# SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

PAR

H. POINCARÉ
à PARIS.

1. On sait que M. WEIERSTRASS a démontré au sujet des fonctions d'une seule variable le théorème suivant:

Si $F(x)$ est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, c'est à dire n'ayant à distance finie d'autre singularité que des pôles, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.

Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois être arrivé à en donner une démonstration rigoureuse, mais comme elle est un peu longue, je n'en donnerai pas ici tous les détails; je me bornerai à en exposer les traits principaux qui suffiront aux géomètres pour la reconstituer.

Voici quel est le problème.

Je considère une fonction de deux variables $F(X, Y)$ et je suppose que dans le voisinage d'un point quelconque $X_0$, $Y_0$, on puisse la mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, $N$ et $D$ étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ et convergentes lorsque les modules de ces quantités sont suffisamment petits. Je suppose de plus que, lorsque les modules de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ restent assez petits, les deux séries $N$ et $D$ ne peuvent s'annuler à la fois que pour des points isolés. Je dis que cette fonction peut se mettre sous la forme $\frac{G(X, Y)}{G_1(X, Y)}$, $G$ et $G_1$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de $X$ et $Y$ et *toujours* convergentes. Ainsi autour du point $X_0$, $Y_0$ il existera par hypothèse une région $R_0$ où la fonction

$F$ pourra se mettre sous la forme $\frac{N_0}{D_0}$; de même autour d'un autre point $X_1$, $Y_1$, il existera une région $R_1$ où $F$ pourra s'écrire $\frac{N_1}{D_1}$. Mais si les deux régions $R_0$ et $R_1$ ont une partie commune, $N_1$ pourra ne pas être la *continuation analytique* de $N_0$. Tout ce que nous savons, c'est que dans la partie commune aux deux régions, le rapport $\frac{N_1}{N_0}$ ne devient ni nul ni infini.

2. On sait que la partie réelle $u$ d'une fonction d'une variable imaginaire $x + iy$, satisfait à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$, de sorte que l'étude des fonctions d'une seule variable se ramène à l'étude d'une attraction s'exerçant en raison inverse de la distance. On a vu dans les derniers numéros des Mathematische Annalen, quel parti M. Klein a su tirer de considérations physiques qui sont au fond tout à fait analogues. De même si nous posons:

$$X = x + iy \qquad Y = z + it$$

la partie réelle $u$ d'une fonction quelconque de $X$ et de $Y$ satisfera à l'équation:

$$\triangle u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

de sorte qu'à ce point de vue l'étude des fonctions de deux variables se ramène à celle d'une *attraction s'exerçant dans l'espace à quatre dimensions en raison inverse du cube de la distance.* M. Kronecker a déjà fait voir (Monatsberichte 1869) que la considération d'une pareille attraction peut être utile au géomètre qui veut étudier les fonctions de plusieurs variables. Je n'emploierai pas cependant le langage hypergéométrique; je me bornerai à lui emprunter quelques expressions. Ainsi l'ensemble des points $x, y, z, t$ qui satisfont à l'inégalité:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 < R^2 \tag{1}$$

s'appellera une *région hypersphérique* dont le centre sera $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ et le rayon $R$. L'ensemble des points qui satisferont à l'égalité:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 = R^2$$

formeront une *surface hypersphérique.*

Il y a toutefois une différence essentielle entre cette théorie et celle des fonctions d'une seule variable. Pour que $u$ soit la partie réelle d'une fonction de $X$ et de $Y$, il ne suffit pas qu'il satisfasse à l'équation $\triangle u = 0$. Il doit en outre satisfaire aux équations suivantes:

$$\triangle_1 u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \qquad \triangle_2 u = \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

$$\triangle_3 u = \frac{d^2u}{dy\,dz} - \frac{d^2u}{dx\,dt} = 0 \qquad \triangle_4 u = \frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{d^2u}{dy\,dt} = 0$$

J'appellerai *fonction potentielle* toute fonction $u$ qui satisfait à l'équation $\triangle u = 0$. Je supposerai que ma fonction potentielle est holomorphe pour toutes les valeurs de $x, y, z, t$, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles qui formeront des points singuliers, ou même des lignes et des plages singulières.

Toute fonction potentielle qui n'aura aucune singularité à distance finie sera dite *entière*. Toute fonction potentielle entière qui reste constamment inférieure à une quantité donnée se réduit à une constante.

3. Voici la marche que je vais suivre dans la démonstration:

1° Je construirai une infinité de régions hypersphériques $R_1^0, R_2^0, \ldots\ldots$ Je supposerai qu'un point quelconque $x, y, z, t$ appartienne au moins à une, et au plus à cinq de ces régions; cela est toujours possible. Je supposerai de plus que ces régions sont choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de $R_i^0$ par exemple, la fonction $F$ peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$; j'appelle $M_i$ le module de $D_i$.

J'envisage également les régions $R_i^1$ formées par la partie commune à deux des régions $R_i^0$, et les régions $R_i^2$, $R_i^3$, $R_i^4$ formées par la partie commune à trois, à quatre, ou à cinq de ces régions hypersphériques.

2° Je construirai une fonction potentielle $J_i^p$ jouissant des propriétés suivantes: elle est holomorphe à l'extérieur de $R_i^p$, et tend vers 0 quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ croît indéfiniment; à l'intérieur de $R_i^p$, la différence $J_i^p - \log M_i$ est holomorphe; enfin sur la limite de la région $R_i^p$, $J_i^p$ est holomorphe quand $\log M_i$ l'est lui-même.

3° Je montrerai ensuite qu'on peut former une fonction potentielle $\Phi$ existant pour toutes les valeurs de $x, y, z, t$, et telle que si en un point quelconque, $F$ peut se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, la différence $\Phi$ — log mod $D$ soit holomorphe.

4° Puis, je ferai voir que $\Phi$ peut s'écrire:

$$\Phi_1 + G$$

$G$ étant une fonction potentielle entière et $\Phi_1$ étant la partie réelle d'une fonction imaginaire $\Phi_1 + i\Phi'_1$ de $X$ et de $Y$.

Le théorème énoncé sera alors démontré, car les fonctions $e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ et $F.e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ seront des fonctions entières de $X$ et de $Y$.

## *Principe de Dirichlet.*

4. Considérons la région hypersphérique dont l'équation est:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

et qui a par conséquent pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Je pose:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\cos\psi,\ z = r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi,\ t = r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi$$

Soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$ quatre quantités liées par la relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 = 1$$

et posons

$$\xi = \cos\theta',\ \eta = \sin\theta'\cos\psi',\ \zeta = \sin\theta'\sin\psi'\cos\varphi',\ \tau = \sin\theta'\sin\psi'\sin\varphi'$$

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = ar$$

$$\sin^2\theta'\sin\psi' d\theta' d\varphi' d\psi' = d\omega'$$

Soit $v$ une fonction quelconque des angles $\theta$, $\psi$, $\varphi$; soit $v'$ ce que devient $v$ quand on y remplace $\theta$, $\psi$, $\varphi$ par $\theta'$, $\psi'$ et $\varphi'$. Considérons l'intégrale triple:

$$V = \int \frac{v' d\omega'}{1 - 2ar + r^2}$$

étendue à toute la surface hypersphérique. Cette fonction $V$ sera évidemment une fonction potentielle qui sera holomorphe tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la région hypersphérique, mais cessera de l'être sur la surface hypersphérique elle-même. Supposons maintenant que le point $x, y, z, t$, vienne sur cette surface, c'est à dire que $r$ se réduise à 1; $V$ se réduira à une fonction $V_0$ de $\theta$, $\varphi$ et $\psi$ définie par l'intégrale triple

$$V_0 = \frac{1}{2}\int \frac{v' d\omega'}{1 - a}$$

la limite de $V$ est toujours $V_0$ quand $r$ tend vers l'unité, soit par valeurs inférieures, soit par valeurs supérieures à l'unité; donc $V$ est une fonction toujours continue. Il n'en est pas de même de sa dérivée $\frac{dV}{dr}$ comme on le verra plus loin. De plus on peut démontrer que $V_0$ sera holomorphe en $\theta$, $\varphi$ et $\psi$ pour les mêmes valeurs que la fonction $v$ elle même.

La fonction:

$$r\frac{dV}{dr} = 2\int \frac{(ar - r^2)v' d\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2}$$

est aussi une fonction potentielle holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur de la région hypersphérique; mais cette fonction présente une discontinuité pour $r = 1$. Elle tend vers $\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1 - \varepsilon$, c'est à dire quand $r$ tend vers 1 par des valeurs inférieures à 1 et vers $-\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1 + \varepsilon$, c'est à dire quand $r$ tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Tout ce qui précède ne suppose pas que $v$ reste fini; cette fonction peut devenir infinie pour certaines valeurs de $\theta$, $\varphi$, $\psi$, *pourvu qu'elle reste intégrable;* j'entends par là que l'intégrale triple

$$\int v' f d\omega'$$

(où $f$ est une fonction quelconque finie de $\theta'$, $\varphi'$ et $\psi'$) doit être finie. Ainsi, si $A$ et $A_1$ sont deux fonctions holomorphes de $\theta$, $\varphi$, $\psi$, dont les déterminants fonctionnels par rapport à deux de ces variables ne s'annulent pas à la fois, la fonction $v$ pourra devenir infinie toutes les fois que

$A = A_1 = 0$ pourvu que $v(A^2 + A_1^2)^m$ reste fini, $m$ étant supposé plus petit que 1.

5. Considérons maintenant la fonction suivante:

$$\frac{1}{\pi^2}\left(V + r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1 - r^2)v' d\omega'}{(1 - 2\alpha r + r^2)^2}$$

Cette fonction, d'après ce qui précède, est une fonction holomorphe pour $r \gtrless 1$; pour $r = 1$ elle se réduit à $\pm v$ selon que $r$ tend vers 1 par valeurs inférieures ou supérieures à cette limite. Or la fonction $v$ est une fonction donnée quelconque, qui n'est assujettie qu'à être intégrable. Nous savons donc construire une fonction potentielle qui reste holomorphe à l'intérieur d'une région hypersphérique et qui prend des valeurs données sur la surface de cette région. C'est le principe de Dirichlet étendu aux fonctions de deux variables.

6. Ce qui précède s'applique évidemment à une région hypersphérique quelconque. On peut même étendre, en appliquant directement la belle méthode de M. Schwarz, le principe de Dirichlet à une région quelconque et en particulier à une région limitée par des portions de surfaces hypersphériques. Mais il y a une différence essentielle avec la théorie des fonctions d'une seule variable. Il n'y a qu'une seule fonction potentielle holomorphe $u$ qui prenne sur les limites d'une région donnée une suite de valeurs déterminées, et cette fonction ne satisfait pas en général aux équations:

$$\triangle_1 u = \triangle_2 u = \triangle_3 u = \triangle_4 u = 0$$

de sorte qu'il est impossible en général de construire une fonction de $x + iy$ et de $z + it$ qui n'ait pas de singularités dans une région donnée, et dont la partie réelle prenne des valeurs déterminées à l'avance sur les limites de cette région. C'est là qu'il faut chercher la véritable explication des différences si profondes que l'on observe entre les fonctions d'une variable et celles de deux variables et en particulier de ce fait que l'on ne peut construire une fonction de deux variables ayant quatre périodes quelconques.

### *Formation des Fonctions $J_i^0$.*

7. Considérons une des régions que nous avons appelées $R_i^0$ et supposons qu'à l'intérieur de cette région on ait $F = \frac{N_i}{D_i}$; $N_i$ et $D_i$ étant holomorphes en $X$ et en $Y$.

Je pose:

$$D_i = A + \sqrt{-1} A_1 \qquad M_i^2 = A^2 + A_1^2$$

Je suppose enfin que la région $R_i^0$ soit hypersphérique et, pour fixer les idées, je supposerai comme aux paragraphes 4 et 5 qu'elle ait pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Sur la surface hypersphérique qui limite $R_i^0$, le logarithme de $M_i$ se réduit à une fonction de $\theta$, $\varphi$ et $\psi$ que j'appelle $v$. Cette fonction est intégrable d'après la règle exposée à la fin du paragraphe 4. Le principe de Dirichlet nous permet donc de former une fonction potentielle.

$$u = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(1 - r^2) v' d\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2}$$

qui est holomorphe pour $r < 1$ et se réduit à $v$ pour $r = 1 - \varepsilon$.

Si nous posons comme plus haut:

$$V = \int \frac{v' d\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2V_0 = \int \frac{v' d\omega'}{1 - a}$$

nous aurons:

$$\pi^2 u = V + r \frac{dV}{dr}$$

d'où:

$$\pi^2 \frac{du}{dr} = 2 \frac{dV}{dr} + r \frac{d^2 V}{dr^2}$$

Mais l'équation $\Delta V = 0$ peut s'écrire:

$$r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + 3r \frac{dV}{dr} + DV = 0$$

en posant pour abréger:

$$DV = \frac{d^2V}{d\theta^2} + \text{coséc}^2\,\theta\frac{d^2V}{d\psi^2} + \text{coséc}^2\,\theta\,\text{coséc}\,\psi\frac{d^2V}{d\varphi^2} + 2\cot\theta\frac{dV}{d\theta} + \text{coséc}^2\,\theta\cot\psi\frac{dV}{d\psi}$$

d'où:

$$-\pi^2 r\frac{du}{dr} = r\frac{dV}{dr} + DV$$

et si $w$ est ce que devient $\frac{du}{dr}$ pour $r = 1 - \varepsilon$

$$\pi^2 w = V_0 - \pi^2 v - DV_0$$

Mais $V_0$ et par conséquent $DV_0$ est holomorphe en $\theta$, $\varphi$ et $\psi$, toutes les fois que la fonction $v$ l'est elle-même, c'est à dire pourvu que l'on n'ait pas à la fois $A = A_1 = 0$. Il en est donc de même de $w$.

Quand $r > 1$, la fonction $u$ est holomorphe, mais elle se réduit à $-v$ pour $r = 1 + \varepsilon$, et est par conséquent discontinue pour $r = 1$. Quant à la fonction $\frac{du}{dr}$, elle se réduit à:

$$v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

pour $r = 1 + \varepsilon$, puisque $r\frac{dV}{dr}$ se réduit à $-\pi^2 v - V_0$ d'après le paragraphe 4.

Soit maintenant $\lambda$ ce que devient $\frac{d\log M_i}{dr}$ pour $r = 1$. On aura:

$$\lambda = \frac{r\frac{dM_i}{dr}}{M_i} = \frac{x\frac{dM_i}{dx} + y\frac{dM_i}{dy} + z\frac{dM_i}{dz} + t\frac{dM_i}{dt}}{\sqrt{A^2 + A_1^2}}$$

Ainsi, le produit $\lambda\sqrt{A^2 + A_1^2}$ restant fini quand $A$ et $A_1$ s'annulent à la fois, la fonction $\lambda$ est intégrable, et nous pourrons écrire, en appelant $\lambda'$ ce que devient $\lambda$ quand on y change $\theta$, $\varphi$, $\psi$ en $\theta'$, $\varphi'$, $\psi'$:

$$W = \int\frac{\lambda' d\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2W_0 = \int\frac{\lambda' d\omega'}{1 - a}$$

$W$ sera une fonction potentielle analogue à $V$, et $W_0$ sera holomorphe en $\theta$, $\varphi$, $\psi$ en même temps que $\lambda$, c'est à dire toutes les fois que $M_i$ ne s'annulera pas.

Définissons maintenant notre fonction $J_i^0$ ainsi qu'il suit; elle sera égale:

$$\text{pour } r > 1 \quad \text{à} \quad -\frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2}$$

$$\text{pour } r < 1 \quad \text{à} \quad \log M_i - \frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2}$$

Quand $r$ tendra vers 1 *soit par valeurs supérieures, soit par valeurs inférieures à 1,* $J_i^0$ et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ tendront respectivement vers:

$$\frac{v}{2} - \frac{V_0}{2\pi^2} - \frac{W_0}{2\pi^2} \quad \text{et} \quad \frac{DV_0}{2\pi^2} + \frac{W_0}{2\pi^2} + \frac{\lambda}{2}$$

Ainsi les deux fonctions $J_i^0$ et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ sont continues pour $r = 1$, et elles se réduisent pour $r = 1$ à des fonctions de $\theta$, $\varphi$, $\psi$ qui sont holomorphes pourvu que $M_i$ ne soit pas nul.

Mais d'après le théorême de M^me^ de KOWALEVSKY, il n'y a qu'une seule fonction analytique $F$ de $r$, $\theta$, $\varphi$, $\psi$ qui satisfasse à l'équation $\triangle F = 0$ et qui se réduise ainsi que sa dérivée $\frac{dF}{dr}$ à des fonctions analytiques données de $\theta$, $\varphi$ et $\psi$ quand on fait $r = 1$. Les deux portions de la fonction $J_i^0$ sont donc la *continuation analytique* l'une de l'autre. La fonction $J_i^0$ satisfait donc bien aux conditions imposées. On peut voir d'ailleurs qu'elle est intégrable sur la surface hypersphérique $R_i^0$.

Ce que je viens de dire s'applique évidemment à une région hypersphérique quelconque.

8. La fonction $J_i^0$ peut se mettre sous la forme suivante. Soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$ quatre fonctions de $u$ et de $v$ telles que l'on ait identiquement:

$$D_i(\xi + i\eta, \zeta + i\tau) = 0;$$

soit $\partial$ une fonction convenablement choisie de $u$ et de $v$, on peut écrire:

$$J_i^0 = \int\int \frac{\partial du dv}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 + (\tau - t)^2}$$

l'intégrale double s'étendant aux valeurs de $u$ et de $v$ telles que le point $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$ soit à l'intérieur de $R_i^0$.

9. Si une fonction potentielle $u$ est holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur d'une certaine région $R$; si elle tend vers 0 quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ croît indéfiniment; si elle est encore holomorphe sur la limite même de la région $R$, excepté sur une certaine ligne singulière pour laquelle nous ne savons rien; si enfin elle est intégrable sur la limite même de la région $R$, je dis qu'elle est identiquement nulle.

Je suppose d'abord que la région $R$ soit hypersphérique et, pour fixer les idées, qu'elle a pour équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

Si l'on fait $r = 1$, notre fonction $u$ devient une certaine fonction $v$ de $\theta$, $\varphi$, $\psi$, qui par hypothèse est intégrable. Soit $v'$ ce que devient $v$ quand on y change $\theta$, $\varphi$, $\psi$ en $\theta'$, $\varphi'$, $\psi'$. La fonction $v$ étant intégrable, nous pourrons former les intégrales suivantes:

$$U = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1 - r^2)v'd\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2} \qquad V = \int \frac{v'd\omega'}{1 - 2ar + r^2} \qquad 2V_0 = \int \frac{v'd\omega'}{1 - 2ar + r^2}$$

Pour $r > 1$, on aura $U = -u$ et pour $r < 1$, on aura $U = u$; on aura donc pour $r = 1 + \varepsilon$

$$\frac{du}{dr} = -v - \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

et pour $r = 1 - \varepsilon$

$$\frac{du}{dr} = -v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

Mais la fonction étant holomorphe par hypothèse même pour $r = 1$, sa dérivée doit être continue, c'est à dire que l'on a pour $r = 1$:

$$\frac{du}{dr} = -v \qquad V_0 - DV_0 = 0$$

Mais alors les deux fonctions potentielles $u$ et $-r\frac{du}{dr}$, ayant même valeur sur la surface hypersphérique, seront identiques et l'on aura:

$$u + r\frac{du}{dr} = 0$$

Cette identité entraîne la suivante:

$$u = \frac{v}{r}$$

Mais $u$ doit être holomorphe pour $r = 0$, et cela ne peut avoir lieu vu l'identité précédente, que si $v$ et $u$ sont identiquement nuls.

C. Q. F. D.

10. Je suppose maintenant que la région $R$ soit la partie commune à deux régions hypersphériques $S$ et $S_1$, dont j'écrirai les équations sous la forme:

$$S = 0 \qquad\qquad S_1 = 0$$

de telle sorte que la région $R$ se compose de l'ensemble des points $x, y, z, t$, qui satisfont à la fois aux deux inégalités:

$$S < 0 \qquad\qquad S_1 < 0$$

La région $R$ aura alors pour limites deux portions $s$ et $s_1$ des deux surfaces hypersphériques $S$ et $S_1$; et par hypothèse notre fonction $u$ pourra cesser d'être holomorphe sur deux lignes singulières $l$ et $l_1$ situées respectivement sur $s$ et $s_1$, *mais sans cesser d'être intégrable.*

Considérons une surface hypersphérique $\Sigma$ ayant pour équation

$$S + S_1 = 0$$

et passant par conséquent par l'intersection des deux surfaces hypersphériques $S$ et $S_1$. Je suppose que $s$ et $l$ soient extérieures à $\Sigma$ et que $s_1$ et $l_1$ soient intérieures à $\Sigma$; nous pourrons, en faisant jouer à notre fonction $u$ le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction $u_1$, jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle sera holomorphe à l'extérieur de $\Sigma$, et par conséquent sur la portion de surface $s$.

2° La différence $u - u_1$ sera holomorphe à l'intérieur de $\Sigma$, et par conséquent $u_1$ ne pourra cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière $l$, mais sans cesser d'être intégrable.

D'après le paragraphe précédent la fonction $u_1$ est identiquement nulle. On verrait de même que la fonction $u - u_1$ qui ne peut cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière $l_1$ et qui ne cesse pas d'être intégrable, doit être identiquement nulle. Il en est donc ainsi de la fonction $u$ elle-même.

C. Q. F. D.

## *Formation des Fonctions* $J_i^1$.

11. Considérons deux régions hypersphériques $R_i^0$ et $R_k^0$, les deux surfaces hypersphériques $S_i$ et $S_k$ qui leur servent de limite, et les fonctions $J_i^0$ et $J_k^0$ correspondantes. Je puis, en faisant jouer à $J_k^0$ le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction $J_i^1$ qui soit holomorphe à l'extérieur de $R_i^0$ et telle que la différence $J_k^0 - J_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de $R_i^0$. Considérons la région $R_i^1$ formée par la partie commune à $R_i^0$ et à $R_k^0$ et limitée par deux portions de surfaces hypersphériques $s_i$ et $s_k$ appartenant respectivement aux deux surfaces $S_i$ et $S_k$. Notre fonction $J_i^1$ est alors holomorphe à l'extérieur de $R_i^1$ et sa différence avec $\log M_i$ est holomorphe à l'intérieur de $R_i^1$.

On peut construire de la même manière une autre fonction $K_i^1$ qui soit holomorphe à l'extérieur de $R_k^0$ et telle que la différence $J_i^0 - K_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de $R_k^0$. Cette fonction est identique à $J_i^1$, car la différence $K_i^1 - J_i^1$ ne peut cesser d'être holomorphe que sur les portions de surfaces $s_i$ et $s_k$ et seulement aux points où $M_i$ s'annule. Elle ne cesse d'ailleurs pas d'être intégrable. Elle est donc nulle.

12. Considérons maintenant l'ensemble des deux régions $R_i^0$ et $R_k^0$ et la fonction $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1$; supposons qu'en un point quelconque inté-

rieur à l'une des deux régions $R_i^0$ et $R_k^0$, $F$ se mette sous la forme $\frac{N}{D}$; je dis que la différence:

$$J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

En effet, si le point considéré n'appartient pas à $s_i$ ou à $s_k$, cela est évident; mais supposons qu'il appartienne à l'une de ces portions de surfaces, par exemple à $s_i$; les différences $J_k^0 - \log \operatorname{mod} D$ et $J_i^0 - J_i^1$ seront holomorphes d'après la façon même dont ces fonctions $J_k^0$ et $J_i^1$ ont été construites. Il en est donc de même de leur somme $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - - \log \operatorname{mod} D$.

C. Q. F. D.

13. On formerait de même les fonctions $J_i^2$, $J_i^3$, $J_i^4$. Supposons que l'on envisage $n$ régions hypersphériques $R_1^0$, $R_2^0$, ..... $R_n^0$; puis toutes les régions $R_i^1$ formées des parties communes à deux quelconques de ces $n$ régions; puis toutes les régions $R_i^2$, $R_i^3$, $R_i^4$ formées des parties communes à trois, à quatre, ou à cinq quelconques de ces $n$ régions hypersphériques. Formons les diverses fonctions $J_i^0$, $J_i^1$, $J_i^2$, $J_i^3$, $J_i^4$ correspondant à ces diverses régions $R_i^0$, $R_i^1$, $R_i^2$, $R_i^3$, $R_i^4$. On voit aisément, comme au paragraphe 12, que si en un point quelconque intérieur à l'une des $n$ régions $R_i^0$, la fonction $F$ se met sous la forme $\frac{N}{D}$, la fonction:

$$\sum J_i^0 - \sum J_i^1 + \sum J_i^2 - \sum J_i^3 + \sum J_i^4 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

### *Formation de la fonction $\Phi$.*

14. Pour former la fonction $\Phi$ il suffit d'appliquer, sans y rien changer, la méthode par laquelle M. WEIERSTRASS a démontré le théorème de M. MITTAG-LEFFLER.

Une fonction potentielle $U$ qui ne présente pas de singularité à l'origine peut se développer suivant les puissances croissantes de $x, y, z, t$. Si la série ainsi obtenue est convergente, toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < r^2$$

$r$ sera le *rayon de convergence.*

Soient $\varepsilon$ et $\varepsilon_n^p$ deux nombres positifs quelconques, le premier plus petit que 1. Soit $U_m$ ce que devient le développement de la fonction $U$ suivant les puissances de $x$, $y$, $z$, $t$ quand on y supprime tous les termes d'ordre inférieur à $m$. On pourra toujours prendre $m$ assez grand pour que

$$\text{mod } U_m < \varepsilon_n^p \quad \text{toutes les fois que} \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \varepsilon^2 r^2$$

On pourra alors trouver un nombre $\varepsilon < 1$ et une série de nombres positifs $\varepsilon_n^p$ dont la somme soit convergente. Supposons de plus, ce qui est permis, que l'origine ait été choisie de telle sorte qu'aucune des fonctions $J_i^p$ n'y présente de singularité, $J_n^p$ pourra alors être développé suivant les puissances de $x$, $y$, $z$, $t$; appelons $K_n^p$ ce que devient $J_n^p$ quand on y supprime les termes de degré inférieur à $m_n^p$. Nous supposerons que $m_n^p$ a été choisi assez grand pour que:

$$\text{mod } K_n^p < \varepsilon_n^p$$

toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \varepsilon^2 (r_n^p)^2$$

$r_n^p$ étant le rayon de convergence de la série $J_n^p$. La fonction:

$$\Phi = \sum_{n}{}_1^\infty K_n^0 - \sum_{n}{}_1^\infty K_n^1 + \sum_{n}{}_1^\infty K_n^2 - \sum_{n}{}_1^\infty K_n^3 + \sum_{n}{}_1^\infty K_n^4$$

satisfera alors aux conditions énoncées, c'est à dire que si dans le voisinage d'un point quelconque on a:

$$F = \frac{N}{D}$$

la différence

$$\Phi - \log \text{mod } D$$

sera holomorphe.

### *Formation de $\Phi_1$ et de $G$.*

15. La fonction $\Phi$ satisfait à l'équation $\triangle\Phi = 0$; mais elle ne satisfait pas en général aux équations:

$$\triangle_1\Phi = \triangle_2\Phi = \triangle_3\Phi = \triangle_4\Phi = 0$$

Les expressions $\triangle_1\Phi$, $\triangle_2\Phi$, $\triangle_3\Phi$, $\triangle_4\Phi$ sont des fonctions potentielles. Je dis qu'elles sont entières. En effet dans le voisinage d'un point quelconque la fonction $\Phi$ — log mod $D$ est holomorphe; il en est donc de même de $\triangle_1\Phi - \triangle_1 \log \bmod D$ et de $\triangle_1\Phi$, puisque $\triangle_1 \log \bmod D = 0$.

Les fonctions $\triangle_1\Phi$, $\triangle_2\Phi$, $\triangle_3\Phi$, $\triangle_4\Phi$ sont donc entières et par conséquent développables suivant les puissances de $x$, $y$, $z$, $t$ quelles que soient les valeurs de ces quantités.

16. Il s'agit de former une fonction $\Phi_1$ satisfaisant à la fois aux équations:

$$\triangle_1\Phi_1 = \triangle_2\Phi_1 = \triangle_3\Phi_1 = \triangle_4\Phi_1 = 0$$

et telle que la différence $\Phi - \Phi_1 = G$ soit une fonction entière. Pour cela, il suffit de trouver une fonction entière $G$ qui satisfasse aux équations:

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \triangle_1 G = \triangle_1\Phi & \triangle_2 G = \triangle_2\Phi \\ \triangle_3 G = \triangle_3\Phi & \triangle_4 G = \triangle_4\Phi \end{array}$$

Je dis que cela est toujours possible. Posons en effet:

$$G = \sum A_{m.n.p.q.}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}$$

Voici la condition pour que $G$ soit une fonction entière.

Posons:

$$m + n + p + q = s$$

et considérons un instant $s$ comme un nombre donné. Soit $H_s$ la plus grande valeur que puisse prendre le module de $A_{m.n.p.q}$. $G$ sera une fonction entière si l'expression:

$$H_s \frac{r^s}{s!}$$

tend vers 0 quand $s$ croît indéfiniment et cela *quel que soit* $r$.

Posons:

$$\triangle_1 \Phi = \sum B_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_2 \Phi = \sum C_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_3 \Phi = \sum D_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

$$\triangle_4 \Phi = \sum E_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

Soit $P_s$ la plus grande valeur que puisse prendre le module de $B_{m.n.p.q}$, $C_{m.n.p.q}$, $D_{m.n.p.q}$, $E_{m.n.p.q}$; $s$ étant toujours supposé constant. Le produit:

$$P_s \frac{r^s}{s!}$$

tendra vers 0 quel que soit $r$ quand $s$ croîtra indéfiniment, puisque les $\triangle_i \Phi$ sont des fonctions entières.

Les équations (1) nous donnent:

$$A_{m.n.p.q} + A_{m-2.n+2.p.q} = B_{m-2.n.p.q}$$

$$A_{m.n.p.q} + A_{m.n.p-2.q+2} = C_{m.n.p-2.q}$$

$$A_{m.n.p.q} - A_{m+1.n-1.p-1.q+1} = D_{m.n-1.p-1.q}$$

$$A_{m.n.p.q} + A_{m-1.n+1.p-1.q+1} = E_{m-1.n.p-1.q}$$

Si nous supposons toujours $s$ constant, nous avons $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{1.2.3.4}$ inconnues qui sont les $A$ et $\frac{(s-1)s(s+1)(s+2)}{1.2.3}$ équations à résoudre. Mais nous savons que ces équations sont compatibles, puisqu'on peut toujours satisfaire aux équations (1) en faisant $G = \Phi$. Nous pouvons même nous donner arbitrairement les $2s + 1$ coëfficients

$$A_{m\,.\,0\,.\,s-m\,.\,0} \quad \text{et} \quad A_{m-1\,.\,1\,.\,s-m\,.\,0}$$

Nous les prendrons égaux à 0. On a alors, comme on le voit aisément:

$$H_s < P_{s-2}\frac{(s+1)^2}{4}$$

d'où:

$$\lim H_s \frac{r^s}{s!} = 0$$

Donc $G$ est une fonction entière. Donc $\Phi_1$ est une fonction qui satisfait aux 4 équations $\triangle_i \Phi_1 = 0$ de sorte qu'on peut trouver une fonction imaginaire $\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1$ dont elle soit la partie réelle. D'ailleurs il est clair que la différence

$$\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1 - \log D$$

est partout holomorphe.

Le théorême est donc démontré.

17. Il n'est pas douteux que des considérations analogues à celles qui précèdent ne puissent être très utiles dans l'étude de divers points délicats de la théorie des fonctions de deux variables.

Elles peuvent servir à démontrer le théorême suivant: Si $Y$ est une fonction quelconque de $X$, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de $X$, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres; elle pourra être considérée comme la solution d'une équation:

$$G(X, Y) = 0$$

où $G$ est une fonction entière.

18 Janvier 1883.