\alpha = \frac{\partial V}{\partial p_\alpha}$$

einführen, wo V irgend einen aus den Grössen x, y, z, p zusammengesetzten Ausdruck bedeutet. Die transformirten Gleichungen werden dann bekanntlich

$$\frac{\partial q_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

wo H durch die q, p ausgedrückt zu denken ist. Wir wollen eine derartige Transformation für das Dreikörper-Problem wirklich durchführen; für das Vielkörper-Problem gestaltet sich die Rechnung nicht wesentlich anders.

Die den ξ, η, ζ correspondirenden Variablen sollen mit $p, p_1, \ldots, p_8$, die den x, y, z entsprechenden mit $q, q_1, \ldots, q_8$ bezeichnet werden. Ferner soll die transformirende Function V in Bezug auf die p homogen linear sein, woraus sofort folgt, dass man ansetzen kann

$$V = pq + p_1 q_1 + \ldots + p_8 q_8,$$

wo für die q bestimmte Functionen der x, y, z gesetzt zu denken sind. Der Kürze halber möge das Zeichen S eine Summation über die drei Coordinatenaxen, das Zeichen Σ eine cyclische Summation über die Indices $1, 2, 3$ bedeuten. Dies vorausgeschickt setzen wir zunächst an

$$q_1^2 = \mathsf{S}(x_2 - x_3)^2, \qquad q_2^2 = \mathsf{S}(x_3 - x_1)^2, \qquad q_3^2 = \mathsf{S}(x_1 - x_2)^2,$$

d. h. die q_1, q_2, q_3 sind die Distanzen der drei Körper von einander. Weiter sollen sein

$$q_6 = \Sigma m_1 x_1, \qquad q_7 = \Sigma m_1 y_1, \qquad q_8 = \Sigma m_1 z_1.$$

Endlich bilden wir mit den neun willkürlich gewählten Constanten

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad c_3,$$

zwischen denen die Relationen

$$\Sigma a_1 = \Sigma b_1 = \Sigma c_1 = 0,$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1,$$

stattfinden sollen, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} q_5 &= \Sigma c_1 z_1, \\ q_4 &= \Sigma b_1 (x_1 + i y_1), \\ q &= [\Sigma a_1 (x_1 + i y_1)] : q_4, \end{aligned}$$

dann haben wir die Transformationsgleichungen

$$\xi_1 = \frac{p_2}{q_2}(x_1 - x_3) + \frac{p_3}{q_3}(x_1 - x_2) + p\frac{a_1 - b_1 q}{q_4} + p_4 b_1 + p_6 m_1,$$

$$\eta_1 = \frac{p_2}{q_2}(y_1 - y_3) + \frac{p_3}{q_3}(y_1 - y_2) - p\frac{a_1 - b_1 q}{i q_4} + p_4 i b_1 + p_7 m_1,$$

$$\zeta_1 = \frac{p_2}{q_2}(z_1 - z_3) + \frac{p_3}{q_3}(z_1 - z_2) \qquad + p_5 c_1 \qquad + p_8 m_1,$$

. . . .

Die p ergeben sich hieraus als lineare Functionen der ξ, η, ζ, mit Coefficienten, welche algebraisch von den x, y, z abhängen. Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst

$$\Sigma m_1 X_1 = \Sigma \xi_1 = p_6 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Y_1 = \Sigma \eta_1 = p_7 \Sigma m_1,$$

$$\Sigma m_1 Z_1 = \Sigma \zeta_1 = p_8 \Sigma m_1,$$

d. h. die p, q mit den Indices $6, 7, 8$ sind, von constanten Factoren abgesehen, gleich den Geschwindigkeiten und den Coordinaten des Schwerpunktes. Weiter bilden wir die complexe Verbindung der beiden ersten Flächensätze

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \xi_1 \\ i & y_1 & \eta_1 \\ 0 & z_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = p_5 \Sigma c_1 (y_1 - i x_1) + q_7 p_8 - q_8 p_7 + i(q_8 p_6 - q_6 p_8)$$

und den dritten Flächensatz

$$\sum \begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ y_1 & \eta_1 \end{vmatrix} = i p_4 q_4 + p_7 q_6 - p_6 q_7 .$$

Der Ausdruck für H endlich setzt sich zusammen aus den drei Gliedern

$$H' = \sum\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2+m_3}{2m_2m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2+q_3^2-q_1^2}{2m_1}$$

$$+\sum\frac{1}{m_1}\{p(a_1-b_1q)+p_4q_4b_1\}\left\{\frac{p_3}{q_3}(a_3-b_3q)-\frac{p_2}{q_2}(a_2-b_2q)\right\}-U,$$

$$H'' = p_3\sum\frac{p_1}{q_1}(z_2-z_3)\left(\frac{c_2}{m_2}-\frac{c_3}{m_3}\right)+p_5^2\sum\frac{c_1^2}{2m_1},$$

$$H''' = \frac{1}{2}(p_6^2+p_7^2+p_8^2)\Sigma m_1.$$

In den transformirten Differentialgleichungen

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},\qquad (\alpha=0,1,\ldots,8)$$

spaltet sich jetzt zunächst das System

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial H'''}{\partial p_\alpha},\qquad \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H'''}{\partial q_\alpha},\qquad (\alpha=6,7,8)$$

ab, dessen Integration die Schwerpunktsätze liefert. Nehmen wir den Schwerpunkt als Coordinatenanfang, so haben wir die p, q mit den Indices 6, 7, 8 einfach gleich Null zu setzen, und erhalten das System zwölfter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H'+H''),\qquad \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(H'+H'').\qquad (\alpha=0,1,\ldots,5)$$

Wählt man ferner die invariable Ebene als xy-Ebene, so ist p_5 gleich Null zu setzen. Infolge dessen reducirt sich das System zwölfter Ordnung auf ein System zehnter Ordnung mit den Variablen $p,\ldots,p_4,q,\ldots,q_4$ und auf eine Quadratur zur Bestimmung von q_5. Das letztgenannte System hat die Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial p_\alpha},\qquad \frac{dp_\alpha}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha},\qquad (\alpha=0,1,\ldots,4)$$

und giebt, da H' die Variablen p_4 und q_4 nur zu dem Producte $p_4 q_4$ verbunden enthält, in Folge der Gleichungen

$$\frac{dq_4}{dt} = \frac{\partial H}{\partial(p_4 q_4)} q_4, \qquad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial(p_4 q_4)} p_4$$

die Relation

$$\frac{d(p_4 q_4)}{dt} = 0,$$

welche sich vorhersehen liess, da $ip_4 q_4$ unter den gemachten Voraussetzungen das dritte Flächenintegral ist. Von dem System zehnter Ordnung spaltet sich also das System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

ab, wo in H' an Stelle von $p_4 q_4$ eine Constante zu schreiben ist, die wir mit k bezeichnen wollen. Die beiden übrig bleibenden Gleichungen liefern dann den Ausdruck für

$$\log \frac{q_4}{p_4}$$

durch eine Quadratur.

16. Um das System achter Ordnung noch weiter zu reduciren, schreiben wir

$$H' = H_1 p + H_2,$$

wo H_1 und H_2 offenbar von p frei sind. Ferner setzen wir an

$$L = p + \frac{H_2 - H'}{H_1} = p + K = 0,$$

und können dann die Gleichungen zunächst in der Form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

schreiben, wo nach Ausführung der partiellen Differentiationen für H' wieder der ursprüngliche Ausdruck gesetzt zu denken ist. Wegen der Relation

$$\frac{dq}{dt} = -1 : \frac{\partial L}{\partial H'}$$

folgt aber für $\alpha = 1, 2, 3$

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}.$$

Für das vorstehende System sechster Ordnung ist der in K auftretende Ausdruck H' ein Integral, wir dürfen also für H' eine Constante $-h$ schreiben und haben damit das Problem auf die Integration eines Systems sechster Ordnung und die Quadratur

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q}$$

zurückgeführt.

Eine weitere Reduction als auf dieses System sechster Ordnung, welches schon mehrfach, wenn auch in abweichender Gestalt, abgeleitet worden ist, lässt sich, wie aus den Untersuchungen von Herrn Lie über Gruppen (Mathem. Annalen, Bd. 8) hervorgeht, an der Hand der bisher bekannten Integrale nicht erreichen. Der vollständige Ausdruck für K hat die Gestalt

$$K = \frac{H_2 + h}{H_1},$$

$$H_1 = \sum A_1 \frac{p_1}{q_1},$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left\{\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.,}$$

$$H_2 = \sum \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 q_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2 m_2 m_3} + \sum \frac{p_2}{q_2}\frac{p_3}{q_3}\frac{q_2^2 + q_3^2 - q_1^2}{2 m_1} + \sum B_1 \frac{p_1}{q_1} - U,$$

$$B_1 = k(a_1 - b_1 q)\left\{\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right\}, \quad \text{etc.,}$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1}.$$

Es lässt sich jetzt unschwer zeigen, dass unser System sechster Ordnung keine algebraischen Integrale besitzt. Angenommen es existirte ein algebraisch aus den p, q zusammengesetztes Integral, dann ergiebt sich zunächst, weil K eine rationale Function der p, q ist, die in § 2 benutzte Schlussweise, dass dieses Integral sich als eine algebraische Verbindung von Integralen darstellen lässt, welche die p, q nur rational enthalten. Für die rationalen Integrale ferner zeigt die in § 3 benutzte Methode der unbestimmten Coefficienten, dass in diesen Integralen die in K auftretenden Constanten, nämlich die m, a, b, c, k, h nur in algebraischen Verbindungen vorkommen können. Setzt man nun in einem solchen rationalen Integral für die p, q ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen x, y, z, ξ, η, ζ und ferner für die Constanten k und h, welche ja algebraische Integrale bedeuten, ebenfalls ihre Ausdrücke durch die ursprünglichen Variablen, so gelangt man zu einem Integrale des Dreikörper-Problems, welches die Coordinaten und die Geschwindigkeiten nur algebraisch enthält. Ein derartiges Integral reducirt sich aber allemal, wenn man den Schwerpunkt als Coordinatenanfang und die invariable Ebene als xy-Ebene wählt, auf eine algebraische Function von h und k allein, womit offenbar die Nichtexistenz algebraischer Integrale für das System sechster Ordnung bewiesen ist.

Bei den bisher mittelst der Hamilton-Jacobi'schen Methoden erledigten Problemen der analytischen Mechanik beruht die Lösung im Allgemeinen darauf, dass man, nöthigenfalls durch eine passende Transformation, eine sogenannte Trennung der Variablen herbeiführt. Dieses Princip lässt sich etwas allgemeiner, als es bei Jacobi geschieht, folgendermassen formuliren. Gegeben ist das kanonische System

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

$$H = f(q, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n);$$

die Variablen lassen sich trennen, wenn zwischen den Variablen $q, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$, einer neuen Variablen p und gewissen Parametern $c_1, c_2, \ldots$ Gleichungen von der Form

$$H_1(p, q, c_1, c_2, \ldots) = 0, \qquad H_2(p_1, q_1, c_1, c_2, \ldots) = 0, \quad \text{etc.}$$

aufgestellt werden können, welche folgenden Bedingungen genügen: 1° die Anzahl der Gleichungen und der Parameter c ist gleich der Anzahl der Variablenpaare p, q; p_1, q_1; ...; 2° jede Gleichung enthält nur ein Variablenpaar; 3° eliminirt man mittelst der angegebenen Gleichungen aus dem Ausdrucke

$$p + H$$

je eine Componente eines Paares, so fallen die anderen Componenten von selbst heraus, d. h. der genannte Ausdruck verwandelt sich in eine von den p, q freie Function der Parameter c. Aus diesen Eigenschaften folgt dann weiter, dass, wenn man die Gleichungen $H_1, H_2, \ldots$ nach den c auflöst, die für die c sich ergebenden Ausdrücke Integrale des vorgelegten Problems sind.

Aus diesen Bemerkungen lässt sich das Ergebniss ableiten, dass es nicht möglich ist, bei unserem System sechster Ordnung eine Trennung der Variablen durch rein algebraische Berührungstransformationen, d. h. Transformationen, bei welchen die kanonische Form der Differentialgleichungen erhalten bleibt, herbeizuführen. Bei einer algebraischen Transformation nämlich verwandelt sich K in eine algebraische Function der neuen Variablen. Wenn nun in diesem Falle eine Trennung nach den neuen Variablen möglich ist, so lassen sich die Parameter c stets so wählen, dass die Zusatzgleichungen

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots$$

die Variablen und die Parameter nur algebraisch enthalten. Man würde hiermit auf algebraische Integrale des Systems sechster Ordnung geführt. Darnach sind also die Transformationen, welche die Trennung der Variablen gestatten, nothwendiger Weise transcendent, ebenso wie die noch fehlenden Integrale.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist nun allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass man nicht auf algebraischem Wege wenigstens zu einem neuen Integrale gelangen könnte. Diese Frage ist im Wesentlichen gleichbedeutend mit der andern: existiren Integrale, welche durch Quadraturen über algebraische Ausdrücke der p, q entstehen? Die Erledigung dieser Frage, zu welcher man nach Erschöpfung des Gebietes der algebraischen Integrale auch noch durch Überlegungen ganz anderer Art hingedrängt wird, würde auf dem hier eingeschlagenen Wege als der nächste nothwendige Schritt erscheinen, bevor man den Versuch macht, in den Differentialgleichungen selbst Fingerzeige bezüglich der für das Problem angemessenen transcendenten Transformationen aufzusuchen.

II.

17. In der vorangehenden Abtheilung habe ich gezeigt, dass bei dem Vielkörper-Problem die Gesammtheit der von der Zeit t freien, algebraischen Integrale erhalten wird, wenn man aus den neun bekannten Integralen dieser Art alle möglichen algebraischen Verbindungen bildet. Als Ergänzung hierzu wollen wir nun noch den Fall behandeln, dass ein Integral ausser den Coordinaten und Geschwindigkeiten auch noch die Variable t algebraisch enthält, wie dies ja bei den Schwerpunkts-Integralen eintreten kann. Zu dem Ende denken wir uns das System

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n, s), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

von Differentialgleichungen vorgelegt, in welchem die f rationale Functionen der x und einer einzigen, algebraisch von den x abhängenden Irrationalität s bedeuten, während t weder in den f, noch in s explicite vorkommt. Dieses System ist offenbar noch allgemeiner, als das in § 2 zu Grunde gelegte. Ist nun φ ein algebraisch von den Variablen x, t abhängendes Integral, so zeigt man zunächst durch die früher benutzten Überlegungen, dass sich φ algebraisch aus Integralen von der Form $\mathfrak{R}(x, s, t)$ zusammensetzen lässt. Wir nehmen deshalb an, dass φ von vornherein die Gestalt $\mathfrak{R}(x, s, t)$ besitze, denken uns dann φ als Quotienten zweier Polynome von der Form $\mathfrak{G}(x, s, t)$ geschrieben, und in Zähler und Nenner die Linearfactoren von der Form

$$t - t_1, \qquad t - t_2, \quad \ldots$$

aufgesucht, in denen die $t_1, t_2, \ldots$ algebraische und von t freie Functionen der x sind. Bildet man jetzt die vollständige logarithmische Ableitung von φ nach t und beachtet, dass in den Differentialgleichungen

t nicht explicite vorkommt, so erkennt man, dass die angegebenen Linearfactoren sämmtlich Integrale sind, und dass ferner der nach Unterdrückung dieser Factoren in φ übrigbleibende Bestandtheil von der Form $\mathfrak{R}(x, s)$ ebenfalls Integral ist. Die verschiedenen in t linearen Integrale unterscheiden sich von einander um algebraische und von t freie Integrale. Hiernach ist zur Aufstellung aller Integrale der betrachteten Art nur erforderlich zu kennen 1° alle algebraischen und von t freien Integrale, 2° ein einziges von t abhängiges Integral der Form $t - t_1$. Beim Vielkörper-Problem ist deshalb das Gebiet aller algebraischen Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft.

18. Am Schlusse der ersten Abtheilung waren Betrachtungen über die Frage angestellt worden, wie weit es möglich sei, durch algebraische Transformationen der Lösung des Vielkörper-Problems näher zu kommen. In dem Nachstehenden soll dieser Gegenstand weiter verfolgt werden, wobei wir uns einstweilen auf das Dreikörper-Problem beschränken. Um später den Gedankengang nicht zu unterbrechen, sollen zunächst gewisse Nebenuntersuchungen vorweg erledigt werden.

In § 15 waren die Bewegungsgleichungen durch Benutzung der Schwerpunkts- und Flächensätze auf ein System achter Ordnung

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_\alpha}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

reducirt worden, in welchem die Variablen nur noch von der Configuration des Körpersystems abhängen. Die Gleichungen enthalten ausser den vier Paaren abhängiger Variablen $p, q, \ldots$ an Constanten die drei Massen m_α, die Grösse k und die sechs Grössen a_α, b_α. Die Grösse ik ist der constante Werth des dritten Flächenintegrals, wenn die invariable Ebene als Fundamentalebene gewählt wird; die Constanten a_α, b_α konnten innerhalb der Einschränkungen

$$(31) \qquad a_2b_3 - a_3b_2 = a_3b_1 - a_1b_3 = a_1b_2 - a_2b_1 = 1$$

willkürlich gewählt werden. Bildet man mittelst der transformirenden Function

$$V = rq + \frac{1}{2}\sum r_\alpha q_\alpha^2, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

die Substitutionsgleichungen

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad s = \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$p_\alpha = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \qquad s_\alpha = \frac{\partial V}{\partial r_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

aus denen

$$r = p, \qquad s = q,$$

$$r_\alpha = \frac{p_\alpha}{q_\alpha}, \qquad s_\alpha = \frac{1}{2} q_\alpha^2$$

folgt, so werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{ds_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial r_\alpha}, \qquad \frac{dr_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial s_\alpha}. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

Im Folgenden werden wir, je nach Umständen, das System der p, q oder r, s benutzen, jedoch für das eine Paar r, s die ursprüngliche Bezeichnung p, q beibehalten. Ferner soll wie früher das Zeichen Σ ohne Summationsbuchstaben eine cyclische Summation über die Indices 1, 2, 3 bedeuten. Dies festgesetzt stellen wir zuerst die weiterhin benutzten Abkürzungen und Relationen zusammen. Es sei

$$C = \sum \frac{s_1}{m_1}, \qquad C' = \Sigma r_1 s_1,$$

$$D = \Sigma r_2 r_3, \qquad D' = \sum \frac{r_2 + r_3}{m_1},$$

$$L_2 = C'D' - CD,$$

$$H_1 = \Sigma A_1 r_1 = M_0 + M_1 q + M_2 q^2,$$

$$A_1 = (a_1 - b_1 q)\left(\frac{a_2 - b_2 q}{m_2} - \frac{a_3 - b_3 q}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_0 = \sum_\alpha M_{0\alpha} r_\alpha, \qquad M_1 = \sum_\alpha M_{1\alpha} r_\alpha, \qquad M_2 = \sum_\alpha M_{2\alpha} r_\alpha,$$

$$M_{01} = \quad a_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_{11} = -a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) - b_1\left(\frac{a_2}{m_2} - \frac{a_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$M_{21} = \quad b_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3, \qquad m_4 = m_1 m_2 m_3, \qquad m = \frac{m_0}{m_4},$$

$$\mu_0 = \sum \frac{b_1^2}{m_1}, \qquad \mu_1 = \sum \frac{a_1 b_1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \sum \frac{a_1^2}{m_1}.$$

$$\mu_0\mu_2 - \mu_1\mu_1 = m.$$

$$L_1 = \sum r_1 a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) = \sum_\alpha L_{1\alpha} r_\alpha,$$

$$L_{11} = a_1\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right), \quad \text{etc.}$$

$$\sum_\alpha \frac{L_{1\alpha}}{m_\alpha} = m.$$

Für die M, L bestehen, wenn f_1, f_2, f_3 drei willkürliche Zahlen bedeuten, die zusammenfassende Determinanten-Relationen

$$|f_\alpha, M_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, M_{2\alpha}, M_{0\alpha}| = \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, M_{0\alpha}, M_{1\alpha}| = \mu_2 \sum \frac{f_1}{m_1}, \qquad |f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{0\alpha}| = -m\sum f_1 a_2 a_3,$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{1\alpha}| = m\sum f_1(a_2 b_3 + a_3 b_2) + \mu_1 \sum \frac{f_1}{m_1},$$

$$|f_\alpha, L_{1\alpha}, M_{2\alpha}| = -m\sum f_1 b_2 b_3 - \mu_0 \sum \frac{f_1}{m_1}.$$

Ferner ist noch

$$0 = \sum_{\alpha} \frac{A_\alpha}{m_\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{M_{0\alpha}}{m_\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{M_{1\alpha}}{m_\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{M_{2\alpha}}{m_\alpha},$$

$$0 = \sum_{\alpha} \mu_\alpha M_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \mu_\alpha M_\alpha.$$

$$4M_{01}M_{21} - M_{11}M_{11} = -\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)^2, \quad \text{etc.}$$

$$4(M_{02}M_{23} + M_{03}M_{22}) - 2M_{12}M_{13} = -2\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + 4m, \text{ etc.}$$

$$4M_0M_2 - M_1M_1 = 4mD - D'D'.$$

Die letzte Relation lehrt, dass der Ausdruck H_1, als Function von q, r_1, r_2, r_3 betrachtet, irreductibel ist. Setzen wir endlich noch an

$$\begin{aligned} \Sigma B_1 r_1 &= k\Sigma r_1(a_1 - b_1 q)\left(\frac{b_2}{m_2} - \frac{b_3}{m_3}\right) \\ &= kL_1 - kqM_2, \end{aligned}$$

$$U = \sum \frac{m_2 m_3}{q_1},$$

$$H_2 = L_2 + kL_1 - kqM_2 - U,$$

so ist der zur Bildung der Differentialgleichungen erforderliche Ausdruck H' gegeben durch

$$H' = pH_1 + H_2.$$

Die mit H' gebildeten Bewegungsgleichungen wollen wir kurz als das System achter Ordnung bezeichnen. Der Ausdruck H' ist die Differenz »lebendige Kraft minus Kräftefunction». Bezeichnet man den constanten Werth dieser Differenz wie früher mit $-h$ und setzt

$$K = (H_2 + h) : H_1,$$

so erhält man das von p und t freie »System sechster Ordnung»

$$\frac{dq_\alpha}{dq} = \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dp_\alpha}{dq} = -\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{dt}{dq} = 1 : H_1,$$

so erhält man das »System siebenter Ordnung», welches sich aus dem 8. Ordnung dadurch ergiebt, dass man mittelst des Integrals der lebendigen Kraft die Variable p fortschafft und q an Stelle von t als unabhängige Variable einführt. Umgekehrt kann man von dem System 7. Ordnung zu dem 8. Ordnung dadurch gelangen, dass man an Stelle der Constante h die Variable p durch die Gleichung

$$pH_1 + H_2 + h = 0$$

einführt.

19. Die in H' und K auftretenden Constanten a, b konnten innerhalb der oben erwähnten Einschränkungen völlig beliebig gewählt werden, und man hätte z. B. ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen das specielle Werthsystem

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1, & a_2 = 0, & a_3 = -1 \\ b_1 = 0, & b_2 = 1, & b_3 = -1 \end{array}$$

zu Grunde legen können. Der Symmetrie halber wollen wir jedoch die a, b unbestimmt lassen, und zeigen, wie sich die für zwei verschiedene Werthsysteme der a, b geltenden Differentialgleichungen in einander überführen lassen. Es seien a, b, c, d vier willkürliche, nur der Einschränkung

$$ad - bc = 1$$

unterworfene Constanten. Man setze an

$$a_\alpha = aa'_\alpha + bb'_\alpha, \qquad b_\alpha = ca'_\alpha + db'_\alpha,$$

dann ist

$$a'_2 b'_3 - a'_3 b'_2 = 1, \quad \text{etc.},$$

d. h. die a', b' genügen denselben Bedingungen wie die ursprünglichen a, b. Ferner sei

$$q = \frac{aq' + b}{cq' + d},$$

wo q' eine neue anstatt q in das System 7. Ordnung einzuführende unabhängige Variable bedeutet; dann ist

$$a_a - b_a q = (a'_a - b'_a q') : (cq' + d),$$

$$(cq' + d)^2 H_1 = \sum r_1 (a'_1 - b'_1 q')\left(\frac{a'_2 - b'_2 q'}{m_2} - \frac{a'_3 - b'_3 q'}{m_3}\right) = H'_1,$$

$$\sum B_1 r_1 - kc(cq' + d) H_1 = k \sum r_1 (a'_1 - b'_1 q')\left(\frac{b'_2}{m_2} - \frac{b'_3}{m_3}\right).$$

Schreibt man also in K anstatt q und anstatt der a, b resp. q' und a', b', so erhält man für den so entstehenden Ausdruck K' die Relationen

$$K' = \frac{K}{(cq' + d)^2} - \frac{kc}{cq' + d},$$

$$K = K'(cq' + d)^2 + kc(cq' + d).$$

Beachtet man nun noch die Gleichung

$$dq = dq' : (cq' + d)^2,$$

so erkennt man leicht, dass das System 7. Ordnung nach Einführung von q' die Form

$$\frac{dq_a}{dq'} = \frac{\partial K'}{\partial p_a}, \qquad \frac{dp_a}{dq'} = -\frac{\partial K'}{\partial q_a}, \qquad \frac{dt}{dq'} = 1 : H'_1$$

annimmt.

Von den acht Variablen p, q besitzen drei, nämlich q_1, q_2, q_3, eine einfache geometrische Bedeutung, indem sie die gegenseitigen Distanzen der drei Körper darstellen. Wir wollen nun auch für die übrigen Variablen den Zusammenhang mit den ursprünglichen Bestimmungsstücken, nämlich den Coordinaten und Geschwindigkeiten aufsuchen. Es seien X, Y, Z und X', Y', Z' die auf den Schwerpunkt und auf ein beliebig gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten, ferner x, y, z und x', y', z' die analogen Grössen, wenn die invariable

Ebene als xy-Ebene gewählt wird. Bedeuten k_1, k_2, k_3 die constanten Werthe der drei Flächensätze für das erste Axensystem, so ist

$$k_1 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Y_\alpha & Y'_\alpha \\ Z_\alpha & Z'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_2 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} Z_\alpha & Z'_\alpha \\ X_\alpha & X'_\alpha \end{vmatrix}, \qquad k_3 = \sum_\alpha m_\alpha \begin{vmatrix} X_\alpha & X'_\alpha \\ Y_\alpha & Y'_\alpha \end{vmatrix},$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2 = 0.$$

Die x, y, z hängen mit den X, Y, Z durch eine orthogonale Substitution der Form

$$x = a\,X + b\,Y + c\,Z,$$

$$y = a'X + b'Y + c'Z,$$

$$z = a''X + b''Y + c''Z,$$

zusammen, für welche die Relation

$$1 : a'' : b'' : c'' = ik : k_1 : k_2 : k_3$$

gilt. Nun war

$$q = \sum_\alpha a_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha) : \sum_\alpha b_\alpha(x_\alpha + iy_\alpha);$$

andererseits ist

$$x + iy = X(a + ia') + Y(b + ib') + Z(c + ic'),$$

$$k^2(a - ia')(x + iy) = X(k^2 + k_1^2) + Y(k_1k_2 + kk_3) + Z(k_1k_3 - kk_2),$$

folglich

$$q = q_{01} : q_{02},$$

wenn

$$q_{01} = \sum_\alpha a_\alpha \{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\},$$

$$q_{02} = \sum_\alpha b_\alpha \{X_\alpha(k^2 + k_1^2) + Y_\alpha(k_1k_2 + kk_3) + Z_\alpha(k_1k_3 - kk_2)\}$$

gesetzt wird. Hiermit ist offenbar der gesuchte Zusammenhang für q gegeben.

Um den analogen Zusammenhang für die p nachzuweisen, benutzen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = H_1 = \Sigma A_1 r_1 ,$$

$$\frac{ds_1}{dt} = C'\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + D's_1 - C(r_2 + r_3) + A_1 p + B_1 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deren Auflösung nach den r und nach p die gesuchten Beziehungen liefert. Zur Abkürzung setzen wir

$$\begin{aligned}
s'_\alpha &= \Sigma s_1 - 2s_\alpha, & s'_2 + s'_3 &= 2s_1, \quad \text{etc.},\\
A'_\alpha &= \Sigma A_1 - 2A_\alpha, & A'_2 + A'_3 &= 2A_1, \quad \text{etc.},\\
B'_\alpha &= \Sigma B_1 - 2B_\alpha, & B'_2 + B'_3 &= 2B_1, \quad \text{etc.},\\
\Delta &= \Sigma s_1 s'_1 \\
&= 2\Sigma s_2 s_3 - \Sigma s_1^2 \\
&= \Sigma s'_2 s'_3 .
\end{aligned}$$

Δ ist offenbar das 4-fache Quadrat des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks. Weiter sei

$$\begin{aligned}
T_1 &= \Sigma A_1 s'_1 = \Sigma A'_1 s_1 ,\\
T_2 &= \Sigma B_1 s'_1 = \Sigma B'_1 s_1 ,\\
V_1 &= \Sigma A_1 A'_1 ,\\
V_2 &= \Sigma A_1 B'_1 = \Sigma A'_1 B_1 ,\\
W_1 &= \Sigma A_1 s'_1 \, . \, \Sigma A'_1 s_1 - \Delta \Sigma A_1 A'_1 \\
&= T_1^2 - \Delta V_1 ,\\
W_2 &= \Sigma A_1 s'_1 \, . \, \Sigma B_1 s'_1 - \Delta \Sigma A_1 B'_1 \\
&= T_1 T_2 - \Delta V_2 ,
\end{aligned}$$

dann wird

$$\frac{d\Delta}{dt} = 2\sum s_1' \frac{ds_1}{dt}$$

$$= 2\Delta D' + pT_1 + 2T_2,$$

$$\frac{dC}{dt} = m(2C' + k),$$

$$\frac{ds_1'}{dt} = \frac{2C'}{m_1} + D's_1' - 2Cr_1 + A_1'p + B_1',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum A_1 \frac{ds_1'}{dt} = D'T_1 - 2C\frac{dq}{dt} + pV_1 + V_2,$$

$$T_1\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\sum A_1\frac{ds_1'}{dt} = 4C\Delta\frac{dq}{dt} + 2pW_1 + 2W_2,$$

$$\frac{2\Delta}{mm_1}\frac{dC}{dt} + s_1'\frac{d\Delta}{dt} - 2\Delta\frac{ds_1'}{dt}$$

$$= \frac{2\Delta k}{m_1} + 4C\Delta r_1 + 2p(s_1'T_1 - \Delta A_1') + 2(s_1'T_2 - \Delta B_1').$$

Hiernach sind p und p_α linear durch die Ableitungen der q, q_α ausgedrückt; die Coefficienten in diesen linearen Ausdrücken besitzen den gemeinsamen Nenner

$$C\Delta W_1.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Grössen

$$q, q_\alpha, p, p_\alpha, k, k_\alpha, h,$$

wenn sie durch die ursprünglichen Variablen $X, X' \ldots$ ausgedrückt werden, homogen im Sinne des § 4 sind. Infolge dessen bleiben die drei reducirten Systeme von Differentialgleichungen, nämlich das System 6., 7., 8. Ordnung, ungeändert, wenn jede darin vorkommende Grösse mit der ihrer Dimension entsprechenden Potenz eines constanten Proportionalitäts-Factors multiplicirt wird.

20. Als nächste Aufgabe behandeln wir die Aufsuchung der zu dem System 7. Ordnung gehörigen Integralgleichungen von der Form

$$\vartheta(t, q, q_\alpha, p_\alpha).$$

Dass wenigstens eine solche Integralgleichung, nämlich die Bedingung für die Bewegung der drei Körper in einer Ebene, vorhanden ist, lässt sich von vornherein unschwer durch geometrische Überlegungen zeigen; es kommt jedoch wesentlich darauf an nachzuweisen, dass nur diese eine existirt. Es sei φ eine irreductible ganze Function der acht Variablen t, q, q_α, p_α; schreibt man

$$q_4 = q_1 q_2 q_3, \qquad K = \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1},$$

so sind in K Zähler und Nenner von der Form $\mathfrak{G}(p, q)$ und man erkennt, dass der Ausdruck

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial K}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial K}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{1}{H_1}$$

durch Multiplication mit $(q_4 H_1)^2$ ebenfalls die Gestalt $\mathfrak{G}(p, q)$ annimmt. Wenn also φ eine Integralgleichung ist, so muss

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(t, p, q)$$

sein. Wenn t in φ wirklich vorkommt, so können wir schreiben

$$\varphi = P_0 t^\nu + P_1 t^{\nu-1} + \ldots + P_\nu,$$

wo ν mindestens gleich Eins ist. Bildet man, indem für den Augenblick t als unabhängige Variable genommen wird, die vollständige Ableitung von φ nach t, so ist diese nach t höchstens vom Grade ν, d. h. die logarithmische Ableitung frei von t. Hieraus ergeben sich, wenn

$$\frac{d \log \varphi}{dt} = \omega'$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$\frac{dP_0}{dt} = \omega' P_0, \qquad \nu P_0 + \frac{dP_1}{dt} = \omega' P_1,$$

also

$$\nu + \frac{d}{dt}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = 0,$$

d. h. es wäre

$$\nu t + \frac{P_1}{P_0}$$

ein Integral des Systems 7. Ordnung. Da ein Integral dieser Form für die relativen Bewegungen der drei Körper, wie wir wissen, nicht existirt, so schliessen wir, dass t in φ nicht vorkommt.

Durch die bereits mehrfach benutzte Betrachtungsweise zeigt man ferner, dass die Coefficienten in φ sich allemal darstellen lassen müssen als algebraische Functionen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten m, a, b, h, k und eventuell gewisser, ausserdem noch auftretender constanter Parameter. Mit Rücksicht hierauf denken wir uns die Coefficienten in φ dargestellt als rationale Functionen jener Constanten und einer algebraisch von denselben abhängenden Irrationalität I, welche als Wurzel einer gewissen irreductiblen Gleichung definirt ist. Die Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega$$

gilt dann für alle Wurzelwerthe I. Bilden wir jetzt die Summe über die den einzelnen I entsprechenden Bedingungen, so erhalten wir

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega, \tag{32}$$

wo Φ das Product der einzelnen φ und Ω die Summe der einzelnen ω bedeutet. Die Φ und Ω sind dann von der Irrationalität I frei und wir können uns auf die Aufsuchung der Integralgleichungen von der Form Φ beschränken, da man von Φ rückwärts durch Zerlegung in Factoren zu den φ gelangt. Die Hinzufügung oder Unterdrückung constanter Factoren ist auf das Bestehen der Bedingung (32) offenbar ohne Einfluss; wir dürfen deshalb φ als eine ganze Function nicht bloss der Variablen p, q, sondern auch der Constanten m, a, b, h, k und der etwa auftretenden constanten Parameter $c_1, c_2, \ldots$ voraussetzen und ferner annehmen, dass Φ keine von den Variablen p, q freien Theiler der Form

$$\mathfrak{S}(m, a, b, h, k, c_1, c_2, \ldots)$$

besitze. Der Ausdruck Ω ist dann sicher von der Form

$$\mathfrak{S}(p, q, h, k, c_1, c_2, \ldots).$$

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass Φ parameterfrei ist. Wenn nämlich Φ einen Parameter — sagen wir c — enthält, so denken wir uns Φ nach c geordnet und

$$\Phi = \Phi_0 c^{\nu} + \Phi_1 c^{\nu-1} + \ldots + \Phi_{\nu}$$

geschrieben. Da Ω in c vom Grade Null ist, so erhalten wir

$$\Omega (q_4 H_1)^{-2} = \frac{d \log \Phi_0}{dq} = \frac{d \log \Phi_1}{dq} = \ldots,$$

d. h. der Quotient zweier Φ_α ist ein rational aus den p, q gebildetes Integral des Systems 7. Ordnung, reducirt sich also, da solche Integrale nicht existiren, auf eine Constante. Infolge dessen könnte ein Parameter c in Φ nur in einem von den Variablen p, q freien Theiler enthalten sein. Da solche Theiler von vornherein unterdrückt werden sollten, so ist Φ parameterfrei und deswegen auch homogen in den Dimensionen.

Der Ausdruck Φ kann den Theiler $q_4 H_1$ enthalten. Führen wir, wenn u, v zwei Functionen der Variablen p, q bedeuten, das bekannte Operationssymbol

$$(u, v) = \sum \left(\frac{\partial u}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right)$$

ein, so wird

$$\frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = \frac{\partial \log (q_4 H_1)}{\partial q} + \left(\log q_4 H_1, \frac{q_4 H_2 + q_4 h}{q_4 H_1} \right),$$

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log (q_4 H_1)}{dq} = q_4 H_1 \frac{\partial (q_4 H_1)}{\partial q} + (q_4 H_1, q_4 H_2 + q_4 h).$$

Hiernach können wir uns in Φ den etwa vorkommenden Theiler $q_4 H_1$ unterdrückt denken, ohne dass dadurch an der Bedingung (32) etwas Wesentliches geändert wird. Dies festgesetzt führen wir jetzt in Φ und Ω anstatt h die Variable p durch die Gleichung

$$h = -pH_1 - H_2$$

ein. Beide Ausdrücke bleiben dabei in Bezug auf q, p, p_α ganz rational, können dagegen in Bezug auf die q_α Nenner enthalten, welche jedoch nur Potenzen der q_α als Theiler besitzen. Gehen wir, entsprechend der gemachten Substitution, von dem System 7. Ordnung auf das 8. Ordnung über und führen t als unabhängige Variable ein, so können wir schreiben

$$\frac{d \log \Phi}{dt} = \Omega : (q_4^2 H_1) = \Omega',$$

wo Ω', da Φ nicht den Theiler $q_4 H_1$ besitzt, im Nenner sicher nur Potenzen der q_α als Theiler enthält. Führen wir weiter für die p ihre in § 19 gegebenen linearen Ausdrücke durch die

$$\frac{dq}{dt}, \frac{ds_\alpha}{dt}$$

ein, so werden Φ und Ω' ganze Functionen dieser Ableitungen und enthalten in den Nennern als Theiler nur Potenzen von q_α, C, Δ und W_2. Führt man endlich statt der $q, \ldots$ ihre Ausdrücke durch die rechtwinkligen, auf den Schwerpunkt und ein willkürlich gerichtetes Axensystem bezogenen Coordinaten und Geschwindigkeiten $X, X', \ldots$ ein, und denkt sich auch die in q vorkommenden Grössen k_1, k_2, k_3, sowie die durch die Gleichung

$$\sum k_1^2 + k^2 = 0$$

bestimmte Quadratwurzel k durch die $X, X', \ldots$ ausgedrückt, so wird Φ eine Integralgleichung der ursprünglichen Bewegungsgleichungen, welche die Form

$$\mathfrak{R}(X, \ldots, X', \ldots, q_\alpha, k)$$

besitzt, im Nenner jedoch die Geschwindigkeiten nur in den vier Verbindungen k_α, k enthält. Das Gleiche gilt von der Form des Ausdruckes Ω'.

Es werde jetzt mit Φ_1 das Product derjenigen Theiler im Zähler von Φ bezeichnet, welche sich, als Functionen der $X', \ldots$ betrachtet, nicht durch die k_α, k allein ausdrücken lassen, und es sei

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2, \qquad \frac{d \log \Phi_1}{dt} = \Omega_1, \qquad \frac{d \log \Phi_2}{dt} = \Omega_2,$$

dann ist Ω_2 genau von derselben Form wie Ω' und dasselbe gilt wegen

$$\Omega_1 = \Omega' - \Omega_2$$

auch von Ω_1. Weiter erkennt man, dass wegen der über Φ_1 gemachten Festsetzungen Ω_1 in Wirklichkeit im Nenner nur Potenzen der q_α als

Theiler enthalten kann; Φ_1 ist also, wenn es sich nicht etwa auf eine Constante reducirt, eine Integralgleichung für die Bewegung relativ um den Schwerpunkt. Schreibt man mit Rücksicht auf die Irrationalität k

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + k\Phi_{12},$$

$$\Omega_1 = \Omega_{11} + k\Omega_{12},$$

$$\Phi_{11} \quad \text{und} \quad \Phi_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_\alpha),$$

$$q_4^3\Omega_{11} \quad \text{und} \quad q_4^3\Omega_{12} = \mathfrak{P}(X, X', \ldots, q_\alpha),$$

so ist, da die Bedingung

$$\frac{d \log}{dt}(\Phi_{11} + k\Phi_{12}) = \Omega_{11} + k\Omega_{12}$$

für beide Vorzeichen von k gilt,

$$\frac{d \log}{dt}(\Phi_{11}^2 - k^2\Phi_{12}^2) = 2\Omega_{11}.$$

Das Product

$$(33) \qquad (\Phi_{11} + k\Phi_{12})(\Phi_{11} - k\Phi_{12})$$

ist also eine homogene Integralgleichung von der früher behandelten Art und ist deshalb, da es sich hier nur um die relative Bewegung handelt, in der Form

$$\mathfrak{P}(X, Y, Z, q_\alpha)\mathfrak{P}(k_1, k_2, k_3, h)$$

darstellbar. Eliminirt man also in dem Producte (33) mittelst der Gleichungen

$$0 = \Sigma m_1 X_1' = \Sigma m_1 Y_1' = \Sigma m_1 Z_1'$$

und der Ausdrücke für die k_α, k sieben von den neun Grössen X', Y', Z', so müssen die beiden anderen von selbst mit herausfallen; dies ist aber nicht anders möglich, als wenn jeder der beiden Factoren jenes Productes einzeln durch die angegebene Elimination von sämmtlichen X', Y', Z' gleichzeitig befreit wird. Hiernach kann also die gesuchte Integralgleichung Φ, wenn man wieder auf die Variabeln des Systems 7. Ordnung zurückgeht, nur die vier Variabeln q enthalten oder muss m. a. W. frei von den p_α sein.

21. Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine von den p_α freie Lösung Φ der Form $\mathfrak{G}(q, q_\alpha)$ zu der Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \Phi}{dq} = \Omega, \qquad \Omega = \mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha)$$

zu suchen. Zunächst ist

$$\Omega = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + (q_4 H_1)^2 \left(\log \Phi, \frac{H_2 + h}{H_1}\right)$$

$$= (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, H_2 + h) - q_4^2 (H_2 + h)(\log \Phi, H_1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass Ω in den p_α höchstens vom zweiten und in den q_α höchstens vom vierten Grade ist. Wir spalten Ω nach der Ordnung der einzelnen Glieder in Bezug auf die p_α in die drei Bestandtheile

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2,$$

wo der Index die Ordnung nach den p angiebt, und führen statt der p_α die r_α durch die Relationen

$$p_\alpha = r_\alpha q_\alpha$$

ein. Hiermit werden ω_1 und ω_2 nach den q_α höchstens vom 5^{ten}, resp. 6^{ten} Grade. Weiter wird, wenn man entwickelt,

$$\omega_0 = q_4^2 (U - h)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_1 = k q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_1 - q M_2) - k q_4^2 (L_1 - q M_2)(\log \Phi, H_1),$$

$$\omega_2 = (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 (\log \Phi, L_2) - q_4^2 L_2 (\log \Phi, H_1),$$

wobei zu beachten ist, dass das Symbol (u, v) auch in der Form

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial v}{\partial r_1} - \frac{\partial v}{\partial s_1} \frac{\partial u}{\partial r_1}\right)$$

geschrieben werden kann. Bei der Integration der drei Bedingungen für Φ wollen wir der besseren Übersicht halber folgende Abkürzungen und Relationen benutzen:

$$E = \Sigma a_2 a_3 s_1, \qquad F = -\Sigma (a_2 b_3 + a_3 b_2) s_1, \qquad G = \Sigma b_2 b_3 s_1,$$

$$C + \mu_0 E + \mu_1 F + \mu_2 G = 0,$$

$$\begin{array}{llll}
(C, M_0) = 0, & (E, M_0) = 0, & (F, M_0) = \mu_2, & (G, M_0) = -\mu_1, \\
(C, M_1) = 0, & (E, M_1) = -\mu_2, & (F, M_1) = 0, & (G, M_1) = \mu_0, \\
(C, M_2) = 0, & (E, M_2) = \mu_1, & (F, M_2) = -\mu_0, & (G, M_2) = 0, \\
(C, H_1) = 0, & (E, H_1) = -\mu_2 q + \mu_1 q^2, & (F, H_1) = \mu_2 - \mu_0 q^2, & (G, H_1) = -\mu_1 + \mu_0 q, \\
(C, L_1) = m, & (E, L_1) = 0, & (F, L_1) = \mu_1, & (G, L_1) = -\mu_0,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(C, L_2) &= 2mC'', \\
(E, L_2) &= -\mu_2 C' + ED' + C\Sigma a_1 a_1 r_1, \\
(F, L_2) &= 2\mu_1 C' + FD' - 2C\Sigma a_1 b_1 r_1, \\
(G, L_2) &= -\mu_0 C' + GD' + C\Sigma b_1 b_1 r_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= E + Fq + Gq^2 \\
&= \Sigma s_1 (a_2 - b_2 q)(a_3 - b_3 q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Q, M_0) &= \mu_2 q - \mu_1 q^2, \\
(Q, M_1) &= -\mu_2 + \mu_0 q^2, \\
(Q, M_2) &= \mu_1 - \mu_0 q, \\
(Q, H_1) &= 0, \\
(Q, L_1) &= \mu_1 q - \mu_0 q^2,
\end{aligned}$$

$$(Q, L_1 - qM_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
(Q, L_2) &= QD' + \Sigma (a_1 - b_1 q)^2 \left(Cr_1 - \frac{C''}{m_1}\right) \\
&= QD' + Q\frac{\partial H_1}{\partial q} - H_1 \frac{\partial Q}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Die erste von den drei Bedingungen für Φ nimmt mit der Abkürzung

$$q_4(U - h) = V, \qquad V = (q_\alpha)$$

die Gestalt

$$\omega_0 = q_4 V(\log \Phi, H_1) = V \sum A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q_1}$$

an. Da Φ möglicherweise durch V theilbar ist, so setzen wir an

$$\Phi = \Psi \, . \, V^{\varsigma}, \qquad \Psi = \mathfrak{G}(q\,,\,q_\alpha),$$

mit dem Zusatze, dass Ψ nicht durch V theilbar sein soll. Wir erhalten dann

$$q_4(\log \Psi\,,\,H_1) = \frac{\omega_0 - \rho q_4(V\,,\,H_1)}{V}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann, entwickelt, im Nenner nicht den Theiler V enthalten, folglich ist der Zähler der rechten Seite durch V theilbar, also die rechte Seite in den q_α höchstens vom ersten Grade, so dass wir ansetzen dürfen

$$q_4(\log \Psi\,,\,H_1) = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha,$$

wo die Coefficienten rechts nur noch von q abhängen. Führt man in diese partielle Differentialgleichung an Stelle der q_α die Variablen q_1, C und Q ein, so wird

$$A_1 q_2 q_3 \frac{\partial \log \Psi}{\partial q_1} = \omega_{00} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} q_\alpha,$$

$$A_1 \log \Psi = \omega_{00} \int \frac{dq_1}{q_2 q_3} + \sum_\alpha \omega_{0\alpha} \int \frac{q_\alpha dq_1}{q_2 q_3},$$

wo bei den Quadraturen q_2 und q_3 durch q_1, C, Q ausgedrückt zu denken sind. Die erste Quadratur führt auf elliptische Integrale, welche in $\log \Psi$ nicht vorkommen dürfen, d. h. es ist ω_{00} gleich Null. Die drei anderen Quadraturen führen auf Logarithmen und lassen sich, wie leicht verificirt werden kann, in der Form

$$A_1 \sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right), \qquad A_1 \sigma_2 \log\left(\frac{q_3}{\sqrt{A_3}} + \frac{q_1}{\sqrt{A_1}}\right),$$

$$A_1 \sigma_3 \log\left(\frac{q_1}{\sqrt{A_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{A_2}}\right)$$

schreiben, wo die σ wegen der Beschaffenheit von Ψ nothwendiger Weise ganze Zahlen sind. Setzt man nun

$$\log \Psi = \sum \sigma_1 \log\left(\frac{q_2}{\sqrt{A_2}} + \frac{q_3}{\sqrt{A_3}}\right) + f(q\,,\,C\,,\,Q),$$

so ergiebt die Substitution in die Differentialgleichung die Relationen

$$\omega_{0\alpha} = \sqrt{A_1 A_2 A_3} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{A_\alpha}},$$

d. h. entgegen den für ω bestehenden Voraussetzungen irrationale Ausdrücke. Die σ und $\omega_{0\alpha}$ müssen deshalb verschwinden und es ist Ψ als Function der drei Grössen q, C, Q allein darstellbar. Setzt man nun in dem ursprünglichen Ausdrucke für Ψ an Stelle von q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q, so muss q_1 von selbst herausfallen; entwickelt man andererseits q_2, q_3 und dann Ψ nach fallenden Potenzen von q_1, so erkennt man, dass Ψ die Gestalt $\mathfrak{G}(C, Q)$ besitzt, also in der ursprünglichen Gestalt nur die Quadrate der q_α enthielt. Mit Rücksicht hierauf kann man zunächst schreiben

$$\Psi = \mathfrak{G}(q, E, F, G).$$

Eliminirt man hieraus abwechselnd eines der drei Paare FG, GE, EF mittelst der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} E\mu_0 + F\mu_1 + G\mu_2 &= -C, \\ E + Fq + Gq^2 &= Q, \end{aligned}$$

so muss die dritte Grösse E oder F oder G jedesmal von selbst mit herausfallen. Als Nenner können bei den drei so entstehenden Formen für Ψ nur Potenzen von

$$\mu_1 q^2 - \mu_2 q, \qquad \mu_2 - \mu_0 q^2, \qquad \mu_0 q - \mu_1$$

auftreten. Diese Nenner müssen jedoch, da sie keine gemeinsamen Theiler besitzen, sich in Wirklichkeit jedesmal fortheben, d. h. es ist

$$\Psi = \mathfrak{G}(q, C, Q), \qquad \Phi = \Psi . V^\rho.$$

22. Mit dem gefundenen Ausdrucke für Ψ gehen wir jetzt in die zweite der aufgestellten Bedingungen ein und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{k\rho q_4^2}{V}\{H_1(V, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(V, H_1)\} \\ &+ k_4^2\{H_1(\log\Psi, L_1 - qM_2) - (L_1 - qM_2)(\log\Psi, H_1)\}. \end{aligned}$$

Die erste, V enthaltende Klammer $\{\}$ ist nicht durch V theilbar, wie man schon durch Betrachtung der Glieder erkennt, welche die in V vorkommende Grösse h enthalten. Da andererseits die übrigen Glieder der Differentialgleichung V nicht im Nenner enthalten können, so muss die genannte Klammergrösse in Wirklichkeit fehlen, d. h. ρ gleich Null sein, also

$$\Psi = \Phi.$$

Hiermit geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\omega_1}{kq_4^2 H_1} = \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}(C, L_1 - qM_2) + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_1 - qM_2)$$
$$= m\frac{\partial \log \Phi}{\partial C}.$$

Die linke Seite muss von q_1 unabhängig werden, sobald man für q_2 und q_3 ihre Ausdrücke durch q_1, C, Q einführt. Entwickelt man nun wie vorhin wieder nach fallenden Potenzen von q_1, so kann, da ω_1 nach den q_α höchstens vom fünften Grade ist, überhaupt kein von q_1 freies Glied auftreten, d. h. es wird

$$0 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial C}, \qquad \Phi = \mathfrak{S}(q, Q).$$

Hiermit gehen wir jetzt in die dritte Differentialgleichung ein, wobei zu beachten ist, dass in Φ q theils explicite, theils implicite, nämlich in Q, vorkommt, und schreiben demgemäss

$$\omega_2 = (q_4 H_1)^2 \left\{ \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\frac{\partial F}{\partial q} \right\} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}(Q, L_2)$$
$$= (q_4 H_1)^2 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + q_4^2 H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial Q}\left\{ D' + \frac{\partial H_1}{\partial q} \right\} Q.$$

Der Quotient $\omega_2 : q_4^2$ muss, wenn wieder die q_1, C, Q eingeführt werden, von q_1 frei werden. Entwickelt man nach fallenden Potenzen von q_1, so wird, wie man erkennt, das von q_1 freie Glied auch frei von C und Q, d. h. der Quotient ist nur von q und den r_α abhängig. Andererseits ist ω_2 durch H_1 theilbar, wir dürfen also schreiben

$$\omega_2 = q_4^2 H_1 \sum_\alpha \omega_{2\alpha} r_\alpha, \qquad \omega_{2\alpha} = \mathfrak{S}(q),$$

$$\sum_\alpha \omega_{2\alpha} r_\alpha = H_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q} \right).$$

Diese Gleichung zerfällt sofort in die drei andern

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log \Phi}{\partial q} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

aus denen wir

$$\omega_{22} A_3 - \omega_{23} A_2 = \frac{\partial \log \Phi}{\partial \log Q} \begin{vmatrix} \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} + \frac{dA_2}{dq}, & A_2 \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{dA_3}{dq}, & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bilden. Hiernach besteht Φ aus einer Potenz von Q, multiplicirt mit einer Function von q allein. Setzen wir demgemäss

$$\Phi = WQ^\rho, \qquad W = \mathfrak{G}(q),$$

so wird

$$\omega_{21} = A_1 \frac{\partial \log W}{\partial q} + \rho\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{dA_1}{dq}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Denkt man sich W nach q in Linearfactoren zerlegt, so muss jeder derselben, da die A_α und $\omega_{2\alpha}$ die Form $\mathfrak{G}(q)$ besitzen, Theiler von A_1, A_2, A_3 sein. Da nun die A_α keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so reducirt sich W auf eine Constante und es wird

$$\Phi = Q^\rho.$$

Fassen wir die bisherige Untersuchung zusammen und beachten, dass Q irreductibel ist, so gelangen wir zu dem Resultat, dass die Bedingung

$$(q_4 H_1)^2 \frac{d \log \varphi}{dq} = \omega, \qquad \omega = \mathfrak{G}(q, q_\alpha, p_\alpha),$$

nur die beiden irreductiblen Lösungen

$$\varphi = q_4 H_1, \qquad \varphi = Q$$

zulässt. Von diesen liefert nur Q eine wirkliche Integralgleichung, entsprechend der Relation

$$\frac{dQ}{dt} = Q\left(D' + \frac{\partial H_1}{\partial q}\right),$$

während $q_4 H_1$ nur als Integralgleichung erscheint, wenn q als unabhängige Variable gewählt wird, wie aus der Relation

$$\frac{d(q_4 H_1)}{dt} = H_1 \frac{\partial(q_4 H_1)}{\partial q} + \frac{1}{q_4}(q_4 H_1 \, , \, q_4 H_2 + q_4 h)$$

hervorgeht, deren rechte Seite, wie man sich leicht überzeugt, nicht durch H_1 theilbar ist.

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens von Q lässt sich leicht angeben. Aus der Form des Ausdruckes für q durch die auf die invariable Ebene bezogenen Coordinaten x, y folgt nämlich, dass q sich algebraisch durch die Seiten des Dreiecks ausdrücken lässt, welches die Projectionen der drei Körper auf die invariable Ebene mit einander bilden. Bewegen sich nun die drei Körper in einer Ebene, d. h. also in der invariablen Ebene des Systems, so fallen die drei Seiten des genannten Dreiecks mit den q_α zusammen, und man erhält durch Rationalmachen der so zwischen den q, q_α entstehenden Gleichung genau die Bedingung $Q = 0$. Dieselbe besagt also, dass die drei Körper sich in einer Ebene bewegen.

23. Am Schlusse der ersten Abtheilung war als nächster Schritt in dem hier bei der Untersuchung über die Integrale des Vielkörper-Problems befolgten Gedankengange die Beantwortung der Frage bezeichnet worden, ob Integrale existiren, welche durch Quadratur über algebraische Ausdrücke gebildet sind. Wir fragen also jetzt, indem wir wieder das System 7. Ordnung zu Grunde legen, ob ein Integral der Form

$$\varphi = \int \Big[\vartheta(t)dt + \vartheta(q)dq + \sum_\alpha \vartheta(q_\alpha)dq_\alpha + \sum_\alpha \vartheta(p_\alpha)dp_\alpha\Big]$$

existirt, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein totales Differential und die $\vartheta(t)$, $\vartheta(q)$, ... algebraische Functionen der acht Variablen t, q, ... sind. Ausdrücke dieser Art können wir füglich als Abel'sche Quadraturen und, wenn sie ein Integral unserer Differentialgleichungen liefern, als Abel'sche Integrale des vorgelegten Problems bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Quadratur ein Integral liefert, ist mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{1}{H_1} = \frac{\partial K}{\partial h}$$

durch das identische Verschwinden des Ausdruckes

$$\vartheta(q) + \vartheta(t)\frac{\partial K}{\partial h} + \sum_a \left(\vartheta(q_a)\frac{\partial K}{\partial p_a} - \vartheta(p_a)\frac{\partial K}{\partial q_a}\right)$$

gegeben.

Die $\vartheta(t), \ldots$ denken wir uns dargestellt als rationale Functionen der Variablen und einer einzigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Irrationalität γ. Weiter denken wir uns in den $\vartheta(t), \ldots$ die Irrationalität aus den Nennern fortgeschafft und die Zähler nach γ auf den niedrigsten Grad gebracht. Dann beweist man durch die wiederholt angewandte Betrachtungsweise, dass in den $\vartheta(t), \ldots$ und in der Gleichung für γ die Constanten der Differentialgleichungen, nämlich m, a, b, h, k, sowie die etwa auftretenden constanten Parameter nur algebraisch auftreten, dass ferner φ als parameterfrei und infolge dessen auch als homogen in den Dimensionen vorausgesetzt werden darf. Dies festgestellt, gehen wir jetzt dazu über, das Verhalten von φ an den Stellen zu untersuchen, wo φ, als Function einer der Variablen betrachtet, einen Pol (Unendlichkeitspunkt) oder einen Verzweigungspunkt oder beides zugleich besitzt.

Es seien $\sigma, \sigma_1, \ldots$ die acht Variablen, in willkürlicher Reihenfolge geordnet. Man entwickle $\vartheta(\sigma)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma - \tau$, wo τ einen constanten Werth oder auch eine algebraische Function der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ bedeutet, dann enthält die Entwickelung, von besonderen Werthen der Grösse τ abgesehen, im Allgemeinen nur ganze positive Potenzen. Wir wollen jedoch die möglichen Grenzfälle sogleich mit berücksichtigen und denken uns die Reihe für $\vartheta(\sigma)$ als nicht nur ganze positive, sondern auch gebrochene und eine endliche Anzahl von negativen Potenzen enthaltend. Die Coefficienten sind algebraische Functionen der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und, so lange specielle Werthsysteme der $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ausgeschlossen bleiben, so beschaffen, dass die Reihe, ohne Zerstörung der Convergenz, nach den $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ differentiirt werden kann. Die für $\vartheta(\sigma)$ gewonnene Reihe integriren wir gliederweise nach σ in der Art, dass man, abgesehen von dem etwa vorkommenden logarithmischen Gliede, wiederum eine nach $\sigma - \tau$ fortschreitende Reihe, jedoch ohne constantes Glied, erhält. Diese neue Reihe, einschliesslich des logarithmischen Gliedes, heisse $\varphi(\sigma)$, dann darf sich $\varphi(\sigma)$ von φ nur um einen von σ unabhängigen Ausdruck unterscheiden. Bildet man

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}[\varphi - \varphi(\sigma)] = \vartheta(\sigma_1) - \frac{\partial\varphi(\sigma)}{\partial\sigma_1}$$

und denkt sich $\vartheta(\sigma_1)$ ebenfalls nach $\sigma - \tau$ entwickelt, so erkennt man, dass der Coefficient des logarithmischen Gliedes von σ_1 und ebenso von $\sigma_2, \ldots$ unabhängig, also constant sein muss, und dass die rechte Seite sich auf eine algebraische Function von $\sigma_1, \ldots$ reducirt. Schreiben wir also

$$\varphi = \varphi(\sigma) + \varphi'(\sigma),$$

so ist φ' durch eine Abel'sche Quadratur gegeben.

Die vorstehend gewonnene Reihenentwickelung für φ werde jetzt folgendermassen gespalten. Man vereinige zunächst zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_0$ alle ganzen Potenzen nebst dem logarithmischen Gliede und dem Term φ'. Aus dem nur gebrochene Potenzen enthaltenden Reste greifen wir das niedrigste Glied heraus und vereinigen damit zu einem Ausdrucke $\varphi(\sigma)_1$ alle Glieder, deren Exponent sich von dem des niedrigsten Gliedes um ganze Zahlen unterscheidet. Aus dem dann noch verbleibenden Reste spalten wir in gleicher Weise ein $\varphi(\sigma)_2, \varphi(\sigma)_3, \ldots$ ab, bis alle Glieder erschöpft sind, was nach einer endlichen Zahl von Spaltungen der Fall ist. Wir haben dann

$$\varphi = \varphi(\sigma)_0 + \varphi(\sigma)_1 + \ldots.$$

Diesen Ausdruck differentiiren wir vollständig nach q, wobei wir uns den Ausdruck für K ebenfalls nach Potenzen von $\sigma - \tau$ entwickelt denken. Letztere Entwickelung enthält nur ganze Potenzen, und negative nur dann, wenn für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet. Die vollständig entwickelte Ableitung erscheint zunächst ebenfalls als Potenzreihe und man erkennt sofort, dass die aus den Ausdruck $\varphi(\sigma)_0, \varphi(\sigma)_1, \ldots$ entspringenden Reihen einzeln für sich verschwinden müssen, dass also die $\varphi(\sigma)_0, \ldots$ einzeln für sich Integrale sind, und zwar Abel'sche Integrale, da sie sich linear mit constanten Coefficienten aus den verschiedenen Zweigen zusammensetzen lassen, welche die Function φ an der Stelle $\sigma = \tau$ besitzt. Weiter erkennt man, wenn die verlangte Differentiation und Entwickelung an den Anfangsgliedern der einzelnen $\varphi(\sigma)$ ausgeführt wird, dass in $\vartheta(\sigma)$ negative oder gebrochene Potenzen höchstens dann auftreten können, wenn entweder K negative Potenzen enthält, also für $\sigma = \tau$ der Ausdruck $q_4 H_1$ verschwindet, oder wenn die Entwickelung von

$$\frac{d}{dq}(\sigma - \tau)$$

kein von $\sigma - \tau$ freies Glied enthält, wenn also diese Ableitung für $\sigma = \tau$ verschwindet, d. h. $\sigma - \tau$ eine Integralgleichung ist. Hiernach erhalten wir also für den Ausdruck $\mathfrak{F}(\sigma)$, wenn derselbe als Function von σ betrachtet wird, alle im Endlichen liegenden Pole und Verzweigungspunkte durch die beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0.$$

Geht man, um das Verhalten von φ für sehr grosse Werthe von σ zu ermitteln, von der Entwickelung des Ausdruckes $\mathfrak{F}(\sigma)$ nach fallenden Potenzen von σ aus, so kann man genau so wie vorhin ein $\varphi(\sigma)$ bilden, dies durch Hinzufügen einer Abel'schen Quadratur $\varphi'(\sigma)$ zu φ ergänzen und dann in die Bestandtheile $\varphi(\sigma)_0$, $\varphi(\sigma)_1$, ... spalten, welche einzeln wiederum Integrale sind. Differentiirt man dann vollständig nach q, so ergibt sich, dass positive oder gebrochene Potenzen oder ein logarithmisches Glied in φ sicher nicht auftreten, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial K}{\partial h}, \qquad \frac{\partial K}{\partial q_\alpha}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p_\alpha}$$

nach σ entwickelt, die Form

$$\frac{P_0}{\sigma^2} + \frac{P_1}{\sigma^3} + \frac{P_2}{\sigma^4} + \dots$$

besitzen. Diese besondere Form findet statt, wenn σ die Variable q vertritt.

24. Nachdem wir die vorstehenden Sätze gewonnen haben, nehmen wir die $\mathfrak{F}(\sigma)$ einzeln vor. Es wird sich dabei zeigen, dass dieselben sämmtlich rationale Functionen der Variablen sein müssen. Wir beginnen mit $\mathfrak{F}(t)$. Da die Variable t in den beiden Bedingungen

$$q_4 H_1 = 0, \qquad Q = 0$$

nicht auftritt, so folgt, dass $\mathfrak{F}(t)$ für endliche Werthe von t weder verzweigt ist noch unendlich wird, also die Form $\mathfrak{G}(t)$ besitzt. Hieraus folgt für φ die Form

$$\varphi = P_0 t^n + P_1 t^{n-1} + \dots + P_n,$$

und ferner

$$\frac{dP_0}{dq} = 0, \qquad nP_0 \frac{dt}{dq} + \frac{dP_1}{dq} = 0, \quad \text{etc.}$$

woraus wir ähnlich wie in § 20 schliessen, dass n gleich Null ist, d. h. φ die Variable t überhaupt nicht enthält. Wählen wir ferner für σ die Variable p_1, so folgt, da Q die p_a nicht enthält, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ im Endlichen nur einen Verzweigungspunkt resp. Pol besitzen kann, nämlich

$$p_1 = p_{10} = -(A_2 q_3 q_1 p_2 + A_3 q_1 q_2 p_3) : A_1 q_2 q_3 .$$

Hiernach ist $\mathfrak{F}(p_1)$ ein Aggregat aus einer endlichen Zahl von Potenzen der Differenz $p_1 - p_{10}$; die $\varphi(p_1)_1, \varphi(p_1)_2, \ldots$ würden dann, wenn sie vorkämen, auf algebraische Integrale führen, müssen also in Wirklichkeit fehlen, d. h. φ muss sich auf $\varphi(\sigma)_0$ reduciren. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{F}(p_1)$ eine rationale Function von p_1 ist, deren Nenner nur die Theiler $p_1 - p_{10}$ besitzt. Das Integral φ besitzt also die Form

$$\mathfrak{R}(p_1) + P \log(p_1 - p_{10}), \qquad P \text{ -- Constante.}$$

Hiermit ergibt sich, dass sämmtliche $\mathfrak{F}(\sigma)$ rationale Functionen von p_1 und ebenso von p_2 und p_3 sind, deren Nenner nur Theiler von der Form $q_4 H_1$ besitzen. Für φ ergibt sich daraus die Form

$$\varphi = P \log(q_4 H_1) + P_1 + P_2,$$

wo P eine Constante, P_1 eine von den p_a freie Abel'sche Quadratur und P_2 einen von den p_a rational, von den q, q_a algebraisch abhängenden Ausdruck bedeutet. Aus der vorstehenden Form ergibt sich, dass $\mathfrak{F}(q)$ als Function von q betrachtet, als Verzweigungspunkte, nur die beiden aus

$$Q = G(q - g_1)(q - g_2)$$

sich ergebenden Stellen g_1, g_2 besitzt, während die beiden aus

$$q_4 H_1 = q_4 M_2 (q - g_3)(q - g_4)$$

folgenden Stellen g_3, g_4 nur als Pole auftreten können; die Stelle $q = \infty$ ist, wie oben bemerkt wurde, weder Verzweigungspunkt noch Pol. Setzt man

$$\frac{q - g_1}{q - g_2} = u, \qquad \mathfrak{F}(q)dq = \mathfrak{F}(u)du,$$

so sind die Verzweigungspunkte von $\mathfrak{J}(u)$ durch $u = 0$, $u = \infty$, und die ausserdem noch vorhandenen Pole u_3, u_4 durch

$$u_3 = \frac{g_3 - g_1}{g_3 - g_2}, \qquad u_4 = \frac{g_4 - g_1}{g_4 - g_2}$$

bestimmt. Multiplicirt man nun $\mathfrak{J}(u)$ mit solchen ganzen Potenzen von $u - u_3$ resp. $u - u_4$, dass das Product an den Stellen u_3, u_4 nicht mehr unendlich wird, so ist dieses Product als ein endliches Aggregat von Gliedern der Form cu^ν darstellbar, wo die ν rationale Zahlen bedeuten. Setzt man daher

$$u = v^\lambda, \qquad \mathfrak{J}(u)du = \mathfrak{J}(v)dv,$$

wo λ eine passend gewählte ganze Zahl ist, so besitzt $\mathfrak{J}(v)$ die Gestalt $\mathfrak{R}(v)$ und enthält im Nenner als Theiler nur v und die aus

$$v^\lambda - u_3, \qquad v^\lambda - u_4$$

entspringenden linearen Theiler, welche mit

$$v - u_{31}, \qquad v - u_{32}, \ldots, \qquad v - u_{41}, \qquad v - u_{42}, \ldots$$

bezeichnet werden sollen. Die Integration nach v liefert φ in der Form

$$\varphi = c \log v + \sum_\varsigma c_{3\varsigma} \log(v - u_{3\varsigma}) + \sum_\varsigma c_{4\varsigma} \log(v - u_{4\varsigma}) + U_1 + U_2.$$

Hierin sind die c Constanten, U_1 von der Form $\mathfrak{R}(v)$ und U_2 eine von v freie Abel'sche Quadratur. Vergleichen wir diese Form mit oben gegebenen, nämlich

$$\varphi = P \log(q_4 H_1) + P_1 + P_2,$$

so folgt, dass die mit den Coefficienten $c_{3\varsigma}$, $c_{4\varsigma}$ versehenen Logarithmen nur aus der Zerlegung des Terms

$$P \log q_4 H_1 = P \log\{q_4 M_2 (q - g_3)(q - g_4)\}$$

entspringen können, dass also die $c_{3\varsigma}$, $c_{4\varsigma}$ sämmtlich einander gleich sind. Hieraus folgt, dass sich φ in der Form

$$\varphi = e_1 \log(q - g_1) + e_2 \log(q - g_2) + e_3 \log q_4 H_1 + U_1' + U_2'$$

schreiben lässt, wo für die e, U' dieselben Eigenschaften gelten, wie für die c, U. Stellt man nun, von der zuletzt gefundenen Form für φ ausgehend, die Entwickelung von φ nach Potenzen von $q - g_1$ oder $q - g_2$

auf, so erkennt man, dass die $\varphi(q)_1, \varphi(q)_2, \ldots$ nur aus gewissen in U_1' vorkommenden Bestandtheilen entspringen können, also, wenn sie vorkämen, rein algebraisch sein müssten. Hiernach reducirt sich φ in beiden Fällen auf den Bestandtheil $\varphi(q)_0$, d. h. $\mathfrak{J}(q)$ und damit sind die übrigen $\mathfrak{J}$ von der Form $\mathfrak{R}(q)$.

Der Ausdruck $\mathfrak{J}(q_1)$ ist in q und den p_α rational, kann also, als Function von q_1 betrachtet, im Endlichen nur Verzweigungspunkte besitzen, welche von den Variablen q, p_α unabhängig sind. Da solche nicht existiren, so ist $\mathfrak{J}(q_1)$ von der Form $\mathfrak{R}(q_1)$. Das Gleiche gilt für alle anderen $\mathfrak{J}$ und ebenso für die Variablen q_2, q_3. Hiermit haben wir, wenn wir zusammenfassen, das Resultat gewonnen, dass in dem gesuchten Abel'schen Integral, falls dasselbe existirt, die $\mathfrak{J}(q), \ldots$ sämmtlich die Gestalt $\mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha)$ besitzen, dass ferner die Nenner als Theiler nur die Ausdrücke $q_4 H_1$ und Q besitzen, dass also φ in der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c' \log q_4 H_1 + c'' \log Q$$

darstellbar ist. Da die Entwickelung von φ nach fallenden Potenzen von q kein logarithmisches Glied besitzt, so ist

$$c' + c'' = 0,$$

so dass wir auch schreiben können

$$\varphi = \frac{\mathfrak{S}(q, q_\alpha, p_\alpha)}{(q_4 H_1)^\lambda Q^\mu} + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}.$$

25. Die Untersuchung hat uns jetzt zu der Frage geführt, ob das System 7. Ordnung ein Integral von der Form

$$\varphi = \mathfrak{R}(q, q_\alpha, p_\alpha) + c \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

besitzt, in welchem, wenn φ sich nicht auf eine Constante reduciren soll, der Factor c von Null verschieden sein muss, also gleich Eins gesetzt werden darf. Bezeichnen wir die beiden Bestandtheile von φ der Kürze halber mit φ_1 und φ_2, so darf der rationale Term φ_1 als algebraisch aus den Constanten m, a, b, k, h gebildet vorausgesetzt werden. Bringt man nämlich φ_1 zunächst auf die Form $\mathfrak{R}(m, a, b, k, h, I')$, wo I' eine von den $m, \ldots$ abhängende Irrationalität bedeutet, und stellt dann φ_1 in der Form

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11} I' + \varphi_{12} I'^2 + \cdots$$

unter möglichster Herabdrückung des Grades in Bezug auf Γ dar, so müssen die $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots$ sich auf Constanten reduciren. Man darf deshalb die mit Γ multiplicirten Terme unterdrücken oder φ_1 als rational aus den m, a, b, k, h gebildet voraussetzen. Dies festgestellt führen wir an Stelle von h die Variable p durch die Gleichung

$$o = h + pH_1 + H_2$$

ein, und erhalten dann φ_1 in der Form

$$\mathfrak{R}(p, q, p_\alpha, q_\alpha),$$

während φ in ein Integral des Systems 8. Ordnung übergeht.

In dem System 8. Ordnung lässt sich nun die allgemeine Lösung durch Reihen, welche nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten, darstellen, indem man die p, q nach dem Taylor'schen Satze mit Hülfe der Differentialgleichungen entwickelt. Diese Reihen convergiren innerhalb eines bestimmten Bereiches für t, sobald man festsetzt, dass für $t = o$ die Variablen endliche, und im Besondern die q_α von Null verschiedene Werthe besitzen. Substituirt man diese Reihenentwickelungen in den Zähler Z und den Nenner N von φ_1 und ebenso in $q_4 H_1$ und Q, so erhält man ähnliche Potenzreihen. Die Coefficienten sind sämmtlich nach den p, q, p_α ganz rational, nach den q_α dagegen rational, jedoch so, dass in den Nennern als Theiler nur die q_α auftreten. Der so entstehende Ausdruck

$$\frac{Z}{N} + \log \frac{q_4 H_1}{Q}$$

muss nun von t unabhängig sein, wie man auch innerhalb der angegebenen Einschränkungen die Anfangswerthe der Variablen variiren mag. Lassen wir nun diese Anfangswerthe so variiren, dass $q_4 H_1$ für $t = o$ den Werth Null annimmt, so können in den vier Reihenentwickelungen nicht sämmtliche Coefficienten verschwinden, da $q_4 H_1$, wie wir wissen, nicht Integralgleichung des Systems 8. Ordnung ist. Setzt man ausserdem fest, dass für die gewählten Anfangswerthe Q nicht verschwindet, so entspringt, wenn man φ_1 und φ_2 nach Potenzen von t entwickelt, aus φ_2 ein Glied von der Form

$$n \log t, \quad (n > o),$$

welches sich nicht fortheben kann. Die Annahme, dass ein Integral der hier betrachteten Form existire, führt also auf einen Widerspruch oder m. a. W. es existiren zu dem System 7. Ordnung keine Abel'schen Integrale, und ebenso auch nicht zu dem System 8. Ordnung.

Bei den vorstehenden Entwickelungen waren wir von einer besonderen Form der Bewegungsgleichungen für das Dreikörper-Problem ausgegangen, nämlich dem hier benutzten System 7. Ordnung. Da jedoch ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Transformation der Variablen wiederum in ein Abel'sches Integral übergeht, so gilt das gefundene negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, welche aus den ursprünglichen durch rein algebraische Umformungen entstehen. Das gefundene Resultat gilt ferner auch für das Vielkörper-Problem. Reducirt man nämlich beim Vielkörper-Problem die Ordnung des Systems ähnlich wie bei dem Dreikörper-Problem durch Benutzung der bekannten Integrale, so erhält man algebraische Differentialgleichungen. Existirt zu diesen ein Abel'sches Integral, so enthält der Ausdruck, über welchen die Quadratur auszuführen ist, die Massen nur in algebraischer Weise; man müsste also unter allen Umständen durch das Verschwindenlassen einer oder mehrerer Massen zu einem Abel'schen Integral für das Dreikörper-Problem gelangen, was nicht sein darf.

Die vorstehend hergeleiteten negativen Ergebnisse enthalten, wie mir scheint, eine hinreichende Erklärung für die Thatsache, dass man bei der Aufsuchung neuer Integrale des Dreikörper-Problems seither nicht über den bereits vor einem Jahrhundert erreichten Standpunkt hinausgelangt ist.

Berichtigung.

Seite 64, Zeile 2 v. u. ist »sich« zu streichen.