RECHERCHES SUR LE THÉORÈME DE M. BOREL DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES.

Par

GEORGES VALIRON

à STRASBOURG.

Les résultats qui seront exposés dans ce qui suit complètent ceux donnés dans trois mémoires précédents[1]; ils concernent la distribution des points où une fonction méromorphe prend une valeur donnée arbitraire.

Considérons d'abord une fonction $f(z)$ méromorphe en tout point à distance finie. M. Borel[2] a défini l'ordre d'une telle fonction au moyen de l'ordre de deux fonctions entières dont elle est le quotient. M. R. Nevanlinna[3] a donné une définition équivalente à partir de la fonction $T(r,f)$ qu'il a introduite dans cette théorie:

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r, \frac{1}{f})$$

avec

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{iu})| \, du ,$$

---

[1] Ces mémoires que je désignerai par I, II, III, ont pour titres: I. *Sur la distribution des fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. 47, 1926); II. *Sur une propriété des fonctions méromorphes d'ordre positif* (*Bull. des sciences math.*, t. 50, 1926); III. *Compléments au théorème de Picard-Julia* (*Ibid.*, t. 51, 1927).

[2] *Contribution à l'étude des fonctions méromorphes* (*Annales Ecole norm.*, 3[e] s., t. 18, 1901) et *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

[3] *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta math.*, t. 46, 1925).

$$N(r, g) = \int_0^r [n(x, g) - n(0, g)] \frac{dx}{x} + n(0, g) \log r,$$

$n(x, g)$ désigne le nombre des zéros de $g(z)$ pour $|z| \leqq x$ et $\overset{+}{v}$ désigne le nombre v si $v > 0$ et 0 dans le cas contraire. L'ordre est le nombre

$$\varrho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

M. Borel avait obtenu des résultats relatifs à $n(r, f - x)$, il montrait que cette fonction est de l'ordre de grandeur de r^ϱ sauf pour deux valeurs de x au plus. Grâce à la méthode puissante qu'il a mise en œuvre, M. R. Nevanlinna a apporté à ces résultats des compléments très importants en ce qui concerne le rapport de $N(r, f)$ à $T(r, f)$; ses énoncés contiennent ceux de M. Borel. On peut également déduire de ses résultats la proposition suivante (I, III) qui jouera un rôle fondamental dans la suite:

I. *La fonction $f(z)$ d'ordre positif ϱ étant donnée, il existe un nombre k supérieur à 1 et une suite de couronnes $C(n, f)$*

$$\frac{1}{k} R_n < |z| < k R_n$$

telles que

$$\lim_{n=\infty} R_n = \infty, \quad \lim \frac{\log T(R_n, f)}{\log R_n} = \varrho,$$

jouissant de cette propriété: le nombre des points de $C(n, f)$ en lesquels $f(z)$ prend une valeur x est compris entre

$$\frac{1}{\log k} T(R_n, f) \quad \textit{et} \quad \frac{2}{\log k} T(k^2 R_n, f)$$

pour tous les x dont les points représentatifs sur la sphère de Riemann sont extérieurs à l'un ou l'autre de trois cercles de rayon $[T(R_n, f)]^{-1}$.

Cette proposition est très précise en ce qui concerne le nombre des zéros de $f(z) - x$ lorsque ϱ est fini, le rapport des nombres limitant cette quantité est alors inférieur à un nombre fixe si les $C(n, f)$ sont convenablement choisies. Elle pourrait être complétée dans le cas de l'ordre infini (II).

Il existe donc des couronnes d'épaisseur finie dans lesquelles le nombre des zéros de $f(z)-x$ est de l'ordre de $T(R,f)$. Si la distribution de ces zéros dans la couronne était sensiblement homogène quel que soit x, il existerait des régions de dimensions $\frac{R}{\sqrt{T(R)}}$ dans lesquelles $f(z)-x$ s'annulerait encore sauf pour des x voisins de certaines valeurs. J'ai montré (III) que l'on a effectivement une propriété de ce genre. De même si l'hypothèse de la distribution homogène est la moins favorable, il doit exister des régions de dimensions εR dans lesquelles le nombre des zéros de $f(z)-x$ est de l'ordre de $\varepsilon^2 T(R,f)$. C'est ce genre de résultats que je me propose surtout d'obtenir ici; je les déduis non plus du théorème de Schottky, mais d'une généralisation d'un théorème de M. Landau au cas d'une fonction méromorphe dans un cercle où elle prend moins de N fois trois valeurs distinctes. Ceci me conduit à des résultats quantitatifs assez précis mais qui ne semblent pas définitifs. Quelques unes de leurs conséquences peuvent être énoncées sous une forme définitive (à cause de son imprécision) très simple, notamment les suivantes:

II. *$f(z)$ étant d'ordre ϱ positif, il existe une direction D,* $\varphi=$ const. $(z=re^{i\varphi})$ *jouissant de cette propriété: dans tout angle comprenant D à son intérieur, l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z)-x$* [1] *est égal à ϱ pour tous les x sauf deux au plus.*

Ce théorème complète celui de M. Borel. Je dirai qu'une direction D possédant la propriété précédente est une *direction de Borel.*

III. *$f(z)$ étant d'ordre ϱ fini non nul, il existe une suite de cercles $\Gamma(n,f)$*

$$|z-z(n)|<\varepsilon(n)|z(n)|, \quad \lim_{n=\infty}\varepsilon(n)=0,$$

tels que, dans $\Gamma(n,f)$, $f(z)$ prenne

$$|z(n)|^{\varrho+\eta(n,x)}, \quad |\eta(n,x)|<\eta(n), \quad \lim \eta(n)=0$$

fois toute valeur x représentée sur la sphère à l'extérieur de deux cercles de rayon

$$e^{-|z(n)|^{\varrho-\alpha}} \qquad (\alpha>0).$$

Cette proposition est encore valable, mais sous une forme moins précise, pour les fonctions d'ordre infini; elle contient un théorème de M. Julia complété

---

[1] Pour $x=\infty$ les zéros de $f(z)-x$ sont les pôles de $f(z)$.

par M. Ostrowski[1]. Elle se généralise au cas où l'on considère les zéros des fonctions $f(z)+R(z)$, $R(z)$ étant une fraction rationnelle, ce qui donne une nouvelle propriété des familles de fonctions considérées par M. Julia.

Dans le cas d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans un cercle $|z|<1$ et dont l'ordre moyen

$$\varrho = \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

est positif[2], on a une proposition analogue à I et on peut encore appliquer la méthode de découpage d'une couronne en régions plus petites. On étend ainsi les résultats précédents et le théorème de M. Julia, ce qui donne notamment cet énoncé:

IV. *Si $f(z)$ est méromorphe et d'ordre moyen positif dans le cercle $|z|<1$ il existe au moins un rayon $\varphi=$ const. tel que, dans tout angle A de sommet origine admettant ce rayon pour bissectrice, $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur sauf deux valeurs au plus.*

Lorsqu'une fonction est méromorphe dans un angle A, $|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}$ et pour z voisin de zéro et que, dans un angle complètement intérieur à A, $f(z)$ est d'ordre β supérieur à α (dire que l'ordre est β, c'est-à-dire que l'exposant de convergence des points où $f(z)$ prend une valeur x est au plus égal à β quel que soit x et est égal à β pour un x au moins), une représentation conforme ramène au cas d'une fonction d'ordre positif dans un cercle de rayon 1 mais n'admettant qu'un point singulier sur la circonférence. La méthode de découpage s'applique alors d'une façon plus complète et montre que

V. *$f(z)$ étant méromorphe dans le voisinage de l'origine à l'intérieur d'un angle A d'ouverture $\frac{\pi}{\alpha}$ et étant d'ordre β supérieur à α dans un angle intérieur, il existe à l'intérieur d'un angle intérieur à A une suite infinie de petits cercles $\Gamma(n,f)$, le rayon de $\Gamma(n,f)$ étant infiniment petit par rapport à la distance $d(n)$*

[1] Voir les mémoires de M. Julia (*Annales de l'Ecole nor.*, 1919, 1920, 1921) et son ouvrage *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel* (Paris, Gauthier-Villars, 1924), le mémoire de M. Ostrowski *Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes* (*Math. Z.*, t. 24, 1925) et les *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* de M. Montel (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

[2] M. Nevanlinna appelait ce nombre ordre. Il m'a fait remarquer que, eu égard aux propriétés des zéros, il conviendrait plutôt de donner ce nom au nombre $\varrho+1$. J'appellerai ϱ ordre moyen et $\varrho+1$ ordre total.

du centre à l'origine, tels que $f(z)$ *prenne* $d(n)^{-\beta+\eta(n)}$ *fois au moins dans* $\Gamma(n,f)$ *toute valeur* x *sauf celles qui sont représentées sur la sphère à l'intérieur de deux cercles de rayon* $e^{-d(n)^{-\beta+\eta(n)}}$. $\eta(n)$ *tend vers* 0 *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Cet énoncé suppose β fini. Lorsque β est infini, on a une proposition analogue. Dans tous les cas il y a une direction de Borel à l'intérieur de l'angle A. Ceci s'applique à une fonction méromorphe autour du point à l'infini et d'ordre ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$; on peut notamment considérer un certain angle d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\varrho}$ dans lequel l'ordre est égal à ϱ. Dans le cas d'une fonction holomorphe autour du point à l'infini et d'ordre fini supérieur à $\frac{1}{2}$, il y a au moins deux directions de Borel. La proposition V se généralise au cas des fonctions $f(z)+R(z)$, R étant une fraction rationnelle.

J'ai du laisser en suspens un certain nombre de questions. J'ai déjà dit que mes formules précises ne semblent pas définitives, elles renferment un terme en $\log T$ introduit par le mode de démonstration et qui doit pouvoir disparaître. Dans les démonstrations, au lieu d'employer un théorème genre Landau (dans lequel figure la dérivée à l'origine), il serait plus indiqué d'utiliser un théorème genre Schottky. Je n'ai pu reconnaître si, comme il semble probable, il n'existe pas toujours une direction de Borel au moins commune à une fonction et à sa dérivée. J'indiquerai au cours de l'exposition d'autres questions qui restent à résoudre.[1]

I. Rappel de propositions antérieures.

1. Je ne reviendrai pas sur la démonstration du théorème I donné ci-dessus pour laquelle on se reportera aux mémoires I et III. Je donnerai d'ailleurs plus loin (n° 7) des indications sur la démonstration de la proposition analogue relative aux fonctions méromorphes dans un cercle.

La proposition suivante jouera avec I un rôle fondamental dans la suite.

VI. *Soit* $g(z)$ *une fonction méromorphe dans un cercle* $|z| < R$, *prenant* N *fois au plus dans ce cercle les valeurs* $0, 1, \infty$. *On suppose que la plus courte distance*

[1] Une partie des résultats donnés dans ce mémoire a été résumée dans une Note des *Comptes Rendus* (3 janvier 1928).

de l'origine aux points où $g(z)$ prend ces valeurs $0, 1, \infty$ *soit au moins égale à* δ *et que* $g'(0)$ *ne soit pas nul. Dans ces conditions, on a*

$$T\left(\frac{1}{2}R, g\right) < 36\, N \log \frac{eR}{\delta} - 4 \overset{-}{\log} |g'(0)\,R| + 12 \overset{+}{\log} |g(0)| + C, \tag{1}$$

C étant une constante absolue.

On obtient ce résultat en explicitant les valeurs des constantes dans le second théorème fondamental de M. Nevanlinna[1] ou plus simplement en complétant la démonstration du théorème de M. Landau due à cet éminent géomètre. On peut suivre la marche que j'ai employée dans le mémoire I. Il est loisible de supposer $R = 1$. L'identité

$$g = \frac{\dfrac{g'}{g-1}}{\dfrac{g'}{g-1} - \dfrac{g'}{g}}$$

donne

$$m(r, g) < 2m\left(r, \frac{g'}{g-1}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + N(r, g) + N(r, g-1) + \log 2 \tag{2}$$
$$- \log |g'(0)| + \log |g(0)\,[g(0) - 1]|,$$

et l'on a

$$N(r, g) < N \log \frac{r}{\delta} < N \log \frac{1}{\delta}$$

et des inégalités analogues pour $N(r, g-1)$ et $N\left(r, \dfrac{1}{g}\right)$. En ajoutant cette dernière quantité aux deux membres de (2), on obtient

$$T(r, g) < 2m\left(r, \frac{g'}{g-1}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + 3\, N \log \frac{1}{\delta} + \log 2$$
$$- \log |g'(0)| + \log |g(0)\,(g(0) - 1)|.$$

Le calcul des limites supérieures de $m\left(r, \dfrac{g'}{g}\right)$ et de la quantité analogue se fait en utilisant la formule de Jensen-Poisson due à M. Nevanlinna (loc. cit., p. 53).

[1] loc. cit., p. 61.

Il y a ici des simplifications provenant de ce que $n(r,g)$ est moindre que N et $N(r,g)$ limité par la formule précédente. On a

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{g'}{g}\right| < \log 2 + 2\log\frac{1}{R'-r} + \overset{+}{\log}\left[m(R',g) + m\left(R',\frac{1}{g}\right)\right] + \log(2N+1) + 2N\log\frac{1}{\delta}$$

R' étant compris entre r et 1. Le troisième terme du second membre est inférieur à

$$\log\left[2T(R',g) - \log|g(0)|\right]$$

ce qui donne

$$m\left(r,\frac{g'}{g}\right) < \log 8 + 2\log\frac{1}{R'-r} + \log(N+1) + 2N\log\frac{1}{\delta}$$
$$+ \overset{+}{\log}\, T(R',g) + \overset{+}{\log}\,\big|\log|g(0)|\big|$$

et

$$T(r,g) < 6\log\frac{1}{R'-r} + 3\log T(R',g) + H$$

avec

$$H = C + 3\overset{+}{\log}|g(0)| - \overset{-}{\log}|g'(0)| + 9N\log\frac{e}{\delta},$$

C étant une constante absolue. On applique alors la méthode de M. Borel pour éliminer le terme en $\log T$ du second membre, comme dans le mémoire I; on trouve

$$T(r,g) < 36\log\frac{1}{1-r} + 4H.$$

En faisant $r=\frac{1}{2}$, on arrive à l'inégalité (1). Pour $N=0$, cette inégalité fournit le théorème de M. Landau. On peut d'ailleurs abaisser la valeur numérique des coefficients des termes du second membre de (1) en faisant des approximations moins grossières, en utilisant notamment la propriété de convexité de la fonction $N(r,g)$ comme le fait M. Nevanlinna. Par exemple, le coefficient du terme en N peut être remplacé par un nombre quelconque supérieur à 3. Mais la détermination des valeurs exactes présenterait surtout de l'intérêt.

II. Cas des fonctions méromorphes en tout point à distance finie.

2. Plaçons-nous dans une couronne où la fonction considérée $f(z)$ satisfait à l'énoncé I et écrivons R au lieu de R_n. Partageons la couronne en domaines plus petits limités par des rayons $\varphi = \text{const.}$ et par des arcs de cercle $|z| = \text{const.}$ ε étant un petit nombre donné nous traçons $\frac{1}{\varepsilon}\left(k - \frac{1}{k}\right) - 1$ circonférences équidistantes des circonférences limites et $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ rayons. Nous formons ainsi

$$p = 2\pi\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{3}$$

domaines partiels que nous appellerons pour simplifier des quadrilatères. Soit Q l'un de ces quadrilatères: nous appellerons centre de Q le point situé sur la circonférence $|z| = \text{const.}$ équidistante des circonférences limitant Q et sur le rayon $\varphi = \text{const.}$ bissecteur des rayons limitant Q. Soit alors Q' le quadrilatère homothétique et concentrique à Q, le rapport d'homothétie étant égal à 20.

Nous allons supposer que dans Q' $f(z)$ ne prenne que N fois au plus trois valeurs a, b, c dont les points représentatifs sur la sphère ont des distances mutuelles au moins égales à un nombre d inférieur à $\frac{1}{2}$. Nous en déduirons une borne pour la fonction T relative à une certaine fonction, puis une borne pour le nombre des points $f(z) = \gamma$ appartenant à Q lorsque γ ne s'approche pas trop de certains points. En faisant le même raisonnement pour chaque quadrilatère Q' nous aurons une limite supérieure du nombre des zéros de $f(z) - \gamma$ pour toute la couronne $C(n, f)$, donc une contradiction avec I si N est convenablement choisi. Il existera donc un quadrilatère Q' où $f(z)$ prendra N fois au moins les valeurs autres que celles voisines de deux points.

Entourons les zéros de $f(z) - a$, $f(z) - b$, $f(z) - c$ appartenant à Q' de cercles Γ ayant ces points pour centres et pour rayon δ. La somme des diamètres de ces cercles est au plus égale à $6N\delta$. Nous supposerons

$$6N\delta = \varepsilon^2 R. \tag{4}$$

Soit z_0 un point situé sur une circonférence $|z| = \text{const.}$ et sur un rayon $\varphi = \text{const.}$ ne coupant pas ces cercles Γ. On peut choisir ce point à une distance du centre de Q inférieure à $2\varepsilon^2 R$ et tel que $f(z_0)$ soit fini. On peut supposer

$$|c| \geqq |a|,\ |c| \geqq |b|,\ |b| < \frac{4}{d},$$

$$|f(z_0) - a| \leqq |f(z_0) - b|.$$

Si l'on pose

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} \frac{c - b}{c - a},$$

on aura

$$|g(z_0)| < \left|\frac{c - b}{c - a}\right| < \frac{K}{d},$$

K étant une constante absolue. Nous distinguerons deux cas suivant que $|g'(z_0)|$ est inférieur à 1 ou supérieur ou égal à 1.

Plaçons-nous dans le premier cas et parcourons la circonférence $|z| = |z_0|$ jusqu'aux points z_0' et z_0'' situés à la distance $3 \varepsilon R$ de z_0. Tant que l'on ne rencontre pas de point en lequel

$$|g'(z)| > 1 \tag{5}$$

on a sur tout l'arc $z_0 z$

$$|g(z)| < \frac{K}{d} + 3 \varepsilon R.$$

Supposons que l'on puisse atteindre les points z_0' et z_0'' sans rencontrer de points donnant lieu à (5). Considérons une circonférence $|z - z_0| = r$ dont le rayon r est compris entre $3 \varepsilon R$ et $3 \varepsilon R - \varepsilon^2 R$ et qui ne coupe pas les cercles Γ. Parcourons cette circonférence à partir des points situés sur $|z| = |z_0|$. Tant que (5) n'est pas vérifiée, on a encore

$$|g(z)| < \frac{K}{d} + 3 \varepsilon R \left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

Donc, ou bien il existe un point où l'on a à la fois (5) et (6) ou bien (6) a lieu sur toute la circonférence de rayon r. Dans ce dernier cas nous avons

$$m(r, g(z_0 + z)) < \log\left(\frac{K}{d} + 9 \varepsilon R\right)$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{g(z_0 + z)}\right) < N \log \frac{r}{\delta}.$$

On a dans ce cas

$$T(r, g(z_0+z)) < N \log \frac{3\varepsilon R}{\delta} + \log \frac{K}{d} + \overset{+}{\log}(9\varepsilon R) + \log 2. \tag{7}$$

En outre, la circonférence $|z - z_0| = \frac{1}{2} r$ contient Q à son intérieur pourvu que ε soit assez petit.

Lorsque cette circonstance simple ne se produit pas, il existe un point z_1 en lequel on a à la fois (5) et (6), le cercle $|z - z_1| < \delta$ ne contenant pas de points où $g(z)$ est nul ou infini ou égal à 1. On peut en outre supposer qu'en ce point z_1, $f(z_1)$ est fini; il suffira de prendre, s'il y a lieu, un point voisin de z_1, on aura encore (6) et

$$|g'(z_1)| > \frac{1}{2}. \tag{5'}$$

Appliquons alors la proposition VI au cercle

$$|z - z_1| < 16\varepsilon R = r',$$

on aura

$$T\left(\frac{r'}{2}, g(z_1+z)\right) < 36 N \log \frac{16 e \varepsilon R}{\delta} + 4 \overset{+}{\log} \frac{2}{\varepsilon R} + 12 \log \frac{1}{d} \tag{8}$$

$$+ 12 \overset{+}{\log}(9\varepsilon R) + C$$

et le cercle $|z - z_1| < \frac{r'}{4}$ contient encore Q à son intérieur.

En remplaçant δ par sa valeur (4), on voit que, dans tous les cas, il existe un cercle tel que le cercle concentrique de rayon moitié contienne Q et pour lequel on a

$$T(r, g) < A N \log \frac{BN}{\varepsilon} + C \log \frac{1}{d} + |\log \varepsilon R|, \tag{9}$$

A, B, C, étant des constantes absolues. Cette inégalité est d'ailleurs valable même pour N nul, dans ce cas le premier terme du second membre doit être remplacé par 0.

3. On passe de $T(r, g)$ à $T(r, f)$ par des transformations connues (III). On obtient, dans le cercle précédent, dont le centre sera désigné dans tous les cas par z_0,

$$T(r, f) < A\, N \log \frac{B\, N}{\varepsilon} + C' \log \frac{1}{d} + |\log \varepsilon\, R| + \overset{+}{\log} |f(z_0)|, \tag{10}$$

C' étant une nouvelle constante absolue. On tire de là une limitation du nombre des zéros de $f(z) - \gamma$ dans le cercle de rayon moitié, donc dans Q, en supposant la distance sphérique de γ à $f(z_0)$ assez grande. On a en effet

$$T(r, f-\gamma) < T(r, f) + \overset{+}{\log} |\gamma| + \log 2$$

et

$$N(r, f-\gamma) + m\left(r, \frac{1}{f-\gamma}\right) + \log |f(z_0) - \gamma| = T(r, f-\gamma)$$

donc

$$N(r, f-\gamma) < T(r, f) + \overset{+}{\log} |\gamma| - \log |f(z_0) - \gamma| + \log 2.$$

Dans le cercle concentrique de rayon moitié, donc à fortiori dans Q, le nombre des zéros de $f(z) - \gamma$ est moindre que

$$\frac{1}{\log 2} N(r, f-\gamma)$$

et, par suite d'après (10), inférieur à

$$\frac{1}{\log 2}\left[A\, N \log \frac{B\, N}{\varepsilon} + C' \log \frac{1}{d} + |\log \varepsilon\, R| - \log |f(z_0) - \gamma| + \overset{+}{\log} |f(z_0)| + \overset{+}{\log} |\gamma|\right]. \tag{11}$$

Nous supposerons que la distance sphérique de γ à $f(z_0)$ est supérieure à d, de sorte que la somme des trois derniers termes du crochet est aussi inférieure à $C'' \log \frac{1}{d}$. Faisons la même hypothèse pour les p quadrilatères Q' attachés aux quadrilatères Q; il existera des points γ pour lesquels le nombre des zéros appartenant à la couronne $C(n, f)$ sera inférieur au produit de (11) par p, pourvu que l'aire totale exclue sur la sphère soit inférieure à 4π, donc pourvu que $p\, d^2$ soit inférieur à 2. Si $p\, d^2$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, il existera même de tels points γ auxquels s'appliquera le théorème I, l'expression (11) devra être supérieure à $\frac{1}{p \log k} T(R, f)$. Si cette inégalité n'a pas lieu, c'est que, dans l'un au moins des quadrilatères Q', $f(z)$ prend plus de N fois toutes les valeurs sauf au plus celles qui sont représentées dans deux cercles de rayon d de la sphère. C'est ce qui aura lieu si l'on suppose

$$(12)\qquad \begin{cases} B\,N\log\dfrac{N\,B}{\varepsilon} = \varepsilon^2 h\, T(R,f), & \log\dfrac{1}{d} = \varepsilon^2 h\, T(R,f) \\ |\log \varepsilon R| \leqq \varepsilon^2 h\, T(R,f), & d \leqq h\,\varepsilon \end{cases}$$

$h = h(f)$ étant un nombre positif inférieur à 1 convenablement choisi. La première condition (12) est réalisée si

$$N = \frac{\varepsilon^2 h}{B}\,\frac{T(R,f)}{\log T(R,f)}$$

et si ε est assez petit. Si l'on suppose que la valeur de N définie par cette égalité est au moins égale à un nombre $q = q(f)$, $\varepsilon^2 h\, T(R,f)$ sera au moins égal à $q\,B\log T$, ce qui limite $\frac{1}{\varepsilon}$ et donne

$$\log\frac{1}{h\,\varepsilon} < \frac{1}{2}\log\frac{T}{hq\,B\log T} < q\,B\log T < \varepsilon^2 h\, T$$

pourvu que q ait été convenablement choisi. d pourra donc être défini par la seconde égalité (12) en accord avec la quatrième. Enfin la troisième inégalité (12) sera vérifiée. On a en effet d'après les conditions du théorème I,

$$\log R < q\log T$$

si q a été pris assez grand; la troisième condition est donc réalisée si εR est supérieur à 1. Si $R\,\varepsilon < 1$ le premier membre dans cette troisième condition est inférieur à $\log\frac{1}{\varepsilon}$, elle est vérifiée d'après ce qui précède. Finalement, en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{20}$, on arrive à l'énoncé suivant:

VII. *A chaque couronne $C(n,f)$ définie dans le théorème* I *correspond au moins un cercle $\Gamma(n,f)$ de rayon εR, coupant cette couronne, dans lequel $f(z)$ prend au moins N fois toute valeur sauf au plus celles qui sont représentées sur la sphère à l'intérieur de deux cercles de rayon*

$$T(R,f)^{-\lambda N} \qquad (R = R_n).$$

On a

$$N = \frac{\varepsilon^2 \mu\, T(R, f)}{\log T(R, f)},$$

λ et μ sont deux constantes dépendant de $f(z)$; $\varepsilon = \varepsilon(n)$ doit être inférieur à un certain petit nombre et choisi de telle façon que N soit supérieur à un nombre $q = q(f)$.

4. En prenant $\varepsilon(n)$ de telle façon que N soit constant on retrouve et on complète le résultat donné dans le mémoire III: on obtient des petits cercles dont le rayon est le même que dans ce mémoire, mais on peut affirmer que dans ces cercles, $f(z)$ prend q fois au moins les valeurs suffisamment distantes de deux valeurs.

Si l'on prend

$$\varepsilon(n) = [\log T(R_n, f)]^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{13}$$

les valeurs extérieures aux petits cercles exceptionnels seront prises au moins

$$\mu\, T(R_n, f)\,[\log T(R_n, f)]^{-1-2\alpha}$$

fois.

Appliquons ceci aux fonctions d'ordre fini ϱ. On a dans ce cas

$$\log T(R_n, f) = R_n^{\varrho + \eta(n)}, \qquad \lim \eta(n) = 0$$

donc

$$N = h \frac{R_n^{\varrho+\eta(n)}}{(\log R_n)^{1+2\alpha}}$$

h étant fixe, ce qui démontre l'énoncé III de l'introduction. Lorsque la fonction est à croissance régulière le résultat se précise. Par exemple, lorsque

$$\log T(r, f) = \nu\, r^{\varrho}$$

ν étant compris entre deux nombres positifs fixes, les couronnes $C(n, f)$ sont adjacentes les unes aux autres; il existe un nombre $k(\nu, \varrho)$ tel que, toute couronne

$$R < |z| < R\, k(\nu, \varrho)$$

contienne un cercle de rayon

$$H R (\log R)^{-1-\alpha}$$

dans lequel $f(z)$ prend au moins $R^{\varrho}(\log R)^{-1-2\alpha}$ fois toutes les valeurs sauf celles représentées à l'intérieur de deux cercles de rayon d, avec

$$\log \frac{1}{d} = R^{\varrho} (\log R)^{-2\alpha}.$$

Revenons au cas général. Si l'on considère une suite infinie quelconque S de cercles $\Gamma(n, f)$ obtenus avec les valeurs (13) de ε, il y a deux valeurs au plus qui sont prises moins de $N(n)$ dans tous les cercles S; pour une valeur γ distincte de celles ci, $f(z) - \gamma$ a au moins $N(n)$ zéros dans une suite infinie de cercles extraite de S. Si $r(\gamma, f, n)$ est le module de l'un de ces zéros appartenant à l'un de ces cercles $\Gamma(n, f)$, la somme

$$(14) \qquad \sum r(\gamma, f, n)^{-\varrho_1} \qquad (\varrho_1 < \varrho)$$

étendue aux zéros situés dans $\Gamma(n, f)$ est supérieure à

$$R_n^{\varrho(n) - \varrho_1}, \qquad \lim \varrho(n) = \varrho.$$

La série (14) *étendue aux zéros de $f(z) - \gamma$ appartenant à la suite S des cercles considérés est donc divergente. L'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z) - x$ appartenant à une suite infinie S quelconque de cercles $\Gamma(n, f)$ est égal à l'ordre ϱ de $f(z)$ sauf au plus pour deux valeurs $x(S)$ et $x'(S)$.* Le théorème de Borel comme celui de Picard s'applique lorsqu'on se borne à considérer ce qui se passe dans de petits domaines infiniment petits par rapport à leur distance à l'origine.

Soit C une courbe quelconque qui s'éloigne indéfiniment. On peut lui donner, par une rotation convenable autour de l'origine, une position C' telle que le domaine $D(\varepsilon)$ balayé par un cercle variable dont le centre z décrit C', le rayon étant $\varepsilon |z|$, contienne une suite infinie de cercles $\Gamma(n, f)$ si petit que soit ε. *L'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z) - x$ appartenant à $D(\varepsilon)$ est égal à ϱ quel que soit ε et quel que soit x, sauf peut-être pour deux valeurs de x.* Une courbe C' jouissant de cette propriété sera appelée *courbe de Borel.* Une courbe quelconque fournit une courbe de Borel par une rotation convenable autour de l'origine. En particulier, on a l'énoncé II. Tout ceci ne suppose nullement que ϱ soit fini.

5. On obtient d'autres résultats en donnant d'autres lois de décroissance de $\varepsilon(n)$. Notamment on peut choisir $\varepsilon(n)$ de façon à obtenir des cercles de rayon borné dès que l'ordre ϱ dépasse deux. On complète ainsi un résultat de M. Julia. On obtient en effet des cercles $\Gamma(n, f)$ de rayon borné dans lesquels $f(z)$ prend toute valeur, sauf celles appartenant au voisinage de deux points, au moins $r^{\varrho - 2 - \eta}$

fois, r étant la distance du centre du cercle à l'origine et η tendant vers o lorsque r croît indéfiniment. Il s'ensuit immédiatement que

VIII. *Si la fonction $f(z)$ est d'ordre ϱ supérieur à 2 et si l'on considère la famille de fonctions*

$$f(z + m\,\omega + n\,\omega'),$$

ω et ω' étant deux nombres donnés dont le rapport est complexe, et m et n prenant toutes les valeurs entières positives, négatives et nulle, il existe au moins un point z_0 en lequel cette famille n'est pas normale.

Cette proposition, qui découlait également du théorème donné dans le mémoire III, est valable aussi pour les fonctions d'ordre 2 pour lesquelles

$$\overline{\lim}\ \frac{T(r,f)}{r^2 \log T(r,f)} = \infty\ ;$$

mais on sait qu'elle ne s'applique plus aux fonctions elliptiques, pour lesquelles le rapport $T(r,f):r^2$ est borné. Il résulte de VIII et d'un théorème de M. Ostrowski qu'il existe une suite de cercles de remplissage dont les centres ont pour affixes des nombres de la forme $z_0 + m\,\omega + n\,\omega'$ et dont le rayon est un nombre fixe arbitrairement petit. (J'appelle avec M. Milloux cercle de remplissage un cercle dans lequel les valeurs de la fonction remplissent toute la sphère sauf le voisinage de deux points.) Il y aurait lieu de rechercher si les valeurs prises dans ces cercles sont prises $r^{\varrho-2-\eta}$ fois au moins, r étant la distance du centre à l'origine.

6. On peut étendre les propositions précédentes au cas où l'on considère les zéros de $f(z)-R(z)$, $R(z)$ étant une fraction rationnelle. On fait alors l'hypothèse que, dans le quadrilatère Q′, les trois fonctions

$$f(z)-R_1(z), \qquad f(z)-R_2(z), \qquad f(z)-R_3(z)$$

ne s'annulent que N fois au plus. On suppose que, dans toute la couronne couverte par les quadrilatères Q′, on a

$$|R_3(z)| > |R_1(z)|, \qquad |R_3(z)| > |R_2(z)|, \qquad |R_2(z)| < \frac{4}{d}$$

et que les différences de ces fractions deux à deux ont une distance sphérique supérieure à $\frac{1}{d}$ dans cette couronne. On introduit alors la fonction

$$g(z) = \frac{f-R_1}{f-R_2}\,\frac{R_3-R_2}{R_3-R_1}.$$

Rien n'est changé aux raisonnements fait sur cette fonction; on a encore l'inégalité (7). Rien n'est changé non plus dans le passage de $T(r,g)$ à $T(r,f)$, ni dans les conséquences relatives aux zéros de $f(z)-\gamma$. Il existe encore un quadrilatère Q′ dans lequel $f(z)-R(z)$ s'annule N fois au moins pour toute fraction $R(z)$ qui n'est pas trop voisine de deux certaines fractions. Ce voisinage est défini par les conditions ci-dessus; il pourrait se traduire par des conditions relatives aux coefficients de la fraction en supposant que l'on considère des fractions de degré borné. Je me bornerai à énoncer des propositions genre Julia et Borel qui se déduisent de suite du fait que trois fractions rationnelles distinctes vérifient toujours les conditions données ci-dessus à partir d'une valeur de r.

IX. *$f(z)$ étant une fonction méromorphe d'ordre positif, il existe une suite infinie du cercles $\Gamma(n,f)$,*

$$|z-z(n)|<\varepsilon(n)|z(n)|, \qquad \left(\frac{1}{k}R_n<|z(n)|<R_n k\right)$$

$\varepsilon(n)$ étant donné par l'égalité (13), jouissant de cette propriété: S étant une suite infinie quelconque de cercles $\Gamma(n,f)$, le nombre des zéros de $f(z)-R(z)$ est au moins égal à

$$\mu\, T(R_n,f)\,[\log T(R_n,f)]^{-1-2\alpha}$$

dans chaque cercle $\Gamma(n,f)$ d'une certaine suite extraite de S, sauf au plus pour deux fractions rationnelles $R(z)$ (l'infini compris).

X. *La fonction $f(z)$ étant d'ordre positif, il existe au moins une direction D qui est direction de Borel pour toutes les fonctions $f(z)-R(z)$. L'exposant de convergence des zéros de cette fonction appartenant à un domaine angulaire $D(\varepsilon)$ arbitraire contenant D est égal à l'ordre ϱ sauf au plus pour deux fractions rationnelles (l'infini compris).*

Si l'on considère l'une des familles introduites par M. Julia, par exemple la famille

$$(15) \qquad f(z\sigma^n), \qquad (n=1,2,\ldots; |\sigma|>1)$$

et si l'on désigne par $E(\sigma,f)$ l'ensemble des points autres que 0 et ∞ où cette famille (15) n'est pas normale, il découle de IX que

XI. *$f(z)$ étant d'ordre positif, les ensembles*

$$(16) \qquad E(\sigma, f z^q)$$

où q prend les valeurs entières positives, négatives et nulle, ont au moins un point commun z_0.

Ces ensembles ont donc en commun les points $z_0 \sigma^n$. Nous verrons plus loin que lorsque l'ordre dépasse $\frac{1}{2}$, il existe au moins deux points communs vraiment distincts. Dans certains cas les ensembles (16) correspondant à un même σ coincident quel que soit q, c'est le cas pour e^z et σ réel. J'ai montré ailleurs que cette circonstance ne se présente pas toujours.[1] Dans le cas des fonctions entières la proposition XI est aussi valable pour les fonctions d'ordre nul, car la proposition IX s'étend à ces fonctions.[2] Il y aurait lieu de rechercher si XI ne s'applique pas à toutes les fonctions qui vérifient le théorème de M. Julia.

On peut compléter d'une façon analogue la proposition VIII.

En ce qui concerne les fonctions exceptionnelles J, fonctions pour lesquelles la famille (15) est partout normale dans le plan privé des points o et ∞, donc telles que $E(\sigma, f)$ n'existe pas, il est clair que, si la famille (15) admet une fonction limite possédant un pôle distinct de o et ∞, l'ensemble (16) existe dès que q est négatif. C'est ce qui a lieu pour les fonctions invariantes par la substitution $(z, z\sigma)$. De ce point de vue on doit considérer comme complètement exceptionnelles les fonctions pour lesquelles toutes les fonctions limites de (15) n'ont pas de pôle ou de zéro distinct de o et ∞. On peut effectivement construire de telles fonctions.

Tous les résultats précédents s'étendent au cas des fonctions méromorphes autour du point à l'infini et d'ordre positif autour de ce point en utilisant la remarque faite à la fin du mémoire III.

Dans le cas des fonctions entières, il existe des couronnes $C(n, f)$ pour lesquelles la propriété I est valable à la fois pour la fonction $f(z)$ et pour sa dérivée. Il y aurait lieu de chercher si ceci a encore lieu pour les fonctions méromorphes. Cette propriété des fonctions entières et l'examen des cas simples rend vraisemblable l'existence de petits cercles $\Gamma(n, f)$ dans lesquels $f(z)$ et $f'(z)$ prendraient N fois au moins les valeurs non exceptionnelles, ainsi que l'existence d'une direction de Borel commune à la fonction et à sa dérivée. En utilisant les résultats du mémoire cité ci-dessus (J. de math.) on constate d'ailleurs qu'il existe

---

[1] *Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia* (doit paraître dans le *Journal de math.)*.

[2] J'ai signalé ce résultat à plusieurs reprises, notamment dans l'article du *Mémorial des sciences math.* consacré aux fonctions entières et méromorphes (*fasc.* II). Voir aussi la thèse de M, Williams (à paraître dans le *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*).

une infinité de spirales logarithmiques qui sont courbes de Borel pour $f(z)$ et toutes ses dérivées; presque toutes les spirales logarithmiques jouissent de cette propriété.

Il conviendrait également de donner des résultats plus précis que les précédents daus le cas de l'ordre infini en utilisant les travaux de M. Blumenthal.

III. Les fonctions méromorphes dans un cercle.

7. Nous appellerons *ordre moyen* d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < 1$, le nombre

$$\varrho = \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

que M. Nevanlinna appelait ordre; le nombre $\varrho + 1$ sera l'ordre total.

Nous supposerons l'ordre moyen positif. On peut alors étendre la proposition I. On a en effet (I, p. 124)

$$T(r,f) < N(r,f-a) + N(r,f-b) + N(r,f-c) + 12 \log \frac{1}{R-r} + 24 \log T(R,f)$$
$$+ e(f) + 8 \log \frac{1}{|a-b||b-c||c-a|}$$

$e(f)$ ne dépendant que du premier terme du développement de Laurent de $f(z)$ autour de l'origine, $r < R < 2r$, et $|a|, |b|, |c|$ étant inférieurs à $T(r,f)$. Il résulte de là que, si la distance sphérique des points a, b, c pris deux à deux est supérieure à $[T(r,f)]^{-1}$, on a

$$(17) \qquad T(r,f) < N(r,f-a) + N(r,f-b) + N(r,f-c) + e(f) + 12 \log \frac{1}{R-r}$$
$$+ D \log T(R,f)$$

D étant une constante absolue. (Si a par exemple est supérieur à $T(r,f)$, on introduit $\frac{1}{f-\gamma}$ pour démontrer cette inégalité, γ étant égal à 0, 1 ou -1 suivant les cas.)

On procède alors comme dans le cas des fonctions méromophes en tout point à distance finie, mais en tenant compte du fait que $T(r,f)$ peut avoir des valeurs moindres que $\log \frac{1}{1-r}$. En vertu de l'hypothèse de l'ordre positif, il existe des valeurs r aussi proches de 1 qne l'on veut pour lesquelles

$$T(r,f) > (1-r)^{-\beta}, \qquad (\beta > 0). \tag{18}$$

Soit r l'une de ces valeurs. Si l'on a

$$T(r_1) > T(r)(1+\alpha), \quad (r_1 = r + T(r)^{-\lambda},\ \lambda = \frac{2}{\beta},\ \alpha > 0) \tag{19}$$

r_1 est encore une valeur satisfaisant à (18). Si pour $r = r_1$ l'inégalité de croissance anormale (19) est encore vérifiée, puis pour

$$r = r_2 = r_1 + [T(r_1)]^{-\lambda}$$

et ainsi de suite, il existe un nombre r'

$$r' = r + \frac{1}{1-(1+\alpha)^{-\lambda}} T(r)^{-\lambda}$$

pour lequel la croissance est normale: l'inégalité de sens contraire à (19) est vérifiée. Appliquons (17) en prenant $r = r'$ et

$$R = r' + T(r')^{-\lambda};$$

on aura

$$\frac{1}{2} T(r',f) < N(r',f-a) + N(r',f-b) + N(r',f-c).$$

Eu égard à la croissance de $T(r,f)$, il s'ensuit que, pour tout r donnant lieu à (18), on a

$$\frac{1}{2} T(r,f) < N(r'',f-a) + N(r'',f-b) + N(r'',f-c)$$

pourvu que

$$r'' = r + k(1-r)^2, \qquad k > 1.$$

D'autre part, pourvu que la distance sphérique de $f(0)$ à a soit supérieure à $T(r''',f)^{-1}$, on a

$$N(r''',f-a) < 3\, T(r''',f) \tag{20}$$

donc

$$\sum_3 [N(r'',f-a) - N(r''',f-a)] > \frac{1}{2} T(r,f) - 9\, T(r''',f). \tag{21}$$

Or, r'' étant défini comme ci-dessus, et $r''' = r - k'(1-r)$, k' fini, on peut choisir ce nombre k' de telle façon que le second membre de (21) soit supérieur à $3\, T(r''',f)$ et qu'en outre

$$\lim_{r'''=1} \frac{\log T(r''',f)}{\log \dfrac{1}{1-r'''}} = \varrho.$$

Car, en posant $\dfrac{1}{1-r} = x$, on est ramené au cas des fonctions définies pour $x > 0$ traitées dans le mémoire II. En remplaçant alors le premier membre de (21) par

$$k'(1-r)[n(r'',f-a) + n(r'',f-b) + n(r'',f-c)]$$

qui lui est supérieur, on voit que

$$n(r'',f-a) > \frac{1+k'}{k'} \frac{1}{1-r'''} T(r''',f)$$

sauf au plus pour des a dont les distances sphériques à trois points (y compris le point $f(0)$) sont inférieures à $T(r''',f)^{-1}$. D'autre part, d'après (20),

$$n(r,f-a) < \frac{4}{r'''-r} T(r''',f)$$

ce qui conduit à l'énoncé suivant:

XII. *Lorsque $f(z)$ est d'ordre positif ϱ, il existe des nombres positifs k, k', h, h' ($k < 1$) et une suite de couronnes $C(n,f)$*

$$r_n - k'(1-r_n) < |z| < r_n + k(1-r_n), \ \lim r_n = 1$$

avec

$$\lim \frac{\log T(r_n,f)}{\log \dfrac{1}{1-r_n}} = \varrho.$$

telles que, dans $C(n,f)$, le nombre des zéros de $f(z) - a$ soit compris entre

$$h \frac{1}{1-r_n} T(r_n,f) \quad \text{et} \quad h' \frac{1}{1-r_n} T\left(r_n + \frac{1+k}{2}(1-r_n), f\right)$$

sauf au plus pour des valeurs a dont les points représentatifs sur la sphère sont intérieurs à trois cercles de rayon $[T(r_n,f)]^{-1}$.

Lorsque ϱ est fini, on peut choisir la suite des couronnes de façon telle que le rapport des nombres limitant le nombre des zéros soit inférieur à un nombre fixe.

Il semble probable que, dans cet énoncé, comme dans l'énoncé I, le cercle exclu sur la sphère ayant pour centre le point $f(0)$, doit pouvoir être supprimé; ce cercle est introduit uniquement par un défaut de la méthode employée.

8. En partant de la proposition XII on peut opérer comme on l'a fait à partir de I. Mais ici, d'une part la couronne est infiniment mince par rapport à sa longueur (prise le long d'un cercle $|z| = \text{const.}$), et d'autre part, la couronne extérieure à $C(n,f)$ et appartenant à $|z| < 1$ a une épaisseur de l'ordre de celle de $C(n,f)$. Les dimensions des quadrilatères Q doivent être prises égales à $\varepsilon(n)(1-r_n)$, le nombre de ces quadrilatères est $\frac{\lambda}{\varepsilon(n)^2(1-r_n)}$. On arrive alors à la proposition suivante:

XIII. *Si $f(z)$ est méromorphe pour $|z| < 1$ et d'ordre moyen positif ϱ, il existe une suite infinie de cercles $\Gamma(n,f)$,*

$$|z - z(n)| < \varepsilon(n)(1 - |z(n)|)$$

tels que, dans $\Gamma(n,f)$, $f(z)$ prenne au moins

$$N(n) = \frac{\varepsilon(n)^2 \mu\, T(r_n,f)}{\log T(r_n,f)} \qquad K < \frac{1-r_n}{1-|z(n)|} < K'$$

fois toute valeur sauf au plus des valeurs représentées sur la sphère à l'intérieur de deux cercles de rayon $[T(r_n,f)]^{-1}$. On a

$$\lim \frac{\log T(r_n,f)}{\log \frac{1}{1-r_n}} = \varrho,$$

λ, μ, K et K' sont des nombres fixes dépendant de $f(z)$, et $\varepsilon(n)$ peut être pris arbitrairement inférieur à un certain nombre fixe mais de telle façon que $N(n)$ soit supérieur à un nombre $q = q(f)$.

En donnant une valeur constante à $\varepsilon(n)$, on met en évidence dans les cercles $\Gamma(n,f)$ un nombre de zéros de $f(z) - a$ qui est de l'ordre du produit de $1 - r_n$ par le nombre total des zéros appartenant à la couronne correspondante $C(n,f)$, tout au moins dans le cas de l'ordre fini. C'est bien le résultat qu'on devait prévoir, le cas général étant sans doute celui de la répartition homogène des zéros dans la couronne; c'est l'ordre total qui intervient lorsqu'on considère une couronne, l'ordre moyen lorsqu'on considère un petit cercle, ce qui justifie la dénomination de ces nombres.

Pour obtenir les cercles de remplissage de rayon minimum fournis par cette méthode, il suffit d'écrire que $N(n)$ est constant et égal à $q(f)$: le résultat obtenu est tout analogue à celui donné plus haut dans le cas des fonctions méromorphes autour du point à l'infini.

L'énoncé IV donné dans l'introduction résulte de suite de l'existence d'une suite infinie de cercles de remplissage dont les centres tendent vers la circonférence $|z| = 1$. Les centres de ces cercles ont au moins un point limite z_0 sur cette circonférence. Le théorème de M. Picard s'applique à $f(z)$ dans le domaine $|z| < 1$ et $|z - z_0| < \varepsilon$ si petit que soit ε. Mais en outre, en supposant $\varepsilon(n)$ fixe et en raisonnant comme plus haut, on voit que, si z_0 ($|z_0| = 1$) est un point limite des centres des cercles $\Gamma(n, f)$ correspondants, et si $r(n, a, \varepsilon)$ est le module d'un zéro de $f(z) - a$ appartenant au domaine $|z| < 1$, $|z - z_0| < \varepsilon$, la série

$$\sum [1 - r(n, a, \varepsilon)]^{\varrho_1} \tag{23}$$

diverge pour ϱ_1 inférieur à l'ordre moyen ϱ, sauf pour deux valeurs a au plus:

XIV. *$f(z)$ étant méromorphe et d'ordre moyen ϱ positif pour $|z| < 1$, il existe au moins un point z_0 de la circonférence $|z| = 1$ tel que l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - a$ appartenant au cercle $|z - z_0| < \varepsilon$ (et à $|z| < 1$) soit égal à ϱ, si petit que soit ε, sauf au plus pour deux valeurs a.*

Nous exprimerons ce fait en disant qu'il y a au moins *un point d'exposant ϱ sur la circonférence* $|z| = 1$. Nous verrons plus loin que, dans certains cas, il y a un point z_0 d'exposant $\varrho + 1$. Il semble bien que la proposition précédente ne puisse pas être améliorée en ce qui concerne la valeur maximum de l'exposant de convergence en un point; mais il est aussi probable que, lorsqu'il n'existe pas sur la circonférence de point d'exposant supérieur à l'ordre moyen, les points d'ordre ϱ sont denses sur un arc de cette circonférence.

De même que les directions de Julia, dans le cas des fonctions méromorphes autour d'un point sont liées à l'existence de points où certaines familles ne sont pas normales; leur existence dans le cas actuel, c'est-à-dire l'existence des cercles de remplissage $\Gamma(n, f)$, est liée à un fait analogue. Considérons la substitution

$$Z = S(z, z_0) = \frac{z - z_0}{1 - z z_0'},$$

z_0' étant le nombre imaginaire conjugué de z_0 et $|z_0| < 1$, qui transforme le cercle $|z| < 1$ en lui-même, le point z_0 venant à l'origine. A un cercle de rayon $\varepsilon(1 - |z_0|)$ de centre z_0 correspond, lorsque ε et $1 - |z_0|$ tendent vers 0, un cercle dont le rayon est équivalent à $\frac{1}{2}\varepsilon$ et dont le centre est à une distance de l'origine équivalente à $\frac{1}{2}\varepsilon^2$. On voit alors, en appliquant un théorème de M. Ostowski sur les points de Julia (points en lesquels une famille n'est pas normale) que la condition nécessaire et suffisante pour que la famille de fonctions

$$f(S(z, z_0))$$

ne soit pas normale au point $z = 0$, est qu'il existe une suite de cercles de remplissage dont le centre tend vers la circonférence $|z| = 1$ et dont le rayon est infiniment petit par rapport à la distance du centre à la circonférence. *On peut assurer que cette famille n'est pas normale à l'origine dès que $f(z)$ est d'ordre moyen supérieur à zéro.* Il conviendrait de rechercher s'il existe des fonctions méromorphes vérifiant le théorème de Picard dans le cercle unité et pour lesquelles la famille en question serait cependant normale à l'origine.

IV. Les fonctions méromorphes dans un angle.

9. Nous considérerons ici une fonction méromorphe dans un angle et d'ordre assez grand dans cet angle. Il sera entendu une fois pour toutes que les angles dont il sera question ont leur sommet à l'origine. Soit $f(z)$ méromorphe dans l'angle A

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha} \qquad (z = r e^{i\varphi})$$

et pour les valeurs de r inférieures à un certain nombre R. Nous dirons que $f(z)$ *est d'ordre β dans un angle B complètement intérieur à A*

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha + \eta} \qquad (\eta > 0)$$

lorsqu'il existe un nombre a au moins pour lequel l'exposant de convergence des points $f(z)=a$ intérieurs à B est égal à β et qu'il n'existe pas de nombre a pour lequel l'exposant serait supérieur à β. Donc, $r(n,a)$ étant le module d'un zéro de $f(z)-a$ intérieur à B (et au cercle $|z|<R'<R$) la série

$$\sum r(n,a)^{\gamma}$$

converge pour $\gamma>\beta$ quel que soit a et diverge pour un a au moins quel que soit $\gamma<\beta$.

Nous considérerons une fonction $f(z)$ qui soit d'ordre β supérieur à α dans un angle B intérieur à A. Dans le cas des fonctions holomorphes cette propriété peut être déduite d'une propriété de croissance du maximum du module grâce à un théorème de M. R. Nevanlinna.[1]

Il est loisible de se ramener au cas suivant: l'ouverture de A est supérieure à π, celle de B est inférieure à π, l'ordre dans B est supérieur à 1 et R est supérieur à 2. La fonction

$$F(Z)=f(1+Z)$$

est alors méromorphe dans le cercle $|Z|<1$ et le nombre des points intérieurs au cercle $|Z|=r<1$ où elle prend la valeur a est au moins égal, pour une suite infinie de valeurs de r, à

$$\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta-\eta(r)}, \qquad \beta>1, \lim \eta(r)=0.$$

En passant à la fonction $N(r,F-a)$ on voit que l'ordre moyen de $F(Z)$ est un nombre β' au moins égal à $\beta-1$. Le théorème XII s'applique. Il en est de même du théorème XIII ce qui met en évidence l'existence de cercles de remplissage dans un angle intérieur à A mais contenant B, $f(z)$ prenant dans ces cercles plus de N fois les valeurs non exceptionnelles, N croissant indéfiniment. Les centres de ces cercles convergent donc vers $z=0$, ce qui montre que les théorèmes de M. Julia s'appliquent à $f(z)$.[2] Mais le théorème XIII peut ici se compléter. Pour passer de XII à XIII on a décomposé une couronne $C(n,F)$ en quadrilatères Q tous égaux, de dimensions $\varepsilon(1-r_n)$. Ici, la fonction $F(Z)$ est méromorphe pour $|Z+1|<2$ lorsque $Z+1$ appartient à l'angle A; on peut

[1] *Untersuchungen über den Picardschen Satz (Acta soc. sc. fennicae,* t. 50, n°6, 1924).

[2] J'ai donné ce résultat dans le mémoire II lorsque la fonction $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan à distance fini, comme conséquence du théorème VI du mémoire I.

alors décomposer $C(n, F)$ en régions plus petites en tenant compte des distances de ces régions non plus à la circonférence $|Z| = 1$, mais au point $Z = -1$, point singulier non polaire unique. Nous introduirons des quadrilatères de dimensions $\varepsilon(n)\, l(m)$, $l(m)$ étant la plus courte distance de la portion de $C(n, F)$ où l'on place Q au point $Z = -1$. Le nombre des quadrilatères couvrant $C(n, F)$ sera seulement $p = \frac{h}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{1 - r_n}$, h fini et le nombre des zéros de $f(z) - x$ mis en évidence par la méthode dans l'un d'eux sera

$$\frac{\varepsilon^2 \mu\, T(r_n, F)}{(1 - r_n) \log T(r_n, F) \log \frac{1}{1 - r_n}}.$$

La valeur du rayon des cercles exclus sur la sphère est modifiée d'une façon analogue. On voit ainsi que *lorsque $F(Z)$ est méromorphe d'ordre moyen ϱ pour $|Z| < 1$ et lorsque $F(Z)$ a un seul point singulier non polaire sur la circonférence $|Z| = 1$, $F(Z)$ étant encore méromorphe dans un angle de sommet $Z = 1$ contenant la circonférence $|Z| = 1$, $Z = 1$ est un point d'exposant $\varrho + 1$.* C'est ce qui va résulter de ce qui suit où je considérerai $f(z)$ de façon à arriver directement à l'énoncé V. Passons donc à $f(z)$. On a des cercles de remplissage $\Gamma(n, f)$ situés dans un angle intérieure à A; si $d(n)$ est la distance du centre de $\Gamma(n, f)$ à l'origine, le rayon est $\varepsilon(n)\, d(n)$ et le nombre des zéros pour les valeurs non exceptionnelles est au moins égal à $d(n)^{-\beta+\eta(n)}$ mais aussi à $(1 - r_n)^{-\beta+\eta(n)}$, r_n tendant vers 1. $d(n)$ tend donc vers 0 et on obtient l'énoncé V ainsi que celui donné ci-dessus. Le théorème V est valable pour l'ordre infini à condition d'y remplacer $\beta - \eta(n)$ par $\beta(n)$, cette quantité croissant indéfiniment. On peut préciser cet énoncé dans ce cas en introduisant la fonction $N(r, f - a)$.

En raisonnant comme plus haut, on déduit de V qu'il *existe au moins une direction D de Borel, $\varphi = const.$, contenue dans A* (telle que, dans tout angle $D(\varepsilon)$ d'ouverture ε admettant D pour bissectrice, l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - x$ appartenant à $D(\varepsilon)$ soit égal à l'ordre β, sauf au plus pour deux valeurs x). Ce résultat reste valable si l'on considère les zéros de $f(z) + R(z)$, $R(z)$ étant une fraction rationnelle. Le théorème XI se généralise également.

10. Ceci s'applique au cas d'une fonction méromorphe autour du point à l'infini et d'ordre ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$. Tout d'abord s'il existe un angle d'ouverture supérieurs à $\frac{\pi}{\alpha}$ où $f(z)$ est d'ordre α on appliquera ce qui précède. D'autre part,

on sait qu'il existe toujours un angle au moins d'ouverture aussi petite que l'on veut dans lequel $f(z)$ est d'ordre ϱ; *tout angle d'ouverture supérieure à* $\frac{\pi}{\varrho}$ *contenant cet angle contiendra une direction de Borel au moins.* On peut d'ailleurs ici obtenir ces propositions comme conséquence du théorème VI du mémoire I: on peut appliquer aux secteurs figurant dans ce théorème la méthode qui a conduit au théorème VII du présent mémoire.

Dans le cas d'une fonction holomorphe autour du point à l'infini et d'ordre fini ϱ supérieur à $\frac{1}{2}$, il existe, d'après un théorème de M. Lindelöf, un angle $\triangle$ d'ouverture $\frac{\pi}{\varrho}$ tel que, dans tout angle empiétant sur celui-ci, l'ordre du maximum du module de $f(z)$ soit égal à ϱ. Dans tout angle B empiétant sur $\triangle$ et d'ouverture supérieure à $\frac{\pi}{\varrho}$, l'ordre de $f(z)$ (au sens donné ci-dessus au début du n° 9) est égal à ϱ d'après le théorème déjà cité de M. R. Nevanlinna. Un angle contenant celui-ci contient donc une direction de Borel:

XV. *Pour une fonction $f(z)$ holomorphe autour du point à l'infini et d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$, il existe au moins deux directions de Borel.*

Lorsque l'ordre est supérieur à 1, on peut montrer, en raisonnant exactement comme M. Milloux l'a fait pour les directions de Julia, que:

XVI. *Si $f(z)$ est holomorphe autour du point à l'infini, d'ordre ϱ supérieur à 1, et s'il n'y a que deux directions de Borel, ces deux directions font un angle égal à $\frac{\pi}{\varrho}$, et $f(z)$ est à croissance régulière au sens de M. Borel.*

Les propriétés de ces fonctions d'ordre supérieur à 1 n'admettant que deux directions de Borel sont moins simples que celles des fonctions n'admettant que deux directions de Julia étudiées par M. Milloux[1]; il y aurait notamment lieu de chercher s'il peut exister dans l'angle d'ouverture $\frac{\pi}{\varrho}$ compris entre les deux directions une suite de zéros d'ordre ϱ pour $f(z) - a$, a étant donné.

Comme je l'ai signalé dans la note citée dans l'introduction, une fonction méromorphe d'ordre quelconque peut n'avoir qu'une seule direction de Borel.

---

[1] *Comptes Rendus* (décembre 1927 et janvier 1928).